

№-55535

Communications de la Société mathématique de Kharkow.  
Série 4. Tome I.

K-583a  
П55535 yr

**СООБЩЕНИЯ ХАРЬКОВСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА**

**ЧЕТВЕРТАЯ СЕРИЯ.  
Том I.**

(Печатается на средства, отпущенные Главнаукою УССР).

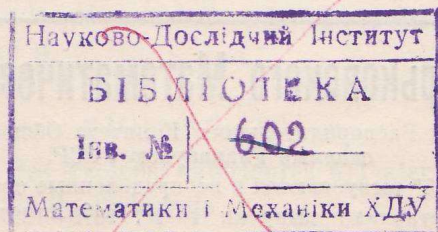
**ХАРКІВ.**  
Урядова Друкарня імені тов. Фрунзе.  
1927.

59

# СООБЩЕНИЯ ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЧЕТВЕРТАЯ СЕРИЯ  
Том I

(Печатается на средства, отпущенные Главнаукою УССР)



ХАРКІВ

Урядова Друкарня імені тов. Фрунзе  
1927

86

## СОДЕРЖАНИЕ.

	Стр.
*О многочленах многократно-монотонных, <i>С. Н. Бернштейна</i> .	1—11
О некоторых неравенствах, получаемых из интерполяционной формулы Лагранжа, <i>Б. Ф. Вржечка</i> . . . . .	12—16
*О некоторых случаях конечных групп, не имеющих закона однозначного обращения, <i>А. К. Сушкевича</i> . . . . .	17—24
Прибор для удобного вычисления степенных вычетов по данному нечетному первоначальному модулю, <i>М. Н. Марчевского</i> . . . . .	25—31
Самопроективные или $W$ -кривые (интегральные кривые уравнения Якоби), <i>И. М. Душина</i> . . . . .	32—63
Обобщение формулы Эннепер'a-Beltrami на системы интегральных кривых Пфаффа уравнения $Pdx + Rdy + Qdz = 0$ , <i>Д. М. Синцова</i> . . . . .	63—73
Свойства системы инт. кривых Пфаффа уравнения (распространение теоремы Гаусса), <i>Д. М. Синцова</i> . . . . .	74—79
Особенные случаи соприкасающегося шара (и плоскости) в точке пространственной кривой, <i>П. М. Дармостука</i> . . . . .	80—93
О целых функциях и прямых Жюлиа, <i>В. Л. Гончарова</i> . . . . .	94—107
О соотношениях между коэффициентами ортогонального преобразования и параметрами Родрига, <i>И. Е. Ошевцекого</i>	108—111

## Table des matières.

	Pages.
Sur quelques polynômes multiplement monotones, par <i>M. S. Bernstein</i>	1—11
*Sur quelques inégalités déduites de la formule d'interpolation de Lagrange, par <i>M. W. Brzecka</i> . . . . .	12—16
Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque, par <i>M. A. Suschkevitch</i> . . . . .	17—24
*Appareil pour le calcul facile des résidus des puissances suivant un module impair premier donné, par <i>M. M. Martschewsky</i> . . . . .	25—31
*Courbes autoprojectives, ou $W$ -courbes, par <i>M. N. Douchine</i> . . . . .	32—63
*Extension de la formule d'Enneper-Beltrami au système des courbes intégrales de l'équation de Pfaff non intégrable, par <i>M. D. Sintsof</i> . . . . .	64—73
*Extension du théorème de Gauss sur les mêmes systèmes, par <i>M. D. Sintsof</i> . . . . .	74—79
*Cas particuliers de la sphère osculatrice (resp. du plan osculateur) d'une courbe gauche, par <i>M. P. Darmostuk</i> . . . . .	80—93
*Sur les fonctions entières et les droites de Julia, par <i>M. W. Gontcharoff</i>	93—107
*Sur les relations entre les coefficients de la transformation orthogonale et les paramètres de Rodrigues par <i>M. I. Oghievetsky</i> . . . . .	108—111

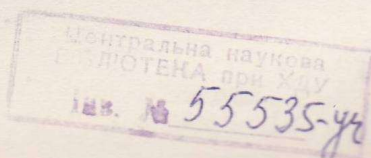
## Сообщения Харьковского Математического Общества

издаются под редакцией Распорядительного Комитета Общества, на средства, отпускаемые Главнаукой УССР.

Книжки „Сообщений“ выпускаются в неопределенные сроки по мере отпечатания.

Первую серию составляют выпуски 1—18. 1879—1887. Вторую серию составляют том I—XV по 6 вып. и XVI вып. 1—2. 1887—1918. Третьей серией являются Ученые записки научно-исследовательских кафедр, отдел математический; под ред. С. М. Бернштейна, I, 1924; II, 1926 и III (печатается).

Укрголовліт Ч 2053-к. Харків, Уряд. Друкарня ім. т. Фрунзе. Зам. Ч. 2076. Прим. 500.



K-583a

## Sur les polynomes multiples monotones.

Par Serge Bernstein.

Nous disons qu'un polynome  $P(x)$  est monotone d'ordre  $h + 1$  dans l'intervalle donné, lorsque toutes ses dérivées des  $h + 1$  ordres sont non négatives dans l'intervalle considéré.

Nous allons résoudre ici les deux problèmes suivants:

1-er problème. Déterminer l'oscillation minima dans l'intervalle  $(-1, +1)$  d'un polynome  $P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$  monotone d'ordre  $h + 1$  dans cet intervalle.

2-ème problème. Déterminer l'oscillation minima, dans l'intervalle  $(-1, +1)$  d'un polynome  $P_n(x)$  de degré non supérieur à  $n$ , monotone d'ordre  $(h + 1)$ , si sa dérivée première reçoit dans un point de cet intervalle la valeur 1.

Commençons par résoudre le premier problème. Je dis que la forme nécessaire du polynome  $P_n(x)$  que nous pouvons sans restreindre la généralité supposer non négatif dans l'intervalle  $(-1, +1)$  est

$$P_n(x) = \int_{-1}^x (x-z)^h \varphi(z) dz, \dots \dots \dots (1)$$

où  $\varphi(z) \geq 0$  dans cet intervalle:

En effet, si on avait  $P_n^{(k)}(-1) > 0$  pour une certaine valeur  $k \leq h$ , le polynome

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{P_n^{(k)}(-1)(x+1)^k}{k!}$$

aurait également ses dérivées des  $(h + 1)$  ordres non négatives dans l'intervalle  $(-1, +1)$ , car on a  $Q_n^{(i)}(x) = P_n^{(i)}(x)$  pour  $i > k$ , et par conséquent,  $Q_n^{(k)}(x)$ , étant croissant, est positif pour  $x > -1$ ; donc, puisque  $Q_n^{(k-1)}(-1) \geq 0$ ,  $Q_n^{(k-1)}(x)$  est également positif pour  $x > -1$ , et ainsi de suite.

Supposons pour fixer les idées  $n - h - 1 = 2m$  pair. Alors  $\varphi(z) = u^2(z)$  est un polynome de degré  $n$ .

En effet, si on avait

$$\varphi(z) = s(z) \cdot q(z)$$

où  $q(z)$  ne possède que des racines extérieures à l'intervalle  $(-1, +1)$ , on pourrait diminuer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h \varphi(z) dz$$

eu remplaçant  $\varphi(z)$  par la fonction également positive  $\lambda s(z)$ , où  $\lambda < q(z)$ , dans notre intervalle. Mais  $s(z)$ , étant de degré pair, ne saurait être que de la forme

$$s(z) = A(z - \alpha_1)^{2p_1} (z - \alpha_2)^{2p_2} \dots (z - \alpha_k)^{2p_k} (1 - z^2) \dots \dots (2)$$

ou bien

$$s(z) = A(z - \alpha_1)^{2p_1} \dots (z - \alpha_k)^{2p_k} \dots \dots \dots (3)$$

la constante  $A$  devant être positive; or, pour la première forme cela n'est pas possible à cause de la condition que le coefficient de la plus haute puissance de  $z$  doit être positif. La forme (3) est donc seule admissible.

Si  $n - h$  était pair, on trouverait pour  $s(z)$  la forme

$$A(z - \alpha_1)^{2p_1} \dots (z - \alpha_k)^{2p_k} (z + 1) \dots \dots \dots (4)$$

Par conséquent, nous sommes conduits à déterminer le minimum  $L$  de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1 - z)^h u^2(z) dz,$$

lorsque le coefficient de  $z^m$  dans le polynome  $u(z)$  de degré  $m$  est égal à

$$\sqrt{\frac{n(n-1)\dots(n-h)}{h!}}$$

Donc  $u(x)$  est à un facteur constant près le polynome de Jacobi de degré  $m$

$$P_{m,h}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m \cdot m!} \frac{1}{(1-x)^h} \frac{d^m}{dx^m} (1-x)^{m+h} (1+x)^m \dots \dots (5)$$

Ainsi

$$u(x) = \frac{2^m \cdot m!}{(n-1)\dots(n-m)} \sqrt{\frac{n(n-1)\dots(n-h)}{h!}} P_{m,h}(x), \dots \dots (6)$$

et puisque

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h P_{m,h}^2(z) dz = \frac{2^{h+1}}{2m+h+1},$$

donc l'oscillation minima cherchée

$$\begin{aligned} L = L_{m,h} &= \frac{2^{h+1}}{n} \cdot \frac{2^{2m} \cdot (m!)^2}{[(n-1)\dots(n-m)]^2} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-h)}{h!} = \\ &= 2^n \frac{[m!(m+h)!]^2}{(n-1)!(2m)!h!} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

Pour  $h=0$ , la formule (7) se réduit à la formule connue de Tchebyscheff.

Dans le cas, où le segment  $(-1, +1)$  est remplacé par un intervalle quelconque  $l$ , on a manifestement

$$L_{m,h}^{(l)} = \left(\frac{l}{2}\right)^n L_{m,h} = l^n \frac{[m!(m+h)!]^2}{(n-1)!(2m)!h!} \dots \dots \dots (8)$$

Nous allons discuter les formules (7) et (8) pour  $n$  très grand, en faisant successivement les trois hypothèses: 1)  $\frac{h}{n} \rightarrow 1$ ; 2)  $\frac{h}{n} \rightarrow a$ ; 3)  $\frac{h}{n} \rightarrow 0$ , où  $0 < a < 1$ .

Remarquons auparavant que

$$\frac{L_{m,n+1}^{(l)}}{L_{m,h}^{(l)}} = l \frac{(m+h+1)^2}{n(h+1)} = l \left[ 1 + \frac{m^2}{n(h+1)} \right]$$

Donc, pour  $l \geq 1$ ,  $L_{m,h}^{(l)}$  augmente avec  $n$ , si  $m$  reste invariable. D'ailleurs, si  $m$  étant fixe,  $h$  augmente indéfiniment depuis 0,  $L_{m,h}^{(l)}$  croît depuis la valeur  $l^n \frac{(m!)^4}{(2m!)^2}$  jusqu'à la valeur asymptotique  $l^n \frac{(m!)^2}{2m!}$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que  $m$  croît indéfiniment.

1)  $\frac{h}{n} \rightarrow 1$ . En appliquant la formule de Stirling, on trouve

$$L_{m,h} \sim 2^{h+1} \frac{(m+h)^{2m+2h+1}}{h^{h+\frac{1}{2}} (2m+h)^{2m+h+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi m} \dots \dots \dots (9)$$

Donc

$$\begin{aligned} \log L_{m,h} &\sim (h+1) \log 2 + h \log \left( 1 + \frac{m}{h} \right) - (2m+h) \log \left( 1 + \frac{m}{m+h} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \log \pi m = (h+1) \log 2 + m - \frac{m^2}{2h} + \dots - \left( m - \frac{m^2}{2(h+m)} + \dots \right) - \\ &- \left( \frac{m^2}{h+m} - \frac{m^3}{2(h+m)^2} + \dots \right) + \frac{1}{2} \log \pi m \sim (h+1) \log 2 - \frac{m^2}{2h} - \frac{m^2}{2(h+m)} + \\ &+ \frac{m^3}{3h^2} + \frac{m^3}{6(h+m)^2} + \frac{1}{2} \log \pi m \end{aligned}$$

En supposant que dans le second membre on ait pris tous les terms qui ne tendent pas vers 0, ainsi en admettant, par exemple, que  $\frac{m^4}{h^3} \rightarrow 0$ , on aura l'expression asymptotique

$$L_{m,h} \sim 2^{h+1} e^{-\frac{m^2}{h} + \frac{m^3}{h^2}} \sqrt{\pi m},$$

et en tout cas

$$L_{m,h} = 2^{h+1} e^{-\frac{m^2}{h}(1+\varepsilon)} \sqrt{\pi m}, \dots \dots \dots (10)$$

où  $\varepsilon$  tend vers 0 avec  $\frac{m}{n}$ . De même

$$L_{m,h}^{(l)} = \frac{l^n}{2^{2m}} e^{-\frac{m^2}{n}(1+\varepsilon)} \sqrt{\pi m} \dots \dots \dots (10 \text{ bis})$$

Donc, pour  $l > 1$ ,  $L_{m,h}^{(l)}$  croît indéfiniment, tant que  $\frac{h}{n} \rightarrow 1$ . Au contraire pour  $l \leq 1$ ,  $L_{m,n}^{(l)}$  tend vers 0.

2) Soit  $\frac{h}{n-1} = a$ , où  $0 < a < 1$ . Posons

$$\frac{h}{2(m+h)} = p, \frac{2m+h}{2(m+h)} = q \dots \dots \dots (11)$$

Alors (9) prend la forme

$$L_{m,h} \sim \left[ \frac{1}{p^p(2q)^q} \right]^{2(m+h)} \sqrt{\frac{\pi m}{pq}}; \dots \dots \dots (12)$$

donc

$$L_{m,h}^{(l)} \sim \left(\frac{l}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2qp^a}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{\pi m}{pq}} \sim 2 \left(\frac{l}{4}\right)^n \left(\frac{(1+a)^{1+a}}{a^a}\right)^{n-1} \sqrt{\frac{\pi m}{pq}} \dots (13)$$

Par conséquent, en posant

$$A = \frac{(1+a)^{1+a}}{a^a} \dots \dots \dots (14)$$

et en remarquant que,  $a$  croissant de 0 à 1,  $A$  croît depuis 1 jusqu'à 4, nous trouvons que  $L_{m,n}^{(l)}$  tend vers 0 tant que

$$l < \frac{4}{A}; \dots \dots \dots (15)$$

au contraire  $L_{m,n}^{(l)}$  croît indéfiniment, lorsque  $l \geq \frac{4}{A}$ . En particulier, pour

$$l = \frac{4}{A}, \text{ on a } L \sim \frac{2}{A} \sqrt{\frac{\pi m}{pq}}.$$

Donc, la grandeur maxima  $l$  du segment où l'oscillation peut tendre vers 0, augmente de 1 à 4, lorsque  $a$  diminue de 1 à 0.

Il nous reste à examiner le dernier cas:

3)  $\frac{h}{n} \rightarrow 0$ , En supposant d'abord que  $h \rightarrow \infty$ , nous pouvons appliquer la formule (9). Alors

$$\begin{aligned} \log L_{m,h} &\sim \left(h + \frac{1}{2}\right) \log \frac{m}{h} + (2m + 2h + 1) \log \left(1 + \frac{h}{m}\right) - \\ &- \left(2m + h + \frac{1}{2}\right) \log \left(2 + \frac{h}{m}\right) + (h + 1) \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi m = \\ &= \left(h + \frac{1}{2}\right) \log \frac{m}{h} - \left(2m - \frac{1}{2}\right) \log 2 + (2m + 2h + 1) \left[ \frac{h}{m} - \frac{h^2}{2m^2} + \dots \right] - \\ &- \left(2m + h + \frac{1}{2}\right) \left( \frac{h}{2m} - \frac{h^2}{8m^2} + \dots \right) + \frac{1}{2} \log \pi m \\ &\sim \left(h + \frac{1}{2}\right) \log \frac{m}{h} - 2m \log 2 + \frac{1}{2} \log 2\pi m + h + \frac{3h^2}{4m}. \end{aligned}$$

Donc

$$L_{m,h} = \left(\frac{m}{h}\right)^{h + \frac{1}{2}} \frac{e^{h(1+\epsilon)}}{2^{2m}} \sqrt{2\pi m}, \dots \dots \dots (16)$$

où  $\varepsilon$  tend vers 0, comme  $\frac{h}{n}$ . D'où

$$L_{m,h}^{(l)} = \frac{l^n}{2^{n+2m}} \left(\frac{m}{h}\right)^{h+\frac{1}{2}} e^{h(1+\varepsilon)} \sqrt{\pi n}, \dots (16 \text{ bis})$$

Ainsi  $L_{m,h}^{(l)}$  tend vers 0 toutes les fois que  $l < 4$ . Le contraire a lieu naturellement pour  $l \geq 4$ ; en particulier, pour  $l=4$ ,  $L_{m,h}^{(4)}$  est de l'ordre

$$\left(\frac{l}{2} \frac{h}{m}\right)^h \sqrt{m}.$$

Si  $h$  reste fini, la conclusion énoncée subsiste qualitativement; mais la formule (16) doit être remplacée par

$$\begin{aligned} L_{m,h} &\sim \pi \frac{2^{h+1}}{h! e^h} \cdot \frac{(m+h)^{2m+2h+1}}{(2m+h)^{2m+h}} = \\ &= \frac{\pi}{h! e^h 2^{2m-1}} \left(1 + \frac{h}{2m+h}\right)^{2m+h} (m+h)^{h+1} \sim \frac{\pi m^{h+1}}{h! 2^{2m-1}} \dots (17) \end{aligned}$$

et

$$L_{m,h}^{(l)} \sim 2\pi \left(\frac{l}{4}\right)^n \frac{(2m)^{h+1}}{h!} = 2\pi \left(\frac{l}{4}\right)^n \frac{(n-1)^{h+1}}{h!} \dots (17 \text{ bis})$$

Avant de passer au second problème remarquons que la forme (2) correspondrait au cas, où le coefficient de  $z^n$  serait  $-1$  au lieu de  $+1$ , et un calcul semblable donnerait pour l'oscillation minima  $L'_{m,h}$  dans l'intervalle  $(-1, +1)$ , la formule

$$L'_{m,h} = 2^n \frac{m!(m-1)!(m+h)!(m+h+1)!}{(n-1)!(2m)! h!} = \frac{m+h+1}{m} L_{m,h} \dots (18)$$

Comme on pouvait le prévoir  $L'_{m,h}$  et  $L_{m,h}$  ne différeront sensiblement que dans le cas, où  $h$  est grand vis-à-vis de  $m$ .

2. Passons à présent à la solution du second problème.

Démontrons d'abord que la forme nécessaire du polynôme  $P_n(x)$  est encore la même:

$$P_n(x) = \int_{-1}^x (x-z)^h \varphi(z) dz, \dots (1)$$

où  $\varphi(z) \geq 0$  dans l'intervalle  $(-1, +1)$ . En effet, il est évident que le point  $(\xi)$ , où  $P'_n(x)$  atteint la valeur 1, doit être  $\xi=1$ , car c'est en ce point que  $P'_n(x)$  est maximum, puisque  $P''_n(x) \geq 0$ . D'autre part, si  $Q(x)$  est un polynôme de degré non supérieur à  $n$  on doit avoir

$$P'_n(1) \cdot Q(1) \geq P_n(1) \cdot Q'(1) \dots (19)$$

(en admettant, comme nous le pouvons, que  $P_n(-1) = Q(-1) = 0$ ).

Cela étant, si le polynôme cherché  $P_n(x)$  n'avait pas toutes ses  $h$  premières dérivées nulles pour  $x=-1$ , on pourrait construire le polynôme

$$R(x) = \frac{P_n(x) - Q(x)}{P'_n(1) - Q'(1)} P'_n(1),$$



où  $Q(x) = (x+1)P'_n(-1) + \dots + \frac{(x+1)^h}{h!} P_n^{(h)}(-1)$ , qui aurait également ses dérivées von négatives avec  $R'(1) = P'_n(1)$ . Mais à cause de (19), on doit avoir

$$R(1) = \frac{P_n(1) - Q(1)}{P'_n(1) - Q'(1)} P'_n(1) \leq P_n(1);$$

donc  $P_n(x)$  a la forme (1).

Je dis que  $\varphi(z) = u^2(z)$  on bien  $\varphi(z) = u^2(z)(z+1)$ , suivant que son degré  $n-h-1$  est pair ou impair.

En effet, il s'agit de rendre minimum l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h \varphi(z) dz$$

sous la condition que

$$P'_n(1) = \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} \varphi(z) dz = \frac{1}{h}. \quad \dots \dots \dots (20)$$

Soit

$$b = \frac{\int_{-1}^{+1} z(1-z)^{h-1} s(z) dz}{\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} s(z) dz}; \quad \dots \dots \dots (21)$$

on aura  $|b| < 1$ , en supposant que  $s(z)$  est le produit de tous les facteurs de  $\varphi(z)$  qui correspondent aux racines  $\alpha$  de  $\varphi(z)$  telles que  $-1 \leq \alpha < 1$ . En posant alors  $\varphi(z) = s(z) \cdot q(z)$ , on pourra choisir une constante  $\lambda < 0$  assez petite pour que l'on ait dans l'intervalle  $(-1, +1)$

$$q_1(z) = q(z) + \lambda(z-b) > 0. \quad \dots \dots \dots (22)$$

Si  $q(z)$  ne se réduit pas à une constante, le degré de  $q_1(z)$  na sera pas supérieur à celui de  $q(z)$ , et par conséquent le polynome

$$Q(x) = \int_{-1}^x (x-z)^h s(z) q_1(z) dz$$

sera de degré non supérieur à  $n$ , en satisfaisant, à cause de (21) à la condition

$$Q'(1) = h \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} s(z) q_1(z) dz = P'_n(1).$$

Or,

$$Q(1) = P_n(1) + \lambda \int_{-1}^{+1} (1-z)^h (z-b) s(z) dz = P_n(1) -$$

$$- \lambda \int_{-1}^{+1} (z-1)(z-b)(1-z)^{h-1} s(z) dz = P_n(1) - \lambda \left[ \int_{-1}^{+1} z^2 (1-z)^{h-1} s(z) dz - \right.$$

$$\left. - b \int_{-1}^{+1} z (1-z)^{h-1} s(z) dz \right] < P_n(1)$$

En vertu de la relation

$$\int_{-1}^{+1} z^2 (1-z)^{h-1} s(z) dz \cdot \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} s(z) dz > \left[ \int_{-1}^{+1} z (1-z)^{h-1} s(z) dz \right]^2$$

Donc  $q(z)$  est une constante, est notre affirmation est démontrée.

Pour fixer les idées, plaçons nous dans l'hypothèse où  $n - h - 1 = 2m$  est pair.

Nous devons donc minimiser l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h u^2(z) dz,$$

sous la condition que

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} u^2(z) dz = \frac{1}{h}, \quad \dots \dots \dots (20 \text{ bis})$$

où  $u(z)$  est un polynome de degré  $m$

$$u(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m.$$

On doit donc avoir pour un choix convenable de la constante  $\lambda$

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} (z-\lambda) u(z) \cdot z^k dz = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

Donc, il faut que

$$(z-\lambda)u(z) = P_{m+1, h-1}(z) \quad \dots \dots \dots (23)$$

soit le polynome de Jacobi de degré  $m+1$  (à un facteur constant près) qui satisfait précisément aux conditions que

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} P_{m+1, h-1}(z) \cdot z^k dz = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad \dots \dots (24)$$

Alors

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h u^2(z) dz = \int_{-1}^{+1} (1-z)(1-z)^{h-1} u^2(z) dz =$$

$$= (1-\lambda) \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} u^2(z) dz = \frac{1-\lambda}{h} \dots \dots \dots (25)$$

Donc, le minimum cherché  $L_n$  sera réalisé, si  $\lambda$  sera la plus grande racine  $\lambda_{m+1}^{(h-1)}$  du polynome de Jacobi  $P_{m+1, h-1}(z)$ .

Par conséquent l'oscillation minima cherchée est donnée par la formule

$$L_n^{(h)} = \frac{1 - \lambda_{m+1}^{(h)}}{h} \dots \dots \dots (26)$$

En particulier, si  $h = 1$ , le polynome  $P_{m+1, h-1}(z)$  se réduit au polynome de Legendre de degré  $m+1$ , et on a dans ce cas

$$L_n = 1 - \lambda_{m+1} \dots \dots \dots (27)$$

où  $\lambda_{m+1}$  est la plus grande racine du polynome de Legendre.

Examinons ce dernier cas. L'équation de Legendre ne se résout d'une façon élémentaire que pour  $m \leq 4$  (c'est à dire pour  $n \leq 10$ ). Ainsi on a

$$\left. \begin{aligned} L_2 = 1, \quad L_4 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,423, \quad L_6 = 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,225, \\ L_8 = 1 - \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \approx 0,138, \quad L_{10} = 1 - \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}} \approx 0,094. \end{aligned} \right\} (28)$$

Pour trouver la valeur asymptotique de  $L_n$ , posons  $\lambda = 1 - y$ ; l'équation de Legendre prend alors la forme hypergéométrique

$$F\left(m+2, -(m+1), 1, \frac{y}{2}\right) = 1 - (m+1)(m+2)\frac{y}{2} + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{(m+k+1)!}{(k!)^2(m-k+1)!} \left(-\frac{y}{2}\right)^k + \dots = 0.$$

La plus petite racine de cette équation sera donc la valeur cherchée de  $L_n$ , où  $n = 2m + 2$ .

Par conséquent, pour  $n$  très grand,

$$L_n = \frac{\alpha_m}{(m+1)(m+2)}, \dots \dots \dots (29)$$

où  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha$  est la plus petite racine de l'équation de Bessel

$$J_0(\sqrt{2\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \dots - \frac{1}{(k!)^2} \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^k + \dots = 0. \dots (30)$$

On trouve

$$\alpha \approx 2,89 \dots \dots \dots (31)$$

à 0,01 près.

Revenons au cas général. Le même changement de variables conduit à mettre le polynome de Jacobi sous le forme hypergéométrique

$$F\left(m+h+1, -(m+1), h, \frac{y}{2}\right) = 1 - \frac{(m+1)(m+h+1)}{h \cdot 1} \frac{y}{2} + \dots$$

$$+ \dots \frac{(m+1) \dots (m+2-k)(m+h+1) \dots (m+h+k)}{h(h+1) \dots (h+k-1) \cdot k!} \left(-\frac{y}{2}\right)^k + \dots = 0. \quad (32)$$

Si  $y$  est la plus petite racine de cette équation, on a

$$L_n^{(h)} = \frac{y}{h}, \dots \dots \dots (33)$$

En particulier, pour  $m=0$ , c'est à dire  $n=h+1$ , on a la valeur évidente

$$L_n^{(n-1)} = \frac{2}{h+1} = \frac{2}{n}.$$

Pour  $m=1$  ( $n=h+3$ ), on a

$$L_n^{(n-3)} = 2 \frac{(n-1)(n-2) - \sqrt{2(n-1)(n-2)}}{n(n-1)(n-3)} = 2 \left[ \frac{n-2}{n(n-3)} - \frac{1}{n(n-3)} \sqrt{2 \frac{n-2}{n-1}} \right] \sim \frac{2}{n}. \quad (34)$$

On vérifie aisément d'une façon générale que, si  $m$  étant fixe,  $h$  croît indéfiniment, l'équation hypergéométrique a pour limite

$$\left(1 - \frac{y}{2}\right)^{m+1} = 0;$$

donc dans ce cas également

$$L_n^{(h)} \sim \frac{2}{n} \dots \dots \dots (35)$$

Supposons au contraire  $h$  fini et faisons croître  $m$  indéfiniment. Alors en posant

$$\frac{1}{2}(m+1)(m+h+1)y = u \quad \dots \dots \dots (36)$$

nous voyons que  $u$  tend pour  $m \rightarrow \infty$ , vers la plus petite racine de l'équation de Bessel

$$J_{h-1}(2\sqrt{u}) = 0,$$

qui pour $h=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
est égale à $u_h \approx 1,444$	3,671	6,591	10,176	14,38	19,28	24,9	30,8	37,4	44,9
pour $h=11$	12	13	14	15	16	17	18	19	
est égale à $u_h \approx 52,9$	60,8	69,7	79,2	89,3	100	111	123	139	
Donc pour $h=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
limite de $m^2 L_n^{(h)} \approx 2,89$	3,67	4,39	5,09	5,75	6,43	7,1	7,7	8,31	8,98
pour $h=11$	13	14	15	15	16	17	18	19	
limite de $m^2 L_n^{(h)} \approx 9,56$	10,13	10,72	11,31	11,9	12,5	13,06	13,67	14,21	

On aperçoit que  $\lim mnL_n^{(h)} = \infty$ , si  $m$  et  $h$  croissent tous les deux infiniment; c'est ce qui résulte du fait que si on pose  $u = th$ , l'équation  $J_{h-1}(2\sqrt{th}) = 0$  tend vers  $e^{-t} = 0$ , lorsque  $h \rightarrow \infty$ . Ainsi le produit  $(m+1)nL_n^{(h)}$  qui pour  $m=0$  est égal à 2 croît infiniment avec  $m$ ; de même, si  $h$  croît de 0 à l'infini ce même produit croît indéfiniment depuis la valeur \*) 4. Il est probable que dans tous les cas, pour  $n$  très grand, on a

$$2 \leq \frac{n^2 L_n^{(h)}}{h+1} \leq 8. \dots \dots \dots (37)$$

Donc, si  $h$  est de l'ordre  $n$ ,  $L_n^{(h)}$  sera de l'ordre de  $\frac{1}{n}$ .

Je me bornerai à prouver cette dernière affirmation. Posons  $\frac{h-1}{m+1} = \alpha$ ,  
Considérons l'intégrale

$$M = \int_{-1}^{+1} (1-z)^\alpha \varphi_1(z) dz, \dots \dots \dots (38)$$

où  $\varphi_1(z)$  est un polynôme de degré  $2m+1$  non négatif et croissant.  
En vertu d'un résultat connu \*\*), on a dans tout l'intervalle

$$\varphi_1(z) \leq \frac{1}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{(m+\alpha+1)!(m+\alpha+2)!}{\alpha!(\alpha+1)!m!(m+1)!} M \dots \dots (39)$$

Or, nous pouvons mettre le polynôme  $P_n(x)$  sous la forme

$$P_n(x) = \int_{-1}^x (x-z)^{h-1} \varphi_1(z) dz, \dots \dots \dots (1^{bis})$$

où  $\varphi(z)$  est non négatif et croissant. Ainsi  $L_n^{(h)}$  est le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} \varphi_1(z) dz$$

sous la condition que

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z) dz = \frac{1}{h-1} = M.$$

Mais de (38) nous tirons, en remplaçant  $\alpha$  par  $h-2$

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &\leq \frac{1}{2^{h-1}} \cdot \left[ \frac{(m+h)!}{(m+1)!(h-1)!} \right]^2 \frac{(m+1)(h-1)}{(m+h)} M \\ &\sim \frac{(m+h)^{2(m+h)} M}{(m+1)^{2(m+1)} (h-1)^{2(h-1)} \cdot 2^h \pi} \end{aligned}$$

\*) Voir la page 50 de mon livre „Sur les propriétés extrémales etc“.  
\*\*) G. Pólya und Szegő „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis“ t. II. p. 97.

Donc

$$\varphi_1(z) \leq \left[ \frac{(1+a)^{1+a}}{(a\sqrt{2})^a} \right]^{2m+2} \frac{M}{2\pi} = \rho^{2m+2} \frac{M}{2\pi}.$$

Il en résulte que

$$\int_{1-\delta}^1 (1-z)^{h-2} \varphi_1(z) dz < \frac{\rho^{2m+2} M \delta^{h-1}}{2\pi(h-1)}; \dots \dots \dots (40)$$

d'où

$$\int_{-1}^{1-\delta} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z) dz > M \left[ 1 - \frac{\rho^{2m+2} \delta^{h-1}}{2\pi(h-1)} \right] = M(1-\varepsilon)$$

où  $\varepsilon$  tend vers 0 avec  $\frac{1}{h}$ , si

$$\rho^2 \delta^a \leq 1,$$

c'est à dire pour

$$\delta \leq (1+a)^{-\frac{2}{a}} \frac{2a^2}{(1+a)^2} \dots \dots \dots (41)$$

Après avoir ainsi fixé  $\delta$ , remarquons que

$$\int_{-1}^{1-\delta} (1-z)^{h-1} \varphi_1(z) dz > \sigma \int_{-1}^{1-\delta} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z) dz > M\delta(1-\varepsilon).$$

Donc

$$L_n > \frac{\delta}{h-1} (1-\varepsilon) > \frac{2}{e^2} \frac{h-1}{(h+m)^2} \dots \dots \dots (42)$$

pour  $h$  et  $m$  très grand. Comme d'autre part, on a évidemment  $L_n < \frac{2}{h}$ ,  $L_n$  est bien de l'ordre de  $\frac{1}{h}$  (ou  $\frac{1}{n}$ ), lorsque  $h$  et  $n$  sont du même ordre. D'ailleurs de l'inégalité (42) il résulte qu'en général

$$\frac{n^2 L_n}{h-1} > \frac{2}{e^2}, \dots \dots \dots (43)$$

si  $h$  et  $m$  croissent infiniment d'une façon quelconque. L'inégalité (43) que nous venons de démontrer est un peu moins forte que la première partie de l'inégalité (37), dont la démonstration exigerait une étude plus complète de la valeur de la plus petite racine de l'équation hypergéométrique (32).

## О некоторых неравенствах, получаемых из интерполяционной формулы Лагранжа.

В. Ф. Бржечка.

1.

Тригонометрический полином  $n$ -го порядка

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами можно представить в виде

$$f(\theta) = e^{-n\theta i} F(e^{\theta i}), \dots \dots \dots (2)$$

где

$$F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots \dots \dots + C_{2n} x^{2n}$$

есть полином степени  $2n$ .

Имеем

$$\cos k\theta = \frac{x^k + x^{-k}}{2}, \quad \sin k\theta = \frac{x^k - x^{-k}}{2i}, \quad x = e^{\theta i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n;$$

подставляя выражения для  $\cos k\theta$  и  $\sin k\theta$  в (1) и умножая на  $e^{n\theta i} = x^n$ , получим

$$F(x) = a_0 x^n + \sum_1^n \left\{ \frac{1}{2} a_k (x^{n+k} + x^{n-k}) + \frac{1}{2i} b_k (x^{n+k} - x^{n-k}) \right\}$$

что и т. д.

Очевидно, что

$$C_{2n} = \frac{a_n - b_n i}{2} \dots \dots \dots (3)$$

Интерполяционная формула Лагранжа имеет вид:

$$g(x) = \sum_1^{2n} \frac{g(x_k)}{\varphi'(x_k)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x - x_k},$$

при чем степень полинома  $g(x)$  есть  $2n - 1$ , а  $\varphi(x)$  степени  $2n$  и все корни  $x_k$  полинома  $\varphi(x)$  различные.

