ОБЪ УРАВНЕНIИ

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega.$$

П. С. Флорова.

---

1. Для отысканія полнаго интеграла уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega$$

необходимо знать n частныхъ его значеній не связанныхъ между собою линейною зависимостью. Эти частныя значенія можно представить въ двухъ формахъ: въ формѣ безконечныхъ рядовъ и въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ. Мы осуществимъ сначала первую изъ этихъ двухъ формъ, а затѣмъ покажемъ, какимъ образомъ функціи, опредѣляемыя уравненіемъ:

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega,$$

могутъ быть выражены въ опредѣленныхъ интегралахъ.

2. Начнемъ свои разсужденія разсмотрѣніемъ безконечнаго ряда:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

въ которомъ r означаетъ какое нибудь цѣлое положительное число, и докажемъ сходимость этого ряда для всѣхъ вещественныхъ значеній ξ. Остановимъ свое вниманіе сначала на томъ случаѣ, когда $r = 0$. Рядъ

$$\frac{1}{\Gamma(1)^n} + \frac{e^{\xi}}{\Gamma(2)^n} + \frac{e^{2\xi}}{\Gamma(3)^n} + \frac{e^{3\xi}}{\Gamma(4)^n} + \ldots\ldots,$$

соотвѣтствующій допущенію $r = 0$, будетъ, очевидно, сходящимся для всякаго значенія ξ, потому что отношеніе послѣдующаго члена этого ряда къ предыдущему имѣетъ своимъ предѣломъ нуль. Легко опредѣлить то мѣсто разсматриваемаго ряда, начиная съ котораго члены его послѣдовательно убываютъ. Всегда можно найти такое цѣлое положительное число a, которое удовлетворитъ условіямъ:

$$n \lg a \leqq \xi < n \lg(1 + a).$$

И очевидно, что при измѣненіи p отъ нуля до a, члены ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}$$

непрерывно возрастаютъ, а при измѣненіи p отъ a до ∞ они послѣдовательно убываютъ.

Установивъ это, перейдемъ къ доказательству сходимости ряда:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right). \qquad (1)$$

Предположимъ, что рядъ этотъ будетъ сходящимся для $r = k$, и пусть функція

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

при измѣненіи независимаго перемѣннаго p отъ цѣлаго положительнаго числа a_k до ∞, будетъ непрерывно уменьшаться, оставаясь всегда положительною. Докажемъ, что, при измѣненіи p отъ a_{k+1}, числа, которое больше a_k, до безконечности, функція

$$(-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

будетъ непрерывно убывать, сохраняя постоянно знакъ плюсъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ, что рядъ (1) будетъ сходящимся для $r = k+1$.

Если функція

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

съ возрастаніемъ p отъ a_k, уменьшается, то ея первая производная по p, для $p > a_k$, будетъ отрицательна. Такъ какъ $a_{k+1} > a_k$, то на основаніи сказаннаго, для $p > a_{k+1}$, имѣетъ мѣсто неравенство

$$(-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) > 0.$$

Изъ предположенія о сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

слѣдуетъ, что, начиная съ нѣкотораго мѣста его, разность

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) - (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n}\right)$$

съ возрастаніемъ p убываетъ. Мы предположимъ, что это убываніе начинается съ того момента, когда p, возрастая, дѣлается равнымъ a_{k+1}. Это предположеніе, которымъ мы хотимъ опредѣлить число a_{k+1}, находится, очевидно, въ согласіи съ допущеніемъ $a_{k+1} > a_k$. Первая производная разности

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) - (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n}\right),$$

для всѣхъ значеній p большихъ a_{k+1}, должна быть отрицательна. Слѣдовательно, для $p > a_{k+1}$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$(-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) > (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n}\right).$$

На основаніи доказаннаго выше каждая часть этого неравенства больше нуля.

Отсюда приходимъ къ тому заключенію, что абсолютныя величины членовъ ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

убываютъ, начиная съ того мѣста ряда, для котораго $p = a_{k+1}$.

