

О М I N I M У М - Ъ

ОТКЛОНЕНІЯ СВѢТОВАГО ЛУЧА ПРИЗМОЮ.

А. П. Грузинцева.

Существуетъ много элементарныхъ способовъ вывода условій *minimum* - а отклоненій свѣтоваго луча призмой. Всѣ эти способы могутъ быть раздѣлены на два рода: 1) приемы геометрическіе и 2) приемы аналитическіе.

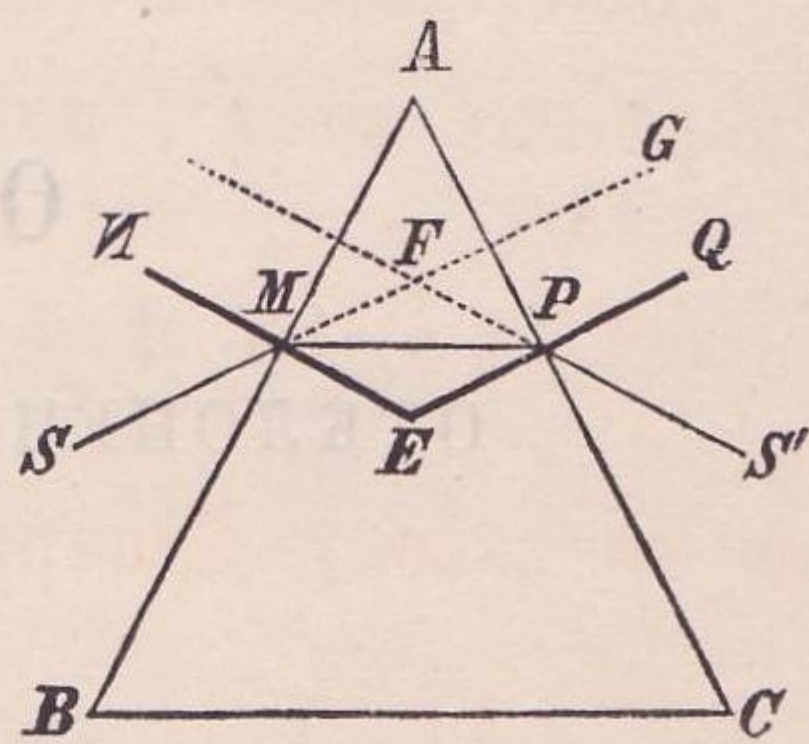
Предложенные до сихъ поръ геометрическіе приемы вывода условій для наименьшаго отклоненія луча, при всей своей точности, для изучающихъ начальную физику трудны, такъ-какъ требуютъ предварительнаго изученія хода преломленныхъ лучей въ прозрачныхъ срединахъ при помощи нѣкоторыхъ геометрическихъ построеній, которыя обыкновенно не излагаются въ начальныхъ курсахъ. Остаются такимъ образомъ аналитическіе способы; изъ нихъ самыми лучшими считаются способы Барри и Эйзенлора въ той или другой редакціи, но, какъ будетъ ниже показано, эти приемы заключаютъ въ себѣ одинъ пунктъ, который для элементарнаго изложенія крайне неудобенъ по своей трудности. Заинтересованный этимъ вопросомъ, я пересмотрѣлъ, на сколько былъ въ состояніи, всѣ извѣстные способы рѣшенія нашего вопроса и пришелъ къ заключенію, что изъ всѣхъ аналитическихъ элементарныхъ способовъ самый лучшій это — Шелльбаха, данный имъ въ 1881 году¹.

¹ *Анналы Видемана*, т. XIV, стр. 367.

Единственный недостатокъ его — нѣкоторая длиннота, но зато онъ вполне убѣдителенъ для ученика.

Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ приемъ, изложенный со всѣми подробностями.

Пусть ABC будетъ главное сѣченіе призмы; $SMPS'$ ходъ луча; NE и QE перпендикуляры къ передней и задней гранямъ призмы. Обозначимъ буквами i и i' углы вхожденія и выхожденія луча; r и r' внутренніе углы (преломленія на 1-й грани и паденія на 2-й); преломляющій уголъ призмы A и отклоненіе луча или уголъ GFP буквой δ , тогда, какъ извѣстно, имѣемъ:



имѣемъ:

$$r + r' = A$$

$$\delta = (i + i') - A.$$

Такъ - какъ A количество постоянное, то, слѣдовательно, δ будетъ минимумъ, когда $(i + i')$ — минимумъ. Такимъ образомъ задача объ отысканіи минимумъ - а величины δ сводится къ вопросу объ отысканіи такихъ значеній угловъ i и i' , при которыхъ ихъ сумма $(i + i')$ пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Эту послѣднюю задачу можно рѣшить слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ треугольникъ MPE ; онъ даетъ по извѣстной теоремѣ тригонометріи

$$MP^2 = ME^2 + PE^2 + 2ME \cdot PE \cdot \cos A \quad (1)$$

такъ-какъ

$$\angle MEP = 180^\circ - A.$$

Далѣе, на основаніи теоремы синусовъ имѣемъ:

$$\frac{MP}{\sin A} = \frac{ME}{\sin r'} = \frac{PE}{\sin r};$$

обозначивъ на-время это общее отношеніе буквой k , получимъ:

$$MP = k \operatorname{sn} A, \quad ME = k \operatorname{sn} r', \quad PE = k \operatorname{sn} r.$$