Напишем интерполяционную формулу Лагранжа, при чем за  $g(x)$  примем  $F(x) - C_{2n}(x^{2n} + 1)$ , а за  $\varphi(x)$  возьмем  $x^{2n} + 1$  и корни  $\varphi(x)$  обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{2n}$ ; имеем

$$F(x) - C_{2n}(x^{2n} + 1) = \sum_1^{2n} \frac{F(x_k) - C_{2n}(x_k^{2n} + 1)}{2nx_k^{2n-1}} \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x - x_k};$$

так как  $x_k^{2n} + 1 = 0$ , то из последнего находим

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_1^{2n} \frac{F(x_k)}{2x_k^{n-1}} \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x - x_k} + C_{2n}(x^{2n} + 1);$$

умножая обе части на  $x^{-n}$ , напомним последнее равенство следующим образом:

$$F(x) \cdot x^{-n} = \frac{1}{n} \sum_1^{2n} \frac{F(x_k) \cdot x_k^{-n}}{x_k^n} \cdot \frac{x^n + x^{-n}}{2} \cdot \frac{x_k}{x - x_k} + C_{2n}(x^n + x^{-n}).$$

Положим  $x = e^{\theta i}$ ; очевидно, что

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2n}, \theta_2 = \frac{3\pi}{2n}, \dots, \theta_k = \frac{2k-1}{2n} \pi, \dots, \theta_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \pi$$

$$\cos n\theta = \frac{x^n + x^{-n}}{2}, x_k^n = i(-1)^{k-1}, \cotg \frac{\theta - \theta_k}{2} - i = \frac{2ix_k}{x - x_k}$$

и так как  $C_{2n} = \frac{a_n - b_n i}{2}$ , то после подстановки  $x = e^{\theta i}$  получим

$$f(\theta) = (a_n - b_n i) \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_1^{2n} f(\theta_k) (-1)^k (\cotg \frac{\theta - \theta_k}{2} - i);$$

из последнего следует

$$f(\theta) = a_n \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_1^{2n} (-1)^k f(\theta_k) \cotg \frac{\theta - \theta_k}{2} \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

Напишем формулу (IV) для  $f(\theta + \psi)$ :

$$f(\theta + \psi) = a_n \cos n\theta + \frac{\cos n\theta}{2n} \sum_1^{2n} (-1)^k f(\theta_k + \psi) \cotg \frac{\theta - \theta_k}{2};$$

дифференцируя последнее по  $\theta$  и полагая потом  $\theta = 0$ , получим

$$f'(\psi) = \frac{1}{4n} \sum_1^{2n} \frac{(-1)^{k+1} f(\theta_k + \psi)}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \dots \dots \dots \text{(5)}$$

Если положим, что  $|f(\theta_k + \psi)| \leq M$  для  $k = 1, 2, \dots, 2n$ ; то получим

$$|f'(\psi)| \leq \frac{M}{4n} \sum_1^{2n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \dots \dots \dots \text{(6)}$$

Вычислим теперь

$$\sum_1^{2n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}}$$

Если  $x_k = e^{\theta_k i}$ , то  $\sin \frac{\theta_k}{2} = \frac{x_k^{1/2} - x_k^{-1/2}}{2i}$  и  $\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = \frac{-4x_k}{(1-x_k)^2}$ ;



далее очевидно, что

$$\frac{x^{2n}}{x^{2n} + 1} = \frac{1}{2n} \sum_1^{2n} \frac{x}{x - x_k};$$

дифференцируя последнее по  $x$  и полагая потом  $x = 1$ , найдем

$$n = \frac{1}{n} \sum_1^{2n} \frac{-x_k}{(1 - x_k)^2},$$

а из последнего имеем

$$4n^2 = \sum_1^{2n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k}{2}},$$

так что (6) можем написать в виде:

$$|f'(\psi)| \leq Mn \dots \dots \dots (7)$$

Итак, мы пришли к теореме С. Н. Бернштейна:

Если абсолютное значение тригонометрического полинома порядка  $n$  не превышает  $M$ , то абсолютное значение его производной не превышает  $Mn^*$ ). Знак равенства в (7) имеет место только в том случае, если  $f(\psi)$  будет вида

$$M \sin n(\psi - \theta_k).$$

2.

а) Пусть имеем полином  $P(x)$  степени  $n - 1$  и предположим, что  $n - 1$  число нечетное; возьмем полином Чебышева

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x.$$

Корни полинома  $T_n(x)$  будут

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2n}, x_2 = \cos \frac{3\pi}{2n}, \dots x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \dots x_n = \cos \frac{2n-1}{2n} \pi;$$

далее очевидно, что

$$T_n(0) = \frac{1}{2^{n-1}} \dots \dots \dots (1)$$

Найдем теперь такие величины

$$T'_n(0), T'_n(x_k), T''_n(0) \text{ и } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}$$

$$T'_n(x) = \frac{n}{2^{n-1}} \sin n \arccos x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

\*) а) См. Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle professées a la Sorbonne par Serge Bernstein, стр. 39.

б) Другие доказательства отличные от нашего см.: M. Riesz, Jahresb. d. d. M. V. 1914. XXIII стр. 354; F. Riesz, Comptes Rendus за 1914 год стр. 1657; Fekete, Crelle 146, стр. 81.

так что

$$T'_n(0) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$T'_n(x_k) = \frac{n}{2^{n-1}} \sin n \cdot \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \frac{1}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi},$$

так что

$$T'_n(x_k) = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi}; \dots \dots \dots (3)$$

точно также легко покажем, что

$$T''_n(0) = \frac{n^2}{2^{n-1}}; \dots \dots \dots (4)$$

далее ищем

$$\frac{1}{x_1^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = - \left[ \frac{T'_n(x)}{T_n(x)} \right]'_{x=0} = - \left[ \frac{T'_n(x)T_n(x) - T_n'^2(x)}{T_n^2(x)} \right]_{x=0} = n^2,$$

так что

$$\sum_1^n \frac{1}{x_k^2} = n^2 \dots \dots \dots (5)$$

Напишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$P(x) = \sum_1^n \frac{P(x_k)}{T'_n(x_k)} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k};$$

очевидно, что

$$P(x+t) = \sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{T'_n(x_k)} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k}.$$

Дифференцируя последнее по  $x$  и полагая потом  $x=0$ , получим

$$P'(t) = \sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{T'_n(x_k)} \cdot \frac{-x_k T'_n(0) - T_n(0)}{x_k^2};$$

последнее на основании (1), (2) и (3) можно написать так:

$$P'(t) = \sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{n} \cdot (-1)^k \cdot \frac{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi}{\cos^2 \frac{2k-1}{2n} \pi} \dots \dots \dots (6)$$

Если теперь предположим, что  $|P(x_k+t)| \leq M$  для  $t$  в интервале  $-1 \leq t \leq 1$ , то (6) нам даст

$$|P'(t)| < \frac{M}{n} \sum_1^n \frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2n} \pi},$$

а последнее на основании (5) нам даст

$$|P'(t)| < Mn \dots \dots \dots (7)$$

Пришли к результату: если полином  $P(t)$  нечетной степени  $n-1$  в интервале  $-1 - \cos \frac{\pi}{2n} \leq t \leq 1 + \cos \frac{\pi}{2n}$  удовлетворяет неравенству  $|P(t)| \leq M$ , то в интервале  $-1 \leq t \leq 1$  будет  $|P'(t)| < Mn$ .

б) Пусть имеем полином  $P(x)$  степени  $n$  и пусть  $n$  есть число четное, а коэффициент при  $x^n$  пусть будет  $a_n$ . Напишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$P(x) - a_n T_n(x) = \sum_1^n \frac{P(x_k) - a_n T_n(x_k)}{T_n'(x_k)} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k},$$

из последней находим

$$P(x) = \sum_1^n \frac{P(x_k)}{T_n'(x_k)} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k} + a_n T_n(x) \dots \dots \dots (8)$$

Напишем формулу (8) для  $P(x+t)$ ; имеем

$$P(x+t) = \sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{T_n'(x_k)} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k} + a_n T_n(x);$$

дифференцируя последнее по  $x$  и полагая потом  $x=0$ , найдем

$$P'(t) = \sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{T_n'(x_k)} \cdot \frac{-x_k T_n'(0) - T_n(0)}{x_k^2} + a_n \cdot T_n'(0).$$

Принимая во внимание (1), (2), (3) и (5) и полагая, что

$$|P(x_k+t)| \leq M$$

в интервале

$$-1 \leq t \leq 1,$$

получим

$$|P'(t)| < Mn \dots \dots \dots (9)$$

Пришли к результату: если полином четной степени  $n$  в интервале

$$-1 - \cos \frac{\pi}{2n} \leq t \leq 1 + \cos \frac{\pi}{2n}$$

удовлетворяет неравенству

$$|P(t)| \leq M,$$

то в интервале  $-1 \leq t \leq 1$  будет

$$|P'(t)| < Mn$$

Очевидно, что полученные нами результаты не противоречат теореме А. А. Маркова \*).

---

\*) А. Марков. Об одном вопросе Д. И. Менделеева, 1889 г.

# Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque.

par

A. Suschkewitsch.

1. Nous considérons des groupes finis, dont l'opération est uniforme, associative, mais pas invertible uniformément. Ces groupes représentent une généralisation des groupes ordinaires que nous appellerons „classiques“ pour les distinguer de nos groupes généralisés. J'ai prouvé\*), qu'un tel groupe généralisé a toujours un sous-groupe spécial  $\mathbf{K}^{**}$ ) que j'ai nommé „le noyau“; ce groupe  $\mathbf{K}$  est composé de  $r \cdot s$  groupes classique  $\mathbf{C}_{z\lambda}$  ( $z = 1, 2, \dots, r$ ;  $\lambda = 1, 2, \dots, s$ ), simplement isomorphes deux à deux et sans éléments communs (chaque paire; leurs unités même sont différentes). Cette composition s'éclaircit du tableau suivant:

$$\begin{array}{l|l}
 \mathbf{K} = & \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_r \\
 \parallel & \parallel \quad \parallel \quad \dots \quad \parallel \\
 \mathbf{B}_1 = & \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} + \dots + \mathbf{C}_{r1} \\
 + & + \quad + \quad \dots \quad + \\
 \mathbf{B}_2 = & \mathbf{C}_{12} + \mathbf{C}_{22} \dots \dots \dots \mathbf{C}_{r2} \\
 + & + \quad + \quad \dots \quad + \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 + & + \quad + \quad \dots \quad + \\
 \mathbf{B}_s = & \mathbf{C}_{1s} \quad \mathbf{C}_{2s} \dots \dots \dots \mathbf{C}_{rs}
 \end{array}$$

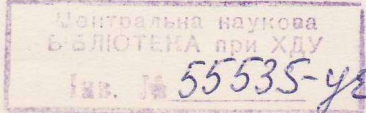
Les  $\mathbf{A}_z$  sont des groupes avec la loi gauche de l'inversion uniforme; de même signifient les  $\mathbf{B}_\lambda$  des groupes avec la loi droite de l'inversion uniforme.

De plus j'ai examiné des propriétés de ce type des groupes, dit „groupes-noyau“ et j'ai trouvé le moyen de les représenter tous. À savoir un tel groupe-noyau est complètement défini, si l'on connaît:

- 1) le groupe classique  $\mathbf{C}_{z\lambda} = \mathbf{C}$  (comme groupe abstrait);
- 2) les nombres  $r$  et  $s$ ;
- 3) tous les produits  $E_{11}E_{z\lambda}$  ( $z = 2, \dots, r$ ;  $\lambda = 2, \dots, s$ ), comme des éléments du groupe  $\mathbf{C}$ ; les  $E_{z\lambda}$  signifient les unités des groupes  $\mathbf{C}_z$ .

Ces 3 conditions peuvent être choisies arbitrairement.

\*) Voir ma thèse „Теория действия, как общая теория групп“, Воронеж, 1922, Ch. VI.  
 \*\*) Жирный шрифт взят вместо готического рукописи.



Des groupes avec un seul côté de la loi de l'inversion uniforme ainsi que des groupes classiques forment des cas spéciaux des groupes-noyaux, si un des deux nombres  $r, s$  ou tous les deux sont égaux à l'unité.

Rappelons encore quelques formules concernant des groupes-noyaux et faciles à démontrer. On a :

$$A_z B_\lambda = K; B_\lambda A_z = C_{z\lambda}; \dots \dots \dots (1)$$

$$C_{z\lambda} C_{\mu\nu} = C_{\mu\lambda}, \dots \dots \dots (2)$$

ou plus précis:  $A_{z\lambda}$  étant un élément de  $C_{z\lambda}$ , on a :

$$A_{z\lambda} C_{\mu\nu} = C_{\mu\lambda}; C_{\mu\nu} A_{z\lambda} = C_{z\nu} \dots \dots \dots (2^a)$$

$G$  étant un groupe quelconque et  $K$  son noyau, on peut toujours trouver dans  $G$  des éléments  $X$  et  $Y$  à propriété suivante :

$$XG = B_\lambda; GY = A_z; \dots \dots \dots (3)$$

(p. e. on peut prendre pour  $X$  chaque élément de  $B_\lambda$  et pour  $Y$  chaque élément de  $A_z$ ); on aura aussi :

$$XGY = C_{z\lambda}; GXG = GYG = K \dots \dots \dots (4)$$

Soit  $P$  un élément quelconque; ses puissances ne peuvent pas être toutes différentes; le cas suivant doit donc se présenter :

$$P^{k+m} = P^k.$$

Les plus petits possible des nombres  $k$  et  $m$  doivent s'appeler  $k$  — le genre,  $m$  — l'ordre d'élément  $P$ . Il est clair que le genre d'élément appartenant à un groupe classique (ou plus généralement, à un groupe-noyau) est égal à l'unité (ces éléments doivent aussi être appelés classique).

Les éléments du groupe  $G$ , qui n'appartiennent pas à  $K$ , nous partageons en deux classes: la 1<sup>re</sup> classe est formée des éléments, dont une puissance quelconque (et par conséquent toutes les puissances suivantes) appartient à  $K$ ; la 2<sup>de</sup> classe est formée des éléments, dont aucune puissance n'appartient pas à  $K$ . Il est clair que,  $P$  étant du genre  $k$  et de la 1<sup>re</sup> classe,  $P^k$  est la plus petite puissance de  $P$  qui appartient à  $K$ .

De même distinguons nous entre les sous-groupes de  $G$  ceux qui ont des éléments communs avec  $K$  (et que nous appelons de la 1<sup>re</sup> classe) et ceux qui n'ont pas de tels éléments (nous les appelons de la 2<sup>de</sup> classe); les sous-groupes de ce dernier type sont formés exclusivement par des éléments de la 2<sup>de</sup> classe. Il est facile de voir, que chaque groupe  $G$  qui a un élément  $P$  de la 2<sup>de</sup> classe a aussi au moins un sous-groupe de la 2<sup>de</sup> classe, p. e. le groupe  $\{P\}$ , formé des puissances de  $P$ . Un groupe  $G$  qui n'a pas de sous-groupes de la 2<sup>de</sup> classe soit nommé „du premier rang“. Si un groupe  $G$  a des sous-groupe de la 2<sup>de</sup> classe et du premier rang, nous appelons alors  $G$  „du second rang“. En général un groupe  $G$  soit du rang  $n$ , lorsqu'il a au moins un sous-groupe du rang  $n - 1$ , mais pas plus haut.

2. Prouvons encore quelques théorèmes généraux.

*Théorème 1:* Tout sous-groupe d'un groupe-noyau est aussi un groupe-noyau (ou un des ses cas spéciaux).

*Démonstration:* Soit  $\mathbf{K} = \sum_{z=1}^r \mathbf{A}_z = \sum_{\lambda=1}^s \mathbf{B}_\lambda = \sum_{z,\lambda} \mathbf{C}_{z\lambda}$  le groupe noyau,  $\mathbf{K}'$  — un de ses sous-groupes. Prenons un des groupes  $\mathbf{C}_{z\lambda}$ ;  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{C}_{z\lambda}$  peuvent être sans éléments communs et peuvent aussi en avoir; dans ce dernier cas tous éléments communs de  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{C}_{z\lambda}$  forment un groupe  $\mathbf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{z\lambda}) \simeq \mathbf{C}'_{z\lambda}$  (\*), qui est classique, comme un sous-groupe du groupe classique  $\mathbf{C}_{z\lambda}$ . Supposons de plus que  $\mathbf{K}'$  contient un élément  $A_{\mu\nu}$  du groupe  $\mathbf{C}_{\mu\nu}$ ;  $\mathbf{K}'$  contient alors le système  $\mathbf{C}_{z\lambda} A_{\mu\nu}$ , qui a autant d'éléments divers que le groupe  $\mathbf{C}'_{z\lambda}$ ; de plus on a:  $\mathbf{C}_{z\lambda} A_{\mu\nu} \simeq \mathbf{C}'_{\mu\lambda} < \mathbf{C}_{\mu\lambda}$  (\*\*); (d'après (2<sup>a</sup>)); nous ne pouvons pas encore affirmer que  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$  soit un groupe; en tout cas le système  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$  produit un groupe  $\{\mathbf{C}'_{\mu\lambda}\} \simeq \mathbf{C}''_{\mu\lambda}$ , qui est contenu en  $\mathbf{C}_{\mu\lambda}$  et en  $\mathbf{K}'$ . Cela établi, nous trouverons de même façon que le système  $\mathbf{C}''_{\mu\lambda} E_{z\lambda} = \mathbf{C}_{z\lambda}$ , ayant plus d'éléments divers que  $\mathbf{C}'_{z\lambda}$  est aussi contenu en  $\mathbf{K}'$  et en  $\mathbf{C}_{z\lambda}$ ; c'est une contradiction, car  $\mathbf{C}'_{z\lambda} = \mathbf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{z\lambda})$ . Par conséquent, il est:  $\{\mathbf{C}'_{\mu\lambda}\} = \mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ , c'est à dire  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$  est un groupe. Il est, de plus:  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda} = \mathbf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\mu\lambda})$ . Nous trouverons de même,  $E_{\mu\lambda}$  étant l'unité de  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ :  $\mathbf{C}'_{z\lambda} E_{\mu\lambda} = \mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ . Il s'ensuit de cela que  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$  est simplement isomorphe avec  $\mathbf{C}_{z\lambda}$ , car l'équation  $\mathbf{C}_{z\lambda} E_{\mu\lambda} = \mathbf{C}_{\mu\lambda}$  donne un isomorphisme simple entre  $\mathbf{C}_{z\lambda}$  et  $\mathbf{C}_{\mu\lambda}$  (\*\*\*)). On peut trouver de même façon:  $A_{\mu\nu} \mathbf{C}_{z\lambda} = \mathbf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{z\lambda}) \simeq \mathbf{C}'_{z\lambda}$ ;  $A_{\mu\nu} \mathbf{C}'_{\mu\lambda} = \mathbf{C}'_{z\lambda} A_{\mu\nu} = \mathbf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\mu\nu}) = \mathbf{C}'_{\mu\nu}$ ; tous ces groupes  $\mathbf{C}'_{z\lambda}$ ,  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ ,  $\mathbf{C}'_{z\nu}$ ,  $\mathbf{C}'_{\mu\nu}$  sont simplement isomorphes entre eux.

$\mathbf{K}'$  est donc composé des groupes  $\mathbf{C}'_{z\lambda}$ . Supposons p. e. (cela revient donc à nos dénnotations) que  $\mathbf{K}'$  contient des groupes  $\mathbf{C}'_{11}, \mathbf{C}'_{12}, \dots, \mathbf{C}'_{1s}$ , ( $s' \leq s$ ), mais pas de groupes  $\mathbf{C}'_{1v}$  pour  $v > s'$ , — ainsi que  $\mathbf{C}'_{21}, \dots, \mathbf{C}'_{r'1}$ , mais pas  $\mathbf{C}'_{\mu 1}$  pour  $\mu > r'$ ; il s'ensuit alors que  $\mathbf{K}'$  contient tous les groupes  $\mathbf{C}_{z\lambda}$  pour  $z = 1, 2, \dots, r'$ ;  $\lambda = 1, 2, \dots, s'$ , et aucun autre. Soit:  $\mathbf{C}'_{z1} + \dots + \mathbf{C}'_{zs'} \simeq \mathbf{A}'_z$ ;  $\mathbf{C}'_{1\lambda} + \dots + \mathbf{C}'_{r'\lambda} \simeq \mathbf{B}'_\lambda$ ; il est facile de voir que  $\mathbf{A}'_z$  est un groupe avec la loi gauche de l'inversion uniforme, tandis que  $\mathbf{B}'_\lambda$  est un groupe avec le côté droit de ce loi.

Nous avons donc:

$$\mathbf{K}' = \sum_{z=1}^{r'} \mathbf{A}'_z = \sum_{\lambda=1}^{s'} \mathbf{B}'_\lambda = \sum_{z=1}^{r'} \sum_{\lambda=1}^{s'} \mathbf{C}'_{z\lambda}, \text{ ce que démontre notre théorème.}$$

*Théorème 2:* Si  $\mathbf{G}$  est un groupe à noyau  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}$  — un sous-groupe du  $\mathbf{G}$  de la 1<sup>re</sup> classe, et  $\mathbf{D}(\mathbf{K}, \mathbf{H}) = \mathbf{K}'$ , —  $\mathbf{K}'$  est le noyau du groupe  $\mathbf{H}$ .

*Démonstration:* D'après le théorème précédent  $\mathbf{K}'$  est un groupe du type noyau; nous dénotons la structure du  $\mathbf{K}'$  comme dans le théorème précédent.

Soit  $\mathbf{K} < \mathbf{C}'_{z\lambda} < \mathbf{K}'$ ; nous avons alors (\*\*\*) :  $\mathbf{HK} < \mathbf{GK} = \mathbf{A}'_z, \mathbf{HK} < \mathbf{H}$ ; donc:  $\mathbf{HK} < \mathbf{A}'_z = \mathbf{D}(\mathbf{H}, \mathbf{A}_z)$ ; d'autre part:  $\mathbf{A}'_z < \mathbf{K}' < \mathbf{H}$ ;  $\mathbf{A}'_z \mathbf{K} = \mathbf{A}'_z$ ; donc:  $\mathbf{HK} = \mathbf{A}'_z$ ; et de même:  $\mathbf{KH} = \mathbf{B}'_\lambda$ .

\*)  $\mathbf{D}$  est le signe du plus grand commun diviseur; le signe  $\simeq$  signifie que nous désignons l'expression composée  $\mathbf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{z\lambda})$  plus simplement par  $\mathbf{C}_{z\lambda}$ .

\*\*) La dénotation  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda} < \mathbf{C}_{\mu\lambda}$  signifie que chaque élément de  $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$  est contenu en  $\mathbf{C}_{\mu\lambda}$ .

\*\*\*) Voir ma thèse déjà citée, ch. VI.

Nous obtenons un tel résultat pour chaque élément  $K$  de  $\mathbf{K}'$ .

Soit maintenant  $H$  un élément de  $\mathbf{H}$  (mais pas nécessairement de  $\mathbf{K}'$ ); le groupe  $\mathbf{H}H$  contient toujours des éléments de  $\mathbf{K}'$ , car,  $K$  étant un élément de  $\mathbf{K}'$ , il est aussi  $KH < \mathbf{K}'$ . Donc, si nous désignons par  $\mathbf{K}''$  le noyau du groupe  $\mathbf{H}, \mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  ont nécessairement des éléments communs; soit  $K$  un tel élément; soit p. e.  $K < \mathbf{C}'_{z\lambda}$ ; il est alors:  $\mathbf{H}K = \mathbf{A}'_z < \mathbf{K}'$ ,  $KH = \mathbf{B}'_\lambda < \mathbf{K}'$ ; d'après (4) on a:  $\mathbf{H}KH = \mathbf{K}''$ ; d'autre part:

$$\mathbf{H}KH = \mathbf{H}\mathbf{B}'_\lambda = \mathbf{H} \cdot \sum_{z=1}^{r'} \mathbf{C}'_{z\lambda} = \sum \mathbf{A}_z = \mathbf{K}';$$

donc:

$$\mathbf{K}'' = \mathbf{K}', \text{ c. q. f. d.}$$

Considérons maintenant des groupes  $\mathbf{G}P$  et  $Q\mathbf{G}$ ,  $P$  et  $Q$  étant des éléments quelconques du groupe  $\mathbf{G}$ . D'après le théorème 2 le noyau du groupe  $\mathbf{G}_1 \simeq \mathbf{G}P$  est:  $\mathbf{K}_1 \simeq \mathbf{D}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ , car  $\mathbf{G}$ , est manifestement de la 1<sup>re</sup> classe ( $\mathbf{K}$  étant comme ci-dessus le noyau de  $\mathbf{G}$ ). Admettons que  $\mathbf{K}_1$  contient un groupe  $\mathbf{A}'_z < \mathbf{A}_z$ ; il est alors:  $E_{z\lambda} < \mathbf{K}_1$ ;  $\mathbf{G}_1 E_{z\lambda} = \mathbf{A}'_z$ ; d'autre part:  $\mathbf{G}_1 E_{z\lambda} = \mathbf{G}(PE_{z\lambda})$ ; donc  $\mathbf{A}'_z = \mathbf{A}_z$  (car l'ordre de  $\mathbf{A}_z$  est la plus petite des ordres des groupes  $\mathbf{G}X$ , où  $X < \mathbf{G}$ ). Le groupe-noyau  $\mathbf{K}_1$  a donc la structure suivante:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}_{\alpha_1} + \mathbf{A}_{\alpha_2} + \dots + \mathbf{A}_{\alpha_{r'}} = \mathbf{B}'_1 + \mathbf{B}'_2 + \dots + \mathbf{B}'_s;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r'}$  étant  $r'$  ( $\leq r$ ) quelconques des indices  $1, 2, \dots, r$ ;

$$\mathbf{B}'_\lambda = \mathbf{C}_{\alpha_1\lambda} + \mathbf{C}_{\alpha_2\lambda} + \dots + \mathbf{C}_{\alpha_{r'}\lambda};$$

autrement dit:

$$\mathbf{K}_1 = \sum_{z,\lambda} \mathbf{C}_{z,\lambda} \text{ pour } z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r'}; \lambda = 1, 2, \dots, s.$$

En prenant le groupe  $Q\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}_2$ , nous obtiendrons des résultats analogues. Donc:

*Théorème 3:* Le noyau  $\mathbf{K}_1$  du groupe  $\mathbf{G}P (P < \mathbf{G})$  est composé d'un nombre, quelconque  $r'$  ( $\leq r$ ) des groupes  $\mathbf{A}_z$ ; autrement dit,  $\mathbf{K}_1 = \sum_{z,\lambda} \mathbf{C}_{z,\lambda}$ , où  $\lambda = 1, 2, \dots, s$ , et  $z$  est égal à  $r'$  quelconques des indices  $1, 2, \dots, r$ . De même, le noyau  $\mathbf{K}_2$  du groupe  $Q\mathbf{G} (Q < \mathbf{G})$  est composé d'un nombre quelconque  $s'$  ( $\leq s$ ) des groupes  $\mathbf{B}$ ; autrement dit,  $\mathbf{K}_2 = \sum_{z,\lambda} \mathbf{C}_{z,\lambda}$ , où  $z = 1, 2, \dots, r$ , et  $\lambda$  est égal à  $s'$  quelconques des indices  $1, 2, \dots, s$ .

*Colloraire:* Le noyau du groupe  $Q\mathbf{G}P$  a la structure suivante:  $\sum_{z,\lambda} \mathbf{C}_{z,\lambda}$ , où  $z$  parcourt  $r'$  quelconques des indices  $1, 2, \dots, r$ , et  $\lambda$  parcourt  $s'$  quelconques des indices  $1, 2, \dots, s$ .

Soit  $P$  un élément de  $\mathbf{G}$  de la 1<sup>re</sup> classe; et du genre  $k$ . Plus précis, soit  $P^k < \mathbf{C}_{z\lambda}$ ; nous avons alors;

$$\mathbf{G} > P\mathbf{G} > P\mathbf{G}^2 > \dots > P^k\mathbf{G} = \mathbf{A}_z;$$

et de même:

$$\mathbf{G} > P\mathbf{G} > P^2\mathbf{G} > \dots > P^k\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda.$$

Soit maintenant  $P$  de la 2<sup>de</sup> classe; aucune puissance de  $P$  n'est pas contenue dans  $\mathbf{K}$ ;  $\mathbf{G}$  contient  $P$ ; donc  $\mathbf{G}P > P^2$ ,  $\mathbf{G}P^2 > P^3$ , ect. Chaque groupe  $\mathbf{G}P^m$  aura donc toujours des éléments de la 2<sup>de</sup> classe et ne pourra pas par conséquent être égal à  $\mathbf{A}_z$ . De même,  $P^m\mathbf{G}$  ne pourra pas être égal à  $\mathbf{B}_\lambda$ . Nous avons donc une nouvelle définition des éléments de la 1<sup>re</sup> et de la 2<sup>de</sup> classes. Donc :

*Théorème 4* : Tout élément  $P$  de  $\mathbf{G}$  de la 1<sup>re</sup> classe a la propriété suivante:  $k$  étant le genre de  $P$ , il est  $\mathbf{G}P^k = \mathbf{A}_z$ ,  $P^k\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda$ . Si  $P$  est de la 2<sup>de</sup> classe, l'ordre du groupe  $\mathbf{G}P^m$  (pour chaque  $m$ ) est plus grand que l'ordre de  $\mathbf{A}_z$ , et de même, l'ordre de  $P^m\mathbf{G}$  est plus grand que l'ordre de  $\mathbf{B}_\lambda$ .

Posons la question suivante: quelle est la plus petite puissance d'un élément  $P$  de la 1<sup>re</sup> classe, pour qu'on a:  $\mathbf{G}P^l = \mathbf{A}_z$  ou  $P^l\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda$ ?  $P$  est contenu dans  $\mathbf{G}$ ; il doit donc être:  $P^{l+1} < \mathbf{A}_z$ ; il est donc  $l+1 = k$  le genre de  $P$ ;  $l = k - 1$ . Il est évident que cette condition, étant nécessaire, n'est pas suffisante.

Soit  $\mathbf{G}P = \mathbf{A}_z$ ; un tel élément  $P$  de  $\mathbf{G}$  soit nommé le *réducteur droit* de  $\mathbf{G}$ ; de même, si  $PG = \mathbf{B}_\lambda$ ,  $P$  soit nommé le *réducteur gauche* de  $\mathbf{G}$ ; si toutes les deux conditions sont remplies en même temps,  $P$  doit être appelé le *réducteur à deux côtés*. Tous les éléments du noyau  $\mathbf{K}$  sont des réducteurs à deux côtés de  $\mathbf{G}$ ; il sont tous du genre 1; mais  $\mathbf{G}$  peut aussi avoir des réducteurs  $R$  du genre 2; ils ne sont pas contenus dans  $\mathbf{K}$ . Le théorème suivant est évident:

*Théorème 5*: Tous les réducteurs de  $\mathbf{G}$  (les éléments de  $\mathbf{K}$  inclus) forment un groupe dont le noyau est  $\mathbf{K}$ . En général, si l'on adjoint à  $\mathbf{K}$  un ou plusieurs réducteurs de  $\mathbf{G}$ , on obtient de nouveau un groupe.

3. Considérons maintenant un groupe à noyau classique; soit  $\mathbf{G}$  un tel groupe et  $\mathbf{K} \simeq E + A + B + C + \dots$  sont noyau classique ( $E$  étant l'unité de  $\mathbf{K}$ ).

Soit  $P$  un élément quelconque de  $\mathbf{G}$ , mais pas de  $\mathbf{K}$ . Il est  $\mathbf{G}E = \mathbf{E}G = \mathbf{K}$ ; à cause de cela  $PE$  est  $EP$  sont des éléments de  $\mathbf{K}$ ; p. e.  $PE \simeq A$ ; de plus:

$$EP = (EP)E = E(PE) = EA = A; \text{ donc:}$$

$$PE = EP \simeq A \quad \dots \dots \dots (5)$$

Soit  $B < \mathbf{K}$ ;  $PB = P(EB) = (PE)B = AB$ ; de même:  $BP = BEP = BA$

Donc:  $PB = AB; BP = BA \quad \dots \dots \dots (6)$

Appelons  $A$  l'élément du noyau *conjugué* avec  $P$ . En général les éléments  $P$  et  $Q$  doivent être appelés *conjugués*, lorsqu'il est  $PE = QE$  (donc aussi  $EP = EQ$ ).

Soit  $A$  conjugué avec  $P$ ,  $B$  — avec  $Q$ ; nous avons:

$$PE = EP = A, \quad QE = EQ = B;$$

$QP(E = P(QE)) = PB = AB$ ; et de même:  $E(PQ) = AB$ ; c'est à dire  $PQ$  est conjugué avec  $AB$ . Donc:

*Théorème 6*: Le groupe  $\mathbf{G}$  est généralement isomorphe à son noyau classique  $\mathbf{K}$ ; cet isomorphisme est donné par la formule:  $\mathbf{G}E = \mathbf{K}$ :



*Corollaire 1:*  $P$  étant conjugué avec  $A$ , il est aussi  $P^n$  conjugué avec  $A^n$ . Si  $n$  est l'ordre de  $A$ ,  $P^n$  est conjugué avec  $E$ .

*Corollaire 2:* L'ordre de chaque élément  $P$  est divisible par l'ordre d'élément du noyau, conjugué avec  $P$ .

*Corollaire 3:* Si l'ordre de  $P$  est relatif prime avec l'ordre du noyau  $\mathbf{K}$ ,  $P$  doit être conjugué avec l'unité  $E$  de  $\mathbf{K}$ .

Un cas particulier des groupes à noyau classique se présente, si notre groupe est commutatif, c'est à dire, si nous avons:  $PQ = QP$  pour tous les éléments  $P, Q$  de notre groupe. Il est alors:

$$(PQ)^m = P^m Q^m.$$

Soit un de ces éléments, p. e.  $P$ , de la 1<sup>re</sup> classe et du genre  $k$ ;  $P^k$  est alors contenu dans  $\mathbf{K}$ ; donc:

$$(PQ)^k = P^k Q^k < \mathbf{K},$$

(car tous les éléments de  $\mathbf{K}$  sont des réducteurs du groupe  $\mathbf{G}$ ); c'est à dire  $PQ$  est aussi de la 1<sup>re</sup> classe, du genre  $\leq k$ . Il s'en suit:

*Théorème 7:* Dans un groupe commutatif le produit d'un élément de la 1<sup>re</sup> classe et du genre  $k$  par un autre élément quelconque est aussi de la 1<sup>re</sup> classe et du genre  $\leq k$ .

*Corollaire:* Dans un groupe commutatif tous les éléments de la 1<sup>re</sup> classe et du genre  $\leq k$  forment un groupe.

4. Sur „l'addition“ des groupes classiques. Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux groupes classiques sans éléments communs (leurs unités sont aussi différentes). Nous posons le problème suivant; est-ce possible que  $\mathbf{G} \simeq \mathbf{A} + \mathbf{B}$  soit un groupe? Pour ce but nous devons définir tous les produits  $AB$  et  $BA$ ,  $A$  étant  $< \mathbf{A}$ , et  $B < \mathbf{B}$ . Il est évident que la loi de l'inversion uniforme ne peut pas être remplie pour  $\mathbf{G}$ . En effet, soit, p. e.,  $AB = A' < \mathbf{A}$ ; en désignant par  $A''$  le produit  $A^{-1}A' < \mathbf{A}$ , nous obtenons:  $AA'' = A'$ , c'est à dire:  $AB = AA''$  sans avoir  $B = A''$ . En prenant  $AB < \mathbf{B}$  nous obtiendrons le même.

Tâchons alors à définir  $AB$  et  $BA$  de telle façon, pour que la loi associative au moins soit conservée pour  $\mathbf{G}$ .

