ОБЪ ИНТЕГРИРУЮЩЕМЪ

МНОЖИТЕЛѢ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. С. Флорова.

Въ составъ перваго тома «Математическаго Сборника» входятъ два мемуара, изъ которыхъ одинъ цѣликомъ, а другой отчасти посвящаются обнаруженію взаимной связи между даннымъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ и тѣмъ, посредствомъ котораго опредѣляется его интегрирующій множитель. Одинъ изъ этихъ мемуаровъ принадлежитъ Юрьеву, другой написанъ Урусовымъ. Въ предлагаемой замѣткѣ читатель найдетъ упрощеніе анализа поименованныхъ авторовъ и приложеніе этого анализа къ вычисленію интеграла линейнаго уравненія съ правою частью по интегралу того-же уравненія безъ правой части.

Пусть уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n}+\alpha_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+\alpha_{n-1}\frac{du}{dx}+\alpha_n u=\beta \qquad (1)$$

будетъ даннымъ. Если обѣ его части умножимъ на vdx и проинтегрируемъ* результатъ, то, положивъ

$$\frac{d^n v}{dx^n}-\frac{d^{n-1}\alpha_1 v}{dx^{n-1}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d\alpha_{n-1}v}{dx}+(-1)^n\alpha_n v=0, \quad (2)$$

* Эту мысль заимствуемъ изъ сочиненія академика *Имшенецкаго* — «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера...».

получимъ

$$p_0 u^{n-1} + p_1 u^{n-2} + \ldots + p_{n-1} u = \int \beta v dx + \text{const},$$

гдѣ p_i означаетъ линейную функцію количествъ

$$v,\ v',\ v'',\ldots\ldots v^i.$$

Такъ какъ порядокъ предыдущаго уравненія относительно u есть $n-1$, то функція v, опредѣляемая условіемъ (2), есть интегрирующій множитель уравненія (1). Пусть n значеній этого множителя будутъ

$$v_1,\ v_2,\ldots\ldots v_n.$$

Обозначивъ черезъ $p_i^{(r)}$ ту функцію, въ которую обращается p_i посредствомъ замѣны v на v_r, найдемъ

$$p_0^{(r)} u^{n-1} + p_1^{(r)} u^{n-2} + \ldots + p_{n-1}^{(r)} u = \int \beta v_r dx + C_r.$$

Здѣсь C_r означаетъ постоянную произвольную, которую для краткости письма можно разумѣть въ интегралѣ $\int \beta v_r dx$. Сообщивъ въ предыдущемъ равенствѣ числу r всѣ значенія отъ единицы до n, получимъ n уравненій вполнѣ достаточныхъ для исключенія $n-1$ функцій

$$u',\ u''\ldots\ldots u^{n-1}.$$

Произведя это исключеніе на самомъ дѣлѣ и принявъ во вниманіе отмѣченную выше связь между p и v, найдемъ

$$\begin{vmatrix} v_1, & v'_1, & \ldots\ldots u v_1^{n-1} - \int \beta v_1 dx \\ v_2, & v'_2, & \ldots\ldots u v_2^{n-1} - \int \beta v_2 dx \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n, & v'_n, & \ldots\ldots u v_n^{n-1} - \int \beta v_n dx \end{vmatrix} = 0.$$

Такъ выражается полный интегралъ уравненія (1) посредствомъ n значеній его интегрирующаго множителя.

Если положимъ $\beta = 0$ и если частные интегралы уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{du}{dx} + \alpha_n u = 0 \qquad (3)$$

назовемъ черезъ

$$u_1, \; u_2, \ldots \ldots u_n,$$

то полный его интегралъ можно будетъ выразить двояко: съ одной стороны, посредствомъ нумерованныхъ u, а съ другой посредствомъ нумерованныхъ v. Сравнивъ эти двѣ формы полнаго интеграла уравненія (3) и положивъ

$$\omega = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & \ldots v_n \\ v'_1. & v'_2, & \ldots v'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{\;n-1}, & v_2^{\;n-1}, & \ldots v_n^{\;n-1} \end{vmatrix},$$