Такимъ образомъ, предыдущій рядъ удовлетворяетъ условіямъ теоремы Коши, которою, слѣдовательно, можно воспользоваться для испытанія его сходимости. Если относительно p проинтегрируемъ функцію

$$\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

въ предѣлахъ отъ a_{k+1} до ∞, то получимъ

$$\frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)_{p=a_{k+1}} - \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)_{p=\infty}.$$

Первое изъ этихъ слагаемыхъ имѣетъ конечную величину вслѣдствіе предположенія о сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

и по той же причинѣ второе слагаемое равняется нулю. Изъ этого видимъ, что условія сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

осуществлены; слѣдовательно, рядъ этотъ долженъ быть сходящимся одновременно съ рядомъ

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right).$$

Сообразивъ все сказанное до сихъ поръ, приходимъ къ тому, что всѣ наши допущенія, относящіяся къ случаю $r=k$, оказываются имѣющими мѣсто и для $r=k+1$. И такъ какъ для $r=0$ эти допущенія безусловно справедливы, то они имѣютъ мѣсто и при всякомъ r. Такимъ образомъ, мы удостовѣрили сходимость ряда (1) для всѣхъ значеній ξ, заключенныхъ между $-\infty$ и $+\infty$. Что касается случаевъ:

$$\xi=+\infty,\quad \xi=-\infty,$$

то въ первомъ изъ нихъ рядъ (1) будетъ расходящимся при всякомъ r, а ко второму изложенный анализъ не приложимъ, потому что функція

$$\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}-\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n},$$

при $\xi = -\infty$, обращается въ нуль и, слѣдовательно, съ измѣненіемъ p не мѣняется. Непосредственное разсмотрѣніе случая $\xi = -\infty$ приводитъ къ тому, что, при $r = 0$, рядъ (1) обращается въ единицу, а для всѣхъ другихъ значеній r онъ дѣлается расходящимся. Если положимъ $e^{\xi} = z$, то получимъ рядъ

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

расходящійся только для $z = 0$ и для $z = \infty$. При всѣхъ другихъ значеніяхъ z этотъ рядъ будетъ, очевидно, сходящимся.

3. Сумма ряда (1) представляетъ собою функцію ξ. Обозначимъ эту функцію черезъ $\omega_r(e^{\xi})$, то есть положимъ

$$\omega_r(e^{\xi}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

и покажемъ зависимость, существующую между ω_r и ω_{r+1}. Назовемъ для краткости e^{ξ} черезъ z и займемся выраженіемъ

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{cn}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\alpha^p d\alpha,$$

въ которомъ c означаетъ Эйлерову постоянную и величину котораго для даннаго p обозначимъ черезъ $\vartheta(p)$. Если предѣлами интегрированія сдѣлаемъ 0 и 1, то найдемъ:

$$\vartheta(p) = \frac{d}{dz}\int_0^1 (\alpha z)^p \lg(\alpha z)\, d(\alpha z) +$$

$$+ n\frac{d}{dz}\int_0^1 \Big(\lg(1-\alpha) - \lg\alpha + c\Big)(\alpha z)^p d(\alpha z).$$

Будемъ искать значенія находящихся здѣсь опредѣленныхъ интеграловъ. Если продифференцируемъ относительно q обѣ части равенства

$$\int_0^1 (1-\alpha)^q \alpha^p \, d\alpha = \frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(2+p+q)}$$

и если положимъ въ результатѣ $q=0$, то получимъ

$$\int_0^1 \alpha^p \lg(1-\alpha)\, d\alpha = \frac{-1}{p+1}\left(c + \frac{d}{dp}\lg\Gamma(2+p)\right).$$

Для отысканія интеграла

$$\int_0^1 \alpha^p \lg \alpha \, d\alpha$$

положимъ

$$\alpha = e^{-(1+p)\beta};$$

тогда въ силу равенства

$$\int_0^1 \beta e^{-\beta} d\beta = \Gamma(2)$$

найдемъ

$$\int_0^1 \alpha^p \lg \alpha \, d\alpha = \frac{-1}{(p+1)^2}.$$

На основаніи сказаннаго можемъ написать:

$$\vartheta(p) = -nz^p \frac{d}{dp}\lg\Gamma(1+p) + z^p \lg z.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на $\Gamma(1+p)^n$, найдемъ

$$\frac{\vartheta(p)}{\Gamma(1+p)^n}=\frac{d}{dp}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right).$$