Soit donc  $\mathbf{G} \simeq \mathbf{A} + \mathbf{B}$  un groupe associatif, mais sans la loi de l'inversion uniforme. D'après la théorie général  $\mathbf{G}$  doit avoir un noyau  $\mathbf{K}$ , qui consiste en groupes classiques sans éléments communs et isomorphes deux à deux. Dans notre cas il doit être: 1)  $\mathbf{K} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1$ , ou 2)  $\mathbf{K} = \mathbf{A}_1$ , ou 3)  $\mathbf{K} = \mathbf{B}_1$ ;  $\mathbf{A}_1$  signifie un sous-groupe de  $\mathbf{A}$  (peut être  $= \mathbf{A}$ ); de même,  $\mathbf{B}_1$  est un sous groupe de  $\mathbf{B}$  (ou  $= \mathbf{B}$ ); dans le cas 1)  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{B}_1$  doivent être simplement isomorphes. Prouvons que dans les cas 1) ou 2)  $\mathbf{A}_1$  doit être  $= \mathbf{A}$ . Soit  $E$  l'unité de  $\mathbf{A}$ , par conséquent aussi de  $\mathbf{A}_1$ ; la théorie générale nous apprend, que  $EGE = \mathbf{A}_1$  (d'après (4)); d'autre part:  $EAE = \mathbf{A}$ ;  $\mathbf{A} < \mathbf{G}$ ;  $EAE < EGE$ ;  $\mathbf{A} < \mathbf{A}_1$ ; donc:  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ . De même, dans les cas 1) ou 3)  $\mathbf{B}$  doit être égal à  $\mathbf{B}$ . Trois cas donc sont possibles: 1)  $\mathbf{K} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{G}$ ; 2)  $\mathbf{K} = \mathbf{A}$ ; 3)  $\mathbf{K} = \mathbf{B}$ .

Le cas 1) peut se présenter seulement, si **A** et **B** sont simplement isomorphes; dans ce cas un côté de la loi de l'inversion uniforme est rempli pour **G**; il est:  $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$ , ou:  $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{BA} = \mathbf{A}$ .

Les cas 2) et 3) présentent évidemment le même. Considérons, par exemple, le cas 2). **G** a dans ce cas le noyau classique **A**. D'après le théorème 6 **G** est généralement isomorphe à son noyau **A**. Un élément quelconque *P* de **G** est conjugué avec l'élément  $PE = EP$  du noyau (*E* étant l'unité de **A**). Donc:

$$\mathbf{BE} \simeq \mathbf{A}_1 < \mathbf{A}.$$

Prouvons que  $\mathbf{A}_1$  est un groupe. Soient *P* et *Q* des éléments de **B**;  $PQ \simeq R$ ;  $PE \simeq A$ ,  $QE \simeq B$ ,  $RE \simeq C$ ; *A*, *B*, *C* sont des éléments de  $\mathbf{A}_1$ . Nous prouvons que  $AB = C$ ; en effet:

$$AB = (PE)B = P(EB) = PB = P(QE) = (PQ)E = RE = C.$$

$\mathbf{A}_1$  est donc un sous-groupe de **A**;  $\mathbf{A}_1$  est donc classique; **B** est isomorphe à  $\mathbf{A}_1$ ; à l'élément *P* de **B** correspond un seul élément  $PE$  de  $\mathbf{A}_1$ ; mais pas inversement: il peut arriver que, *P* et *Q* étant des éléments différents de **B**, il soit:  $PE = QE \simeq A < \mathbf{A}_1$ . C'est à dire le groupe **B** est homomorphe à  $\mathbf{A}_1$  (d'après *Frobenius*); d'après la théorie des groupes classiques  $\mathbf{A}_1$  est dans ce cas simplement isomorphe au groupe complémentaire  $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$ , **C** étant un sous-groupe invariant de **B**.

Étant donnés deux groupes classiques **A** et **B**, prenons un de ces groupes, p. e. **A**, comme noyau de **G**. Choisissons un sous-groupe  $\mathbf{A}_1$  de **A**, qui soit simplement isomorphe à un groupe complémentaire  $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$  de **B**. Soit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{C} + \mathbf{CP} + \mathbf{CQ} + \dots; \\ \mathbf{A}_1 &\simeq \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots; \end{aligned}$$

l'isomorphisme de  $\mathbf{A}_1$  et  $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$  donne une correspondance:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\text{ correspond à } \mathbf{E} \text{ (l'unité),} \\ \mathbf{CP} &\text{ ,, ,, } \mathbf{A}, \\ \mathbf{CQ} &\text{ ,, ,, } \mathbf{B}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Définissons maintenant: pour chaque élément  $S < \mathbf{C}$

$$SE = E, (SP)E = A, (SQ)E = B, \dots;$$

en vertu de (5) nous devons admettre:

$$ES = E, E(SP) = A, E(SQ) = B, \dots$$

et en vertu de (6):

$$PA = (PE)A, AP = A(EI),$$

*P* étant  $< \mathbf{B}$ ,  $A < \mathbf{A}$

Ces conditions définissent le groupe **G** entièrement. Il est facile de se convaincre que la loi associative est remplie pour le groupe **G** ainsi construit.

Faisons encore quelques observations. Si  $K$  est l'unité du groupe  $B$ , il est toujours  $K < C$ , donc:  $KE = EK = E$ ; pour chaque élément  $A < A$  il est:  $KA = AK = A$ ;  $K$  est donc l'unité générale pour tous les éléments de  $G$ .

On peut prendre  $C = B$ ; nous aurons alors pour chaque  $P < B$ :  $PE = EP = E$ ,  $PA = AP = A$  pour chaque  $A < A$ . C'est à dire tous les éléments de  $A$  sont pour le groupe  $B$  les „éléments-zéros“; ce cas est le plus simple; il est le seul possible, si  $B$  est un groupe simple, et  $A$  n'a pas de sous-groupe simplement isomorphe à  $B$ . Le second cas-limite nous avons, si  $B$  est homomorphe au groupe  $A$  tout-entier; il est dans ce cas:  $A_1 = A$ ,  $BE = EB = A$ . Ce cas comprend aussi le cas, où  $B$  est simplement isomorphe à  $A$ ; dans ce dernier cas une autre construction du groupe  $G$  est possible, à savoir, — comme groupe avec la loi droite ou gauche de l'inversion uniforme. Excepté ce cas, nous voyons, que  $G$  est toujours du 2<sup>d</sup> rang; le groupe  $B$  est „subordonné“ au groupe  $A$ . Observons que  $A_1 + B \simeq G_1$  est aussi un groupe avec le noyau  $A_1$ .

*Théorème 8:* Étant donnés 2 groupes classiques  $A$  et  $B$  sans élément commun, on peut toujours construire un groupe associatif  $G \simeq A + B$ ; excepté le cas, où  $A$  et  $B$  sont simplement isomorphes, le groupe  $G$  est à noyau classique.

Ce théorème est aussi vrai pour  $n$  groupes classiques donnés et sans éléments communs. Cependant ce cas général présente des difficultés spécifiques; nous reviendrons à ce problème dans un autre article.

---

РЕЗЮМЕ:

**О некоторых случаях конечных групп без закона однозначной обратимости.**

**А. Сушкевич.**

Вначале перечисляются основные свойства групп без закона однозначной обратимости. Элементы и подгруппы такой группы делятся на 2 класса. Доказываются теоремы: всякая подгруппа так-назыв. группы-ядра есть тоже группа-ядро. Если  $G$  — группа с ядром  $K$ , а  $H$  ее подгруппа 1-го класса, то ядро группы  $H$  есть общий наибольший делитель групп  $K$  и  $H$ . Выясняется строение ядер групп:  $GP$ ,  $QG$ ,  $QGP$ , где  $P$  и  $Q$  — элементы из  $G$ . Далее, рассматриваются группы с классическим ядром и, как частный их вид, — коммутативные группы. Наконец, рассматривается проблема „сложения“ классических групп, которая и решается для случая двух групп.

## Прибор для ускоренного вычисления степенных вычетов по данному нечетному первоначальному модулю \*).

М. Н. Марчевский.

1. Из элементарной теории чисел известно, что целое число  $A$  называется *вычетом  $m$ -ой степени* по данному нечетному первоначальному модулю  $p$  в том случае, если оказывается возможным сравнение

$$x^m \equiv A \pmod{p}; \dots \dots \dots (1)$$

если же не существует значений  $x$  удовлетворяющих этому сравнению, то число  $A$  называется *невычетом  $m$ -ой степени* по модулю  $p$ . Относительно сравнений вида (1) существует следующая теорема \*\*).

„Сравнение (1) возможно только в том случае, когда

$$A^{\frac{p-1}{\omega}} \equiv 1 \pmod{p},$$

где  $\omega$  — общий наибольший делитель чисел  $p-1$  и  $m$ “.

Мы предположим везде в дальнейшем, что  $p-1$  делится на  $m$ ; тогда, очевидно, в предыдущей теореме будет  $\omega = m$ , и все вычеты  $A$  по модулю  $p$  найдутся из сравнения

$$A^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p} \dots \dots \dots (2)$$

Чтобы ответить на вопрос, сколько существует *различных* (т.-е. не сравнимых по модулю  $p$ ) вычетов  $m$ -ой степени по нечетному первоначальному модулю  $p$ , припомним еще одну теорему из теории чисел, а именно \*\*\*):

„Сравнение  $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  имеет  $d$  решений, где  $d$  есть общий наибольший делитель чисел  $n$  и  $p-1$ “.

Обращаясь к сравнению (2), мы видим, что общий наибольший делитель  $d$  чисел  $n = \frac{p-1}{m}$  и  $p-1$  есть  $d = \frac{p-1}{m}$ , следовательно,

\*) Прибор этот демонстрировался в заседаниях научно-исследовательской кафедры математического анализа 20.I.27 и Харьковского Математического Общества 24.II.27.

\*\*\*) См., напр., Чебышев, Теория сравнений, изд. 3-е 1901 г., стр. 100 (в теореме предполагается, что  $A$  не делится на  $p$ ).

\*\*\*\*) Чебышев, *ibid.* стр. 96.

сравнение (2) даст  $\frac{p-1}{m}$  различных значений для  $A$ , а потому мы заключаем, что:

*Число различных вычетов  $m$ -ой степени по нечетному первоначальному модулю  $p$  равно  $\frac{p-1}{m}$ , при условии, что  $p-1$  делится на  $m$ .*

Так, например, по модулю  $p=13$  существует 6 квадратичных вычетов (а именно: 1, 3, 4, 9, 10, 12), 4 кубических вычета (1, 5, 8, 12) и 2 вычета 6-ой степени (1 и 12).

2. Условимся (в соответствии с немецкими словами „Rest“ — вычет и „Nichtrest“ — невычет) обозначать различные вычеты буквами  $R, R_1, R_2, \dots$ , а невычеты — буквами  $N, N_1, N_2, \dots$ . Тогда в случае квадратичных вычетов по нечетному первоначальному модулю имеем хорошо известные свойства:

1. Произведение двух вычетов есть также вычет (т.-е.  $R_1 \cdot R_2 = R$ )
2. Произведение вычета на невычет есть невычет (т.-е.  $R_1 \cdot N_1 = N$ )
3. Произведение двух невычетов есть вычет (т.-е.  $N_1 \cdot N_2 = R$ )

Легко показать, что для вычетов любой степени по нечетному первоначальному модулю сохраняют силу лишь первые два свойства, третье же может и не иметь места, иначе говоря, произведение двух невычетов может в одних случаях дать вычет, а в других — остаться невычетом.

Действительно, если  $R_1$  и  $R_2$  — вычеты, то по (2) имеем

$$R_1^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p}, \quad R_2^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p};$$

перемножая эти сравнения, имеем

$$(R_1 \cdot R_2)^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p},$$

откуда и вытекает свойство 1°. Если далее  $R_1$  — вычет, а  $N_1$  — невычет, то тогда

$$R_1^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p}, \quad N_1^{\frac{p-1}{m}} \equiv k \pmod{p}, \quad \text{где } k \neq 1;$$

отсюда получается свойство 2°, так как теперь

$$(R_1 \cdot N_1)^{\frac{p-1}{m}} \equiv k \pmod{p} \text{ и } k \neq 1.$$

Наконец, если  $N_1$  и  $N_2$  — невычеты, то из сравнений

$$N_1^{\frac{p-1}{m}} \equiv k_1 \pmod{p}, \quad N_2^{\frac{p-1}{m}} \equiv k_2 \pmod{p}, \quad \text{где } k_1 \neq 1 \text{ и } k_2 \neq 1,$$

вытекает лишь то, что

$$(N_1 \cdot N_2)^{\frac{p-1}{m}} \equiv k_1 \cdot k_2 \pmod{p},$$

и тогда возможны случаи как

$$k_1 \cdot k_2 \equiv 1 \pmod{p}, \text{ так и } k_1 \cdot k_2 \equiv k \pmod{p}, \text{ где } k \neq 1;$$

в первом случае произведение  $N_1 \cdot N_2$  окажется вычетом, во втором — невычетом.

3. Заметим еще, что *всякое целое число, равное  $m$ -ой степени другого целого числа, является вычетом  $m$ -ой степени по модулю  $p$* , потому что, если  $R = k^m$ , то сравнение

$$x^m \equiv R \pmod{p}$$

имеет очевидное решение  $x = k$ .

На основании этого соображения можно практически находить степенные вычеты. Так, например, выше было упомянуто, что при  $p = 13$  существует 6 квадратичных вычетов, а именно, числа 1, 3, 4, 9, 10, 12. Их можно было бы найти, пользуясь тем, что все точные квадраты должны быть квадратичными вычетами. Написав первые 6 квадратов: 1, 4, 9, 16, 25, 36 и заменив последние 3 числа числами 3, 12, 10 (сравнимыми с ними по модулю 13) мы и получим упомянутые 6 вычетов лишь в ином порядке.

Иногда, впрочем, такой способ может оказаться и неудобным. Например, чтобы найти для того же модуля  $p = 13$  все 4 кубических вычета: 1, 5, 8, 12, станем выписывать точные кубы; тогда мы увидим, что

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad (3^3 = 27 \equiv 1), \quad 4^3 = 64 \equiv 12, \quad (5^3 = 125 \equiv 8), \\ (6^3 = 216 \equiv 8), \quad 7^3 = 343 \equiv 5;$$

таким образом, пришлось сделать три лишних вычисления, поставленные нами в скобках, пока не получились все требуемые кубические вычеты.

4. Из предыдущего ясно, насколько желательны всякие упрощения в процессе вычисления степенных вычетов. Мы ограничимся следующими указаниями ( $1^0 - 7^0$ ):

1<sup>0</sup>. Число 2 есть квадратичный вычет простых чисел вида  $p = 8k + 1$  и  $p = 8k + 7$  и квадратичный невычет простых чисел вида  $p = 8k + 3$  и  $p = 8k + 5$  \*).

2<sup>0</sup>. Для простых чисел вида  $p = 4k + 1$  два числа  $a$  и  $p - a$  являются или оба квадратичными вычетами или оба квадратичными невычетами \*\*).

3<sup>0</sup>. Для простых чисел вида  $p = 4k + 3$  одно из двух чисел  $a$  и  $p - a$  является квадратичным вычетом, а другое квадратичным невычетом \*\*).

Следующие свойства  $4^0 - 7^0$  относятся к любому нечетному простому модулю.

4<sup>0</sup>. Два числа  $a$  и  $p - a$  являются или одновременно вычетами или одновременно невычетами *нечетной* степени.

Для доказательства положим, что  $a$  есть вычет нечетной степени по модулю  $p$ , т.-е. что имеет место сравнение

\*) См. напр., Gauss, Disquisitiones arithmeticae, §§ 112 — 114 (Werke, Bd. I. стр. 84 — 86).

\*\*\*) Ibid., § 111 (стр. 84).

$$x^{2m+1} \equiv a \pmod{p};$$

тогда, очевидно, можно написать:

$$-x^{2m+1} \equiv -a \pmod{p}, \quad (-x)^{2m+1} \equiv p-a \pmod{p},$$

откуда и видно, что  $p-a$  тоже есть вычет. Если бы  $a$  было невычетом нечетной степени, то и  $p-a$  тоже оказалось бы невычетом, ибо иначе, в силу только что доказанного, число  $p-(p-a)=a$  было бы вычетом, что противоречит допущению.

5°. Если два вычета  $R_1$  и  $R_2$  одной и той же степени таковы, что  $R_1$  делится на  $R_2$ , то частное  $R_1:R_2$  также будет вычетом.

Действительно, предположение  $R_1:R_2=N$  невозможно, потому что тогда мы имели бы  $R_2N=R_1$ , тогда как  $R_2N$  должно быть невычетом.

6°. Для вычетов и невычетов одной и той же степени, в случае делимости вычета на невычет или невычета на вычет, частное всегда будет невычетом.

Это, подобно предыдущему, видно из невозможности предположений, что  $R_1:N_1=R$  или  $N_1:R_1=R$ , откуда и вытекает, что  $R_1:N_1=N$  и  $N_1:R_1=N$ .

7°. В случае делимости друг на друга двух *квадратичных* невычетов, их частное  $N_1:N_2$  будет вычетом.

Это видно из невозможности для *квадратичных* невычетов допущения  $N_1:N_2=N$ , из которого следовало бы  $N_2N=N_1$ , тогда как  $N_2N$  есть квадратичный вычет.

5. После всего сказанного мы уже можем перейти к выяснению очень простой идеи, положенной в основу конструкции прибора, часто позволяющего очень легко и быстро вычислить все вычеты по данному нечетному простому модулю  $p$ .

Условимся для краткости называть числа  $a$  и  $p-a$  (где  $a < p$ ) *дополнительными* одно для другого, и представим себе, что числа  $1, 2, 3, \dots, p-3, p-2, p-1$  написаны в две строки так, что в верхней находится первая половина числа (от 1 до  $\frac{p-1}{2}$ ) а в нижней — все остальные числа *в обратном порядке* (от  $\frac{p+1}{2}$  до  $p-1$ , и *идя справа налево*):

$$\left. \begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \dots & \dots & \dots & \frac{p-1}{2} \\ p-1, & p-2, & p-3, & \dots & \dots & \dots & \frac{p+1}{2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

При таком расположении мы видим, что в каждом вертикальном столбце в (3) располагаются числа дополнительные друг другу. Так, для модуля  $p=13$  мы получили бы следующие две строки чисел:

$$\left. \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 12, & 11, & 10, & 9, & 8, & 7 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Воспользуемся этим примером для того, чтобы показать упрощенный способ вычисления, например, *кубических* вычетов по модулю 13, число которых, как мы знаем, должно быть равно  $4 \left( = \frac{13-1}{3} \right)$ . К числу этих вычетов должны принадлежать 1 и 8, как точные кубы. Остальные же два вычета найдутся на основании указания  $4^0$ , при чем, благодаря сделанному расположению чисел (4) в две строчки, эти вычета  $13-1=12$  и  $13-8=5$  окажутся в тех же вертикальных рядах, в которых находятся два предыдущих вычета 1 и 8. Чтобы отметить это обстоятельство, мы поставили одну точку между числами 1 и 12, а другую — между 8 и 5. Такого рода точки, поставленные *между* двумя числами одного вертикального ряда, будут всегда означать, что *оба* эти числа одновременно являются вычетами.

Остается посмотреть, как отмечать вычеты в тех случаях, когда при наличии двух строчек типа (3) из двух чисел одного вертикального ряда одно будет вычетом, а другое — невычетом, как это, например, бывает при нахождении квадратичных вычетов по модулю  $p = 4k + 3$  (см. указание  $3^0$ ).

Мы условимся в тех случаях когда вычет находится в *верхней* строчке, ставить точку *над* ним, когда же он находится в *нижней* строчке, ставить точку *под* ним.

Положим для примера, что мы ищем все квадратичные вычеты по модулю  $p = 11$  (типа  $4k + 3$ ). Тогда очень легко придем к следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} \overset{\cdot}{1} & 2 & \overset{\cdot}{3} & \overset{\cdot}{4} & \overset{\cdot}{5} \\ 10 & 9 & 8 & 7 & \underset{\cdot}{6} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} \overset{\cdot}{1} & 2 & \overset{\cdot}{3} & \overset{\cdot}{4} & \overset{\cdot}{5} \\ 10 & 9 & 8 & 7 & \underset{\cdot}{6} \end{array}} \right\}$$

Действительно, отмечаем прежде всего числа 1, 4, 9, как точные квадраты; тогда *дополнительные* для них числа 10, 7, 2 представят, по  $3^0$ , невычеты. Частное  $10:2=5$  от деления двух невычетов даст, по  $7^0$ , вычет, следовательно, 6 будет невычетом. Наконец, частное  $6:2=3$  от деления двух невычетов снова даст вычет. Отсюда и получатся все  $5 \left( = \frac{11-1}{2} \right)$  квадратичных вычетов по модулю 11, отмеченные точками.

Вычисление вычетов можно, разумеется, производить различными способами. Например, в последнем примере вместо того, чтобы отыскивать вычет 5 путем деления  $10:2$ , можно было бы воспользоваться тем, что число 16 (не содержащееся в нашей схеме), как точный квадрат, является квадратичным вычетом; отняв от него модуль, т. е. 11, снова получим в качестве вычета число 5. Делая те или иные изменения в процессе вычисления вычетов, нужно лишь заботиться об упрощении выкладок. Дать здесь какие-либо специальные правила не представляется возможным; каждый может действовать так, как ему представляется удобней.





в *среднем* ряду. По окончании вычислений все 52 кубических вычета по модулю 157 будут следующие:

1	2	4	7	8	14	16	23	27	28	29	32	39
156	155	153	150	149	143	141	134	130	129	128	125	118
41	45	46	49	54	56	58	59	64	65	67	75	78
116	112	111	108	103	101	99	98	93	92	90	82	79

Самое же вычисление вычетов можно быстро произвести, например, так. Отметив прежде всего точные кубы: 1, 8, 27, 64 и 125, мы уже получаем 5 пар кубических вычетов. Заметив, что в числе их оказалось число 32 (в одном столбце с 125), можем получать дальнейшие вычеты так:

- 1)  $64:32=2$  (и 155); 2)  $2 \cdot 27=54$  (и 103); 3)  $2 \cdot 54=108$  (и 49);
- 4)  $2 \cdot 49=98$  (и 59); 5)  $2 \cdot 59=118$  (и 39); 6)  $2 \cdot 39=78$  (и 79);
- 7)  $2 \cdot 64=128$  (и 29); 8)  $2 \cdot 29=58$  (и 99); 9)  $2 \cdot 58=116$  (и 41);
- 10)  $2 \cdot 41=82$  (и 75); 11)  $2 \cdot 75=150$  (и 7); 12)  $2 \cdot 7=14$  (и 143);
- 13)  $2 \cdot 14=28$  (и 129); 14)  $2 \cdot 28=56$  (и 101); 15)  $2 \cdot 56=112$  (и 45);
- 16)  $2 \cdot 45=90$  (и 67); 17)  $2 \cdot 67=134$  (и 23); 18)  $2 \cdot 23=46$  (и 111);
- 19)  $2 \cdot 46=92$  (и 65); 20)  $2 \cdot 2=4$  (и 153); 21)  $2 \cdot 8=16$  (и 141).

Присоединяя эту 21 пару вычетов к ранее указанным 5 парам, мы и получим все 52 кубических вычета по модулю 157. Так как все только что приведенные вычисления совершаются очень быстро в уме, то ясно, что все 26 штифтов будут в течение очень короткого промежутка времени расставлены в надлежащих местах, и нам останется лишь записать окончательный результат.

---

*M. Marzewsky. Appareil pour l'évaluation rapide des résidus pour un module premier impair. Résumé.* Profitant les propriétés élémentaires des résidus et des non-résidus (№ 4,  $1^0 - 7^0$ ) je construisis un appareil pour l'évaluation rapide des résidus. Il se compose de même que la règle logarithmique de deux parties *A* et *B* dont la première est immobile et la deuxième au contraire mobile (voir la figure dans № 6). La partie *A* contient trois rangées d'ouvertures pour y placer des goupilles, qui servent à noter des résidus à l'aide des remarques signalées plus haut (№ 4,  $1^0 - 7^0$ ). Quand les deux règles *A* et *B* sont placées d'une manière convenable et tous les résidus sont marqués par des goupilles, on doit seulement inscrire le résultat, et puis on peut retirer les goupilles et l'appareil est prêt pour les nouvelles évaluations des résidus pour un autre module quelconque.

## Самопроективные или $W$ — кривые, (Интегральные кривые уравнения Якоби).

Н. Душин.

### 1. Определение $W - C$ .

Рассматриваемые кривые

$A^0$ , с одной стороны являются *инвариантными кривыми при коллинеарных преобразованиях*, допускающих одночленную группу (преобразований) и аналитически определяемых уравнениями:

$$\rho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (1)$$

Различным типам этих преобразований соответствуют и различные типы инвариантных кривых.

[S. Lie и F. Klein: „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces“ Comptes rendus T. 70. 1870 p. 1222—1226, 1275—1279.

S. Lie и F. Klein: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch eingeschlossenen system von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“ Mathem. Annalen B. IV. 1871 г.].

$B^0$ . С другой стороны  $W - C$  являются *интегральными кривыми уравнения Якоби*.

$$Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0, \dots \dots \dots (2)$$

где  $L$ ,  $M$  и  $N$  — однородные многочлены 1 степени относ.  $x$  и  $y$ .

[Jacobi „De integratione aequationis differentialis

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + \\ + (C + C'x + C''y)dx = 0 \text{ „Crelle Journal B. 24. 1842}].$$

### 2<sup>0</sup>. Основные типы коллинеарного преобразования плоскости.

При определении инвариантных элементов коллинеарного преобразования, как известно, приходим к характеристическому уравнению

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \rho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \rho \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (3)$$

третьей степени относительно  $\rho$ .

Отсюда имеем следующие основные типы коллинеарных преобразований плоскости.

I. Первый—когда все корни  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вещественны и различны. Инвариантной фигурой в этом случае является треугольник вещественный во всех своих частях (фиг. 1) и

каноническими ур-ми коллинеации будут ур-ия вида

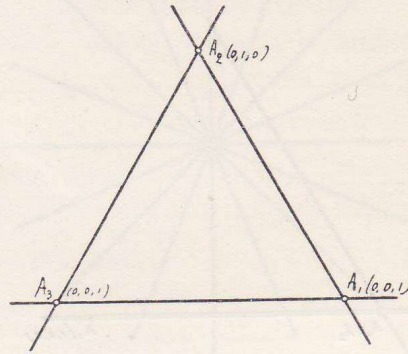
$$\rho y_i = \rho_i x_i. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

I<sup>0</sup>. Частный случай—случай двух мнимых сопряженных корней

$$(\rho_2 \text{ и } \rho_3)$$

Инвариантная фигура здесь будет определяться вещественной точкой  $A_1$ , вещественной прямой вне ее и двумя мнимыми прямыми (фиг. 2).

Канонические ур-ия преобразования:



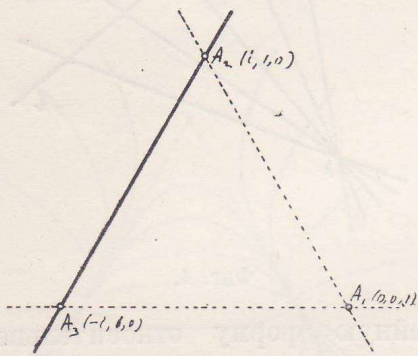
I. Фиг. 1.

$$\left. \begin{aligned} \rho y_1 &= m x_1 - n x_2 \\ \rho y_2 &= n x_1 + m x_2 \\ \rho y_3 &= k x_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

II. Второй случай—случай двойного корня. [ $\rho_1 \neq \rho_2 = \rho_3$ ], при условии, что не все миноры  $\Delta_{ik} = 0$  [ $\Delta_{ik}$ —миноры второго порядка относит.  $a_{ik}$ ].

Инвариантная фигура состоит из двух пересекающихся инвариантных прямых, из коих прямая, соединяющая двойную инвариантную точку с простой, есть двойная прямая (фиг. 3).

Канонические ур-ия коллинеации этого типа будут



Фиг. 2.

$$\left\{ \begin{aligned} \rho y_1 &= \rho_1 x_1 \\ \rho y_2 &= \rho_2 x_2 \\ \rho y_3 &= \rho_2 x_3 + \beta x_2, \text{ где } \beta \neq 0 \end{aligned} \right. \dots \dots (6)$$

III. Случай, когда имеем двойной корень [ $\rho_1 \neq \rho_2 = \rho_3$ ] и все миноры  $\Delta_{ik} = 0$ .

Инвариантная фигура состоит из  $\infty^1$  инвариантных точек, лежащих на одной прямой  $l$  и  $\infty^1$  инвариантных прямых, проходящих через одну точку  $A$ , причем точка  $A$  вне прямой  $l$ —случай перспективной коллинеации (фиг. 4).

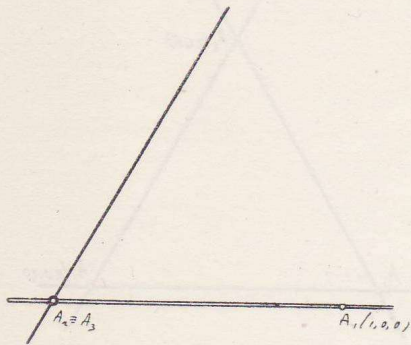
Ее канонические ур-ия

$$\left. \begin{aligned} \rho y_1 &= \rho_1 x_1 \\ \rho y_2 &= \rho_2 x_2 \\ \rho y_3 &= \rho_3 x_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

IV. *Случай, когда ур-ие  $\Delta(\rho) = 0$  имеет тройной корень  $[\rho_1 = \rho_2 = \rho_3]$ , но не все миноры  $\Delta_{ik} = 0$ .*

Инвариантная фигура состоит из тройной точки, лежащей на тройной прямой (фиг. 5) и каноническая форма коллинеации определяется ур-ем:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho y_1 &= \rho_1 x_1 \\ \rho y_2 &= \alpha x_1 + \rho_1 x_2 \\ \rho y_3 &= \alpha x_2 + \rho_1 x_3, \text{ где } \alpha \neq 0 \end{aligned} \right. \dots (8)$$



Фиг. 3.

V. *Наконец, последний случай, когда  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  и все  $\Delta_{ik} = 0$ .*

Инвариантная фигура состоит из  $\infty'$  инвариантных точек, лежащих на одной прямой  $l$  и  $\infty'$  инвариантных прямых, проходящих через одну точку  $A$ , причем точка  $A$  лежит на прямой  $l$  — случай эллиции (фиг. 6).

Ее канонические ур-ия

$$\left\{ \begin{aligned} \rho y_1 &= \rho_1 x_1 \\ \rho y_2 &= \rho_1 x_2 + \alpha x_1 \\ \rho y_3 &= \rho_1 x_3 \end{aligned} \right. , \text{ где } \alpha \neq 0 \dots (9)$$

3°. *Связь коллинеации с коннексами и ур-ия Якоби с коллинеацией.*

Применяя общее коллинеарное преобразование

$$\rho y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i=1, 2, 3) \dots (1)$$

к ур-ию  $\sum u_i y_i = 0$ , где  $i=1, 2, 3$  и  $y_i$  точка прямой  $u_i$ , получим ур-ие

$$f(u, x) \equiv \sum \sum a_{ik} u_i x_k = 0 \dots (10),$$

определяющее самую общую билинейную форму относительно контрагredientных переменных  $u$  и  $x$ , или, по терминологии Clebsch'a, коннекс первого порядка и первого класса, короче коннекс (1, 1).

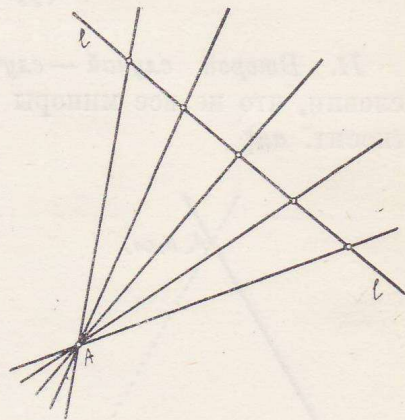
[A. Clebsch. *Leçons sur la géométrie* p. 351, 1883].

Выделим между билинейными коннексами *главный коннекс*

$$\sum u_i x_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (11)$$

Фиг. 5.

и рассмотрим совокупность элементов, общих коннексам (10) и (11), так называемую *главную коинциденцию* коннекса.



Фиг. 4.

При постоянном значении  $x_i$ , уравнение (10) представляет кривую огибаемую прямыми  $u_i$ , из числа их в силу условия (11) выделяются касательные, проходящие через точки  $x_i$ .

Соответственно, при постоянном значении  $u_i$ , уравнение (10) определяет кривую, образуемую точками  $x_i$ , из последних условием (11) выделяются точки пересечения с прямой  $u_i$ .

Меняя непрерывно  $x_i$  во втором случае (resp.  $u_i$  в первом), мы получаем всю кривую.

Для определения уравнения кривых, образуемых таким способом, имеем в силу (11) следующую систему:

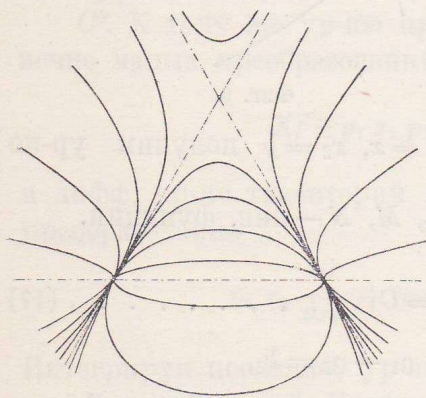
$$\left. \begin{aligned} \sum u_i X_i &= 0 \\ \sum u_i x_i &= 0 \\ \sum u_i (x_i + dx_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

где  $x_i$  — точка инцидентная с прямой  $u_i$ ,  $x_i + dx_i$  — точка, соседняя с  $x_i$  и  $X_i$  — любая точка прямой  $u_i$ .

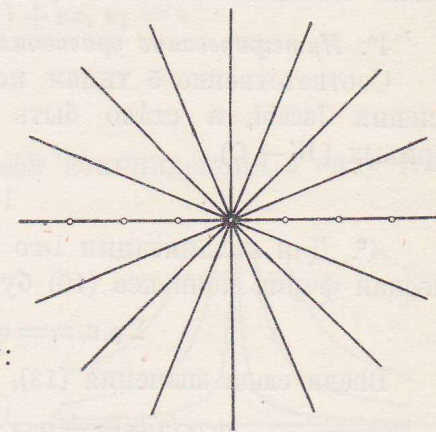
Для совместности этой системы имеем условие

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 + dx_1 & x_2 + dx_2 & x_3 + dx_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0$$

Разлагая последний определитель по элементам первой строки, получим



Фиг. 7.



Фиг. 6.

$$X_1 (xdx)_{23} + X_2 (xdx)_{31} + X_3 (xdx)_{12} = 0,$$

где

$$(xdx)_{23} = x_2 dx_3 - x_3 dx_2$$

и т. д.

Сравнивая с первым ур-ем системы (12), находим, что координаты  $u_i$  удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} \tau u_1 &= (xdx)_{23} \\ \tau u_2 &= (xdx)_{31} \\ \tau u_3 &= (xdx)_{12} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

Введя эти значения в (10), получим

$$\begin{vmatrix} (a_{1k} x_k) & (a_{2k} x_k) & (a_{3k} x_k) \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (14)$$

— дифференциальное уравнение искомым кривых.

Но последнее уравнение есть ур-ие Якоби, приведенное к однородному виду.

Отсюда, связью уравнения Якоби с коллинеарными преобразованиями можно воспользоваться для изучения свойств его интегральных кривых.

4°. Интегрирование уравнения Якоби.