получимъ

$$(C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n)\,\omega =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & \ldots C_n \\ v_1, & v_2, & \ldots v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{\;n-2}, & v_2^{\;n-2}, & \ldots v_n^{\;n-2} \end{vmatrix}.$$

Это равенство, путемъ сравненія коэффиціентовъ при постоянныхъ произвольныхъ помѣченныхъ одинаковыми нумерами, даетъ возможность вычислить частные интегралы уравненія (3) въ частныхъ интегралахъ уравненія (2). Имъ же можно воспользоваться и для вычисленія нумерованныхъ v посредствомъ нумерованныхъ u. Въ самомъ дѣлѣ, написавъ v^i вмѣсто C, найдемъ:

$$u_1 v_1^{\;i} + u_2 v_2^{\;i} + \ldots + u_n v_n^{\;i} = 0,$$
$$u_1 v_1^{\;n-1} + u_2 v_2^{\;n-1} + \ldots + u_n v_n^{\;n-1} = 1,$$

гдѣ i любое число ряда 0, 1, 2... $n-2$. Изъ этихъ равенствъ путемъ послѣдовательнаго дифференцированія легко получить:

$$u_1^{\,r} v_1^{\,i} + u_2^{\,r} v_2^{\,i} + \ldots + u_n^{\,r} v_n^{\,i} = 0,$$

$$u_1^{\,k} v_1^{\,n-k-1} + u_2^{\,k} v_2^{\,n-k-1} + \ldots + u_3^{\,k} v_3^{\,n-k-1} = (-1)^k.$$

Здѣсь r и i суть цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія неравенству $r+i<n-1$, а k любое число ряда 0, 1, 2... ...$n-1$. Изъ предыдущаго вытекаетъ существованіе слѣдующей системы n уравненій:

$$v_1 u_1^{\,i} + v_2 u_2^{\,i} + \ldots + v_n u_n^{\,i} = 0,$$

$$v_1 u_1^{\,n-1} + v_2 u_2^{\,n-1} + \ldots v_n u_n^{\,n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Разрѣшивъ эти уравненія относительно функцій

$$v_1,\ v_2,\ \ldots v_n$$

и положивъ

$$\vartheta = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & \ldots u_n \\ u'_1, & u'_2, & \ldots u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{\,n-1}, & u_2^{\,n-1}, & \ldots u_n^{\,n-1} \end{vmatrix},$$

получимъ

$$(C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots + C_n v_n)\vartheta =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & \ldots C_n \\ u_1, & u_2, & \ldots u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{\,n-2}, & u_2^{\,n-2}, & \ldots u_n^{\,n-2} \end{vmatrix},$$

гдѣ количества

$$C_1, C_2, \dots C_n$$

совершенно произвольны.

Такимъ образомъ, взаимная связь между уравненіями (2) и (3) опредѣлена и главная цѣль, ради которой эта замѣтка составлена, достигнута.

Остается сказать, что если въ соотношеніе

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n + \\ + u_1 \int \beta v_1 dx + u_2 \int \beta v_2 dx + \dots + u_n \int \beta v_n dx ,$$

выше найденное, поставимъ на мѣсто нумерованныхъ v ихъ выраженія въ нумерованныхъ u, то получимъ формулу, выражающую полный интегралъ уравненія (1) въ частныхъ интегралахъ уравненія (3); это — та самая формула, которая обыкновенно выводится путемъ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ.

Примѣчаніе 1. Порядокъ уравненія (1) можно понизить на столько единицъ, сколько извѣстно значеній его интегрирующаго множителя.

Примѣчаніе 2. Уравненія (2) и (3) взаимны между собою въ томъ отношеніи, что интегралъ одного изъ нихъ есть интегрирующій множитель другого.

Примѣчаніе 3. Если детерминанты, обозначенные черезъ ω и ϑ, перемножимъ между собою, то найдемъ

$$\omega \vartheta = (-1)^{n-1} ,$$

что̀ согласно съ теоремой Ліувилля:

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \alpha_1 \vartheta = 0.$$