Замѣнивъ здѣсь $\vartheta(p)$ его значеніемъ, получимъ тождество

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right)=\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{nc}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\frac{\alpha^p}{\Gamma(1+p)^n}\,d\alpha\,,$$

дифференцированіе котораго r разъ относительно p приводитъ къ тождеству болѣе общему

$$\frac{d^{r+1}}{dp^{r+1}}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right)=\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{nc}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{\alpha^p}{\Gamma(1+p)^n}\right)d\alpha\,.$$

Если покроемъ обѣ части этого равенства знакомъ суммы распространенной на всѣ цѣлыя положительныя значенія p отъ 0 до ∞, то, въ силу положенія

$$\omega_r(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

найдемъ

$$\omega_{r+1}(z)=\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{nc}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\omega_r(\alpha)\,d\alpha.$$

Эта формула даетъ возможность вычислить функцію $\omega_r(e^{\xi})$ посредствомъ функціи $\omega_0(e^{\xi})$; но мы не имѣемъ надобности въ этомъ вычисленіи.

4. Покажемъ, что функція $\omega_r(e^{\xi})$, при $r<n$, удовлетворяетъ условію

$$\frac{d^n\omega_r}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega_r\,.$$

Если продифференцируемъ n разъ относительно ξ обѣ части равенства

$$\omega_r = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

то получимъ

$$\frac{d^n\omega_r}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega_r + \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{p^n e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)_{p=0}.$$

Второе слагаемое правой части этого равенства, при r равномъ любому числу ряда

$$0,\ 1,\ 2 \ldots\ldots n-1,$$

обращается, очевидно, въ нуль, а при r большемъ $n-1$, она отлична отъ нуля. Слѣдовательно, при $r<n$, функція $\omega_r\,(e^{\xi})$ удовлетворяетъ условію

$$\frac{d^n\omega_r}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega_r,$$

какъ мы утверждали.

На основаніи сказаннаго можно доказать, что полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$$

выражается отношеніемъ

$$\omega = C_0\omega_0 + C_1\omega_1 + \ldots + C_{n-1}\omega_{n-1},$$

гдѣ нумерованныя C суть произвольныя постоянныя.

Разсмотримъ детерминантъ

$$\begin{vmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \ldots\ldots \omega_{n-1} \\ \omega'_0 & \omega'_1 & \omega'_2 & \ldots\ldots \omega'_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \ldots\ldots \omega_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

въ которомъ верхніе указатели опредѣляютъ число дифференцированій по ξ. Если между функціями

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2 \dots \omega_{n-1}$$

существуетъ линейная зависимость, то взятый нами детерминантъ, величину котораго назовемъ черезъ Δ, равняется нулю. Если же функціи

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2 \dots \omega_{n-1}$$

не связаны между собою линейною зависимостью, то, на основаніи теоремы Ліувилля, Δ равняется числу, не зависящему отъ ξ и отличному отъ нуля. Слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ Δ есть величина постоянная, и если мы докажемъ, что Δ не есть нуль, то вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ нашу теорему.

Будемъ приближать ξ къ $-\infty$.

Чтобы получить понятіе объ элементѣ

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\,\omega_r\,(e^{\xi})$$

при $\xi = -\infty$, обратимся къ равенству

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\,\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) = r!\sum_{i=0}^{r}\frac{[k]^i\,p^{k-i}}{i!\,(r-i)!}\,\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right).$$

Разсмотрѣніе этого равенства приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ. Если $k > r$, то

$$\frac{d^k\omega_r}{d\xi^k} = \xi^r e^{\xi}\alpha;$$

если $k = r$, то

$$\frac{d^k\omega_k}{d\xi^k} = k!\,\omega_0 + \xi^k e^{\xi}\beta;$$

если $k < r$, то

$$\frac{d^k\omega_r}{d\xi^k}=\frac{r!}{(r-k)!}\,\omega_{r-k}+\xi^r e^{\xi}\gamma.$$