Соответственно 5 типам коллинеации получаем и 5 типов уравнения Якоби, а стало быть и 5 типов семейств интегральных кривых ( $W - C$ ).

I-й тип.

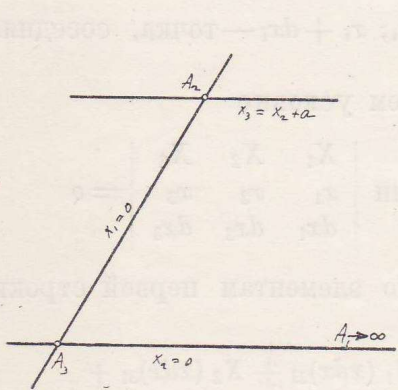
A°. Для коллинеации I-го типа, определяемой ур-ми (4), каноническая форма коннекса (10) будет вида

$$\sum \rho_i u_i x_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (15)$$

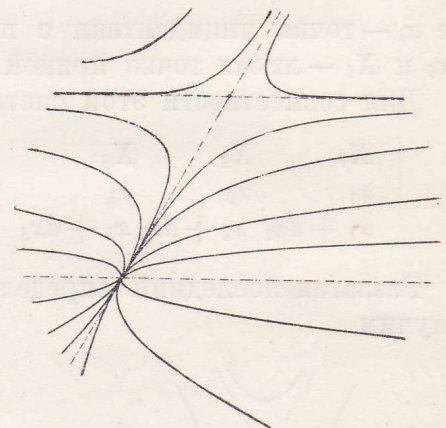
Введя сюда значения (13), получаем дифф. ур-ие.

$$\rho_1 x_1 (adx)_{23} + \rho_2 x_2 (adx)_{31} + \rho_3 x_3 (adx)_{12} = 0 \dots \dots \dots (16)$$

Последнее ур-ие есть упрощенное ур-ие Якоби. Действительно



Фиг. 8.



Фиг. 9.

полагая  $x_3 = 1$ ,  $dx_3 = 0$  и заменяя  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  получим ур-ие Якоби вида

$$L(xdx - ydy) - Mdy + Ndx = 0, \text{ где } L, M, N - \text{лин. функции.}$$

Интегрируя ур-ие (16), получим

$$x_1^{\rho_2 - \rho_3} x_2^{\rho_3 - \rho_1} x_3^{\rho_1 - \rho_2} = C \dots \dots \dots (17)$$

или полагая

$$\rho_2 - \rho_3 = k_1; \rho_3 - \rho_1 = k_2, \rho_1 - \rho_2 = k_3,$$

имеем

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} = C$$

где

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0 \dots \dots \dots (18)$$

— ур-ие искомым интегральным кривых (фиг. 7).

B°. Кривые (18) могут быть получены и непосредственно из ур-ий (4) коллинеарного преобразования после  $\lambda$  — кратного его повторения.

Дело в том, что последнее, будучи приложено к точке  $P(x_i)$  плоскости, заставляет ее переместиться в некоторое новое положение  $P_1(y_i')$ . Повторяя это преобразование еще раз, мы заставим точку  $P_1(y_i')$  занять положение точки  $P_2(y_i'')$ , и так далее.

При такой операции точка  $P$  опишет некоторую кривую. После  $\lambda$  — кратного повторения, ур-ия (4) примут вид:

$$\varrho y_i = \varrho_i^\lambda x_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3).$$

Исключая из этих ур-ий  $\lambda$  и  $\varrho$ , получим

$$\log \frac{\varrho_2}{\varrho_3} \log \frac{y_1}{x_1} + \log \frac{\varrho_3}{\varrho_1} \log \frac{y_2}{x_2} + \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \log \frac{y_3}{x_3} = 0 \quad (19)$$

или полагая

$$\log \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = r_1, \quad \log \frac{\varrho_3}{\varrho_1} = r_2, \quad \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = r_3 \dots \dots (20)$$

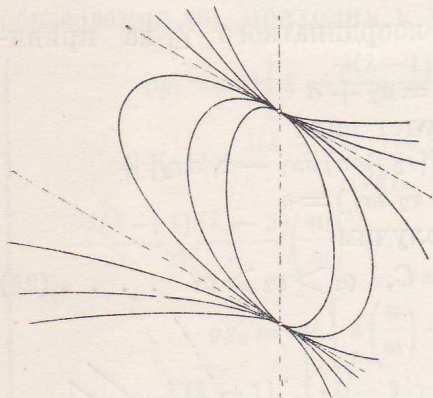
будем иметь ур-ие искомым кривых в виде

$$y_1^{r_1} y_2^{r_2} y_3^{r_3} = x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} = C,$$

где в силу (20)

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0.$$

Равенства (20) позволяют сделать вывод, что рассматриваемые кривые при коллинеарном преобразовании остаются инвариантными.



Фиг. 11.

С°. Наконец к ур-ию (18) можно прийти еще одним путем, а именно: из рассмотрения траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований.

Для данного  $\Delta$ -ка коллинеации последнее имеет вид

$$Xf \equiv \sum \varrho_i x_i p_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Отсюда дифф. ур-ие искомым кривых будет

$$\sum \varrho_i x_i p_i = 0$$

и соответствующая совокупная система

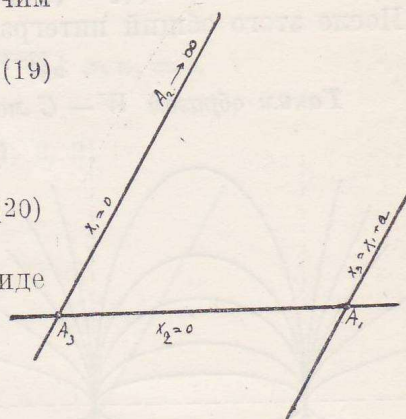
$$\frac{dx_i}{\varrho_i x_i} = dt \quad (i = 1, 2, 3)$$

Интеграция последнего дает

$$x_i = C_i e^{\varrho_i t} \quad (i = 1, 2, 3) \dots \dots \dots (21)$$

Исключая отсюда  $t$ , получим

$$x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma = C e^{(\alpha \varrho_1 + \beta \varrho_2 + \gamma \varrho_3) t} \dots \dots \dots (22)$$



Фиг. 10.



где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  показатели степеней, в которые мы возводим предвари- тельно ур-ия (21).

Выражение (22) будет общим  $\int$ -лом, если  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  и  $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 0$ .

Первое условие необходимо для выполнения однородности, второе чтобы отсутствовало  $t$ .

Из этих условий следует, что

$$\alpha = k(q_2 - q_3), \beta = k(q_3 - q_1), \gamma = k(q_1 - q_2)$$

После этого общий интеграл (22) принимает вид

$$x_1^{\alpha_2 - \rho_3} x_2^{\rho_3 - \rho_1} x_3^{\rho_1 - \rho_2} = C.$$

Таким образом  $W - C$  могут быть рассматриваемы:

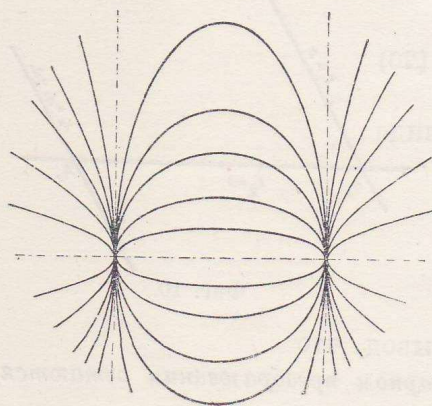
A<sup>0</sup>. как кривые главной коинци- денции соответ. формы коннекса,

B<sup>0</sup>. как результат  $\lambda$  — кратного повторения коллинеарного преобразо- вания.

C<sup>0</sup>. и как траектории соот. одно- членной группы линейных преобра- зований по ее бесконечно малому преобразованию.

Рассмотрим еще следующие случаи расположения  $W - C$  первого типа:

A<sup>0</sup>. Предположим, что вершина  $A_1$  координатного  $\Delta$ -ка удаляется в  $\infty$ -сть



Фиг. 12.

(фиг. 8).

В этом случае уравнения сторон координатного  $\Delta$ -ка прини- мают вид

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ и } x_3 = x_2 + a$$

и соответствующее дифф. ур-ие (16) будет вида

$$\rho_1 x_1 [x_2 dx_2 - (x_2 + a) dx_1] + \rho_2 x_2 [(x_2 + a) dx_1 - x_1 dx_2] + + \rho_3 (x_2 + a) (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0$$

Интегрируя последнее ур-ие мы получим

$$X_1^{\rho_2 - \rho_3} X_2^{\rho_3 - \rho_1} (X_2 + a X_3)^{\rho_1 - \rho_2} = C, \quad \rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \dots \dots (23)$$

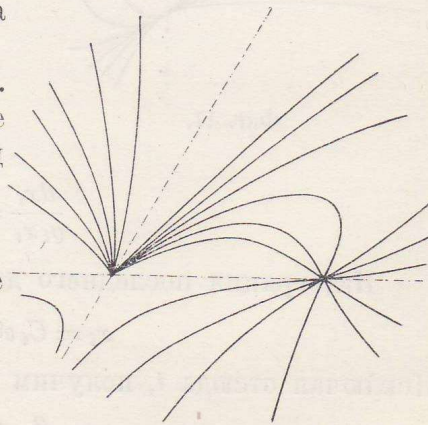
— ур-ие  $W - C$  для данного  $\Delta$ -ка (фиг. 9).

B<sup>0</sup>. Предположим, что вершина  $A_2$  удаляется в бесконечность. В этом случае координатный  $\Delta$ -к принимает вид фиг. 10; уравнения его сторон:

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ и } x_3 = x_1 + a$$

Соответствующее диффер. ур-ие будет:

$$\rho_1 x_1 [x_2 dx_1 - (x_1 + a) dx_2] + + \rho_2 x_2 [(x_1 + a) dx_1 - x_1 dx_2] + + \rho_3 (x_1 + a) [x_1 dx_2 - x_2 dx_1] = 0$$



Фиг. 13.

или

$$[(\varrho_3 - \varrho_1)x_1 + a\varrho_3](x_1 dx_2 - x_2 dx_1) - a\varrho_1 x_1 dx_2 + a\varrho_2 x_2 dx_1 = 0$$

Отсюда получаем следующее уравнение  $W = C$ :

$$x_1^{\varrho_2 - \varrho_3} x_2^{\varrho_3 - \varrho_1} (x_1 + ax_3)^{\varrho_1 - \varrho_2} = C. \quad [\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3] \dots (24)$$

Расположение кривых для этого случая имеем на фиг. 11 и 12.

$\Gamma_0$ . — Частный случай.

$A^0$ . Здесь коллинеация определяется ур-ми (5) и соответствующий коннекс (10) принимает вид

$$(mx_1 - nx_2)u_1 + (nx_1 + mx_2)u_2 + kx_3u_3 = 0.$$

Это ур-ие с помощью

$$u_x \equiv \Sigma u_i x_i = 0 \quad (i = 1, 2, 2)$$

заменяется ур-ем.

$$(k - m)x_3u_3 - nx_2u_1 + nx_1u_2 = 0$$

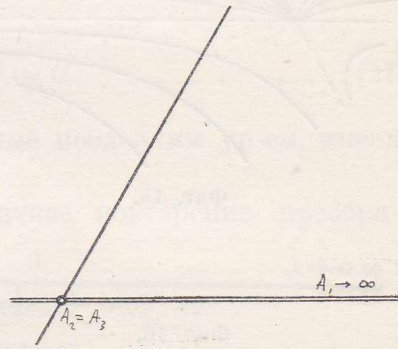
Откуда в силу (13) получаем

$$x_3(bx_1 - ax_2)dx_1 + x_3(ax_1 + bx_2)dx_2 - b(x_1^2 + x_2^2)dx_3 = 0,$$

где  $a = k - m$ ,  $b = n$ .

Интегрируя последнее ур-ие, имеем

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{A \arctg \frac{x_2}{x_1}} = C. \quad (25)$$



Фиг. 14.

$B^0$ . Применяя к точке  $P$  плоскости  $\lambda$ -кратное повторение преобразования (5), приходим к ур-ям вида

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho y_1 &= m^\lambda \left[ 1 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-3)}{4!} \left(\frac{n}{m}\right)^4 - \dots + \right. \\ &+ (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-2k+1)}{(2k)!} \left(\frac{n}{m}\right)^{2k} + \dots \left. \right] x_1 - m^\lambda \left[ \lambda \left(\frac{n}{m}\right) - \right. \\ &- \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!} \left(\frac{n}{m}\right)^3 + \dots + (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-2k)}{(2k+1)!} \left(\frac{n}{m}\right)^{2k+1} + \dots \left. \right] x_2 \\ \varrho y_2 &= m^\lambda \left[ \lambda \left(\frac{n}{m}\right) - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!} \left(\frac{n}{m}\right)^3 + \dots + \right. \\ &+ (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-2k)}{(2k+1)!} \left(\frac{n}{m}\right)^{2k+1} + \dots \left. \right] x_1 + m^\lambda \left[ 1 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \right. \\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-3)}{4!} \left(\frac{n}{m}\right)^4 - \dots + \left. \right. \\ &+ (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-2k+1)}{(2k)!} \left(\frac{n}{m}\right)^{2k} + \dots \left. \right] x_2 \\ \varrho y_3 &= k^\lambda x_3 \end{aligned} \right.$$

Далее всегда можно положить  $m^2 + n^2 = 1$ , ибо для этого стоит разделить обе части (5) на  $\sqrt{m^2 + n^2}$  и обозначить  $\frac{\varrho}{\sqrt{m^2 + n^2}}$  снова через  $\varrho$ .

Отсюда, полагая  $n = \sin\theta$  и  $m = \cos\theta$ , получим

$$\begin{cases} \rho y_1 = \cos\lambda\theta x_1 - \sin\lambda\theta_2 & (x) \\ \rho y_2 = \sin\lambda\theta x_1 + \cos\lambda\theta_2 & (xx) \\ \rho y_3 = e^{\lambda \lg k} x_3 \end{cases}$$

Исключая отсюда  $\rho$ ,  $\lambda$  и  $\theta$ , получим

$$\frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{y_3} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{-\lambda \lg k}.$$

Далее из (x) и (xx) имеем

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\operatorname{tg}\lambda\theta + \frac{x_2}{x_1}}{1 - \frac{x_2}{x_1} \operatorname{tg}\lambda\theta},$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{\theta} \left( \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1} - \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Подставляя это значение  $\lambda$  в ур. (26) и полагая

$$\frac{\lg k}{\theta} = A$$

получим

$$\frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{y_3} e^{A \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{A \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}} = C$$

С. Наконец, исходя из бесконечно малого преобразования, которое в данном случае будет вида

$$Xf \equiv (mx_1 - nx_2)p_1 + (nx_1 + mx_2)p_2 + kx_3p_3,$$

получим след. дифф. ур-ие траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований

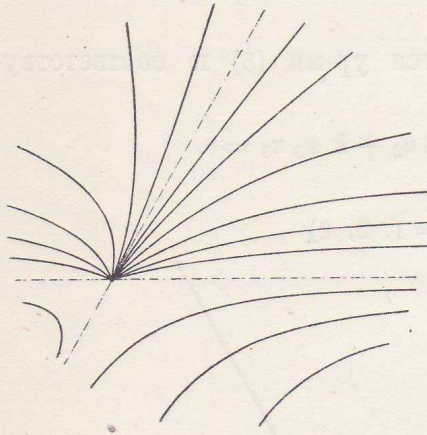
$$(mx_1 - nx_2) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (nx_1 + mx_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + kx_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Совокупная система, соответствующая этому ур-ию будет

$$\frac{dx_1}{mx_1 - nx_2} = \frac{dx_2}{nx_1 + mx_2} = \frac{dx_3}{kx_3}$$

Интегрируя эту систему, получим снова ур-ие

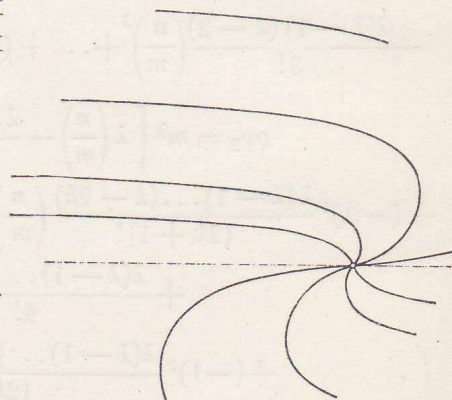
$$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{A \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}} = C$$



Фиг. 15.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

II тип.

$A^0$ . Коллинеация этого типа определяется ур-ем (6), а каноническая форма соответствующего коннекса ур-м.

$$\varrho_1 u_1 x_1 + \varrho_2 u_2 x_2 + (\varrho_2 x_3 + \beta x_2) u_3 = 0$$

и в силу

$$u_x \equiv \Sigma u_i x_i = 0$$

уравнением

$$(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 u_1 - \beta x_2 u_3 = 0.$$

Введя сюда значения (13), имеем дифференциальное ур-ие

$$(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 (xdx)_{23} + \beta x_2 (xdx)_{12} = 0.$$

Интегрируя, находим

$$(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \lg \frac{x_2}{x_1} = C \dots \dots \dots (27)$$

Интегральные кривые ( $W-C$ ), определяемые последним ур-ем, имеем на фиг. 13.

$B^0$ , Применяя и в этом случае  $\lambda$ -кратное повторение преобразования (6), получим

$$\varrho y_1 = \varrho_1^\lambda x_1, \quad \varrho y_2 = \varrho_2^\lambda x_2, \quad \varrho y_3 = \varrho_2^\lambda x_3 + \lambda \beta \varrho_2^{\lambda-1} x_2$$

Исключая из этих ур-ий  $\lambda$  и  $\varrho$ , будем иметь

$$\frac{y_1}{y_2} = \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \left( \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_3}{x_2}$$

или после логарифмирования

$$\lg \frac{y_1}{y_2} = \frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{y_3}{y_2} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \lg \frac{x_1}{x_2} + \frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2} \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

откуда

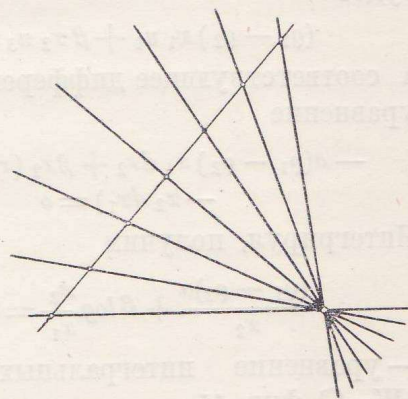
$$\begin{aligned} \lg \frac{y_1}{y_2} + \frac{\varrho_2}{\beta} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{y_3}{y_2} &= \lg \frac{x_1}{x_2} + \\ + \frac{\varrho_2}{\beta} \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \end{aligned}$$

Наконец, полагая

$$\frac{\beta}{\varrho_2} = \beta_1 \quad \lg \varrho_1 = r_1 \quad \lg \varrho_2 = r_2,$$

получим

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2) \frac{y_3}{y_2} + \beta_1 \log \frac{y_2}{y_1} &= (r_1 - r_2) \frac{x_3}{x_2} + \\ + \beta_1 \log \frac{x_2}{x_1} &= C. \end{aligned}$$

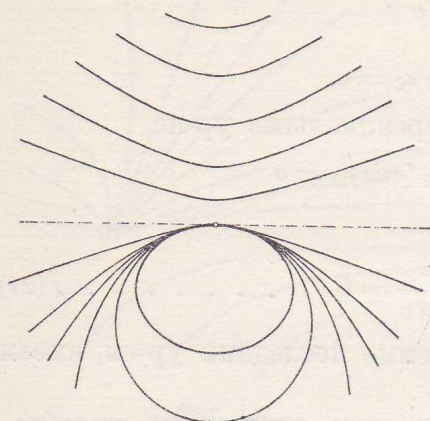


Фиг. 18.

$C^0$ . Символом бесконечно малого преобразования в данном случае будет выражение

$$Xf \equiv \varrho_1 x_1 p_1 + \varrho_2 x_2 p_2 + (\varrho_2 x_3 + \beta x_2) p_3 = 0.$$

Дифференциальное ур-ие траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований:



Фиг. 19.

$$\varrho_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varrho_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\varrho_2 x_3 + \beta x_2) \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

и соответствующая система совокупных уравнений

$$\frac{dx_1}{\varrho_1 x_1} = \frac{dx_2}{\varrho_2 x_2} = \frac{dx_3}{\beta x_2 + \varrho_2 x_3} = dt.$$

Откуда общий интеграл будет вида

$$\left( x_2 e^{-\frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2}} \right)^{\varrho_1 - \varrho_2} \cdot x_1^{\varrho_2} x_2^{-\varrho_1} = K$$

или

$$x_1^{\varrho_2} x_2^{-\varrho_2} e^{-\frac{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2}} = K$$

Логарифмируя, снова приходим к ур-ию

$$(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_1} = C$$

Предположим теперь, что вершина  $A_1$  вырожденного координатного  $\Delta$ -ка удаляется в бесконечность (фиг. 14).

Уравнение коннекса в этом случае будет

$$(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 u_1 + \beta x_2 u_3 = 0,$$

а соответствующее дифференциальное уравнение

$$-a(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 dx_2 + \beta x_2 (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = 0$$

Интегрируя, получим

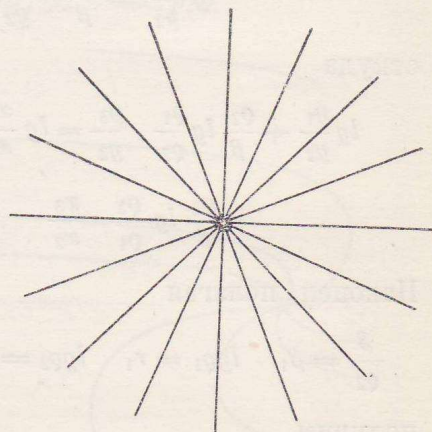
$$\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)a}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_1} = C \quad \dots (28)$$

— уравнение интегральных кривых (W—C) фиг. 15.

Предположим далее, что удаляется в  $\infty$ -сть вершина  $A_2 \equiv A_3$  (фиг. 16).

Полагая  $x_1 = x_2 - b$ , будем для коннекса иметь уравнение.

$$(\varrho_1 - \varrho_2) (x_2 - b) u_1 + \beta x_2 u_3 = 0$$



Фиг. 20.

и дифференциальное уравнение вида

$$(\rho_1 - \rho_2) (x_2 - b) (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) - \beta b x_2 dx_2 = 0$$

или

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2) (x_2 dx_3 - x_3 dx_2)}{x_2^2} - \beta \cdot b \frac{dx_2}{x_2 (x_2 - b)} = 0$$

откуда общий интеграл будет вида

$$(\rho_1 - \rho_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_2 - b} = C \quad (29)$$

— фиг. 17.

III тип.

A°. Коллинеация этого типа определяется уравнением (7) и каноническая форма коннекса будет:

$$\rho_1 u_1 x_1 + \rho_2 (u_2 x_2 + u_3 x_3) = 0.$$

Откуда с помощью  $u_x = 0$  получаем

$$(\rho_1 - \rho_2) x_1 u_1 = 0$$

отсюда  $u_1 = 0$  и далее

$$x_2 dx_3 - x_3 dx_2 = 0$$

Интеграция этого уравнения дает

$$x_3 = C x_2 \dots \dots \dots (30)$$

Семейство кривых, определяемых этим ур-ем, — на фиг. 18.

B°.  $\lambda$  — кратное применение коллинеации (7) к точке плоскости дает

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= \rho_1^\lambda x_1 & \rho y_2 &= \rho_2^\lambda x_2 \\ \rho y_3 &= \rho_3^\lambda x_3 \end{aligned}$$

Исключение отсюда  $\rho$  и  $\lambda$  приводит к ур-ию (30).

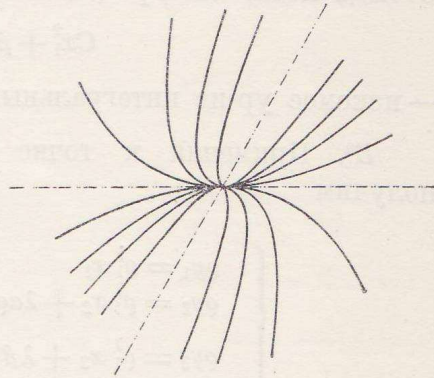
C°. К этому же ур-ию приходим и от бесконечно малых преобразований, интегрируя в этом случае дифференциальное ур-ие в частных производных вида

$$\rho_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \rho_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \rho_3 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

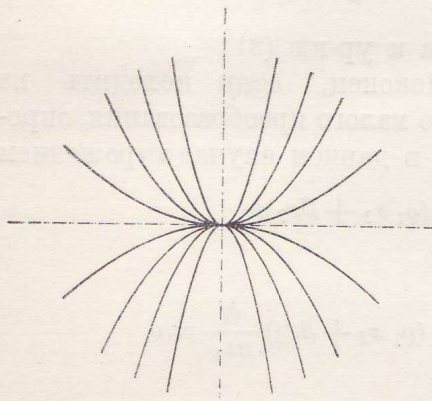
IV тип.

A°. Для четвертого типа ур-ия коллинеации суть ур-ия (8). Уравнение соответствующего коннекса

$$\rho_1 (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) + \alpha x_1 u_2 + \beta x_2 u_3 = 0$$



Фиг. 21.



Фиг. 22.

Последнее с помощью  $u_x = 0$  приводится к виду

$$\alpha x_1 u_2 + \beta x_2 u_3 = 0$$

и дифференциальное уравнение искомого кривых будет

$$\alpha r_1 (xdx)_{31} + \beta r_2 (xdx)_{12} = 0.$$

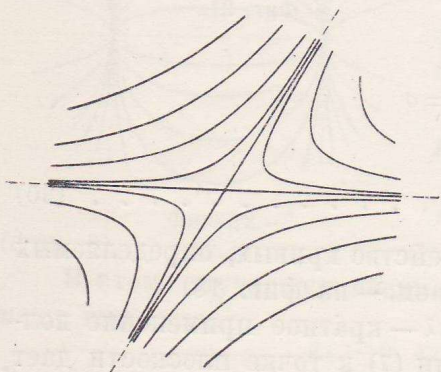
Отсюда после интегрирования получаем:

$$Cx_1^2 + \beta x_2^2 - 2\alpha r_1 x_3 = 0 \dots \dots \dots (31)$$

— искомое уравнение интегральных кривых (фиг. 19).

В°. Применяя к точке плоскости преобразование (8)  $\lambda$  раз, получим

$$\begin{cases} \rho y_1 = \rho_1^\lambda x_1 \\ \rho y_2 = \rho_1^\lambda x_2 + \lambda \alpha \rho_1^{\lambda-1} x_1 \\ \rho y_3 = \rho_1^\lambda x_3 + \lambda \beta \rho_1^{\lambda-1} x_2 + \frac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) \alpha \beta \rho_1^{\lambda-2} x_1 \end{cases}$$



Фиг. 23.

После исключения из этих уравнений  $\rho$  и  $\lambda$ , приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{y_3}{y_1} + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 &= -\alpha \frac{x_3}{x_1} + \\ &+ \frac{1}{2} \beta \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 = C \end{aligned}$$

т. е. снова к уравнению (31).

С°. Наконец, если исходить из бесконечно малого преобразования, определяемого в данном случае выражением

$$Xf \equiv \rho_1 x_1 p_1 + (\rho_1 x_2 + \alpha x_1) p_2 + (\rho_1 x_3 + \beta x_2) p_3$$

получим дифференциальное уравнение

$$\rho_1 x_1 \frac{df}{dx_1} + (\rho_1 x_2 + \alpha x_1) \frac{df}{dx_2} + (\rho_1 x_3 + \beta x_2) \frac{df}{dx_3} = 0$$

и совокупную систему:

$$\frac{dx_1}{\rho_1 x_1} = \frac{dx_2}{\rho_1 x_2 + \alpha x_1} = \frac{dx_3}{\rho_1 x_3 + \beta x_2} = dt$$

Интегралом последней системы будут уравнения

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\rho_1 t} \\ x_2 = C_2 e^{\rho_1 t} + \alpha C_1 t e^{\rho_1 t} \\ x_3 = C_3 e^{\rho_1 t} + \beta C_2 t e^{\rho_1 t} + \frac{\alpha \beta}{2} C_1 t^2 e^{\rho_1 t}. \end{cases}$$

Исключая отсюда  $t$ , мы получим вновь уравнение (31)

V тип.

A°. В последнем случае коллинеация определяется ур-ем (9).  
Ур-ие соответствующего коннекса

$$\varrho_1 (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + \alpha x_1 u_2 = 0$$

или с помощью  $u_x = 0$

$$\alpha x_1 u_2 = 0$$

дифференциальное ур-ие кривых главной коинциденции в силу (13) будет:

$$u_2 = 0 \text{ или } (xdx)_{31} = 0$$

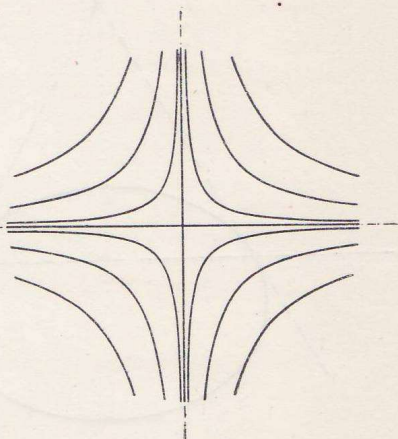
откуда

$$x_1 + Cx_3 = 0 \dots \dots (32)$$

— ур-ие интегральных кривых (фиг. 20)

B°. Применяя и здесь преобразование (9) последовательно  $\lambda$  раз, получим линейное преобразование той же системы, именно:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \varrho_1^\lambda x_1, & \varrho y_2 &= \varrho_1^\lambda x_2 + \lambda \alpha \varrho_1^{\lambda-1} x_1, \\ \varrho y_3 &= \varrho_1^\lambda x_3 \end{aligned}$$



Фиг. 24.

Исключение из этих уравнений  $\lambda$  и  $\varrho$  дает ур-ие

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_1}{x_3} = C$$

т. е. уравнение (32)

C°. К тому же ур-ию придем, если будем исходить из бесконечно малых преобразований, символ коих в данном случае

$$Xf \equiv \varrho_1 x_1 p_1 + (\alpha x_1 + \varrho_1 x_2) p_2 + \varrho_1 x_3 p_3$$

и дифф. ур-ие траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований

$$\varrho_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\alpha x_1 + \varrho_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \varrho_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

Интегрируя последнее ур-ие, получим опять ур-ие (32)

Частный случай. Если в системе (9) положить  $\alpha = 0$ , то ур-ия коллинеации принимают вид

$$\varrho y_1 = \varrho_1 x_1, \quad \varrho y_2 = \varrho_1 x_2, \quad \varrho y_3 = \varrho_1 x_3,$$

а уравнение коннекса вид:  $u_x = 0$ .

В этом случае, очевидно, каждая точка плоскости остается инвариантной (преобразуется в саму себя).

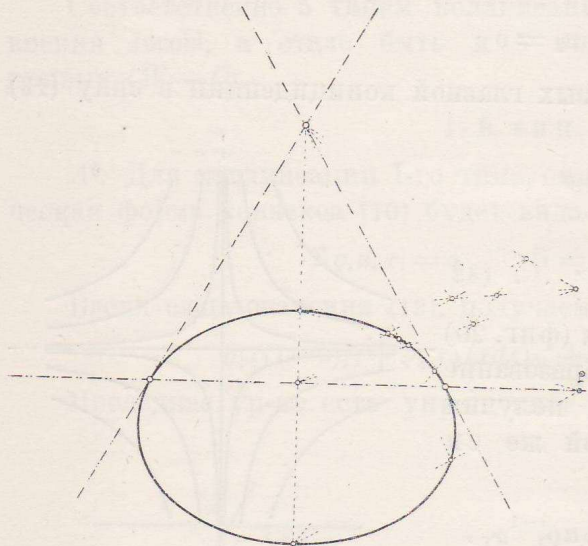


I. W—C первого типа.

5. Различные виды W—C этого типа.

Для W—C первого типа мы получили уравнения:

A<sup>0</sup>. для координатного Δ-ка, все элементы которого вещественны и все вершины находятся на конечном расстоянии:



Фиг. 25.

$$x_1^{y_1} x_2^{y_2} x_3^{y_3} = C,$$

где

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \dots (18)$$

или в виде

$$\lg \frac{\varrho_2}{\varrho_3} \lg \frac{y_1}{x_1} + \lg \frac{\varrho_3}{\varrho_1} \lg \frac{y_2}{x_2} + \lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \lg \frac{y_3}{x_3} = 0 \dots (19)$$

где

$$r_1 = \lg \frac{\varrho_2}{\varrho_3}, r_2 = \lg \frac{\varrho_3}{\varrho_1}$$

$$\text{и } r_3 = \lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Общее расположение этих кривых имеем на фиг. 7.

B<sup>0</sup>. Для координатного Δ-ка, у которого вершина A<sub>1</sub> находится на ∞—сти:

$$x_1^{\varrho_2 - \varrho_3} x_2^{\varrho_3 - \varrho_1} (x_2 + a x_3)^{\varrho_1 - \varrho_2} = C, \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \dots (23)$$

Расположение соответствующих кривых дает фиг. 9.

C<sup>0</sup>. Для координатного Δ-ка с вершиной A<sub>2</sub> на ∞—сти:

$$x_1^{\varrho_2 - \varrho_3} x_2^{\varrho_3 - \varrho_1} (x_1 + a x_3)^{\varrho_1 - \varrho_2} = C, \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 (24)$$

Общее расположение этих кривых имеем на фиг. 11 и 12.

Вторая фигура дает расположение кривых, когда вершина A<sub>2</sub> удаляется в ∞—сть по направлению, перпендикулярному к противоположной стороне.