Подставивъ значенія MP , ME , PE въ равенство (1) и сокративъ на k^2 , получимъ:

$$\operatorname{sn}^2 A = \operatorname{sn}^2 r + \operatorname{sn}^2 r' + 2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} r' \operatorname{cs} A;$$

но по закону Декарта имѣемъ:

$$\operatorname{sn} r = \frac{\operatorname{sn} i}{n}, \quad \operatorname{sn} r' = \frac{\operatorname{sn} i'}{n},$$

поэтому предъидущее равенство даетъ:

$$n^2 \operatorname{sn}^2 A = \operatorname{sn}^2 i + \operatorname{sn}^2 i' + 2 \operatorname{sn} i \operatorname{sn} i' \operatorname{cs} A. \quad (2)$$

Изъ тригонометрии мы знаемъ, что

$$\operatorname{sn}^2 i = \frac{1 - \operatorname{cs} 2i}{2}, \quad \operatorname{sn}^2 i' = \frac{1 - \operatorname{cs} 2i'}{2}$$

$$2 \operatorname{sn} i \operatorname{sn} i' = \operatorname{cs} (i - i') \operatorname{cs} (i + i').$$

Подставляя все это въ равенство (2), имѣемъ, по замѣнѣ суммы

$$\operatorname{cs} 2i + \operatorname{cs} 2i'$$

ея значеніемъ

$$2 \operatorname{cs} (i + i') \operatorname{cs} (i - i'),$$

слѣдующее:

$$n^2 \operatorname{sn}^2 A = 1 - \operatorname{cs} (i + i') \operatorname{cs} (i - i') + [\operatorname{cs} (i - i') - \operatorname{cs} (i + i')] \operatorname{cs} A.$$

Опредѣлимъ отсюда $\operatorname{cs} (i + i')$; найдемъ:

$$\operatorname{cs} (i + i') = \frac{1 - n^2 \operatorname{sn}^2 A + \operatorname{cs} (i - i') \operatorname{cs} A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs} (i - i')}.$$

Но

$$1 = \operatorname{sn}^2 A + \operatorname{cs}^2 A;$$

подставляя вмѣсто единицы это ея значеніе, получимъ по сокращеніи:

$$\operatorname{cs}(i+i') = \operatorname{cs} A - \frac{(n^2 - 1) \operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs}(i-i')}. \quad (3)$$

Это соотношеніе и рѣшаетъ вопросъ. Въ правой его части только $\operatorname{cs}(i-i')$ переменная величина, всѣ остальные постоянныя, поэтому очень легко изслѣдовать эту формулу.

При измѣненіи угловъ i и i' величина $\operatorname{cs}(i-i')$ тоже мѣняется; она достигаетъ, какъ извѣстно изъ тригонометріи, своего наибольшаго значенія, именно единицы, когда $i-i'=0$, но тогда дробь

$$\frac{(n^2 - 1) \operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs}(i-i')}$$

приобрѣтетъ свое наименьшее значеніе, а вся разность

$$\operatorname{cs} A - \frac{(n^2 - 1) \operatorname{sn}^2 A}{\operatorname{cs} A + \operatorname{cs}(i-i')}$$

приобрѣтетъ наибольшее значеніе, ибо вычитаемое — положительное количество; но эта разность равна $\operatorname{cs}(i+i')$, слѣдовательно при $i-i'=0$ величина $\operatorname{cs}(i+i')$ приобретаетъ свое наибольшее значеніе, а значитъ, уголъ $(i+i')$ — наименьшее.

Итакъ, при $i-i'=0$ или, что то-же, при

$$i = i'$$

сумма $(i+i')$ дѣлается наименьшею и слѣдовательно

$$\delta = (i+i') - A$$

тоже становится наименьшею, ч. и т. д.

Формула (3) даетъ возможность знать это наименьшее значеніе; оно будетъ опредѣляться изъ формулы:

$$\operatorname{cs}(\delta + A) = \operatorname{cs} A - \frac{(n^2 - 1) \operatorname{sn}^2 A}{1 + \operatorname{cs} A}.$$

Вотъ доказательство Шелльбаха.

Въ заключеніе замѣтимъ, что способы Барри и Эйзенлора приводятъ къ формуламъ:

$$\operatorname{cs} \frac{1}{2}(\delta + A) = n \operatorname{cs} \frac{A}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{1}{2}(r - r')}{\operatorname{sn} \frac{1}{2}(i - i')}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta + A) = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(i - i')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(r - r')}.$$

При условіи $i = i'$ также будетъ $r = r'$, слѣдовательно правыя части обѣихъ этихъ формулъ обращаются въ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, раскрытіе котораго потребуетъ добавочнаго изслѣдованія.