Здѣсь α, β и γ суть функціи ξ, сохраняющія конечныя значенія при $\xi=-\infty$. Для этого же значенія ξ функція ω_0 равняется единицѣ, а ω_{r-k} безконечности порядка $r-k$. Замѣтивъ это, развернемъ Δ по элементамъ перваго столбца; получимъ

$$\Delta=\omega_0\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0}-\omega'_0\frac{\partial\Delta}{\partial\omega'_0}+\ldots.+(-1)^{n-1}\omega_0^{\,n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0^{\,n-1}}.$$

Каждое изъ выраженій

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\omega'_0},\ \frac{\partial\Delta}{\partial\omega''_0},\ldots.\ \frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0^{\,n-1}}$$

при $\xi=-\infty$ обращается въ безконечность. Изъ строя элемента $\omega_r^{\,k}$ при $r>k$ видно, что порядки безконечностей, къ которымъ стремятся опредѣлители

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\omega'_0},\ \frac{\partial\Delta}{\partial\omega''_0},\ldots.\ \frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0^{\,n-1}},$$

суть цѣлыя положительныя числа. Замѣтивъ это и принявъ во вниманіе строй элемента $\omega_r^{\,k}$ при $r<k$, заключаемъ, что предѣлы выраженій

$$\omega'_0\frac{\partial\Delta}{\partial\omega'_0},\ \omega''_0\frac{\partial\Delta}{\partial\omega''_0},\ldots.\ \omega_0^{\,n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0^{\,n-1}}$$

при $\xi=-\infty$ суть нули. Такимъ образомъ при $\xi=-\infty$ имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\lim\Delta=\lim\left(\omega_0\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0}\right).$$

Такъ какъ предѣлъ ω_0 есть единица, то можно написать

$$\lim\Delta=\lim\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_0}.$$

Совершенно такимъ же образомъ получаются равенства

$$\lim \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0} = 1!\lim \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1}$$

$$\lim \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1} = 2!\lim \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \partial \omega''_2}$$

. . . .

$$\lim \frac{\partial^{n-1} \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \ldots \partial \omega^{n-2}_{n-2}} = (n-1)!\lim \frac{\partial^{n} \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \ldots \partial \omega^{n-1}_{n-1}}.$$

Перемноживъ предыдущія равенства и замѣтивъ, что

$$\frac{\partial^{n} \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \ldots \partial \omega^{n-1}_{n-1}} = 1,$$

найдемъ

$$\lim \Delta = 1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!$$

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что, по мѣрѣ приближенія ξ къ $-\infty$, детерминантъ Δ стремится къ произведенію своихъ діагональныхъ элементовъ. Но и при всякомъ другомъ значеніи ξ этотъ детерминантъ имѣетъ ту же величину, какую онъ имѣетъ при $\xi = -\infty$. Слѣдовательно, каково бы ни было ξ, детерминантъ Δ опредѣлится равенствомъ

$$\Delta = 1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!$$

Правая часть этого равенства ни при какомъ n не равняется нулю. Отсюда заключаемъ, что отношеніе

$$\omega = C_0\omega_0 + C_1\omega_1 + ,\ldots + C_{n-1}\omega_{n-1}$$

выражаетъ полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega.$$

5. Предыдущіе результаты мы получили первоначально, принимая уравненіе

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^u}=e^{\xi}\omega$$

за предѣльное состояніе уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n}=x^{-n+\frac{n}{k}}u$$

при $k=0$. Мы предпочли дать этимъ результатамъ прямыя доказательства, найдя ихъ болѣе простыми. Но вопросъ, къ которому мы подошли теперь, требуетъ выясненія упомянутой выше точки зрѣнія. Итакъ, будемъ искать состояніе, къ которому стремится уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n}=x^{-n+\frac{n}{k}}u$$

при $k=0$. Съ этою цѣлью измѣнимъ перемѣнное x по формулѣ:

$$x=\left(\frac{n-nk}{k}\right)^k\left(1+\frac{k\xi}{n-nk}\right);$$

результатомъ преобразованія явится уравненіе

$$\frac{d^n u}{d\xi^n}=\left(1+\frac{k\xi}{n-nk}\right)^{\frac{n-nk}{k}}u.$$

Положивъ здѣсь $k=0$, получимъ

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega,$$

гдѣ ω означаетъ предѣлъ u при $k=0$.