D<sup>0</sup>. Применяя к кривым (18) или, что тоже, к кривым

$$x_2^{y_2} x_3^{y_3} = C x_1^{-y_1}$$

проективное преобразование, переводящее сторону основного Δ-ка  $x_3 = 0$  в бесконечно удаленную прямую, получаем у-ие наших кривых в декартовой системе координат, именно:

$$y = C x^n \dots (33)$$

или, если положить  $C = a^{1-n}$ ,

$$y = a^{1-n} x^n.$$

Последнее ур-ие

a<sup>0</sup>. при  $n = \frac{p}{p-q} > 0$  есть обобщенное ур-ие семейства парабол высшего порядка (фиг 21 и 22);

b<sup>0</sup>. при  $n = -\frac{p}{p-q} < 0$

[ $p > q$ ] уравнение (33) определяет семейство гипербол высшего порядка (фиг. 23 и 24). Таким образом, все  $W-C$  первого типа через соответствующее проективное преобразование переходят в  $\infty^1$  высших парабол и гипербол;

c<sup>0</sup>. Среди гипербол имеются кривые, определяемые ур-ем

$$x^{v_1} y^{v_2} = C,$$

где

$$v_1 > 0, v_2 > 0 \text{ и } v_1 + v_2 = 1.$$

Это так называемые *политронные кривые*;

d<sup>0</sup>. при  $n$ —иррациональном, ур-ие (33) определяет интерсцентные параболы и гиперболы (*адиабаты*);

E<sup>0</sup>. При  $C=1$  уравнение (18) принимает вид

$$x_1^{v_1} x_2^{v_2} x_3^{v_3} = 1 \quad (v_1 + v_2 + v_3 = 0) \quad (34)$$

Введя в рассмотрение барицентрические координаты  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , связь коих с прямолинейными выражается ур-ми

$$\sigma\mu_1 = l_1 x_1, \quad \sigma\mu_2 = l_2 x_2, \quad \sigma\mu_3 = l_3 x_3$$

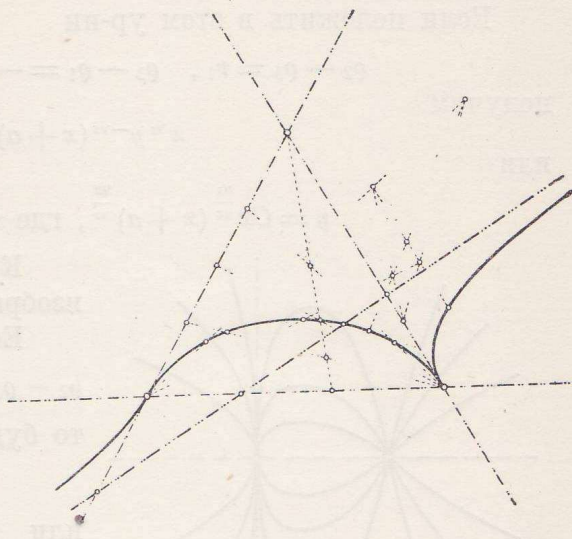
мы ур-ие (34) приводим к виду

$$\frac{\mu_1}{l_1^t} = \frac{\mu_2}{l_2^t} = \frac{\mu_3}{l_3^t}$$

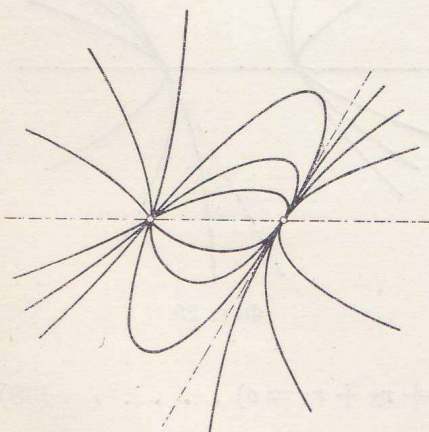
Последнее ур-ие дает нам кривые, определяющие *геометрическое место точек, барицентрические координаты коих  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  пропорциональны одной и той же степени  $t$  соответствующих сторон  $l_1, l_2$  и  $l_3$ .*

Имеем кривые „*Les potentielles triangulaires*“ de Longchamps—фиг. 25 и 26.

[G. de Longchamps „Sur la potentielle triangulaire“ Mathesis т. VI. 1886].



Фиг. 26.



Фиг. 27.

$F^0$ . Как и в случае  $D^0$ , применяя к кривым (24) преобразование  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = 1$  получим ур-ие

$$x^{\rho_2 - \rho_3} y^{\rho_3 - \rho_1} (x + a)^{\rho_1 - \rho_2} = C.$$

Если положить в этом ур-ии

$$\rho_2 - \rho_3 = \nu_1, \quad \rho_3 - \rho_1 = -\nu_2 \text{ и } \rho_1 - \rho_2 = \nu_3,$$

получим

$$x^{\nu_1} y^{-\nu_2} (x + a)^{\nu_3} = C$$

или

$$y = C x^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} (x + a)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}}, \text{ где } \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \dots \dots \dots (35)$$

Кривые, определяемые этим ур-ем изображены на фиг. 27—30.

Если положить

$$\rho_2 - \rho_3 = \nu_1, \quad \rho_3 - \rho_1 = \nu_2, \quad \rho_1 - \rho_2 = \nu_3$$

то будем иметь

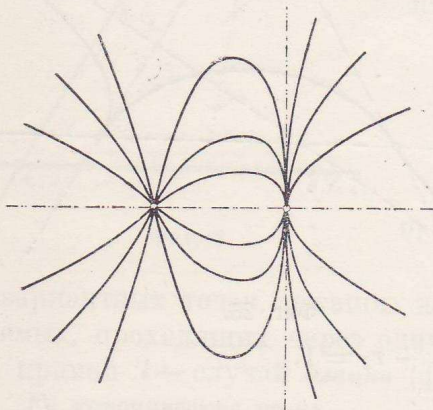
$$x^{\nu_1} y^{\nu_2} (x + a)^{\nu_3} = C$$

или

$$y = \frac{C}{x^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} (x + a)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}}}$$

где

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0, \dots \dots (36)$$



Фиг. 28.

Расположение кривых имеем на фиг. 31 и 32.

$G^0$ . Аналогично, применяя к кривым (23) то же преобразование

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1$$

получим

$$x^{\rho_2 - \rho_3} y^{\rho_3 - \rho_1} (y + a)^{\rho_1 - \rho_2} = C$$

Если положить здесь

$$\rho_3 - \rho_1 = +\nu_2, \quad \rho_1 - \rho_2 = \nu_3$$

$$\text{и } \rho_2 - \rho_3 = -\nu_1,$$

то будем иметь

$$x = C y^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (y + a)^{\frac{\nu_3}{\nu_1}}, \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \dots \dots (37)$$

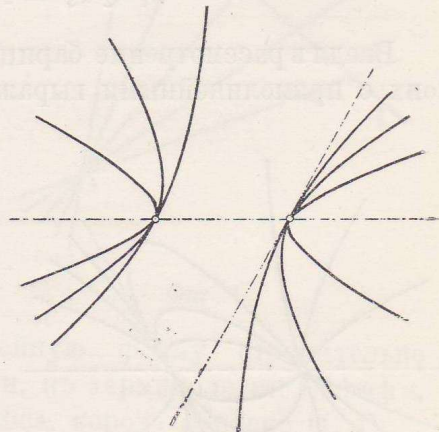
Если положить

$$\rho_3 - \rho_1 = \nu_2, \quad \rho_1 - \rho_2 = \nu_3,$$

$$\rho_2 - \rho_3 = \nu_1,$$

то получим

$$x = \frac{C}{y^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (y + a)^{\frac{\nu_3}{\nu_1}}}, (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0) \dots \dots \dots (38)$$



Фиг. 29.

Кривые, определяемые ур-ми (37) и (38), расположатся аналогично фиг. 27—32.

6°. Свойства  $W-C$  первого типа.

А°. 1. Кривые, определяемые ур-ем (19), вообще *трансцендентны*, они будут *алгебраическими*, если  $\lg \frac{Q_i}{Q_k}$  — числа целые, положительные или отрицательные.

2. Уравнение  $W-C$  в тангенциальных координатах будет того же вида, что и в точечных, т. е.

$$u_1^{y_1} u_2^{y_2} u_3^{y_3} = C \dots \dots \dots (39)$$

3. Из ур-ий (18) и (39) следует, что в случае вещественного  $\Delta$ -ка все вещественные  $W-C$  проходят через две его вершины и в этих вершинах они касаются его сторон.

4.  $W-C$  имеют особенные точки только в вершинах основного  $\Delta$ -ка, и двойственно: только стороны основного  $\Delta$ -ка могут быть особенными касательными.

5. Совокупность линейных преобразований (4) переводит координатный  $\Delta$ -к и  $W-C$  в себя самих.

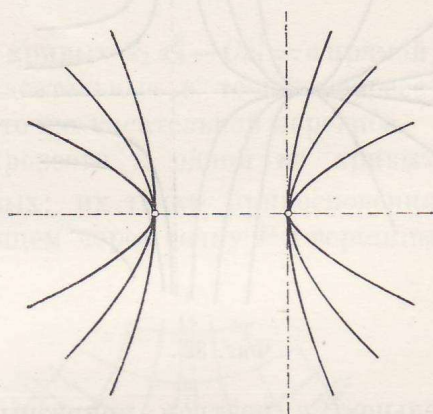
6. Касательная к какой-либо из  $W-C$  системы образует с другими кривыми точечный ряд  $u$ . Меняя положение касательной, будем получать точечные ряды, проективные первоначальному ряду.

7. Двойное отношение точки прикосновения касательной к кривой  $W$  и трех точек пересечения касательной со сторонами основного  $\Delta$ -ка постоянно на всей кривой и на каждой кривой той же системы.

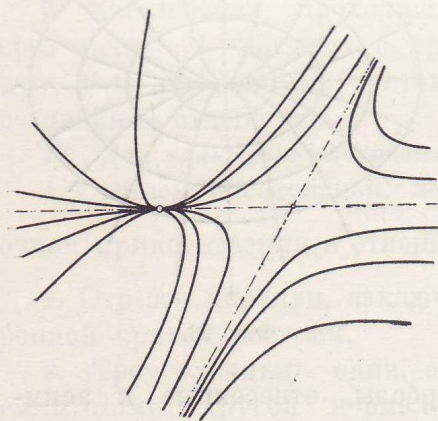
8. Касательные в любой точке  $P$  кривой  $W$  образует с тремя прямыми, соединяющими  $P$  с вершинами координатного  $\Delta$ -ка, постоянное двойное отношение.

9. Если на каждой касательной  $T$  кривой  $W$  определим точку  $P$ , составляющую с тремя точками пересечения  $T$  со сторонами основного  $\Delta$ -ка постоянное двойное отношение, то точка  $P$  опишет  $W-C$  той же системы.

10. Если в каждой точке  $P$  кривой  $W$  построим прямую, образующую с прямыми  $PA_1, PA_2, PA_3$  постоянное двойное отношение, то эта прямая огибает  $W-C$  той же системы,



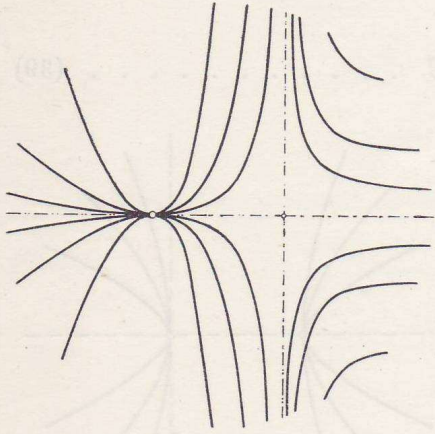
Фиг. 30.



Фиг. 31.

11. Точки кривых (18), которых касательные проходят через точку  $(x_1 x_2 x_3)$ , лежат на коническом сечении, проходящем через вершины  $A_1 A_2 A_3$  и точку  $(x_1 x_2 x_3)$ .

12. Если во всех точках пересечения прямой с системой  $W-C$  проведем касательные, то последние касаются конического сечения, которое касается секущей прямой и трех сторон основного  $\Delta$ -ка.



Фиг. 32.

13. Взаимная поляра  $W$ -кривой системы относительно конического сечения, имеющего основным  $\Delta$ -ком полярный  $\Delta$ -к, есть кривая той же системы.

14. Если в точке  $W-C$  проведем коническое сечение, которое ее касается и которое в то же время проходит через вершины основного  $\Delta$ -ка, то радиус кривизны  $W-C$  в точке касания вдвое больше радиуса кривизны (в этой же точке) конического сечения [Fourret, Jamet].

15. Центр кривизны  $W-C$  в точке  $P$  расположен симметрично относительно  $P$  с центром кривизны конического сечения, проходящего через вершины основного  $\Delta$ -ка и касательного к  $W-C$  в точке  $P$ .

16. Всякая ковариантная кривая относительно  $W-C$  есть кривая той же системы.

17.  $W-C$  принадлежат к системе с характеристиками  $\mu = 1, \nu = 1$ .

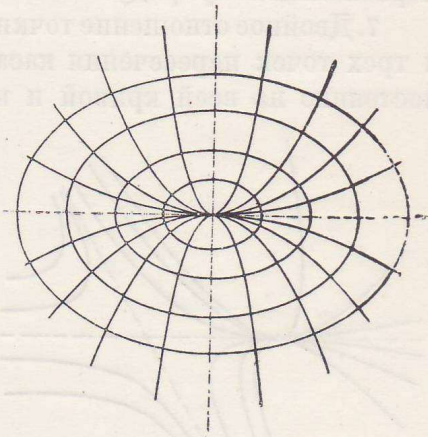
$B^0$ . В частности для парабол и гипербол высшего порядка  $y = Cx^n$ :

1. Ортогональные траектории  $W-C$  определяемых ур-ем  $y = Cx^n$  выражаются ур-ем

$$x^2 + ny^2 = C$$

т. е.  $W-C$  суть ортогональные траектории подобных концентрических конических сечений.

При  $n=2$ : параболы  $y = Cx^2$  суть траектории концентрических подобных и подобно расположенных эллипсов — фиг. 33;



Фиг. 33.

при  $n=-1$ : равносторонние гиперболы, отнесенные к асимптотам суть ортогональные траектории также равносторонних гипербол — фиг. 34.

2. Двойное отношение точки прикосновения касательной к кривой с точками пересечения ее со сторонами  $\Delta$ -ка равно  $n$ .

3. Геометрическое место оснований нормалей, проведенных из точки  $(xy)$  плоскости к кривой  $x^p y^{p-q} = a^{2p-q}$  есть обыкновенная гипербола.

$C^0$ . Для кривых 2-го пор.  $x_2 x_3 - Cx_1^2 = 0$  [получаемых из ур-я (19) при условии  $\varrho_2 \varrho_3 - \varrho_1^2 = 0$ ].

1. Если через вершину  $A_i$  основного  $\Delta$ -ка проведем две прямые, то прямые, соединяющие их точки пересечения с кривыми  $x_2 x_3 - Cx_1^2 = 0$ , пересекаются в одной точке  $P$  противоположной стороны (фиг. 25).

$D^0$ . Для кривых 3-го пор.  $x_2 x_3^2 - Cx_1^3 = 0$  [получаемых из ур-я (19) при условии  $\varrho_2 \varrho_3^2 - \varrho_1^3 = 0$ ].

1. Если пересечем прямой систему кривых  $x_2 x_3^2 - Cx_1^3 = 0$  прямой, проходящей через точку возврата, то касательные в точках пересечения все сходятся в одной и той же точке касательной перегиба.

3. Из точки  $P$  плоскости можно провести к одной из кривых семейства  $x_2 x_3^2 - Cx_1^3 = 0$  три касательных; их точки прикосновения лежат на коническом сечении, проходящем через точку  $P$  и вершины  $A_1, A_2, A_3$  основного  $\Delta$ -ка.

3. Касательные эти имеют всегда одно и тоже двойное отношение с  $PA_1$  (или  $PA_3$ ), если точка  $P$  движется по какой либо другой кривой нашей системы.

4. Из точки касательной перегиба к какой либо кривой системы можно провести одну касательную; из точки касательной возврата — две касательные; из точки  $M$  кривой — одну касательную.

5. Касательная, проходящая через точку  $M$  образует с прямыми  $MA_1, MA_2$ , и  $MA_3$  постоянное двойное отношение.

$E^0$  Для политропных кривых.

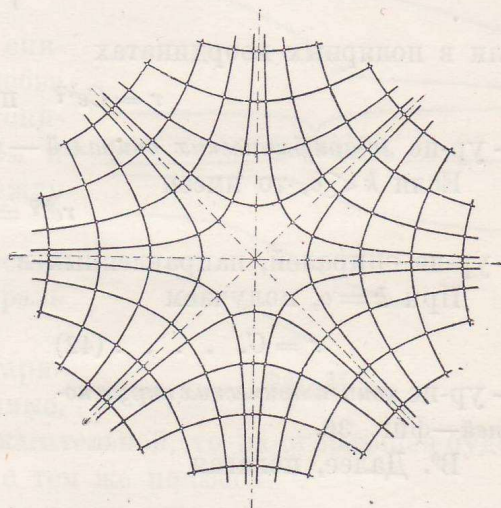
1. Отрезок касательной, лежащей между асимптотами, делится точкой прикосновения в отношении  $\frac{v_1}{v_2}$ .

2. Отрезок нормали, заключенной между осями, делится политропной кривой пополам.

3. Треугольники: один, образованный касательной и обоими асимптотами, другой нормалью и обоими осями — оба вписаны в один и тот же круг.

$F^0$ . Для потенциальной кривой.

1. Потенциальная кривая  $\Delta$ -ка проходит через его центр тяжести.



Фиг. 34.

2. Кривая Longchamps'a проходит через центр вписанного в  $\Delta$ -к круга, через центр тяжести  $\Delta$ -ка и точку Lemoine'a.

3. Кривая Longchamps'a проходит через две конечные точки средней стороны и в них касается обеих других сторон  $\Delta$ -ка.

1°.  $W-C$  для коорд.  $\Delta$ -ка с мнимыми элементами.

[Частный случай  $W-C$  первого типа].

7°. *Различные виды  $W-C$  в этом случае.*

В этом случае  $W-C$  определяются ур-м:

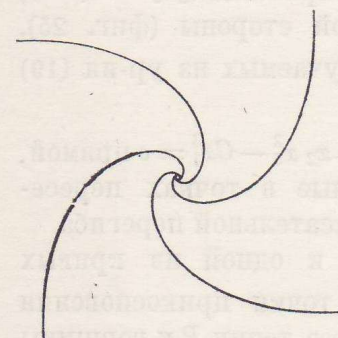
$$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_2} e^{\text{Aarctg} \frac{x_2}{x_1}} = C \dots (25)$$

А<sup>6</sup>. Применяя к ним преобразование, переводящее

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1,$$

получаем

$$\sqrt{x^2 + y^2} e^{\text{Aarctg} \frac{y}{x}} = C \dots (40)$$



Фиг. 35.

или в полярных координатах

$$r = Ce^{k\varphi} \quad \text{при } k > 0 \dots (41)$$

— ур-ие *логарифмических спиралей* — фиг. 35.

Если  $k < 0$ , то имеем

$$re^{k\varphi} = C$$

— ур-ие спиралей, направленных в обратную сторону.

При  $k = 0$ , получаем

$$r = C \dots (42)$$

— ур-ие *концентрических окружностей* — фиг. 36.

В°. Далее, полагая

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = y,$$

получим

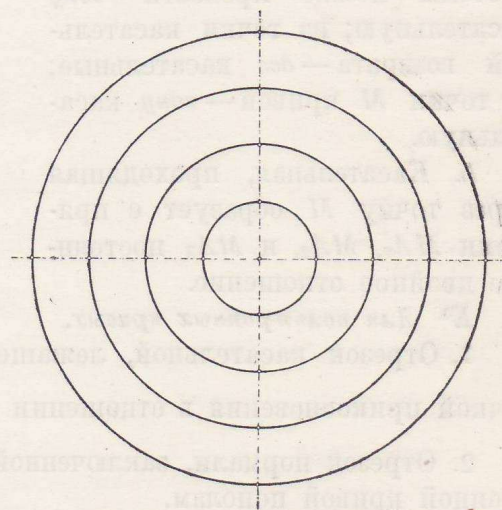
$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{y} e^{\text{Aarctg} \frac{1}{x}} = C$$

Переходя к полярным координатам и полагая  $\frac{1}{x} = \text{tg} u$  будем

иметь ур-ие

$$r^2 = \frac{Ce^u}{\sin^2 u} + C \text{tg}^2 u \dots (43)$$

Получаем уравнение кривых, расположение которых имеем на фиг. 37.



Фиг. 36.

8°. Свойства логарифмической спирали.

1. Логарифмическая спираль пересекает радиусы векторы, выходящие из точки  $O$  под одним и тем же углом.

2. Полюс логарифмической спирали есть асимптотическая точка.

3. Радиус кривизны логарифмической спирали = длине полярной нормали.

4. Натуральное уравнение логарифмической спирали

$$ks = \rho - \sqrt{k^2 + 1} C.$$

5. Длина дуги логар. спирали от полюса до точки  $P$

$$s = \frac{r}{\cos \varphi} = PT$$

— длине касательной в точке  $P$  до пересечения ее с перпендикуляром к радиусу вектору  $OP$  в точке  $O$ .

6. Все логарифмические спирали с одним и тем же углом подъема подобны.

7. Каждая логарифмическая спираль относительно полюса подобна сама себе; все логарифмические спирали с одним и тем же полюсом и углом подъема конгруэнтны между собой.

8. Эволюта логарифмической спирали есть конгруэнтная спираль с тем же полюсом.

9. Если через все точки логарифмической спирали проведем прямые, образующие постоянный угол с касательной, то их огибающая будет снова логарифмическая спираль с тем же полюсом.

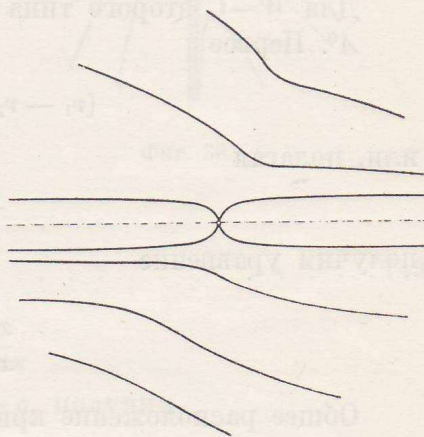
10. Подэра логарифмической спирали относительно полюса есть снова логарифмическая спираль с тем же полюсом и тем же углом подъема.

11. Если в полюсе логарифмической спирали поместить светящуюся точку, то каустика будет снова логарифмическая спираль, конгруэнтная данной.

12. Если через точку  $P$  плоскости проведем касательные ко всем завиткам логарифмической спирали, то геом. м. точек прикосновения есть окружность, проходящая через точку  $P$  и полюс спирали.

13. Логарифмическая спираль принадлежит к системе кривых с характеристиками  $\mu = 1, \nu = 1$ .

14. Если пересечем логарифмическую спираль прямой  $u$  и во всех точках пересечения построим касательные, то огибающая последних будет парабола, касающаяся прямой  $u$  и имеющая своим фокусом полюс спирали.



Фиг. 37.



15. Взаимная поляра логарифмической спирали относительно соприкасающейся равнобедренной гиперболы с центром в полюсе есть снова логарифмическая спираль той же системы.

16. Зная две точки и полюс, можно построить сколько угодно точек логарифмической спирали.

17. Если угол  $\varphi$  возрастает в арифметической прогрессии, то радиусы векторы, выходящие из полюса, возрастают в геометрической прогрессии.

18. Зная две ее точки  $P_1, P_2$  и полюс  $O$ , строим на  $OP_2$  треугольник  $OP_2 P_3$  подобный  $\Delta$ -ку  $OP_1 P_2$ . Полученная точка  $P_3$  будет принадлежать нашей кривой.

Подобное построение можно продолжить и дальше.

II.  $W-C$  второго типа.

9°. *Различные виды кривых этого типа.*

Для  $W-C$  второго типа мы получили уравнения:

A°. Первое

$$(v_1 - v_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \lg \frac{x_2}{x_1} = C \dots \dots \dots (27)$$

или, полагая

$$\frac{v_1 - v_2}{\beta} = \frac{1}{b}$$

получим уравнение

$$\frac{x_2}{x_1} e^{\frac{x_3}{bx_2}} = C \dots \dots \dots (44)$$

Общее расположение кривых, определяемых этим ур-ем имеем на фиг. 13.

B°. Для случая, когда вершина  $A_1$  удаляется в бесконечность, уравнение кривых принимает вид

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2)a}{x_2} + \beta \lg \frac{x_2}{x_1} = C \dots \dots \dots (28)$$

Соответствующие кривые изображены -- на фиг. 15.

C°. Когда удаляется в бесконечность точка  $A_2 = A_3$ , то уравнение кривых в этом случае будет вида:

$$(\rho_1 - \rho_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \lg \frac{x_2}{x_2 - b} = C \dots \dots \dots (29)$$

Кривые, определяемые этим ур-ем, -- на фиг. 17.

D°. Применяя к кривым (44) преобразование, при котором

$$x_1 = y, x_2 = x \text{ и } x_3 = 1,$$

получим

$$y = Cx e^{\frac{1}{bx}} \dots \dots \dots (46)$$

Кривые, соответствующие этому уравнению имеем на фиг. 38.

Уравнение кривых (44) в линейных координатах будет

$$\frac{u_1}{bu_3} = Ce^{\frac{u_2}{bu_3}} \dots \dots \dots (45)$$

Применяя к нему преобразование

$$u_1 = v, u_2 = u, u_3 = 1$$

получим

$$v = Ce^{\frac{u}{b}} \dots \dots (47)$$

*E*<sup>0</sup>. Применяя к кривым (44) преобразование

$$x_1 = y, x_2 = 1 \text{ и } x_3 = x$$

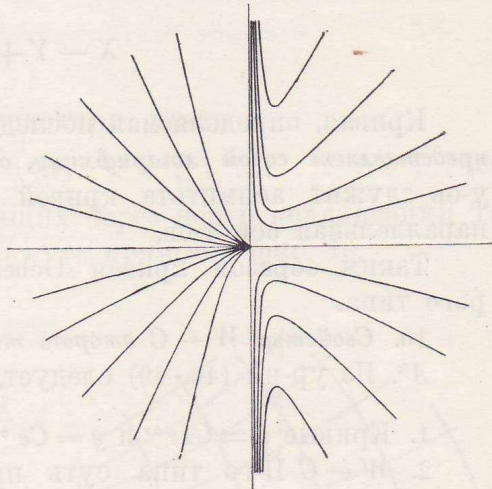
и соответственно

$$u_1 = v, u_2 = 1 \text{ и } u_3 = u$$

получим из уравнения (44)

$$y = Ce^{\frac{x}{b}} \dots \dots (48)$$

— ур-ие семейства логарифмических кривых—фиг. 39, а из уравнения (45)



Фиг. 38.

$$v = C u e^{\frac{1}{bu}} \dots \dots \dots (49)$$

*F*<sup>0</sup>. Применяя преобразование

$$x_1 = y, x_2 = x$$

к кривым (28) и полагая  $(\rho_1 - \rho_2) a = -\alpha$ , получим

$$y = C x e^{\frac{\alpha}{\beta x}}$$

т. е. кривые типа (46).

*G*<sup>0</sup>. Применяя преобразование

$$x_2 = y, x_3 = x$$

к кривым (29) и полагая

$$\rho_1 - \rho_2 = \alpha, \frac{\alpha}{\beta} = A \text{ и } C = \lg \frac{1}{C},$$

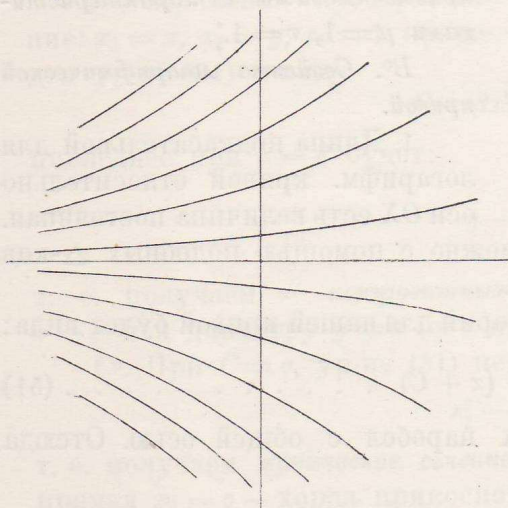
получим

$$y = \frac{b}{1 - Ce^{\frac{A x}{y}}}$$

или в полярной системе координат

$$r = \frac{b}{\sin \varphi (1 - Ce^{A \cot \varphi})} \dots \dots \dots (50)$$

Кривые для этого уравнения имеем на фиг. 40.



Фиг. 39.

$H^0$ . Отнесем логарифмическую кривую, определяемую ур-м (48) к косоугольной системе координат, в которой примем: за ось  $OY$  прямую, проходящую через начало под углом  $\varphi = 45^\circ$  к оси  $OX$ , а за новое начало точку  $(0, -b)$ .

В этой новой системе координат ур-ие (48) будет вида:

$$X - Y + a = Ce^{-\frac{Y}{a}} \dots \dots \dots (51)$$

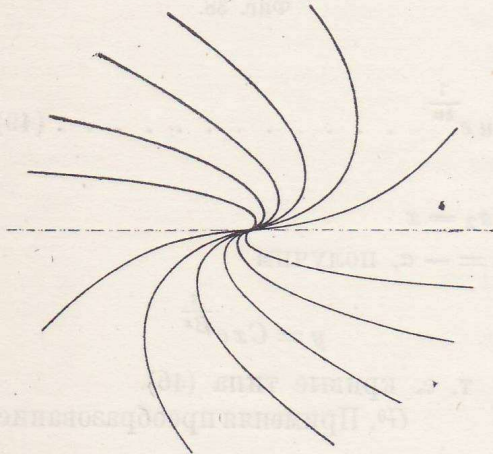
Кривая, определяемая последним ур-м, наз. *кривой Дебеанне'а*. Она представляет собой логарифмику, отнесенную к косоугольным осям: осью  $y$ -ов служит асимптота кривой  $x - y + a = 0$ , а осью  $x$ -ов прямая, параллельная оси  $x$ -ов.

Таким образом кривая Дебеанне'а принадлежит к  $W - C$  второго типа.

10. Свойства  $W - C$  второго типа.

$A^0$ . Из ур-ий (46 - 49) следует, что

1. Кривые  $y = Cxe^{\frac{1}{bx}}$  и  $y = Ce^{\frac{x}{b}}$  двойственны.
2.  $W - C$  II-го типа суть проекции логарифмических кривых



Фиг. 40.

3. Если из любой точки  $P$  плоскости провести касательные к  $W - C$  II-го типа, то геом. место точек прикосновения есть коническое сечение, проходящее через точку  $P$  и точку  $A_3 (x_1 = 0, x_2 = 0)$ , иначе

$W - C$  кривые II-го типа суть кривые системы с характеристиками  $\mu = 1, \nu = 1$ .

$B^0$ . Свойства логарифмической кривой.

1. Длина подкасательной для логарифм. кривой относительно оси  $OX$  есть величина постоянная.
2. Зная одну точку кривой, можно с помощью подобных  $\Delta$ -ков построить все ее остальные точки.
3. Ур-ие ортогональных траекторий для нашей кривой будет вида:

$$y^2 = 2p(x + C) \dots \dots \dots (51)$$

т. е. имеем систему конгруэнтных парабол с общей осью. Отсюда можно сказать:

$W - C$  II-го типа суть ортогональные траектории конгруэнтных парабол с общей осью. Фиг. 41.

$C^0$ . Свойства кривой Дебеанне'а

1. Если длину отрезка асимптоты, заключенного между точками пересечения с нею касательной и прямой, проходящей через точку

касания II-но оси абсцисс, назовем *подкасательной*, то *длина подкасательной кривой Дебавиэ'а есть величина постоянная.*

2. Геом. м. касательных, проведенных из точки  $P$  плоскости к данной кривой будет *гипербола*, проходящая через эту точку, стало быть

*Кривая Дебавиэ'а есть кривая системы с характеристиками  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ .*

III.  $W - C$  остальных типов

11<sup>0</sup>.  $W - C$  третьего типа.

В случае перспективной коллинеации ур-ие

$$x_3 = Cx_2 \dots \dots \dots (30)$$

определяет *пучок прямых*, проходящих через центр коллинеации. Таким образом в этом случае  $W - C$  суть прямые — фиг. 18.

12<sup>0</sup>.  $W - C$  четвертого типа.

В этом случае ур-ие

$$Cx_1^2 + \beta x_2^2 - 2\alpha x_1 x_3 = 0 \dots (31)$$

дает пучок конических сечений — фиг. 19.

$A^0$ . Применяя преобразование, при котором

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = 1$$

получим

$$Cx^2 + \beta y^2 - 2\alpha x = 0 \dots (52)$$

— *пучок конических сечений, имеющих соприкосновение 3-го пор.*

$B^0$ . Применяя преобразование:  $x_2 = x, x_3 = y, x_1 = 1$ , приведем ур-ие (31) к виду

$$C + \beta x^2 - 2\alpha y = 0;$$

последнее при  $\alpha = \beta$  будет:

$$y - \frac{1}{2}x^2 = C \dots \dots \dots (53)$$

т. е. получаем  $\infty'$  *конгруэнтных парабол*, отнесенных к касательной  $x = 0$  и к диаметру  $y = 0$  (ось параб.) — фиг. 42 и 43.

$C^0$ . При  $C = 0$ , ур-ие (31) переходит при  $\beta = \alpha$  в ур-ие

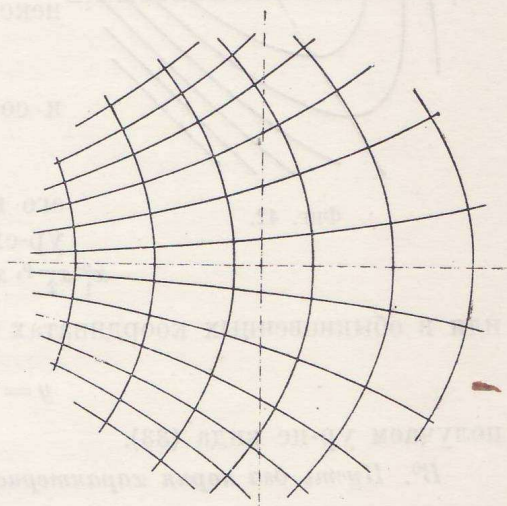
$$x_2^2 - 2x_1 x_3 = 0 \dots \dots \dots (54)$$

т. е. получаем *коническое сечение*, касающееся прямых  $x_1 = 0, x_3 = 0$ ; прямая  $x_2 = 0$  — хорда прикосновения — фиг. 25.

$D^0$ . Если одна из этих касательных, напр.  $x_1 = 0$  совпадает с  $\infty$  — но удал. прямой, то ур-ие (54) приводится к виду

$$x_2^2 - 2x_3 = 0$$

т. е. снова получаем *параболу*.



Фиг. 41.

13°.  $W - C$  пятого типа.

В данном случае ур-ие

$$x_1 + Cx_3 = 0 \dots \dots \dots (32)$$

определяет пучок прямых, проходящих через центр гомологии ( $x_1 = 0, x_3 = 0$ ), лежащей на оси—фиг. 20.

14°. *Случай вырожденной коллинеации и  $W - C$ .*

Когда один или несколько корней характеристического уравнения  $\Delta(\rho) = 0$  обращаются в нуль, соответствующая коллинеация наз. *вырожденной*.

Рассмотрим следующие случаи:

*A°.* Пусть один из корней, напр.  $\rho_3 = 0$ .

Тогда каноническая форма коннекса (15) переходит в

$$\rho_1 u_1 x_1 + \rho_2 u_2 x_2 = 0$$

и соответствующее дифф. ур-ие будет

$$\rho_1 x_1 (xdx)_{23} + \rho_2 x_2 (xdx)_{31} = 0$$

его интегральные кривые определяются ур-ем:

$$x_1^{\rho_2} x_2^{-\rho_1} x_3^{\rho_1 - \rho_2} = C$$

или в обыкновенных координатах

$$y = Cx^{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

получаем ур-ие вида (33).

*B°.* Пусть два корня характеристического ур-ия  $= 0$ , напр.

$$\rho_2 = \rho_3 = 0.$$

Ур-ие коннекса [*A°* стр. 41] в этом случае будет

$$\rho_1 u_1 x_1 + \beta x_2 u_3 = 0,$$

соответствующее дифференц. ур-ие

$$\rho_1 x_1 (xdx)_{23} + \beta x_2 (xdx)_{12} = 0.$$

Его интеграл

$$\rho_1 \frac{x_3}{x_2} + \beta \lg \frac{x_2}{x_1} = C$$

Получаем ур-ие вида (27).

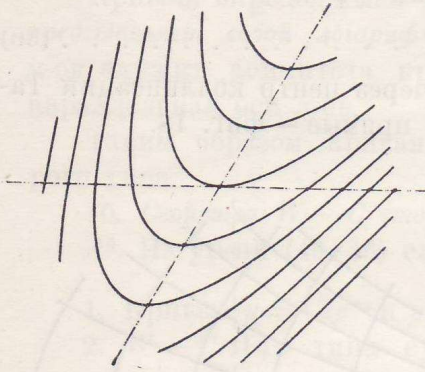
*C°.* Наконец, когда все 3 корня характ. ур. равны нулю:  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ .

Каноническая форма коннекса [*A°* стр. 43 тип IV] имеет вид:

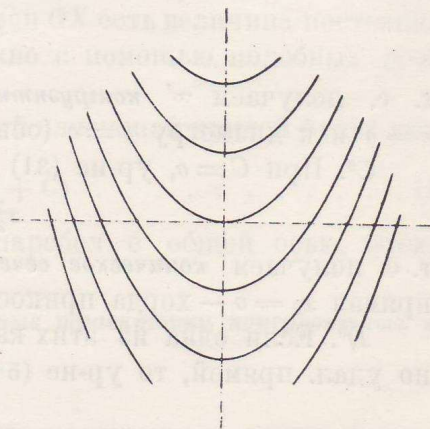
$$\alpha x_1 u_2 + \beta x_2 u_3 = 0$$

а диффр. ур-ие

$$\alpha x_1 (xdx)_{31} + \beta x_2 (xdx)_{12} = 0.$$



Фиг. 42.



Фиг. 43.

Его интегральные кривые определяются ур-ем:

$$Cx_1^2 + \beta x_2^2 - 2\alpha x_1 x_3 = 0,$$

в этом случае приходим к ур-ию (31).

Таким образом с геометрической стороны вырожденные коллинеации ничего нового не дают. Во всех указанных случаях получаем рассмотренные выше кривые.

15°. *Значение  $W-C$  в теории дифференциальных ур-ий.*

Расположение интегральных кривых ур-ия Якоби (или что тоже  $W-C$ ) вблизи его особенных точек лежит, как известно, в основе классификации обыкновенных критических точек дифференциального ур-я 1-го порядка и 1-ой степени.

Последняя классификация дана Н. Poincaré.

[Н. Poincaré. „Sur les courbes définies par les équations différentielles“ J. de Math. (3), 7, 1881].

Однако следует заметить, что типы особенных точек, установленные Н. Poincaré, впервые встречаются в работе Н. Жуковского. Кинематика жидкого тела Матем. Сб. Т. VШ, 1876, стр. 61 или Соч. I, стр. 92.

На это обстоятельство, а также и на то, что вопрос о критических точках дифференциального ур-ия тесно связан с изучением различных типов самопроективных кривых ( $W-C$ ) обращает внимание проф. Д. М. Синцов. [Д. М. Синцов. Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек диффер. ур-я 1-го пор. 1924 г.].

В своей работе Н. Жуковский рассматривает для бесконечно малых линий токов следующее дифф. ур-ие

$$\frac{dx_1}{m_1 x_1 - nx_2} = \frac{dx_2}{nx_1 + m_2 x_2} = \frac{dx_3}{kx_3}$$

или в обыкновенных координатах

$$\frac{dx}{m_1 x - ny} = \frac{dy}{nx + m_2 y}$$

Взяв последнее ур-ие в виде

$$dx(nx + m_2 y) = dy(m_1 x - ny)$$

и заменив в нем

$$m_1 = \frac{m_2 + m_1}{2} - \frac{m_2 - m_1}{2}$$

$$m_2 = \frac{m_2 + m_1}{2} + \frac{m_2 - m_1}{2},$$

умножим на интегрирующий множитель

$$M = \frac{1}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)}$$

Тогда получим

$$\frac{(m_2 - m_1)(ydx + xdy) + 2n(xdx + ydy)}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)} = \frac{(m_2 + m_1)(xdy - ydx)}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{\frac{m_2 + m_1}{n} d\frac{y}{x}}{\frac{y_2}{x_2} + \frac{m_2 - m_1}{n} \cdot \frac{y}{x} + 1} \dots \dots \dots (55)$$

Определив кривые, удовлетворяющие этому ур-ию, Жуковский исследует также и его критические точки, понимая под последними „точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну“.

Рассматривает он следующие случаи:

*A*<sup>0</sup>. *Первый, когда*  $(m_2 - m_1)^2 > 4n^2$

В этом случае ур-ие интегральных кривых имеет вид:

$$\log [(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)] =$$

$$= \log C + \frac{m_2 + m_1}{\sqrt{(m_2 - m_1)^2 - 4n^2}} \log \frac{2n\left(\frac{y}{x}\right) + (m_2 - m_1) - \sqrt{(m_2 - m_1)^2 - 4n^2}}{2n\left(\frac{y}{x}\right) + (m_2 - m_1) + \sqrt{(m_2 - m_1)^2 - 4n^2}}$$

Положив

$$ny + \frac{(m_2 - m_1) - \sqrt{(m_2 - m_1)^2 - 4n^2}}{2} x = \sqrt{n} \cdot \lambda \cdot X$$

$$ny + \frac{(m_2 - m_1) + \sqrt{(m_2 - m_1)^2 - 4n^2}}{2} x = \sqrt{n} \cdot \lambda \cdot Y,$$

получим

$$XY = C \left( \frac{X}{Y} \right)^A,$$

где

$$A = \frac{m_2 + m_1}{\sqrt{(m_2 - m_1)^2 - 4n^2}}$$

Обозначая

$$1 - A = -r_2 \quad 1 + A = r_1,$$

будем иметь

$$Y = CX^{\frac{r_2}{r_1}}$$

— ур-ие, рассмотренное нами выше [стр. 15, ур-ие (33)].

Отсюда:

*I*<sup>0</sup>. При  $\frac{r_2}{r_1} > 0$  получаем ур-ие парабол высшего порядка, изображенных на фиг. 21 и 22.

II°. При  $\frac{r_2}{r_1} < 0$  — ур-ие гипербол высшего порядка; расположе-  
ние кривых на фиг. 23 и 24.

III°. При  $\frac{r_2}{r_1} = 1$  — ур-ие пучка прямых — фиг. 20.

Рассматривая расположение кривых во всех этих случаях, а также сравнивая полученные результаты с работой Walther von Dyck'a.

[Walther von Dyck. „Ueber die singulären Stellen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. München Ber. 1909],

приходим к следующим выводам:

В I-ом случае — всякая линия тока (интегральная кривая) *проходит* через критическую точку.

Такую точку называют *узлом*. [noeud — H. Poincaré, Knotenpunkt — W. Dyck].

Во II-ом случае — через критическую точку проходят две и только две линии тока (две интегральные кривые) — у нас: асимптоты гипербол, получающиеся из ур-ия (33) при  $C = 0$ .

Такую точку называют *нейтральной*, [Col — Poincaré, Doppelpunkt — W. Dyck].

В III-м — имеем критическую точку — Büschelpunkt [— W. Dyck].

$B^0$  Рассмотрим теперь расположение кривых при условии, когда

$$(m_2 - m_1)^2 - 4n^2 = 0.$$

В этом случае ур-ие (55), представленное в виде

$$\frac{(m_2 - m_1)(ydx + xdy) + 2n(xdx + ydy)}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{m_2 + m_1}{n} d \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x} + \frac{m_2 - m_1}{2n}\right)^2 + 1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4n^2}} \dots \dots \dots (56)$$

преобразуется в

$$\frac{(m_2 - m_1)(ydx + xdy) + 2n(xdx + ydy)}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{m_2 + m_1}{n} d \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x} \pm 1\right)^2}$$

Интегрируя последнее ур-ие и полагая затем  $\frac{m_2 + m_1}{n} = B,$

получим

$$\log |(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)| = \log C + B \frac{1}{\frac{y}{x} \pm 1}.$$



ИЛИ

$$(m_2 - m_1) xy + n(x^2 + y^2) = Ce^{B \frac{y}{x-1}}$$

и наконец, в полярных координатах

$$(m_2 - m_1) r^2 \sin \varphi \cos \varphi + nr^2 = Ce^{\frac{B}{r \sin \varphi} \pm 1}$$

При  $m_2 - m_1 = -2n$ :

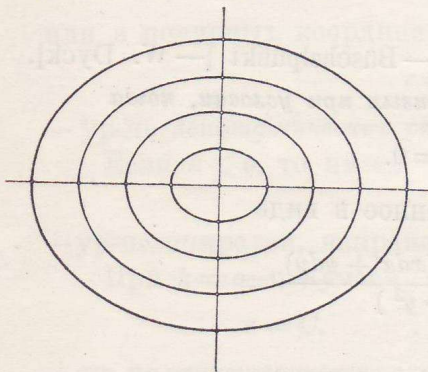
$$r^2 (1 - \sin 2\varphi) = Ce^{\frac{B}{r \sin \varphi} \pm 1}$$

и, наконец, заменяя  $\varphi = \frac{\pi}{4} + u$ , имеем при верхнем знаке

$$r = \frac{C}{\sin u e^{ctgu-1}},$$

где  $B = 4$ .

В рассматриваемом случае все интегральные кривые проходят через полюс (Фиг. 40).



Фиг. 44.

VI. Эту точку Жуковский выделяет в точку, отличную от узла. В случае узла, если взять всю систему кривых, имеем точку перегиба, а здесь — точку пресечения (остановки).

В схеме W. Дуск'а последняя точка отсутствует.

C°. В том случае, когда

$$(m_2 - m_1)^2 - 4n^2 < 0$$

ур-ие (55) дает:

$$\begin{aligned} & \log [(m_2 - m_1) xy + n(x^2 + y^2)] \\ &= \log C + \frac{2(m_2 + m_1)}{n\sqrt{4n^2 - (m_2 - m_1)^2}} \operatorname{arctg} \frac{2n \frac{y}{x} + (m_2 - m_1)}{\sqrt{4n^2 - (m_2 - m_1)^2}} \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & (m_2 - m_1) xy + n(x^2 + y^2) = \\ &= Ce^{n^2 \sqrt{1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4n^2}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{x} + \frac{m_2 - m_1}{2n}}{\sqrt{1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4n^2}}}} \end{aligned}$$

имеем ур-ие логарифмических спиралей, которое переходит в

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \text{ — фиг. 35.}$$

V°. В этом случае ни одна линия тока (интегральная кривая) не проходит через критическую точку, но асимптотически к ней

приближается, все время закручиваясь вокруг нее. Такую точку называют *фокусом* [foyer = Н. Poincaré, Wirbelpunkt — W. Dusk].

D<sup>0</sup>. При  $m_2 + m_1 = 0$  спирали переходят в эллипсы:

$$2m_2 xy + n(x^2 + y^2) = C \text{ — фиг. 44.}$$

E<sup>0</sup>. При  $k = 0$ , логарифмические спирали переходят в окружности — фиг. 45.

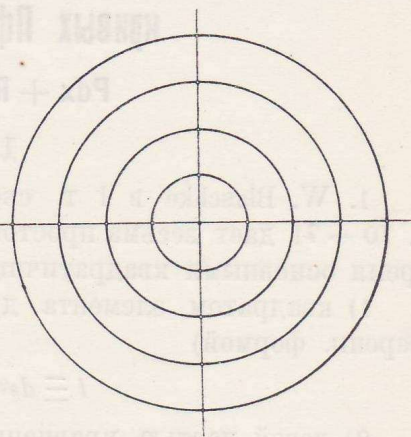
VI<sup>0</sup>. В случаях D<sup>0</sup> и E<sup>0</sup> ни одна линия тока (интегральная кривая) не проходит через критическую точку, но в отличие от предыдущего случая эта последняя будет окружена замкнутыми линиями.

Такую точку называют *центром* (centre—Poincaré, Isolierter Punkt—W. Dusk).

VII<sup>0</sup>. Кроме указанных критических точек, мы имеем еще одну критическую точку. Последняя получается для интегральных кривых в том случае, когда характеристическое уравнение  $\Delta(\rho) = 0$  имеет тройной корень.

Соответствующие интегральные кривые уравнения Якоби имеем на фиг. 19. Здесь мы имеем пучок конических сечений, имеющих соприкосновение 3-го порядка. Случай этот не указан ни Жуковским, ни W. Dusk'ом.

Такую точку можно назвать (Д. М. Синцов) — point d'osculation, Berührungspunkt.



Фиг. 45.

16<sup>0</sup>. Литература о W-C. Кроме указанной выше, назовем еще следующие работы.

1. Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften. B. III. Heft 2/3.
2. S. Lie. Vorlesungen über Continuirliche Gruppen 1893.
3. G. Loria. Spezielle algebr. und transcend. ebene Kurven.
4. H. Wieleitner. Spezielle ebene Kurven.
5. G. Fouret. Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système  $(p, \nu)$ . Bull. de la société Math. de France. T. II. 1873-74.
6. M. Janet. Sur les surfaces et les courbes tetraedrales symetriques. Ann. de l'école normale supér T. IV. 1887.
7. Д. Синцов. К вопросу об особенных элементах коннекса. Изв. Каз. Физ.-Мат. Общ-ва 1902.
8. D. Sinzov. On the theory of connexes. Труды V Мат. Конгреса в Кембридже.
9. G.-H. Halphen. Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Salmon. Traité de géom. anal. 1884.

## Обобщение формулы Энперер'a-Beltrami на системы интегральных кривых Пфаффа уравнения

$$Pdx + Rdy + Qdz = 0 \quad (I).$$

Д. М. Сивцов.

1. W. Blaschke в I т. своих Vorlesungen über Differentialgeometrie S. 70 — 71 дает весьма простой вывод интересной зависимости между тремя основными квадратичными дифференциальными формами:

1) квадратом элемента дуги кривой на поверхности (1-й дифференц. формой)

$$I \equiv ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

2) левой частью уравнения асимптотических линий (2-й дифф. формой)

$$II \equiv rdx^2 + 2sdx dy + tdy^2$$

и 3) квадратом линейного элемента сферического изображения III.

Взяв за основные два взаимно-перпендикулярных направления линий кривизны  $d_1\xi$  и  $d_2\xi$  мы имеем в векториальной форме

$$I \equiv d_1\xi^2 + d_2\xi^2, \quad II \equiv \frac{1}{R_1} d_1\xi^2 + \frac{1}{R_2} d_2\xi^2, \quad III = \frac{1}{R_1^2} d_1\xi^2 + \frac{1}{R_2^2} d_2\xi^2$$

исключая  $d_1\xi$  и  $d_2\xi$  приходим к формуле

$$K.I - 2H.II + III = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

где  $K$  — Гауссова кривизна,  $H$  — средняя кривизна.

2. Интересно посмотреть, как соотношение (1) изменяется, если (I) не выполняет условия интегрируемости. Для ориентировки выведем соотв. соотношение принимая точку за начало и плоскость ей принадлежащую в силу (I)

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0$$

за плоскость XOY, и главные в ней направления за OX и OY.

Тогда

$$I \equiv dx^2 + dy^2 \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$II \equiv \frac{1}{R_1} dx^2 + \frac{1}{R_2} dy^2 \quad \dots \dots \dots (b)$$

наконец

$$III \equiv \sum dP^2$$

если для упрощения вычислений принять  $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ , и след.  $dR = 0$ . Т. обр. III приводится к виду

$$III = \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4} G^2 \right) dx^2 + G \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dx dy + \left( \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4} G^2 \right) dy^2$$

Вывести соотношение между тремя формами т. о. нельзя, и надо ввести четвертую форму, за которую естественнее всего принять левую часть уравнения линий кривизны (1-го определения), которое в выбранной системе имеет вид

$$IV \equiv dx dy \text{ (или } K dx dy \text{)}$$

так что

$$III - G \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) IV = \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4} G^2 \right) dx^2 + \left( \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4} G^2 \right) dy^2 \dots (c)$$

Условие совместности (a), (b), (c) дает нам таким образом соотношение в виде определителя, которое по раскрытии принимает вид;

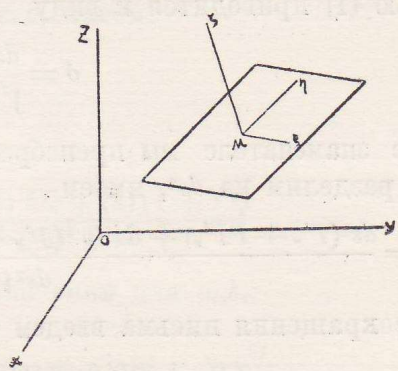
$$(K - \frac{1}{4} G^2) \cdot I - 2H \cdot II + III - G \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) IV = 0 \dots (2)$$

оно и представляет то соотношение, которое мы хотели вывести, но только при частном выборе системы координат, и которое при  $G = 0$  обращается в соотношение Beltrami-Enneper'a.

Чтобы получить его в общем виде можем прибегнуть к преобразованию координат.

Ход мысли такой: от системы координат  $x, y, z$  переходим к любой  $\xi, \eta, \zeta$  с началом в данной точке  $M(x, y, z)$ , за ось  $\zeta$ -ов берем перпендикуляр к плоскости системы соответствующей этой точке, а оси  $0\xi$  и  $0\eta$  направляем по направлениям соотв. главным радиусом кривизны. Надо составить выражения для косинусов

	$0x$	$0y$	$0z$
$0\xi$	$a_1$	$b_1$	$c_1$
$0\eta$	$a_2$	$b_2$	$c_2$
$0\zeta$	$\frac{P}{\Delta}$	$\frac{Q}{\Delta}$	$\frac{-1}{\Delta}$



где берем

$$R = -1$$

$$dz = P dx + Q dy \dots (b)$$

$$\Delta^2 = 1 + P^2 + Q^2$$

$$Pa_1 + Qb_1 = c_1$$

$$Pa_2 + Qb_2 = c_2$$

$$dx = a_1 d\xi + a_2 d\eta + \frac{P}{\Delta} d\zeta, \quad dy = b_1 d\xi + b_2 d\eta + \frac{Q}{\Delta} d\zeta, \quad dz = c_1 d\xi + c_2 d\eta - \frac{d\zeta}{\Delta}$$

подставляем в (1):

$$0 = d\xi(Pa_1 + Qb_1 - c_1) + d\eta(Pa_2 + Qb_2 - c_2) + \Delta d\zeta$$

т. е.

$$\Delta \cdot d\zeta = 0 \quad (\Delta \neq 0)$$

Итак имеем:

$$dx = a_1 d\xi + a_2 d\eta$$

$$dy = b_1 d\xi + b_2 d\eta$$

$$dz = (Pa_1 + Qb_1) d\xi + (Pa_2 + Qb_2) d\eta \equiv c_1 d\xi + c_2 d\eta$$

Отсюда:

$$1^0. \quad I = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

Отметим сейчас же что основное соотношение

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2)$$

даёт

$$a_i^2(1 + P^2) + 2PQ a_i b_i + b_i^2(1 + Q^2) = 1,$$

а условие ортогональности  $O\xi$  и  $O\eta$ :

$$0 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_1 a_2 (1 + P^2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) PQ + b_1 b_2 (1 + Q^2).$$

2<sup>0</sup>. Чтобы вывести преобразованное выражение 2-й диффер. формы, нам нужно остановиться на самых значениях  $a_i, b_i$ , о которых пока не было речи, ибо 1-я форма преобразовывалась одинаково лишь бы новые оси были перпендикулярны, и только у нас  $d\zeta = 0$

Теперь однако необходимо припомнить выражения для радиуса кривизны и уравнение линий кривизны.

Перпендикуляр из точки  $(x, y, z)$  на плоскость

$$(P + dP)(X - x - dx) + (Q + dQ)(Y - y - dy) - (Z - z - dz) = 0$$

принадлежащую б. близкой точке  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , с помощью (1) приводится к виду

$$\delta = \frac{dx dP + dy dQ}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}$$

где в знаменателе мы пренебрегаем  $dP$  и  $dQ$  в сравнении с  $P$  и  $Q$ ; если разделим на  $ds^2$ , имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{ds^2(P'_x + PP'_z) + dx dy (P'_y + Q'_x + P'_z Q + Q'_z P) + dy^2(Q'_y + QQ'_z)}{ds^2 \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$$

для сокращения письма введем обозначения

$$(P'_x + PP'_z) = (1)$$

$$(Q'_x + PQ'_z) = (3)$$

$$(P'_y + QP'_z) = (2)$$

$$(Q'_y + QQ'_z) = (4)$$

Тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\frac{1}{R} = \frac{(1)dx^2 + (2+3) dxdy + (4)dy^2}{ds^2 \sqrt{1 + P^2 + Q^2}} \dots \dots \dots (A)$$

Обозначим

$$\frac{dx}{ds} = a, \frac{dy}{ds} = b$$

$$K = \frac{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}{R} = (1) a^2 + (2+3) ab + (4) b^2$$

Чтобы получить главные направления, ищем экстремум этого выражения, помня, что  $a$  и  $b$  связаны соотношением

$$(1 + P^2)a^2 + 2PQab + (1 + Q^2)b^2 = 1.$$

Получим:

$$\left. \begin{aligned} (1)a + \frac{1}{2}(2+3)b - K[(1+P^2)a + PQb] &= 0 \\ \frac{1}{2}(2+3)a + (4)b - K[PQa + (1+Q^2)b] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

где  $K$  есть именно экстремальное значение  $\frac{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}{R}$ .

Для определения этого  $K$  имеем квадратное уравнение

$$\begin{vmatrix} (1) - K(1+P^2) & \frac{1}{2}(2+3) - KPQ \\ \frac{1}{2}(2+3) - KPQ & (4) - K(1+Q^2) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$K^2(1 + P^2 + Q^2) - K [(1)(1 + Q^2) - (2 + 3) PQ + (4)(1 + P^2)] + (1)(4) - \frac{1}{4}(2 + 3)^2 = 0$$

Отсюда называя  $K_1$  и  $K_2$  корни его, имеем:

$$K_1 \cdot K_2 = \frac{(1)(4) - \frac{1}{4}(2+3)^2}{1 + P^2 + Q^2}$$

$$K_1 + K_2 = \frac{(1)(1 + Q^2) - (2+3) PQ + (4)(1 + P^2)}{1 + P^2 + Q^2}$$

Отсюда получаются следующие значения для  $a_i, b_i$ :

$$\frac{a_i}{\frac{1}{2}(2+3) - K_i PQ} = \frac{b_i}{-(1) + K_i(1 + P^2)} = \frac{c_i}{\frac{1}{2}(2+3)P - (1)Q + K_i Q}$$

или если возьмем 2-ые уравнения

$$\frac{a_i}{(4) - K_i(1+Q^2)} = \frac{b_i}{-\frac{1}{2}(2+3) + PQK_i} = \frac{c_i}{P(4) - \frac{1}{2}(2+3)Q - K_iP}$$

Перемножая эти соотношения почленно и складывая (если  $\lambda$  и  $\mu$  общие значения 1-ых и 2-ых отношений):

$$\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= \lambda\mu \left[ \left( \frac{1}{2}(2+3) - K_1PQ \right) \left( (4) - K_2(1+Q^2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( -(1) + K_1(1+P^2) \right) \left( -\frac{1}{2}(2+3) + PQK_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2}(2+3)P - (1)Q + K_1Q \right) \left( P(4) - \frac{1}{2}(2+3)Q - K_2Q \right) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2}(2+3)(1)(1+Q^2) + \frac{1}{2}(2+3)(4)(1+P^2) - PQ \left\{ (1)(4) + \frac{1}{4}(2+3)^2 \right\} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}(2+3)(1+P^2+Q^2)(K_1+K_2) + K_1K_2(1+P^2+Q^2)PQ \lambda\mu \\ &= \lambda\mu \left[ PQ \left\{ K_1K_2(1+P^2+Q^2) - (1)(4) + \frac{1}{4}(2+3)^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(2+3) \left\{ (1)(1+Q^2) - PQ(2+3) + (4)(1+P^2) - (K_1+K_2)(1+P^2+Q^2) \right\} \right] \end{aligned}$$

т. е. = 0.

Мы обнаружили таким образом еще раз, что направления главных (экстремальных) кривизн взаимно ортогональны. Пусть соотв. радиусы  $R_1$  и  $R_2$ . Подставим в (A) новые координаты

$$\begin{aligned} II &\equiv \frac{ds^2}{R} = \\ &= \frac{(1)(a_1d\xi + a_2d\eta)^2 + (2+3)(a_1d\xi + a_2d\eta)(b_1d\xi + b_2d\eta) + (4)(b_1d\xi + b_2d\eta)^2}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \\ &= d\xi^2 \frac{(1)a_1^2 + (2+3)a_1b_1 + (4)b_1^2}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} + d\eta^2 \frac{(1)a_2^2 + (2+3)a_2b_2 + (4)b_2^2}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \\ &\quad + 2 \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \left\{ (1)a_1a_2 + \frac{1}{2}(2+3)(a_1b_2 + b_1a_2) + (4)b_1b_2 \right\} \end{aligned}$$

Коэффициент при  $d\xi d\eta$  можно переписать

$$a_1 \left\{ (1)a_2 + \frac{1}{2}(2+3)b_2 \right\} + b_1 \left\{ \frac{1}{2}(2+3)a_2 + (4)b_2 \right\}$$

следовательно, в силу (B) он равен

$$K_2 (a_2 a_1 (1 + P^2) + PQ (a_1 b_2 + b_1 a_2) + (1 + Q^2) b_1 b_2)$$

и следовательно по предыдущему равен нулю.

Таким образом

$$II = \frac{1}{R_1} d\xi^2 + \frac{1}{R_2} d\eta^2$$

3°. Элемент сферического изображения

$$\begin{aligned} III = d\sigma^2 &= \left( d\left(\frac{P}{\Delta}\right) \right)^2 + \left( d\left(\frac{Q}{\Delta}\right) \right)^2 + \left( d\left(\frac{1}{\Delta}\right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{\Delta^4} \left[ \left( \Delta dP - P d\Delta \right)^2 + \left( \Delta dQ - Q d\Delta \right)^2 + d\Delta^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^4} \left[ dP^2 + dQ^2 + \left( PdQ - QdP \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Здесь

$$dP = P'_x dx + P'_y dy + (Pdx + Qdy)P'_z = (1)dx + (2)dy$$

Если ввести сюда  $\xi$  и  $\eta$ :

$$dP = [(1)a_1 + (2)b_1]d\xi + [(1)a_2 + (2)b_2]d\eta$$

С помощью (B) это выражение примет вид:

$$\begin{aligned} &\left[ K_1 \left( a_1 (1 + P^2) + b_1 PQ \right) + \frac{1}{2} ((2) - (3)) b_1 \right] d\xi + \\ &\quad + \left[ K_2 \left( a_2 (1 + P^2) + b_2 PQ \right) - \frac{1}{2} ((2) + (4)) b_2 \right] d\eta \end{aligned}$$

Заметим, что при наших обозначениях

$$G = -P \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (2) - (4).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} dP = &\left[ K_1 (a_1 (1 + P^2) + b_1 PQ) + \frac{1}{2} G b_1 \right] d\xi + \\ &+ \left[ K_2 (a_2 (1 + P^2) + b_2 PQ) + \frac{1}{2} G b_2 \right] d\eta \end{aligned}$$

точно также

$$\begin{aligned} dQ = & \\ = &\left[ K_1 (a_1 PQ + b_2 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} G a_1 \right] d\xi + \left[ K_2 (a_2 PQ + b_2 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} G a_2 \right] d\eta \end{aligned}$$



и отсюда

$$PdQ - QdP = d\xi \left[ K_1 (Pb_1 - Qa_1) - \frac{1}{2} G(Pa_1 + Qb_1) \right] \\ + d\eta \left[ K_2 (Pb_2 - Qa_2) - \frac{1}{2} G(Pa_2 + Qb_2) \right]$$

Возвышая теперь в квадрат и складывая, имеем коэффициент при  $d\xi^2$

$$\left[ K_1 (a_1 (1 + P^2) + b_1 PQ) + \frac{1}{2} Gb_1 \right]^2 + \left[ K_1 (a_1 PQ + b_1 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} Ga_1 \right]^2 + \\ + \left[ K_1 (Pb_1 - Qa_1) - \frac{1}{2} G(Pa_1 + Qb_1) \right]^2 \\ \equiv (1 + P^2 + Q^2) K_1^2 + \frac{1}{4} G^2,$$

ибо множители при них силу  $a_1^2 + b_1^2 + (Pa_1 + Qb_1)^2 = 1$  обращаются в 1, а при  $K_1 G$  множитель тождественно обращается в 0.

Точно также найдем коэффициент при  $d\eta^2$  равным

$$(1 + P^2 + Q^2) K_2^2 + \frac{1}{4} G^2.$$

Остается вычислить коэффициент при  $d\xi d\eta$

$$\left[ K_1 (a_1 (1 + P^2) + b_1 PQ) + \frac{1}{2} Gb_1 \right] \cdot \left[ K_2 (a_2 (1 + P^2) + b_2 PQ) + \frac{1}{2} Gb_2 \right] \\ + \left[ K_1 (a_1 PQ + b_1 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} Ga_1 \right] \cdot \left[ K_2 (a_2 PQ + b_2 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} Ga_2 \right] \\ + \left[ K_1 (Pb_1 - Qa_1) - \frac{1}{2} G(Pa_1 + Qb_1) \right] \left[ K_2 (Pb_2 - Qa_2) - \frac{1}{2} G(Pa_2 + Qb_2) \right].$$

При  $K_1 K_2$  множитель

$$(1 + P^2 + Q^2) ((1 + P^2) a_1 a_2 + PQ(a_1 b_2 + b_1 a_2) + b_1 b_2 (1 + Q^2)) = 0$$

в силу доказанной ортогональности.

Т. т. при  $\frac{1}{4} G^2$  множитель

$$b_1 b_2 + a_1 a_2 + (Pa_1 + Qb_1)(Pa_2 + Qb_2) = 0$$

Наконец при  $\frac{1}{2} G$  имеем множитель

$$K_1 [b_2 (a_1 (1 + P^2) + b_1 PQ) - a_2 (a_1 PQ + b_1 (1 + Q^2)) - \\ - (Pb_1 - Qa_1)(Pa_2 + Qb_2)] \\ + K_2 [b_1 (a_2 (1 + P^2) + b_2 PQ) - a_1 (a_2 PQ + b_2 (1 + Q^2)) - \\ - (Pb_2 - Qa_2)(Pa_1 + Qb_1)] \\ = (K_1 - K_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1)(1 + P^2 + Q^2)$$

Таким образом окончательно

$$(1 + P^2 + Q^2)^2 \cdot III = \left[ (1 + P^2 + Q^2) K_1^2 + \frac{1}{4} G^2 \right] d\xi^2 + \\ + \left[ (1 + P^2 + Q^2) K_2^2 + \frac{1}{4} G^2 \right] d\eta^2 \\ + \frac{1}{2} G(K_1 - K_2) (a_1 b_2 - b_1 a_2) d\xi d\eta$$

4°. Уравнение линий кривизны

$$\begin{vmatrix} (1) dx + \frac{1}{2}(2+3)dy, & dx(1+P^2) + PQdy \\ \frac{1}{2}(2+3)dx + (4)dy, & PQdx + (1+Q^2)dy \end{vmatrix} = 0$$

преобразуется при той же подстановке

$$\begin{vmatrix} \sum \left[ (1)a_1 + \frac{1}{2}(2+3)b_1 \right] d\xi, & \sum [(1+P^2)a_1 + PQd_1] b\xi, \\ \sum \left[ \frac{1}{2}(2+3)a_1 + (4)b_1 \right] d\xi, & \sum (PQa_1 + (1+Q^2)d_1 l\xi) \end{vmatrix}$$

заменяя по (B) 1-й столбец и вычитая из него 2-й умноженный на  $K_2$  имеем

$$= (K_1 - K_2) d\xi d\eta \begin{vmatrix} a_1(1+P^2) + b_1 PQ, & (1+P^2)a_2 + PQb_2 \\ PQa_1 + (1+Q^2)b_1, & PQa_2 + (1+Q^2)b_2 \end{vmatrix} \\ = (K_1 - K_2) d\xi d\eta \begin{vmatrix} a_1 b_1 & 1+P^2 & PQ \\ a_2 b_2 & PQ & 1+Q^2 \end{vmatrix} \\ = (1+P^2+Q^2)(K_1 - K_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) d\xi d\eta$$

Это мы и принимаем за 4-ую форму

$$(1 + P^2 + Q^2) \cdot IV = (K_1 - K_2) (a_1 b_2 - b_1 a_2) d\xi d\eta,$$

что уже дает возможность составить желаемую формулу, ибо

$$(1 + P^2 + Q^2)^2 III = \left[ (1 + P^2 + Q^2) K_1^2 + \frac{1}{4} G^2 \right] d\xi^2 + \\ + \left[ (1 + P^2 + Q^2) K_2^2 + \frac{1}{4} G^2 \right] d\eta^2 + \frac{1}{2} G \cdot IV \cdot (1 + P^2 + Q^2)$$

и таким образом имеем

$$I = d\xi^2 + d\eta^2$$

$$II = \frac{1}{R_1} d\xi^2 + \frac{1}{R_2} d\eta^2$$

$$III - \frac{\frac{1}{2} G \cdot IV}{(1 + P^2 + Q^2)} = \left[ \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4} \frac{G^2}{(1 + P^2 + Q^2)^2} \right] d\xi^2 + \left[ \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4} \frac{G^2}{(1 + P^2 + Q^2)^2} \right] d\eta^2$$

и исключая  $d\xi^2$ ,  $d\eta^2$  имеем определитель

$$\begin{vmatrix} I & 1 & 1 \\ II & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \\ III - \frac{G \cdot IV}{2(1 + P^2 + Q^2)} & \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4} \frac{G^2}{(1 + P^2 + Q^2)^2} & \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4} \frac{G^2}{(1 + P^2 + Q^2)^2} \end{vmatrix} = 0$$

что по разложении определителя и сокращении на  $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$  дает

$$I \cdot \left( K - \frac{1}{4} \frac{G^2}{(1 + P^2 + Q^2)^2} \right) - 2H \cdot II + III - \frac{1}{2} \frac{G}{(1 + P^2 + Q^2)^2} IV = 0.$$

5°. Рассмотрим еще 5-ю дифференциальную форму, именно, дифференциальное уравнение линий кривизны 2-го определения — огибающие направлений, в которых бесконечно-близкие нормали системы

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{X-x-dx}{P+dP} = \frac{Y-y-dy}{Q+dQ} = \frac{Z-z-dz}{-1}$$

пересекаются.

Условие пересечения и есть искомое уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad 0 = \begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ Pdx + Qdy & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Здесь надо ввести

$$dP = (1) dx + (2) dy, \quad dQ = (3) dx + (4) dy$$

и преобразовать оси координат:

$$dx = a_1 d\xi + a_2 d\eta, \quad dy = b_1 d\xi + b_2 d\eta$$

и след.

$$Pdx + Qdy = (Pa_1 + Qb_1) d\xi + (Pa_2 + Qb_2) d\eta$$

и

$$dP = ((1)a_1 + (2)b_1) d\xi + ((1)a_2 + (2)b_2) d\eta$$

$$dQ = ((3)a_1 + (4)b_1) d\xi + ((3)a_2 + (4)b_2) d\eta$$

По подстановке определитель примет вид

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 d\xi + a_2 d\eta, & P, & ((1)a_1 + (2)b_1) d\xi + ((1)a_2 + (2)b_2) d\eta \\ b_1 d\xi + b_2 d\eta, & Q, & ((3)a_1 + (4)b_1) d\xi + ((3)a_2 + (4)b_2) d\eta \\ (Pa_1 + Qb_1) + (Pa_2 + Qb_2) d\eta, & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

последний столбец можно по предыдущему заменить через

$$\begin{aligned} & \left[ K_1 (a_1 (1 + P^2) + b_1 PQ) + \frac{1}{2} G b_1 \right] d\xi + \\ & \quad + \left[ K_2 (a_2 (1 + P^2) + b_2 PQ) + \frac{1}{2} G b_2 \right] d\eta \\ & \left[ K_1 (a_1 PQ + b_1 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} G a_1 \right] d\xi + \\ & \quad + \left[ K_2 (a_2 PQ + b_2 (1 + Q^2)) - \frac{1}{2} G a_2 \right] d\eta \end{aligned}$$

разлагая по элементам этого столбца видим, что определитель есть квадратичная форма вида

$$A d\xi^2 + B d\xi d\eta + C d\eta^2$$

выполняя на самом деле подсчет, убеждаемся, что

$$A = C = -\frac{1}{2} G$$

$$B = -(K_1 - K_2) (a_1 b_2 - b_1 a_2) (1 + P^2 + Q^2)$$

таким образом можем принять

$$\begin{aligned} V &= +\frac{1}{2} G (d\xi^2 + d\eta^2) + (K_1 - K_2) (a_1 b_2 - b_1 a_2) (1 + P^2 + Q^2) d\xi d\eta \\ &= +\frac{1}{2} G \cdot I + (1 + P^2 + Q^2)^2 IV \end{aligned}$$

эта формула лишней раз подчеркивает, что обе системы линий кривизны 1. и 2. определения в случае интегрируемости совпадают.