Введемъ новое перемѣнное z и свяжемъ его съ x посредствомъ формулы:

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}},$$

тогда очевидно будемъ имѣть

$$kx^{\frac{1}{k}} = nz^{\frac{1}{n}} = (n-kn)\left(1+\frac{k\xi}{n-kn}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Положивъ здѣсь $k=0$, получимъ

$$\lim\left(kx^{\frac{1}{k}}\right) = nz^{\frac{1}{n}} = ne^{\frac{\xi}{n}}.$$

Такимъ образомъ, мы подтвердили нашу мысль и кромѣ того нашли, что для вычисленія ω нужно функцію u выразить въ перемѣнномъ z по формулѣ

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}},$$

въ результатѣ нужно положить $k=0$ и затѣмъ замѣнить z посредствомъ e^{ξ}.

Легко однако видѣть, что въ какомъ бы изъ частныхъ интеграловъ уравненія

$$\frac{dk^n}{dx^n} = x^{-n+\frac{u}{k}}n$$

мы ни полагали $k=0$, результатомъ такого положенія всякій разъ окажется функція ω_0, сопровождаемая тѣмъ или другимъ постояннымъ множителемъ. И въ самомъ дѣлѣ, при положительномъ k полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{u}{k}}u$$

выражается отношеніемъ

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n ,$$

въ которомъ положено

$$u_r = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{p + \frac{k(n-r)}{n}}}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1 + p + \frac{ki - kr}{n}\right)}$$

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}} .$$

Ясно, что при $k = 0$ всѣ функціи

$$u_1 ,\ u_2 \dots . u_n$$

дѣлаются порознь равными $\omega_0(e^{\xi})$, какъ мы и утверждали. Отсюда видно, что полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi} \omega$$

можно получить не иначе, какъ по способу Даламбера. Слѣдовательно, мы должны отыскать предѣлъ, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{u_r - u_\varrho}{k}$$

при $k = 0$. Такъ какъ каждое изъ чиселъ r и ϱ сопровождается множителемъ k, то предѣлъ отношенія

$$\frac{u_r - u_\rho}{k}$$

не зависитъ ни отъ r, ни отъ ρ. Поэтому вмѣсто предыдущаго отношенія можно взять такое

$$\frac{u_2 - u_1}{k}.$$

Если, развивая идею Даламбера, составимъ выраженіе

$$\frac{u_r - u_\rho}{k} - \frac{u_\rho - u_\sigma}{k},$$

которое уничтожается при $k=0$ и которое ни при какомъ, даже весьма маломъ, k не перестаетъ удовлетворять уравненію

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{u}{k}} u,$$

то поймемъ, что предѣлъ, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{u_r - 2u_\rho + u_\sigma}{k^2},$$

будетъ, подобно предѣлу отношенія

$$\frac{u_2 - u_1}{k},$$

интеграломъ уравненія

$$\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega.$$

Такъ какъ предыдущее выраженіе не зависитъ въ предѣлѣ ни отъ r, ни отъ ρ, ни отъ σ, то мы можемъ взять вмѣсто него такое

$$\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{k^2}.$$

Разсматривая это выраженіе, легко уже перейти къ общему заключенію, которое, очевидно, состоитъ въ слѣдующемъ. Предѣлы отношеній

$$u_1, \qquad \frac{1}{k}(u_2 - u_1), \qquad \frac{1}{k^2}(u_3 - 2u_2 + u_1),$$

$$\frac{1}{k^n}\left(u_n - nu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}u_{n-2} + \ldots + (-1)^n u_1\right)$$

суть такіе частные интегралы уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega,$$

изъ которыхъ можно составить полный его интегралъ. Общій видъ перечисленныхъ выше отношеній выражается формулой

$$\frac{1}{k^\rho}\left(u_\rho - \rho u_{\rho-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}u_{\rho-2} + \ldots + (-1)^\rho u_1\right),$$

которая при $k=0$ пріобрѣтаетъ слѣдующее значеніе

$$\frac{1}{\rho!}\frac{d^\rho}{dk^\rho}\left(u_\rho - \rho u_{\rho-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}u_{\rho-2} + \ldots + (-1)^\rho u_1\right)_{k=0}.$$

Считаемъ неизлишнимъ замѣтить, что въ этой формулѣ вмѣсто функцій

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_\rho$$

можно взять функціи

$$C_1u_1,\ C_2u_2, \ldots C_\rho u_\rho,$$

гдѣ независящія отъ z числа

$$C_1,\ C_2, \ldots\ldots C_\varrho$$

равны между собою при $k=0$.