Основную формулу II можно переписать

$$0 = K \cdot I - 2H \cdot II + III - \frac{1}{2} \frac{G}{(1 + P^2 + Q^2)^2} \left( \frac{1}{2} G \cdot I + (1 + P^2 + Q^2) IV \right)$$

и следовательно если вм. IV ввести форму V, то получим занимающее нас соотношение в более простом виде

$$0 = K \cdot I - 2H \cdot II + III - \frac{1}{2} \frac{G}{(1 + P^2 + Q^2)^2} \cdot V$$

При  $G = 0$  последний член пропадает и имеем формулу Эйненера-Бельтрами.

## Свойства системы интегральных кривых Пфаффа уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$

*Распространение на системы интегральных кривых Пфаффа уравнения  
 $Pdx + Qdy + Rdz = 0$  (1) теоремы Гаусса.*

Д. М. Сявцов.

Приведем уравнение (1) к виду

$$dz = Pdx + Qdy \dots \dots \dots (1')$$

где  $P$  и  $Q$  функции  $x, y, z$ . В плоскости

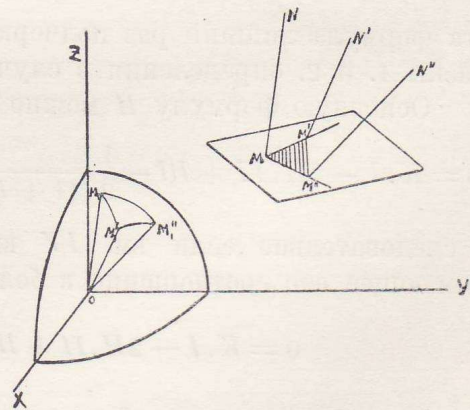
$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y) \dots \dots \dots (2)$$

проходящей через точку  $M(x, y, z)$  вообразим два выходящие из  $M$  направления  $dx, dy, dz$  и  $d'x, d'y, d'z$ , иными словами две точки

$$M' = (x + dx, y + dy, z + dz) \text{ и} \\ M'' = (x + d'x, y + d'y, z + d'z).$$

Этим точкам по (1') принадлежат плоскости (2) и нормали  $M'N'$  и  $M''N''$ .

Проведя через начало  $O$  (или какую н. другую точку) прямые параллельные  $MN, M'N'$  и  $M''N''$  получим на сфере радиуса 1 с центром в  $O$  три точки  $M_1, M'_1, M''_1$ , и треугольник  $M_1M'_1M''_1$  является сферическим изображением треугольника  $MM'M''$ .



Найдем площадь того и другого.  
Удвоенная площадь  $MM'M''$

$$2S = \sqrt{(dxd'y - dyd'x)^2 + (dyd'z - dzd'y)^2 + (dzd'x - dxd'z)^2};$$

по (1')

$$(dyd'z - dzd'y) = dy(Pd'x + Qd'y) - (Pdx + Qdy)d'y = \\ = P(dyd'x - dxd'y)$$

и

$$(dzd'x - dx d'z) = d'x(Pdx + Qdy) - dx(Pd'x + Qd'y) = Q(d'x dy - d'y dx);$$

таким образом

$$2S = (dxd'y - dyd'x) \sqrt{1 + P^2 + Q^2} = V(dxd'y - dyd'x)$$

Займемся теперь площадью треугольника  $M_1 M'_1 M''_1$ . Координаты его вершин

$$M_1: \quad \xi = \frac{P}{V}, \quad \eta = \frac{Q}{V}, \quad \zeta = \frac{-1}{V} \quad (V^2 = 1 + P^2 + Q^2)$$

$$M'_1: \quad \xi + d\xi = \frac{P}{V} + d\left(\frac{P}{V}\right) \text{ и т. д.}$$

$$M''_1: \quad \xi + d'\xi = \frac{P}{V} + d'\left(\frac{P}{V}\right) \dots$$

В виду малости сторон, можем его принять за плоский. Его площадь может быть поэтому выражена формулою

$$2S' = \sqrt{\Sigma(d\xi d'\eta - d\eta d'\xi)^2}$$

аналогичной предыдущей, и

$$d\xi = d\left(\frac{P}{V}\right) = \frac{VdP - PdV}{V^2} \text{ и т. д.}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d\xi d'\eta - d\eta d'\xi &= \frac{1}{V^4} \begin{vmatrix} VdP - PdV & VdQ - QdV \\ Vd'P - Pd'V & Vd'Q - Qd'V \end{vmatrix} \\ &= \frac{V}{V^4} \begin{vmatrix} dP & dQ & dV \\ d'P & d'Q & d'V \\ P & Q & V \end{vmatrix} = \frac{1}{V^4} (dPd'Q - dQd'P), \end{aligned}$$

в чем убедимся и непосредственным вычислением первого определителя. Точно также

$$d\eta d'\zeta - d\zeta d'\eta = \frac{P}{V^4} (dQd'P - dPd'Q),$$

$$d'\xi d\zeta - d'\zeta d\xi = \frac{Q}{V^4} (dPd'Q - dQd'P).$$

Таким образом

$$2S' = \frac{1}{V^4} \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)(dPd'Q - dQd'P)} = \frac{1}{V^3} (dPd'Q - dQd'P)$$

Отсюда

$$\frac{S'}{S} = \frac{dPd'Q - dQd'P}{V^4(dxd'y - dyd'x)}$$

$$\begin{aligned} \text{Определитель в числителе} &= \begin{vmatrix} dP & dQ \\ d'P & d'Q \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (1)dx + (2)dy, & (3)dx + (4)dy \\ (1)d'x + (2)d'y, & (3)d'x + (4)d'y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy \\ d'x & d'y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{S'}{S} = \frac{(1)(4) - (2)(3)}{(1 + P^2 + Q^2)^2};$$

но

$$\begin{vmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_x + P'_z & F'_y + QP'_z \\ Q'_x + PQ'_z & Q'_y + QQ'_z \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ P & Q & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

т. е. равен тому определителю (при  $R = -1$ ), который мы вслед за Voss'ом, обозначали через  $\Delta$ .

Вводя в эту формулу обратно  $-\frac{P}{R}, -\frac{Q}{R}$  вместо  $P, Q$  получим после небольших переделок:

$$\frac{dS'}{dS} = \frac{1}{(1^2 + Q^2 + R^2)^2} \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & R'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\Delta}{V^2}$$

Тот же самый результат можно получить применяя к рассматриваемой задаче одну замечательную формулу С. Neumann'a (Ueber correspondierende Flächenelemente, Math. Ann. XI. S. 306 — 308).

Эта формула такова: пусть соответствие между двумя тройками переменных  $x, y, z$  и  $\xi, \eta, \zeta$  устанавливается уравнениями:

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \psi(x, y, z), \quad \zeta = \chi(x, y, z);$$

между соответствующими поверхностными элементами существует связь:

$$\frac{d\sigma}{ds} = (-1) \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \alpha \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \beta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta'_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

где  $a, b, c$  косинусы углов с осями нормали к  $ds$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  — тоже для  $d\sigma$  \*).

Нейманн дает и приложение этой формулы к вычислению Гауссовой кривизны поверхности заданной уравнением  $f(x, y, z) = 0$ .

Здесь соответствие таково:

$$R = \sqrt{f'_x{}^2 + f'_y{}^2 + f'_z{}^2}, \quad \xi = \frac{1}{R} f'_x, \quad \eta = \frac{1}{R} f'_y, \quad \zeta = \frac{1}{R} f'_z$$

и  $a, b, c$ , гесп.  $\alpha, \beta, \gamma$  тождественны с  $\xi, \eta, \zeta$ .

\* Формулы свои С. Neumann дает без доказательства. После моего доклада в семинаре при кафедре геометрии такое доказательство было дано аспирантом Я. П. Бланком.

Но она приложима и к рассматриваемому нами случаю системы интегральных кривых уравнения

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

ибо здесь соответствие устанавливается формулами:

$$\xi = \frac{P}{V}, \eta = \frac{Q}{V}, \zeta = \frac{R}{V}, V = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

$$K' = \frac{ds'}{ds} = (-1) \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \xi \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \eta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta'_z & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)}{(\Sigma V^2)^2} \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & R'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}$$

Формулу Нейманна для Гауссовой кривизны поверхности приводит J. Ed. Wright Invariants of quadratic differential forms — Cambridge tracts № 9 — на стр. 50 (§ 48), но с множителем  $\frac{-1}{V^2}$  а не  $\frac{-1}{V^4}$  и без ссылки на Неймана.

Возвращаясь к выведенной нами формуле мы можем отметить что в этом случае, как и в других, происходит расщепление свойств: произведение мер кривизны главных (экстремальных) направлений, формально совпадая с Гауссовой кривизной поверхности, обладает и ее свойством характеризовать точки пространства (resp. поверхности) как эллиптические, гиперболические или параболические. Эта мера кривизны выражается как показано в пред. работе

$$K = - \frac{\Delta'}{4(P^2 + Q^2 + R^2)^2}$$

Предел же отношения б. малого треугольника к площади его сферического изображения

$$K' = - \frac{\Delta}{(P^2 + Q^2 + R^2)^2}$$

Так как

$$\Delta' = G^2 + 4 \Delta,$$

то ясно, что при  $G = 0$  оба выражения совпадают

*Геометрическое значение G.*

Rogers дал интересное геометрическое объяснение величины  $G$ .

Рассмотрим геодезическую (прямейшую) линию, — такую, которой выпрямляющая плоскость совпадает с плоскостью системы:

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

или кривую, для которой ребра подвижного триедра  $\alpha, l, \lambda$  дают

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0 \quad (\text{или } Pdx + Qdy + Rdz = 0)$$



$$P\lambda + Q\mu + R\nu = 0 \quad (\text{или} \quad \begin{vmatrix} P & Q & R \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0 \equiv \\ \equiv P(y'z'' - z'y'') + Q(z'x'' - x'z'') + R(x'y'' - y'x'')$$

В силу этих двух соотношений для кривой, косинусы углов ее главной нормали пропорциональны  $P, Q, R$ :

$$\frac{l}{P} = \frac{m}{Q} = \frac{n}{R};$$

отсюда мера кручения этой линии:

$$\frac{1}{\rho} = -r^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \frac{dl}{ds} & \frac{dm}{ds} & \frac{dn}{ds} \end{vmatrix}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{Vds^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix};$$

иначе:

$$-\frac{1}{\rho} = \lambda \frac{d\left(\frac{P}{V}\right)}{ds} + \mu \frac{d\left(\frac{Q}{V}\right)}{ds} + \nu \frac{d\left(\frac{R}{V}\right)}{ds},$$

что можно подробнее расписать

$$= \frac{1}{V} [(\lambda\alpha P'_x + \lambda\beta P'_y + \lambda\gamma P'_z) + (\mu\alpha Q'_x + \mu\beta Q'_y + \mu\gamma Q'_z) + \\ + (v\alpha R'_x + v\beta R'_y + v\gamma R'_z)] - \frac{1}{V} \frac{dV}{ds} (\lambda l + \mu m + \nu n).$$

Последнее слагаемое равно нулю.

Возьмем в той же плоскости (2) направление перпендикулярное к главной касательной; для него  $\alpha\beta\gamma$  заменяются через  $\lambda\mu\nu$ , положительное направление будет противоположно; так что:

$$-\frac{1}{\rho'} = -\alpha \frac{d\left(\frac{P}{V}\right)}{ds} - \beta \frac{d\left(\frac{Q}{V}\right)}{ds} - \gamma \frac{d\left(\frac{R}{V}\right)}{ds} \\ = -\frac{1}{V} [(\alpha\lambda P'_x + \alpha\mu P'_y + \alpha\nu P'_z) + (\beta\lambda Q'_x + \beta\mu Q'_y + \beta\nu Q'_z) \\ + (\gamma\lambda R'_x + \gamma\mu R'_y + \gamma\nu R'_z)]$$

Складывая, имеем сумму мер кручения по двум взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} &= \frac{1}{V} [(\lambda\beta - \mu\alpha)(P'_y - Q'_x) + (\lambda\gamma - \nu\alpha)(P'_z - R'_x) + \\ &\quad + (\mu\gamma - \beta\nu)(Q'_z - R'_y)] \\ &= \frac{1}{V^2} \left[ P \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{V^2} G. \end{aligned}$$

## Особенные случаи соприкасающегося шара (и плоскости) в точке пространственной кривой.

П. М. Дармостук.

Пусть дано уравнение кривой в параметрическом виде

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s).$$

Возьмем за начало координат и начало счета дуг точку  $A$ , в которой первые две производные непрерывны, а третьи производные справа и слева не равны между собою; кроме того производная справа непрерывна справа, а производная слева — непрерывна слева.

Тогда координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  раскладываются в строку справа от точки  $A$  по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \alpha s + \frac{\alpha'}{1.2R} s^2 - \frac{s^3}{1.2.3} \left[ \frac{\alpha'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT} + \varepsilon_1 \right] \\ y &= \beta s + \frac{\beta'}{1.2R} s^2 - \frac{s^3}{1.2.3} \left[ \frac{\beta'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta''}{RT} + \varepsilon_2 \right] \dots (1) \\ z &= \gamma s + \frac{\gamma'}{1.2R} s^2 - \frac{s^3}{1.2.3} \left[ \frac{\gamma'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\gamma}{R^2} + \frac{\gamma''}{RT} + \varepsilon_3 \right], \end{aligned}$$

где  $\frac{dR}{ds}$  производная справа от радиуса кривизны, а  $T$  радиус кручения справа.

Координаты точек кривой слева от точки  $A$  выражаются формулами:

$$\begin{aligned} x &= \alpha s + \frac{\alpha'}{1.2R} s^2 - \frac{s^3}{3!} \left[ \frac{\alpha'}{R^2} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT_1} + \eta_1 \right] \\ y &= \beta s + \frac{\beta'}{1.2R} s^2 - \frac{s^3}{3!} \left[ \frac{\beta'}{R^2} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta''}{RT_1} + \eta_2 \right] \dots (2) \\ z &= \gamma s + \frac{\gamma'}{1.2R} s^2 - \frac{s^3}{3!} \left[ \frac{\gamma'}{R^2} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\gamma}{R^2} + \frac{\gamma''}{RT_1} + \eta_3 \right], \end{aligned}$$

где  $\frac{dR}{ds_1}$  обозначает производную справа, а  $T_1$  радиус кручения, справа.

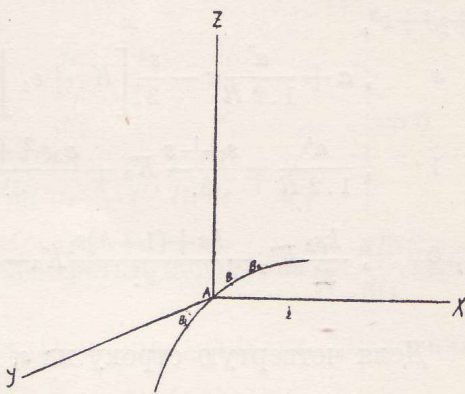
Вследствие непрерывности третьих производных справа и слева  $\varepsilon_i$  и  $\eta_i$  стремятся к нулю вместе с  $s$ .

Найдем предельное положение и величину радиуса шара, проведенного через точку  $A$ , две точки справа и одну точку слева от точки  $A$ .

Пусть  $\frac{AB_2}{AB_1} = \frac{s_1}{s} = h(s)$ ,  $\frac{AB_3}{AB_1} = \frac{s_2}{s} = -k(s)$ , где  $h(s)$  и  $k(s)$  — положительные,

произвольные непрерывные функции, стремящиеся к произвольным наперед заданным положительным значениям, когда  $s$  стремится к нулю, при чем  $h(s)$  стремится к пределу отличному от единицы. Обозначим координаты точек  $B_1, B_2, B_3$  через  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ , тогда уравнение шара проходящего через точки  $A, B_1, B_2, B_3$  напишется

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z. \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, \end{vmatrix} = 0.$$



Фиг. 1.

Подставляя вместо  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  их разложения по формулам (1), а вместо  $x_3, y_3, z_3$ , разложения по формулам (2) и сокращая на  $s, s_1, s_2$ , получим:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z \\ s, & \alpha + \frac{\alpha'}{1.2.R} s - \frac{s^2}{3!} [K_\alpha + \varepsilon_1], & \beta + \frac{\beta'}{1.2.R} s - \frac{s^2}{3!} [K_\beta + \eta_1], & \gamma + \frac{\gamma'}{1.2.R} s - \frac{s^2}{3!} [K_\gamma + \zeta_1] \\ s_1, & \alpha + \frac{\alpha'}{1.2.R} s_1 - \frac{s_1^2}{3!} [K_\alpha + \varepsilon_2], & \beta + \frac{\beta'}{1.2.R} s_1 - \frac{s_1^2}{3!} [K_\beta + \eta_2], & \gamma + \frac{\gamma'}{1.2.R} s_1 - \frac{s_1^2}{3!} [K_\gamma + \zeta_2] \\ s_2, & \alpha + \frac{\alpha'}{1.2.R} s_2 - \frac{s_2^2}{3!} [K'_\alpha + \varepsilon_3], & \beta + \frac{\beta'}{1.2.R} s_2 - \frac{s_2^2}{3!} [K'_\beta + \eta_3], & \gamma + \frac{\gamma'}{1.2.R} s_2 - \frac{s_2^2}{3!} [K'_\gamma + \zeta_2] \end{vmatrix} = 0,$$

где  $K_\alpha = \frac{\alpha'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT}$  и  $K'_\alpha = \frac{\alpha'}{R^2} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT_1}$ ; соответственные значения имеют  $K_\beta, K'_\beta, K_\gamma, K'_\gamma$ . Члены разложения  $s$  выше третьей не написаны.

Вычитая из третьей и четвертой строки вторую и деля третью строку на  $s_1 - s$ , а четвертую на  $s$ , получим:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z \\ s, & \alpha + \frac{\alpha'}{1.2.R} s - \frac{s^2}{3!} [K_\alpha + \varepsilon_1], & \dots & \dots \\ 1, & \frac{\alpha'}{1.2.R} - \frac{s_1 + s}{3!} K_\alpha - \frac{\varepsilon_2 s_1^2 - \varepsilon_1 s^2}{3!(s_1 - s)}, & \dots & \dots \\ -1 - k, & -\frac{K\alpha'}{1.2.R} - \frac{\alpha'}{1.2.R} + \frac{Ks_2}{3!} K'_\alpha + \frac{s}{3!} K_\alpha - \frac{\varepsilon_3 s_2^2 - \varepsilon_1 s^2}{3!s}, & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

так как  $\frac{s_1}{s_2} = -k$  по условию. Умножая третью строку на  $(1+k)$

и складывая с четвертой получим:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x & & & y, & z \\ s & , & \alpha + \frac{\alpha'}{1.2R}s - \frac{s^2}{3!} [K_\alpha + \varepsilon_1] & & , & \dots, \dots \\ 1 & , & \frac{\alpha'}{1.2R} - \frac{s_1 + s}{3!} K_\alpha - \frac{\varepsilon_2 s_1^2 + \varepsilon_1 s^2}{3!s} & & , & \dots, \dots \\ 0 & , & \frac{ks_2}{3!} K'_\alpha - \frac{ks + (1+k)s_1}{3!} K_\alpha - \frac{\varepsilon_3 s_2^2 - \varepsilon_1 s^2}{3!s} - \frac{(1+k)(\varepsilon_2 s_1^2 - \varepsilon_1 s^2)}{3!(s_1 - s)}, & \dots, \dots \end{vmatrix} = 0$$

Деля четвертую строку на  $s$ , потом на  $-\frac{k^2}{3!}$ , обозначая  $\frac{k + (1+k)h}{k^2}$

через  $A \geq 0$  и переходя к пределу, получим:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x & & & y, & z \\ 0 & , & \alpha & & , & \beta, \gamma \\ 1 & , & \frac{\alpha'}{1.2R} & & , & \frac{\beta'}{1.2R}, \frac{\gamma'}{1.2R} \\ 0 & , & \frac{\alpha' dR}{R^2 ds_1} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT_1} + A \left( \frac{\alpha' dR}{R^2 ds} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT} \right), & \dots, \dots \end{vmatrix} = 0$$

так как  $\frac{\varepsilon_3 s_2^2 - \varepsilon_1 s^2}{3!s^2}$  и  $\frac{(1+k)(\varepsilon_2 s_1^2 - \varepsilon_1 s^2)}{3!(s_1 - s).s}$  стремятся к нулю, первое выражение при всяком законе сближения точек, а второе, так как  $\lim \frac{s_1}{s} \neq 1$  по условию.

Умножая вторую строку на  $\frac{1+A}{R^2}$  и вычитая ее из четвертой а третью умножая на  $2R$ , получим

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & & & y, & z, \\ 0 & , & \alpha, & & \beta, & \gamma, \\ 2R & , & \alpha', & & \beta', & \gamma', \\ 0 & , & \frac{\alpha' dR}{R^2 ds_1} + \frac{\alpha''}{RT_1} + A \left( \frac{\alpha' dR}{R^2 ds} + \frac{\alpha''}{RT} \right), & \frac{\beta' dR}{R^2 ds_1} + \frac{\beta''}{RT_1} + \dots \end{vmatrix} = 0$$

Этот определитель можно представить в виде суммы двух определителей, сокращая предварительно на  $\frac{1}{R}$ ,

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, \\ 0, & \alpha, & \alpha, & \beta, \\ 2R, & \alpha', & \beta', & \gamma', \\ 0, & \frac{\alpha'}{R} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\alpha''}{T_1}, & \frac{\beta'}{R} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\beta''}{T_1}, & \frac{\gamma'}{R} \frac{dR}{ds_1} + \frac{\gamma''}{T_1} \end{vmatrix} + \\
 + A \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ 2R, & \alpha', & \beta', & \gamma', \\ 0, & \frac{\alpha'}{R} \frac{dR}{ds} + \frac{\alpha''}{T}, & \frac{\beta'}{R} \frac{dR}{ds} + \frac{\beta''}{T}, & \frac{\gamma'}{R} \frac{dR}{ds} + \frac{\gamma''}{T} \end{vmatrix} = 0$$

Умножаем в первом определителе третью строку на  $\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{ds_1}$ , вычитаем ее из четвертой и выносим  $\frac{1}{T_1}$  за знак определителя. Аналогично поступаем со вторым определителем. Получаем:

$$\frac{1}{T_1} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ 2R, & \alpha', & \beta', & \gamma', \\ -2T_1 \frac{dR}{ds_1}, & \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} + \frac{A}{T} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ 2R, & \alpha', & \beta', & \gamma', \\ -2T \frac{dR}{ds_1}, & \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} = 0 \dots (3)$$

Множитель при  $\frac{1}{T_1}$  есть уравнение соприкасающегося шара слева, а при  $\frac{A}{T}$  соприкасающегося шара справа. Таким образом мы получили пучок шаров, проходящих через круг пересечения соприкасающихся шаров справа и слева в данной точке. Следовательно, центры шаров будут лежать на полярной оси кривой в точке *A*. Чтобы исследовать изменение положения центра шара в зависимости от свойств кривой в данной точке при различных законах сближения точек  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ , возьмем за систему координат основной триедр; тогда получаем:

$$\frac{1}{T_1} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, \\ 0, & 1 & 0 & 0 \\ 2R, & 0 & 1 & 0 \\ -2T_1 \frac{dR}{ds_1}, & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{A}{T} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, \\ 0, & 1 & 0 & 0 \\ 2R, & 0 & 1 & 0 \\ -2T \frac{dR}{ds}, & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или разлагая по элементам второй строки

$$\frac{1}{T_1} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & y, & z \\ 2R, & 1 & 0 \\ -2T_1 \frac{dR}{ds_1}, & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{A}{T} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & y, & z \\ 2R, & 1 & 0 \\ -2T \frac{dR}{ds}, & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая эти определители получаем:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{A}{T} \right) - 2R \left( \frac{1}{T} + \frac{A}{T} \right) y + 2 \left( \frac{dR}{ds_1} + A \frac{dR}{ds} \right) z = 0.$$

Координаты центра шара

$$x = 0; \quad y = R; \quad z = - \frac{\frac{dR}{ds_1} + A \frac{dR}{ds}}{\frac{1}{T_1} + \frac{A}{T}} = - \frac{TT_1 \left( \frac{dR}{ds_1} + A \frac{dR}{ds} \right)}{(T + AT_1)}$$

а радиус шара удовлетворяет уравнению

$$r^2 = R^2 + \left[ \frac{TT_1 \left( \frac{dR}{ds} + A \frac{dR}{ds} \right)}{T + AT_1} \right]^2.$$

Если бы  $\frac{dR}{ds} = \frac{dR}{ds_1}$  и  $T = T_1$ , мы получили бы обычные формулы для соприкасающегося шара.

Рассмотрим, как изменяется  $z$  при изменении  $A$  в зависимости от свойств кривой. Возьмем для этого производную по  $A$  от

$$z = - \frac{TT_1 \left[ \frac{dR}{ds_1} + A \frac{dR}{ds} \right]}{T + AT_1}$$

$$\frac{dz}{dA} = - TT_1 \frac{T \frac{dR}{ds} - T_1 \frac{dR}{ds_1}}{(T + AT_1)^2}$$

Очевидно, что когда  $A = 0$ , то  $z = -T_1 \frac{dR}{ds_1}$ , а когда  $A = \infty$ , то  $z = -T \frac{dR}{ds}$ .

Предположим что  $-T_1 \frac{dR}{ds_1} < -T \frac{dR}{ds}$ , тогда

$$T_1 \frac{dR}{ds_1} > T \frac{dR}{ds}, \text{ следовательно}$$

знак производной  $\frac{dz}{dA}$  зависит от знака произведения  $TT_1$ .

Если  $TT_1 > 0$ , то  $\frac{dz}{dA} > 0$  и  $z$  будет функция возрастающая, центр полученного шара при возрастании  $A$  от 0 до  $\infty$  остается на отрезке, соединяющем центры соприкасающихся шаров справа и слева.

Если  $TT_1 < 0$ , то  $\frac{dz}{dA} < 0$  и  $z$  будет функция убывающая, центр полученного шара при возрастании  $A$  от 0 до  $\infty$  непрерывно изменяется от  $-T_1 \frac{dR}{ds_1}$  до  $-\infty$ , потом от  $+\infty$  до  $-T \frac{dR}{ds}$  т. е. остается на полярной оси вне отрезка соединяющего центры соприкасающихся шаров.

\* \* \*

Пусть кривая дана в параметрической форме

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s).$$

Возьмем за начало координат и начало отсчета дуг точку  $A$ , в которой первые производные непрерывны, а вторые справа и слева различны, кроме того вторая производная справа непрерывна справа, а вторая производная слева непрерывна слева, тогда координаты  $x, y, z$  раскладываются справа от точки  $A$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= \alpha s + \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{\alpha'}{R} + \varepsilon_1 \right) \\ y &= \beta s + \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{\beta'}{R} + \varepsilon_2 \right) \\ z &= \gamma s + \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{\gamma'}{R} + \varepsilon_3 \right). \end{aligned}$$

Координаты точек слева от точки  $A$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} x &= \alpha s + \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{\alpha'_1}{R_1} + \eta_1 \right) \\ y &= \beta s + \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{\beta'_1}{R_1} + \eta_2 \right) \\ z &= \gamma s + \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{\gamma'_1}{R_1} + \eta_2 \right), \text{ где} \end{aligned}$$

$\alpha', \beta', \gamma'$ ,  $\cos$ 'ы углов, образуемые главной нормалью справа, а  $R$  радиус кривизны справа.  $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$  и  $R_1$  соответственные значения слева.  $\varepsilon_i, \eta_i$  стремятся к нулю вместе с  $s$ .

Напишем уравнение шара, проходящего через четыре точки; как и в первой задаче, подставляя вместо координат их разложения и сокращая на  $s_1, s_2, s_3$ , получим:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z \\ s & , \alpha + \frac{s}{1.2} \left( \frac{\alpha'}{R} + \varepsilon_1 \right), & \beta + \frac{s}{1.2} \left( \frac{\beta'}{R} + \varepsilon_2 \right), & \gamma + \left( \frac{\gamma'}{R} + \varepsilon_3 \right) \\ s_1 & , \alpha + \frac{s_1}{1.2} \left( \frac{\alpha'}{R} + \varepsilon'_2 \right), & \beta + \frac{s_1}{1.2} \left( \frac{\beta'}{R} + \varepsilon'_2 \right), & \gamma + \left( \frac{\gamma'}{R} + \varepsilon'_3 \right) \\ s_2 & , \alpha + \frac{s_2}{1.2} \left( \frac{\alpha'_1}{R_1} + \eta_1 \right), & \beta + \frac{s_2}{1.2} \left( \frac{\beta'_1}{R_1} + \eta_2 \right), & \gamma + \left( \frac{\gamma'_1}{R_1} + \eta_3 \right) \end{vmatrix} = 0.$$



Вычитаем вторую строку из третьей и делим на  $s_1 - s$  вычитаем вторую строку из четвертой и делим на  $s$ .

Получим

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x & y & z \\ s & , \alpha + \frac{s}{1.2} \left( \frac{\alpha'}{R} + \varepsilon_1 \right) & , \dots , \dots \\ 1 & , \frac{\alpha'}{1.2R} + \frac{s_1 \varepsilon'_1 - \varepsilon_1 s}{1.2(s_1 - s)} & , \dots , \dots \\ -1 - k & , -\frac{k\alpha'_1}{1.2R_1} - \frac{\alpha'}{1.2R} - \frac{k\eta'_1}{1.2} - \frac{\varepsilon_1}{1.2} & , \dots , \dots \end{vmatrix} = 0$$

при условии, что  $\lim \frac{s_1}{s}$  не равен единице,  $\lim \frac{s_1 \varepsilon'_1 - s_1 \varepsilon}{1.2(s_1 - s)}$  равен нулю.

Прибавляя к четвертой строке третью, переходя к пределу, сокращая на  $-k$  и умножая третью строку на  $2R$ , а четвертую на  $2R_1$  получаем

$$\begin{vmatrix} x_2 + y_2 + z_2, & x, & y, & z \\ 0 & , & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R & , & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1 & , & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Уравнение полученного шара не зависит от закона сближения точек.

Найдем круг пересечения этого шара с соприкасающейся плоскостью справа. Для этого возьмем за систему координат основной триедр справа; при этом условии имеем  $\alpha = \beta' = 1$ ;  $\beta = \gamma = \alpha' = \gamma' = 0$ .

Уравнение шара напишется:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z_2, & y, & z \\ 2R & , & 1, & 0 \\ 2R_1 & , & \beta'_1 & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0$$

Полагая  $z = 0$ , найдем круг пересечения шара с соприкасающейся плоскостью

$$x^2 + y^2 + z_2 - 2Ry = 0$$

это уравнение показывает, что этот круг есть круг кривизны справа. Таким же методом можно показать, что шар проходит и через круг кривизны слева. Отсюда вытекает, что полярные прямые справа и слева пересекаются, и точка их пересечения есть центр найденного шара.

Найдем предельное положение плоскости, проходящей через точки  $A$ ,  $B_1$  и  $B_3$ . Если вместо координат точек  $B_1$  и  $B_3$  подставить их разложения, то уравнение напишется, после сокращения на  $s$  и  $s_2$ .

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha' + \frac{s}{1.2} \left( \frac{\alpha'}{R} + \varepsilon_1 \right) & \beta + \frac{s}{1.2} \left( \frac{\beta'}{R} + \varepsilon_2 \right) & \gamma + \frac{s}{1.2} \left( \frac{\gamma'}{R} + \varepsilon_3 \right) \\ \alpha + \frac{s_2}{1.2} \left( \frac{\alpha'_1}{R_1} + \eta_1 \right) & \beta + \frac{s_2}{1.2} \left( \frac{\beta'_2}{R_1} + \eta_2 \right) & \gamma + \frac{s_2}{1.2} \left( \frac{\gamma'_1}{R_1} + \eta_3 \right) \end{vmatrix} = 0.$$

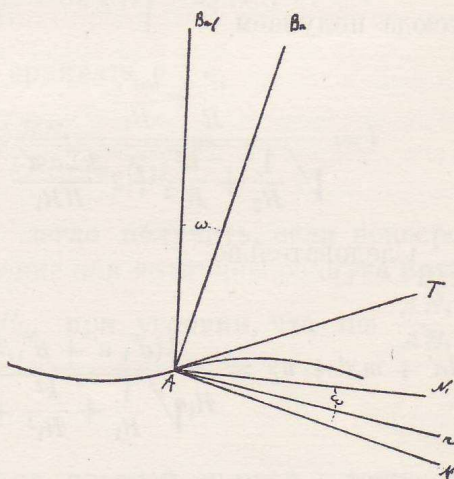
Вычитая вторую строку из третьей, деля на  $s$  и переходя к пределу получаем

$$\begin{vmatrix} x, & y & z \\ \alpha, & \beta & \gamma \\ -\frac{k\alpha'_1}{1.2R_1} - \frac{\alpha'}{1.2R}, & -\frac{k\beta'_1}{1.2R_1} - \frac{\beta'}{1.2R}, & -\frac{k\gamma'_1}{1.2R} - \frac{\gamma'}{1.2R} \end{vmatrix} = 0$$

или умножая на  $-\frac{1}{2}$ , получаем:

$$\frac{1}{R} \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} + \frac{k}{R_1} \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

т. е. пучек плоскостей, проходящих через линию пересечения соприкасающихся плоскостей справа и слева, т. е. через касательную. Очевидно, что круг, проведенный через точки  $B_3, A$  и  $B_1$ , одновременно находится на плоскости, проведенной через эти точки, и на шаре, проходящем через точки  $B_3, A, B_1$  и  $B_2$ . Когда эти точки сближаются по какому-нибудь закону, то шар и плоскость стремятся к определенному предельному положению, для плоскости зависящему от закона сближения, а для шара нет. Очевидно, что предельное положение круга, проходящего через точки  $B_3, A$  и  $B_1$ , есть пересечение предельного положения шара с предельным положением соответствующей плоскости, т. е. уравнение этого круга представляется совокупностью уравнений (4) и (5). Каждой плоскости (5) соответствует круг сечения. Таким образом шар (4) в части, заключенной между двумя соприкасающимися плоскостями справа и слева, есть геометрическое место предельных положений кругов, проведенных через три точки кривой. Очевидно, что центры этих кругов при непрерывном изменении  $k$  описывают дугу окружности, заключенную между центрами кривизны справа и слева, диаметр которой равен половине диаметра шара (4).