6. Отъ формы функцій

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ldots u_n$$

зависитъ форма интеграловъ уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega.$$

Желая осуществить форму опредѣленныхъ интеграловъ, мы должны выразить въ этой же формѣ и функціи

$$u_1,\ u_2, \ldots\ldots u_n.$$

Чтобы сдѣлать это, обратимся къ выраженію

$$\frac{z^{p+\frac{k(n-r)}{n}}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+p+\frac{ki-kr}{n}\right)},$$

представляющему общій членъ того ряда, которымъ опредѣляется u_r. Отбрасывая множителей независящихъ ни отъ p, ни отъ x, мы можемъ привести предыдущее выраженіе къ слѣдующему виду

$$\frac{n^{np+1} z^{p+\frac{k(n-r)}{n}}}{\Gamma(1+np)} \prod_{i=1}^{n-r} \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p+\frac{ki}{n}\right)} \prod_{i=1}^{r-1} \frac{\Gamma\left(p+\frac{r-i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p-\frac{k(r-i)}{n}\right)}.$$

Отсюда, принимая во вниманіе формулы А. В. Лѣтникова

$$\frac{\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p-\frac{k(r-i)}{n}\right)} = z^{-p-\frac{ki}{n}} D_z^{-\frac{(k+1)i}{n}} z^{p-\frac{i}{n}},$$

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{r-i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p-\frac{k(r-i)}{n}\right)} =$$

$$= z^{-p+\frac{k(r-i)}{n}} D_z^{\frac{(k+1)(r-1)}{n}-1} z^{\frac{r-i}{n}+p-1},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $z=0$, и отбрасывая постоянныхъ множителей относительно p и x, получимъ

$$z^{\frac{k(n-r-1)}{n}} \prod_{i=1}^{n-r} \left(D_z^{-\frac{i(k+1)}{n}} z^{-\frac{(k+1)i+k}{n}} \right) z^k \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{r-1} \left(D_z^{\frac{(k+1)(r-i)}{n}-1} z^{\frac{(k+1)(r-i)-k}{n}-1} \right) \frac{n^{np+1} z^p}{\Gamma(1+np)}.$$

Сообщивъ здѣсь цѣлому положительному числу p всѣ значенія отъ 0 до ∞ и взявъ сумму полученныхъ результатовъ, найдемъ

$$z^{\frac{k(n-r-1)}{n}} \prod_{i=1}^{n-r} \left(D_z^{-\frac{i(k+1)}{n}} z^{-\frac{(k+1)\,i+k}{n}} \right) z^k \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{r-1} \left(D_z^{-\frac{(k+1)(r-i)}{n}-1} z^{\frac{(k+1)(r-i)-k}{n}-1} \right) \theta(z)$$

гдѣ, обозначая черезъ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n=1$, для краткости положено

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{np+1} z^p}{\Gamma(1+np)} = \theta(z) = \sum_{p=0}^{n-1} e^{n\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

До сихъ поръ мы разумѣли подъ k положительное число. Введемъ теперь новое условіе, именно положимъ

$$0 < k < \frac{1}{n-1}.$$

Тогда всѣ указатели дифференцированій въ предыдущей формулѣ будутъ отрицательны и формулу эту, опуская множитель, независящій отъ z, можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$z^{\frac{k(n-r-1)}{n}} \prod_{i=1}^{n-r} \left(\int_0^{\alpha_{i-1}} (\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{(k+1)i}{n}-1} \alpha_i^{-\frac{(k+1)i+k}{n}} d\alpha_i \right) \alpha^k_{n-r} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{r-1} \left(\int_0^{\beta_{i-1}} (\beta_{i-1}-\beta_i)^{\frac{(k+1)(i-r)}{n}} \beta_i^{\frac{(k+1)(r-i)-k}{n}-1} d\beta_i \right) \theta(\beta_{r-1})$$

гдѣ положено

$$\alpha_0 = z \qquad \beta_0 = \alpha_{n-r}.$$

Такъ выражается частный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{k}} u\,,$$

отличающійся отъ u_r такимъ постояннымъ множителемъ C_r, который при $k=0$ перестаетъ зависѣть отъ r. По смыслу формулы, выведенной въ предыдущемъ параграфѣ, мы должны теперь найти значеніе выраженія

$$\frac{d^\varrho C_r u_r}{dk^\varrho}$$

при $k=0$. Если всѣ логариѳмы, вводимыя дифференцированіями, будемъ ставить подъ знаки послѣднихъ интегрированій и если послѣ каждаго дифференцированія сумму логариѳмовъ будемъ замѣнять логариѳмомъ произведенія, то, положивъ $k=0$ по совершеніи ϱ дифференцированій, найдемъ:

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^{\alpha_{i-1}} (\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{i}{n}-1}\,\alpha_i^{-\frac{i}{n}}\,d\alpha_i\right)\theta(\alpha_{n-1})\times$$

$$\times \log^\varrho \alpha_{n-r}\alpha_{n-r+1}\ldots\alpha_{n-1}\, z^{\frac{n-r-1}{n}} \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{i}{n}-1}\,\alpha_i^{-\frac{i+1}{n}}.$$

Поставивъ это выраженіе на мѣсто

$$\lim\left(\frac{d^{\varrho} C_r u_r}{dk^{\varrho}}\right)_{k=0}$$

въ формулу

$$\sum_{r=1}^{\varrho} \frac{(-1)^{\varrho}}{(\varrho-r)!} \lim\left(\frac{d^{\varrho} C_r u_r}{dk^{\varrho}}\right)_{k=0},$$

мы окончательно разрѣшимъ нашу задачу.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя ϱ черезъ числа ряда

$$0,\ 1,\ 2, \ldots n-1,$$

мы получимъ изъ упомянутой формулы n частныхъ интеграловъ уравненія

$$\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega,$$

посредствомъ которыхъ можемъ отыскать потомъ и полный его интегралъ.

7. Если отнесемъ изложенный анализъ къ тому случаю, когда $n=2$, то увидимъ, что полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2 \omega}{d\xi^2} = e^{\xi}\omega$$

выражается отношеніемъ

$$\omega = C\int_0^z \left(z-\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right) d\alpha +$$

$$+ C'\int_0^z \left(z-\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right) \lg\left(z^{-\frac{1}{2}}(z-\alpha)\right) d\alpha,$$

гдѣ $z = e^{\xi}$, а C и C' суть постоянныя произвольныя. На этомъ примѣрѣ легко провѣрить истинность общихъ умозаключеній, высказанныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Такъ какъ интегралъ

$$\int_0^z \left(z-\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right) d\alpha\,,$$

очевидно, представляетъ сумму ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^2}\,,$$

то для повѣрки достаточно разсмотрѣть множитель при C'.

Если развернемъ

$$\operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right)$$

по степенямъ α и сдѣлаемъ предѣлами интегрированія 0 и 1, то представимъ упомянутый множитель въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{2p} z^p}{\Gamma(1+2p)}\int_0^1 (1-\beta)^{-\frac{1}{2}} \beta^{p-\frac{1}{2}}\left(\lg z^{\frac{1}{2}} + \lg(1-\beta)\right) d\beta.$$

Отсюда въ силу равенствъ

$$\int_0^1 (1-\beta)^{-\frac{1}{2}} \beta^{p-\frac{1}{2}} d\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\,,$$

$$\int_0^1 (1-\beta)^{-\frac{1}{2}} \beta^{p-\frac{1}{2}} \lg(1-\beta)\, d\beta =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\left(\lg 4 - c - \frac{d}{dp}\lg\Gamma(1+p)\right)$$

найдемъ, отбрасывая π, такую формулу

$$\left(\lg 4z^{\frac{1}{2}} - c\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^2} - \sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(1+p)}\,\frac{d}{dp}\lg\Gamma(1+p).$$

Эта формула представляетъ собою частный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} = e^{\xi}\omega,$$

что и нужно было доказать.

Урюпинская станица
1887 года Октября 6 дня.