Фиг. 2.

- AN — главн. норм. справа
- AN — главн. норм. слева
- AB<sub>n</sub> — бинорм. справа
- AB<sub>n1</sub> — бинорм. слева
- A<sub>n</sub> — главн. норм. для плоскости (5)

Найдем радиус круга пересечения.

Пусть перпендикуляр проведенный из начала координат к плоскости (5) образует углы, cosinus'ы которых с осями координат есть  $l, m, n$ . Возьмем за плоскость  $XOY$  плоскость (5) и за ось  $OX$  касательную. Пусть cosinus'ы углов, образованных новой осью  $Y$  со старыми осями координат, будут  $a, b, c$ . Тогда

cosinus угла образованного новой осью  $Y$  (главная нормаль плоскости) с главной нормалью справа  $= a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \cos(n, N)$ ,

cosinus угла образованного новой осью  $Y$  с главной нормалью слева  $= a\alpha'_1 + b\beta'_1 + c\gamma'_1 = \cos(n, N_1)$ ,

cosinus угла образованного новой осью  $Z$  с главной нормалью справа  $= l\alpha' + m\beta' + n\gamma'$ ,

cosinus угла образованного новой осью  $Z$  с главной нормалью слева  $= l\alpha'_1 + m\beta'_1 + n\gamma'_1$

Таким образом уравнение шара (4) напишется

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 2R, & 0, & \cos(n, N), & l\alpha' + m\beta' + n\gamma' \\ 2R_1, & 0, & \cos(n, N_1), & l\alpha'_1 + m\beta'_1 + n\gamma'_1 \end{vmatrix} = 0 \dots (6)$$

Вычислим  $l, m$  и  $n$ . Уравнение плоскости (5) напишется в раскрытом виде так:

$$x \left( \frac{\alpha''}{R} + \frac{k\alpha''_1}{R_1} \right) + y \left( \frac{\beta''}{R} + \frac{k\beta''_1}{R_1} \right) + z \left( \frac{\gamma''}{R} + \frac{k\gamma''_1}{R_1} \right) = 0$$

отсюда получаем

$$l = \frac{\frac{\alpha''}{R} + \frac{k\alpha''_1}{R_1}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{k^2}{R_1^2} + 2 \frac{k\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}}; \quad m = \frac{\frac{\beta''}{R} + \frac{k\beta''_1}{R_1}}{\text{idem}}; \quad n = \frac{\frac{\gamma''}{R} + \frac{k\gamma''_1}{R_1}}{\text{idem}}$$

Следовательно

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = \frac{l(\alpha''_1\alpha' + \beta''_1\beta' + \gamma''_1\gamma')}{R_1 \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{k^2}{R_1^2} + 2k \frac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}} = \frac{k \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\text{idem}} = -\frac{k \sin\omega}{\text{idem}}$$

аналогично

$$l\alpha'_1 + m\beta'_1 + n\gamma'_1 = \frac{\alpha''\alpha_1 + \beta''\beta_1 + \gamma''\gamma_1}{R \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{k^2}{R_1^2} + 2k \frac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\text{idem}} = \frac{\sin\omega}{\text{idem}}$$

Подставляя эти значения в уравнение шара (6) получим

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y & z \\ 0, & 1, & 0 & 0 \\ 2R, & 0, & \cos(n, N), & -\frac{k \sin \omega}{R_1 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{k^2}{R_1^2} + 2k \frac{\Sigma \alpha'' \alpha''_1}{RR_1}}} \\ 2R_1, & 0, & \cos(n, N_1), & \frac{\sin \omega}{R \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{k^2}{R_1^2} + 2k \frac{\Sigma \alpha'' \alpha''_1}{RR_1}}} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая по элементам второй строки и полагая  $z = 0$ , найдем уравнения сечения шара (4) новой плоскостью  $XOY$ . После сокращения на  $\frac{\sin \omega}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{k^2}{R_1^2} + 2k \frac{\Sigma \alpha'' \alpha''_1}{RR_1}}}$ , уравнение напишется так:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & y, & 0 \\ 2R, & \cos(n, N), & -\frac{k}{R_1} \\ 2R_1, & \cos(n, N_1), & \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left[ \frac{1}{R} \cos(n, N) + \frac{k}{R_1} \cos(n, N_1) \right] - 2y(1+k) = 0$$

отсюда радиус круга сечения, или ордината  $y$

$$y = \frac{(1+k) RR_1}{R_1 \cos(n, N) + kR \cos(n, N_1)} \quad (7),$$

Эту же формулу для радиуса легко получить, если непосредственно находить предельное выражение для величины радиуса круга, проведенного через точки  $A, B_1, B_3$ , при условии, что  $\lim \frac{AB_3}{AB_1} = \lim \frac{s_2}{s} = -k$ .

Это есть обобщение формулы для плоской кривой в точке, где вторые производные справа и слева не равны между собою, которая получается из данной, полагая  $\cos(n, N) = \cos(n, N_1) = 1$ , если оба круга кривизны лежат по одну сторону от касательной и полагая  $\cos(n, N) = 1, \cos(n, N_1) = -1$ , если круги кривизны лежат по разные стороны касательной.

В том случае, когда соприкасающиеся плоскости справа и слева совпадают, уравнение шара (4) переходит в уравнение соприкасающейся плоскости. Действительно уравнение (4) напишется тогда так:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z \\ 0 & , & \alpha', & \beta, & \gamma \\ 2R & ; & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1 & , & \alpha, & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая из четвертой строки третью, видим, что все элементы четвертой строки за исключением первой обращаются в нуль, и уравнение напишется

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

это есть уравнение соприкасающейся плоскости.

Уравнение (7), если круг кривизны справа и круг кривизны слева лежат по одну сторону касательной, напишется в таком виде:  $y = \frac{(1+k)RR_1}{R_1+kR}$  при  $k=0: y=R$ , при  $k=\infty, y=R_1$  пусть  $R_1 > R$ .

Возьмем производную от  $y$  по  $k$

$$\frac{dy}{dk} = \frac{k(R_1 - R)RR_1}{(R_1 + kR)^2},$$

так как  $k$  число положительное, то  $y$  есть функция возрастающая. Следовательно при непрерывном возрастании  $k$  от 0 до  $\infty$ , центр круга движется по нормали от  $R$  до  $R_1$ , т. е. центр круга всегда находится на отрезке, соединяющем центр, кривизны справа и слева.

Если центры кругов кривизны справа и слева будут лежать по разные стороны касательной, то уравнение (7) напишется

$$y = \frac{(1+k)RR}{R_1 - kR}.$$

очевидно, что  $y$  есть функция возрастающая. При непрерывном изменении  $k$   $y$  увеличивается от  $R$  до  $+\infty$ , а потом от  $-\infty$  до  $-R_1$ , т. е. центр круга всегда лежит вне отрезка соединяющего кривизны справа и слева.

До сих пор на кривую в точке  $A$  накладывалось условие, что в данной точке она имеет только вторые производные справа и слева. Пусть теперь кривая имеет справа и слева непрерывные производные по крайней мере третьего порядка.

$$x = \alpha s + \frac{s^2 \alpha'}{1.2R} - \frac{s^3}{1.2.3} \left[ \frac{\alpha'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT} + \varepsilon_1 \right] = f(s)$$

$$y = \beta s + \frac{s^2 \beta'}{1.2R} - \frac{s^3}{1.2.3} \left[ \frac{\beta'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta''}{RT} + \varepsilon_2 \right] = \varphi(s)$$

$$z = \gamma s + \frac{s^2 \gamma'}{1.2R} - \frac{s^3}{1.2.3} \left[ \frac{\gamma'}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{\gamma}{R^2} + \frac{\gamma''}{RT} + \varepsilon_2 \right] = \psi(s)$$

и аналогичные разложения для точек слева.

Шар (4) имеет соприкосновение с кривой в точке  $A$  второго порядка. Действительно подставляя вместо  $x$ ,  $y$  и  $z$   $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  и  $\chi(s)$  получим функцию  $F(s)$ .

$$F(s) = \begin{vmatrix} \varphi^2(s) + \psi^2(s) + \chi^2(s), & \varphi(s), & \psi(s), & \chi(s) \\ 0 & , & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R & , & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1 & , & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix},$$

которая при  $s = 0$  равна нулю,  $F(0) = 0$ ;  $F'(s)$  при  $s = 0$  тоже равна нулю, так как в этом случае первая строка определителя равна второй.  $F''(s)$  справа при  $s = 0$  равна нулю, так как первая сторона будет пропорциональна третьей, а  $F''(s)$  слева при  $s = 0$  равна нулю, так как первая строка будет пропорциональна четвертой строке.

Найдем, какому аналитическому условию должна удовлетворять кривая в точке  $A$ , чтобы соприкасающиеся шары справа и слева совпали. Очевидно, что в этом случае соприкасающийся шар должен проходить одновременно и через круг кривизны справа и через круг кривизны слева, а значит соприкасающийся шар должен совпасть с шаром (4). А для того, чтобы шар (4) имел прикосновение третьего порядка с кривой в точке  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы производные от  $F(s)$  третьего порядка справа и слева при  $s = 0$  были бы равны нулю.

Третья производная от  $F(s)$  справа при  $s = 0$  напишется так

$$F'''(0) = \begin{vmatrix} 0, & \frac{\alpha'}{R^2} \frac{dR}{ds} - \frac{\alpha}{R^2} - \frac{\alpha''}{RT}, & \frac{\beta'}{R^2} \frac{dR}{ds} - \frac{\beta}{R^2} - \frac{\beta''}{RT}, & \frac{\gamma'}{R} \frac{dR}{ds} - \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\gamma''}{RT} \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1, & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix}$$

умножая вторую строку на  $\frac{1}{R^2}$ , а третью на  $\frac{1}{R^2} \frac{dR}{ds}$ , складывая их с первой и приравнивая нулю, получим условие, чтобы шар (4) имел соприкосновение третьего порядка справа которое после умножения на  $-RT$ , напишется так:

$$\begin{vmatrix} -2T \frac{dR}{ds}, & \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R, & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1, & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем этот определитель по элементам первого столбца и сократим на 2; получаем:

$$-T \frac{dR}{ds} (\alpha'_1 \alpha'' + \beta'_1 \beta'' + \gamma'_1 \gamma'') + R (\alpha'_1 \alpha' + \beta'_1 \beta' + \gamma'_1 \gamma') - R_1 = 0$$

или обозначая через  $\omega$  угол между соприкасающимися плоскостями справа и слева получим:

$$-T \frac{dR}{ds} \sin \omega + R \cos \omega - R_1 = 0.$$

Таким же методом получается условие, чтобы шар (4) имел соприкосновение третьего порядка слева

$$-T_1 \frac{dR_1}{ds} \sin \omega + R_1 \cos \omega - R = 0.$$

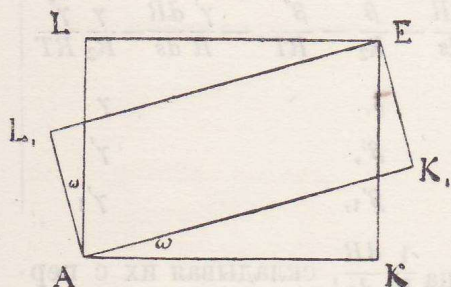
Равенство нулю этих двух выражений есть необходимое и достаточное условие, чтобы шар (4) имел соприкосновение третьего порядка справа и слева или иными словами, чтобы соприкасающиеся шары справа и слева между собою совпадали.

Интересно отметить, что в этом случае уравнение соприкасающегося шара (4) не зависит от радиуса кручения.

Как следствие двух предыдущих условий можно получить, что

$$\left(T \frac{dR}{ds}\right)^2 + R^2 = \left(T_1 \frac{dR_1}{ds}\right)^2 + R_1^2.$$

Обратив внимание, что  $-T \frac{dR}{ds}$  и  $-T_1 \frac{dR_1}{ds}$  есть радиусы кругов пересечения выпрямляющими плоскостями справа и слева соприкасающегося шара, легко найти геометрически условия необходимые и достаточные, чтобы соприкасающиеся шары справа и слева между собою совпадали, т. е. чтобы шар (4) был бы соприкасающимся. Для этого нужно найти условие, при котором бы точки  $A, K, K_1, L, L_1$  лежали бы на одной окружности.



Фиг. 3.

$$\begin{aligned} AK &= 2R & AK &= 2R_1 \\ AL &= -2T \frac{dR}{ds}; & LA &= -2T_1 \frac{dR_1}{ds} \end{aligned}$$

Если эти точки лежат на одной окружности, то проводя через точку  $L$  отрезок  $LE$  параллельный и равный

$AK_1$  получим, что  $AE$  есть диаметр. Проектируя ломанную линию  $ALEK_1$  на  $AK_1$  и сокращая на 2 получим:

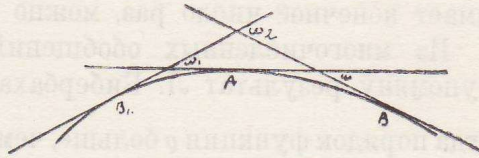
$$-T_1 \frac{dR}{ds} \sin \omega + R \cos \omega - R_1 = 0$$

так же получаем, что

$$-T \frac{dR}{ds} \sin \omega + R_1 \cos \omega - R = 0.$$

Очевидно, что это условие есть и достаточное.

Пусть точка  $A$  плоской кривой обыкновенная точка, в которой радиусы кривизны справа и слева различны. В зависимости от формы кривой в этой точке центры кругов кривизны будут лежать по одну сторону касательной или по различные стороны. Рассмотрим сначала первый случай. Возьмем точки  $B$  и  $B_1$  по разные стороны от точки  $A$ . Обозначим  $AB$  через  $s$ ,  $AB_1$  через  $s_1$ . Тогда, по определению радиуса кривизны справа,



Фиг. 4.

имеем  $R = \lim \frac{s}{\omega}$  и  $R_1 = \lim \frac{s_1}{\omega_1}$ . Пусть  $B$  и  $B_1$  стремятся к точке  $A$  так, чтобы  $\lim \frac{s_1}{s} = k$ .

Из чертежа видно, что  $\omega_2 = \omega + \omega_1$ .

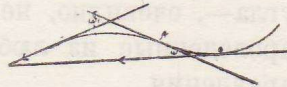
Найдем

$$\rho = \lim \frac{B_1B}{\omega_2} = \lim \frac{s + s_1}{\omega_1 + \omega} = \lim \frac{1 + \frac{s_1}{s}}{\frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{s_1}{s} + \frac{\omega_1}{\omega}} = \frac{1+k}{\frac{R_1}{R} + 1} = \frac{(1+k)RR_1}{R_1 + kR}$$

Рассмотрим второй случай.

Из чертежа видно, что  $|\omega_2| = |\omega_1 - \omega|$ .

Найдем



Фиг. 5.

$$\rho = \left| \lim \frac{B_1B}{\omega_2} \right| = \left| \lim \frac{s + s_1}{\omega_1 - \omega} \right| = \left| \lim \frac{1 + \frac{s_1}{s}}{\frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{s_1}{s} - \frac{\omega_1}{\omega}} \right| = \lim \left| \frac{(1+k)RR_1}{R_1 - kR} \right|$$

Эти формулы можно получить пользуясь предельным кругом.



## О целых функциях и прямых Жюлиа.

В. Гончаров.

1. Согласно теореме Пикара, всякая целая функция принимает любое значение  $a$ , кроме, может-быть одного, бесконечное число раз. Поэтому те значения  $a$ , которых функция не принимает или принимает конечное число раз, можно считать исключительными.

Из многочисленных обобщений и уточнений теоремы Пикара я упомяну результат Л. Бибербаха, который показал, что в случае, когда порядок функции  $\rho$  больше, чем  $\frac{1}{2}$ , и конечен, функция принимает все значения, кроме, может-быть, одного, бесконечное число раз внутри всякого угла, величина которого превышает наибольшее из чисел  $\frac{\pi}{\rho}$  и  $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ ; в случае же порядка  $\rho$ , не превышающего  $\frac{1}{2}$ , функция может не принимать двух значений в угле, величина которого сколь угодно мало отличается от  $2\pi$ .

Следующий замечательный результат принадлежит Г. Жюлиа. Какова бы ни была целая функция, среди полупрямых, выходящих из данной точки, можно указать хотя бы одну такую, что в угле, имеющем вершину в данной точке и имеющем бисектрисой рассматриваемую полупрямую, как бы мал этот угол ни был, функция принимает любое значение, кроме, может быть одного. Всякую полупрямую, обладающую указанным свойством, мы будем называть прямой Жюлиа, или, короче, прямой ( $J$ ). Выбор начальной точки—вершины угла—, очевидно, не имеет значения в том смысле, что прямые ( $J$ ), проведенные из любой точки, постоянно имеют одни и те же направления.

2. Это свойство целых функций, замеченное Жюлиа, представляет собою непосредственное следствие из некоторых предложений, установленных П. Монтелем, и которыми мы в дальнейшем будем пользоваться. Основное понятие, введенное П. Монтелем,—понятие нормального семейства функции: семейство (совокупность) ( $F$ ) функций голоморфных в некоторой открытой области ( $\Delta$ ) называется нормальным

\*) L. Bieberbach Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singul. Stelle (Mathem. Zeitschrift, Bd. 2 (1918)).

\*\*) G. Julia Sur quelques propriétés des fonctions entières et méromorphes (Ann. Ec. Norm. (1919))

в этой области, если из всякой последовательности функций  $[f_n(z)]$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), принадлежащих семейству  $(F)$ , можно выделить частную последовательность  $[f_{n_i}(z)]$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), такую, что во всякой замкнутой области  $(\Delta_1)$ , принадлежащей области  $(\Delta)$ , эта последовательность равномерно стремится к пределу — конечному или бесконечному; в первом случае, предел, очевидно, есть функция, голоморфная в  $(\Delta)$ . Далее, семейство функций  $(F)$  называется нормальным в точке  $z = z_0$ , если оно нормально в некоторой окрестности этой точки. Точка,  $z = z_0$  называется регулярной или иррегулярной точкой относительно семейства  $(F)$  в зависимости от того, нормально или не нормально семейство  $(F)$  в этой точке.

Исследования П. Монтеля \*) показывают, что: 1) если функции семейства  $(F)$  в области  $(\Delta)$  не принимают двух значений ( $a$  и  $b$ ,  $a \neq b$ ), или же только конечное число функций семейства  $(F)$  принимает эти значения, то семейство  $(F)$  нормально в области  $(\Delta)$ ,

2) если семейство  $(F)$  нормально в каждой точке области  $(\Delta)$  (т. е. все точки  $(\Delta)$  — регулярны), то семейство  $(F)$  нормально в области  $(\Delta)$ .

Отсюда следует, что, если семейство  $(F)$  не нормально в области  $(\Delta)$ , то должна быть в  $(\Delta)$  хоть одна иррегулярная точка, в окрестности которой любое значение  $a$ , кроме, может быть, одного, принимается бесконечным числом функций семейства.

Жюлиа рассматривает семейство  $(F)$ :

$$f_t(z) \equiv f(tz)$$

в области

$$(\Delta) \left\{ \begin{array}{l} 1 - \sigma < r < 1 + \sigma \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right. \quad (0 < \sigma < 1) \quad (z = re^{i\theta}),$$

где  $f(z)$  — целая функция, а  $t$  — параметр семейства, принимающий значения  $\geq 1$ .

Оставляя в стороне случай, когда  $f(z)$  — полином, выберем ряд точек  $z_n = t_n e^{i\theta_n}$  таких, что  $|f(z)| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ .

Последовательность функций  $|f_{t_n}(z)|$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) такова, что из нее нельзя выделить ни такой частной последовательности, которая в области  $(\Delta)$  стремилась бы к бесконечности (ибо  $|f_{t_n}(e^{i\theta_n})| < 1$ ), ни такой, которая в той же области стремилась бы к некоторой голоморфной функции (иначе  $f(z)$  была бы ограничена по модулю на кругах с центром  $z = 0$  и радиусами, равными  $t_n$ , что противоречит теореме Лиувилля). Значит, семейство  $[f_{t_n}(z)]$  — не нормальное в области  $(\Delta)$ , и имеется иррегулярная точка, напр.,  $z = z_0$ , в окрестности которой, скажем, в круге с центром  $z = z_0$  и радиусом  $\varepsilon$ , любое значение  $a$ , кроме, может быть, одного, принимается бесконечным числом функций  $f_{t_n}(z)$ ; или иными словами, функция  $f(z)$  принимает

\*) P. Montel. Sur les familles des fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (Ann. Ec. Norm., (1912)).

Sur les familles normales de fonctions analytiques (там же, (1916)).

всякое значение  $a$ , кроме, может-быть, одного, в бесконечном числе кругов с центрами  $t_n z_0$  и радиусами  $t_n \varepsilon$ ; следовательно,—и в угле, вершина которого  $z=0$ , бисектриса проходит через точку  $z=z_0$ , и величина которого  $\varepsilon$ —сколь угодно мала. Таким образом, основное предложение Жюлиа вытекает из сопоставления теорем Монтеля с теоремой Лиувилля.

Следует заметить, что из приведенного рассуждения не вытекает, что на всякой прямой ( $J$ ) непременно имеется иррегулярная точка семейства  $f_t(z)$  ( $t \geq 1$ ), хотя мы и не располагаем примером, опровергающим это предложение.

3. Естественно поставить вопрос о совокупности прямых ( $J$ ) для целых функций различных порядков. В дальнейшем, я привожу некоторые результаты, касающиеся числа и расположения прямых ( $J$ ).

Относительно наименьшего числа прямых ( $J$ ) можно заметить следующее :

(1) Существуют функции любого порядка  $\rho$ , не превышающего  $\frac{1}{2}$ , которые имеют только одну прямую ( $J$ ). Таковы, напр., функции

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right) \quad \left( \rho \leq \frac{1}{2} \right).$$

для которых  $\theta=0$  есть единственная прямая ( $J$ ),

(2) существуют функции любого конечного порядка  $\rho$ , большего, чем,  $\frac{1}{2}$ , которые имеют только две прямые ( $J$ ). Примером могут служить функции Миттаг-Лефлера

$$E_{\alpha}(z) \equiv \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\alpha)} \quad \left( \rho = \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2} \right),$$

для которых прямыми ( $J$ ) являются  $\theta = \pm \alpha \frac{\pi}{2}$ ,

(3) существуют функции бесконечного порядка, имеющие только одну прямую ( $J$ ). Такова функция (указанная также Миттаг-Лефлером)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{e^{\xi z} d\xi}{\xi - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta),$$

интегрирование производится по контуру ( $C$ ), составленному из отрезков 1°.  $\eta = -\pi$ ,  $\xi \geq 0$ , 2°.  $\xi = 0$ ,  $|\eta| \leq \pi$ , 3°.  $\eta = \pi$ ,  $\xi \geq 0$ . Единственная прямая ( $J$ ) есть  $\theta = 0$ .

Вопрос о наибольшем числе прямых ( $J$ ) решается следующим образом: существуют целые функции всех порядков, имеющие любую полупрямую прямой ( $J$ ). Для случая  $0 < \rho < \frac{1}{2}$  достаточно положить

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{n^{\rho} e^{ia_n}} \right),$$

где числа  $\alpha_n$  были бы расположены везде густо в промежутке  $|0 \leq \theta \leq 2\pi|$ . Любая точка круга  $|z| = 1$  будет иррегулярной точкой семейства

$$f_{m \frac{1}{\rho}}(z) \equiv f(m \frac{1}{\rho} z) \quad (m = 1, 2, 3 \dots);$$

чтоб убедиться в этом заметим, что

$$|f(z)| \geq \prod_1^{\infty} \left| 1 - \frac{r}{n \frac{1}{\rho}} \right|,$$

а последнее выражение возрастает неограничено для  $r = m + \frac{1}{2}$  вместе с  $m$ . Подстановка  $z = z^k$ , ( $k$  — целое положительное) позволяет перейти к случаю любого конечного порядка. Нетрудно построить примеры и для случаев  $\rho = 0$  и  $\rho = \infty$ .

4. Совокупность прямых ( $J$ ), или, точнее, совокупность соответствующих им аргументов, очевидно, — замкнутая. Можно утверждать, обратно, что если дана некоторая замкнутая совокупность полупрямых, исходящих из начала, то можно построить целую функцию любого порядка  $\rho < \frac{1}{2}$ , для которой совокупность прямых ( $J$ ) будет тождественна с данной совокупностью. В самом деле, для этого достаточно подобрать аргументы нулей  $\alpha_n = n \frac{1}{\rho} e^{i\alpha_n}$  таким образом, чтобы производная совокупность аргументов  $\alpha_n$  совпала с данной совокупностью.

Что касается случая порядка  $\rho \geq \frac{1}{2}$ , то можно утверждать, что, какова бы ни была данная замкнутая совокупность полупрямых, исходящих из начала, всегда можно построить целую функцию порядка  $\rho \left( \geq \frac{1}{2} \right)$ , такую, чтобы, внутри данного угла, величина которого равна наибольшему из чисел  $\frac{\pi}{\rho}$  и  $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ , совокупность прямых ( $J$ ) совпала бы с данной совокупностью. Для этого берем сумму или произведение (в зависимости от того, будет ли  $\rho$  больше или меньше единицы) соответствующей функции порядка  $< \frac{1}{2}$  и функции Миттаг-Леффлера  $E_{\frac{1}{\rho}} \omega(z)$ , подобрав  $\omega$  надлежащим образом.

5. Пусть  $f(z)$  — целая функция порядка  $\rho \leq \frac{1}{2}$ ; пусть  $[a_n]$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), ( $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ ), — некоторая, может быть, частная последовательность ее нулей, причем предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta^*,$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} < M,$$

где  $M$  — постоянное число. При этих условиях  $\theta = \theta^*$  есть прямая ( $J$ ).

В самом деле, согласно теореме Вимана, в случае  $\rho < \frac{1}{2}$  \*) можно указать круги  $|z| = t_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ , на которых нижняя граница модуля функции неограниченно возрастает.

Последовательность функций

$$f_{t_{n_i}}(z) \equiv f(t_{n_i} z) \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

в области

$$(\Delta_\varepsilon) \quad \begin{cases} 1 - \sigma < r < 1 + \sigma \\ \theta^* - \varepsilon < \theta \leq \theta^* + \varepsilon \end{cases} \quad \left( \sigma = \frac{M-1}{M+1} \right)$$

не может стремиться ни к голоморфной функции (т. к.  $|f_{t_n}(z)|$  при  $|z| = 1$  неограниченно возрастает), ни к бесконечности (т. к. в области  $(\Delta_\varepsilon)$  для достаточно больших  $n$  функция  $f_{t_n}(z)$  непременно обращается в нуль). Значит, в области  $(\Delta_\varepsilon)$  существует иррегулярная точка  $z = \rho_\varepsilon e^{i\psi_\varepsilon}$  семейства  $\{f_{t_n}(z)\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), причем  $|\psi_\varepsilon - \theta^*| < \varepsilon$ . Отсюда следует, что в угле  $|\theta - \psi_\varepsilon| < \varepsilon$ , а потому à fortiori в угле  $|\theta - \theta^*| > 2\varepsilon$  функция  $f(z)$  принимает бесконечное число раз всякое значение, кроме, может-быть, одного. Так как  $\varepsilon$  сколь угодно мало, то  $\theta = \theta^*$  есть прямые ( $J$ ).

Сохраняя прочие предположения, допустим теперь, что порядок функции  $\rho$  больше, чем  $\frac{1}{2}$ . В этом случае можно утверждать, что во

всяком угле, величина которого равна  $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ , и который содержит прямую  $\theta = \theta^*$  (в частности, допускается совпадение этой прямой с одной из сторон угла), имеется по крайней мере одна прямая ( $J$ ).

Пусть рассматриваемый угол есть

$$(A_0) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad \left( \beta - \alpha = 2\pi \frac{\pi}{\rho} \right),$$

при чем  $\alpha \leq \theta^* \leq \beta$ . Согласно теореме Фрагмена \*\*) в угле

$$(A_\varepsilon) \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \theta \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

\*) В случае  $\rho = \frac{1}{2}$  применим доказательство следующей теоремы, полагая  $\alpha = \beta$ .

\*\*) Целая функция порядка  $\rho$  ( $\rho \geq \frac{1}{2}$ ) не может оставаться ограниченной в угле, величина которого превышает  $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ .

функция  $f(z)$  принимает сколь угодно большие по модулю значения; напр., в точках  $z = t_n e^{i\omega_n}$  ( $\lim t_n = \infty$ ,  $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \omega_n \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}$ ). Как прежде, заключаем, что в области

$$(\Delta_\varepsilon) \quad \begin{cases} 1 - \sigma < r < 1 + \sigma \\ \alpha - \varepsilon < \theta < \beta + \varepsilon \end{cases} \quad \left( \sigma = \frac{M-1}{M+1} \right)$$

последовательность  $f_{t_n}(z) \equiv f(t_n z)$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) не образует нормального семейства. Значит, в области  $(\Delta_\varepsilon)$  имеется иррегулярная точка  $z = \rho_\varepsilon e^{i\psi_\varepsilon}$ , и  $f(z)$  принимает бесконечное число раз все значения, кроме, может-быть, одного, в угле  $|\vartheta - \psi_\varepsilon| < \varepsilon$ ; отсюда легко заключить, что в угле  $(A_0)$  имеется прямая  $(J)$ .

Обозначим через  $\theta^*$  аргумент, соответствующий первой прямой  $(J)$ , которая встречается в угле  $\theta^* \leq \theta \leq \theta^* + \left(2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right)$ , при возрастании  $\theta$ ; через  $\theta^*$  — аргумент, соответствующий первой прямой  $(J)$ , которая встречается в угле  $\theta - \left(2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right) \leq \theta \leq \theta^*$ , при убывании  $\theta$ . Возможны два случая: 1<sup>o</sup>, или  $\theta^* = \bar{\theta}^* = \theta^*$ , т. е.  $\theta = \theta^*$  есть прямая  $(J)$ , или 2<sup>o</sup>,  $\theta^* < \bar{\theta}^* < \theta^*$ , и тогда непременно  $\bar{\theta}^* - \theta^* \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ . Следует заметить, что, по крайней мере для  $\rho \leq 1$ , предельная величина угла  $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ , действительно, достигается, как показывают примеры:

$$f_\rho(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^\rho}\right) \quad (\rho < 1), \quad f_1(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad (\rho = 1).$$

Для этих функций прямая сгущения нулей  $\theta = \theta^* = 0$  является биссектрисой между прямыми  $(J): \theta = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ . Это свойство не является обязательным, как следует из примера

$$f(z) \equiv f_\rho(z e^{i\alpha}) f_\rho(z e^{-i\alpha}) \quad \left(\alpha \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Было бы интересно выяснить, насколько необходимым является условие  $\frac{r_{n+1}}{r_n} < M$  для того, чтобы две последние теоремы имели место. Во всяком случае, это условие играет существенную роль при докательстве, основанном на методе нормальных семейств.

6. В дальнейшем я рассматриваю исключительно случай функций нулевого рода, т. е. функций вида

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

предполагая  $f(0) = 1$ . Чтобы, при определении прямых ( $J$ ), можно было воспользоваться методом нормальных семейств, важно располагать сведениями двойного характера: 1) должны быть известны точки, кривые или части плоскости, где, при неограниченном возрастании  $z$ , функция остается ограниченной, 2) должны быть известны точки, кривые или части плоскости, где, при неограниченном возрастании  $z$ , функция неограниченно возрастает. Предполагая данными нули функции, мы должны сосредоточить внимание на тех частях плоскости, где функция неограниченно возрастает вместе с  $z$ . Не так много известно предложений общего характера, относящихся к неограниченному возрастанию функции. Мы использовали уже теоремы Лиувилля, Вимана, Фрагмена. Чтобы пойти дальше, я, исходя из некоторых частных гипотез, относящихся к правильности возрастания нулей, дам некоторые уточнения теоремы Вимана.

7. Пусть, как обычно,  $n(r)$  обозначает число нулей  $f(z)$  (считая по кратности), модули которых не превышают  $r$ .

Допустим, что для достаточно больших  $r$  имеет место неравенство:

$$\frac{n(\lambda r)}{n(r)} \leq s$$

где  $\lambda$  и  $s$  — постоянные числа, удовлетворяющие условию  $\lambda > s > 1$ .

Положим

$$P \equiv P(\lambda, s) = \alpha \lg(\lambda - 1) + \lg \frac{\lambda}{\lambda - 1} + \frac{1}{s} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}} - s \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(u-1)u^{1-\mu}},$$

где  $\alpha = \frac{1}{s}$  при  $\lambda \geq 2$  и  $= 1$  при  $\lambda < 2$ ,  $\mu = \frac{\lg s}{\lg \lambda} < 1$ .

Предположим, что  $P$  положительно.

Исключим из плоскости  $z$  круги  $\gamma_n$  с центрами  $a_n$  и радиусами

$$\rho_n = r_n e^{-\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}}, \text{ где } \varepsilon \text{ — сколько угодно малое положительное число.}$$

Тогда в оставшейся части плоскости функция возрастает неограниченно и равномерно вместе с переменной  $z$ .

Для доказательства заметим, прежде всего, что из неравенства

$$n(\lambda r) \leq sn(r)$$

вытекает

$$n\left(\frac{r}{\lambda}\right) \geq \frac{1}{s} n(r).$$

Дальше, предполагая  $u > 1$  и обозначая через  $\left[ \frac{\lg u}{\lg s} \right]$  наибольшее целое число, заключающееся в  $\frac{\lg u}{\lg s}$ , получим:

$$n(ur) \leq s^{1 + \frac{[lg u]}{[lg s]}} n(r) \leq s^{1 + \frac{lg u}{lg s}} n(r) = su^{\nu} n(r). \quad (u > 1)$$

Отсюда следует:

$$n(ur) \geq \frac{1}{s} u^{\nu} n(r) \quad (u < 1).$$

Обратимся к функции  $f(z)$ :

$$\begin{aligned} \lg |f(z)| &= \sum_1^{\infty} \lg \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \geq \sum_{r_n < \frac{r}{\lambda}} \lg \left( \frac{r}{r_n} - 1 \right) + \sum_{\frac{r}{\lambda} \leq r_n < \lambda r} \lg \left| -\frac{z}{a_n} \right| + \\ &+ \sum_{r_n < \lambda r} \lg \left( 1 - \frac{r}{r_n} \right) = A + B + C. \end{aligned}$$

но:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{r_n < \frac{r}{\lambda}} \lg \left( \frac{r}{r_n} - 1 \right) = \int_0^{\frac{r}{\lambda}} \lg \left( \frac{r}{t} - 1 \right) du(t) = n \left( \frac{r}{\lambda} \right) \lg (\lambda - 1) + \\ &+ \int_0^{\frac{1}{\lambda}} n(ur) \frac{du}{(1-u)u} \end{aligned}$$

$$C = \sum_{r_n > \lambda r} \lg \left( 1 - \frac{r}{r_n} \right) = \int_{\lambda r}^{\infty} \lg \left( 1 - \frac{r}{t} \right) dn(t) = n(\lambda r) \lg \frac{\lambda}{\lambda - 1} - \int_{\lambda}^{\infty} n(ur) \frac{du}{(u-r)u}.$$

С помощью предыдущих неравенств, получаем:

$$n \left( \frac{r}{\lambda} \right) \lg (\lambda - 1) \geq \alpha n(u) \lg (\lambda - 1),$$

$$n(\lambda r) \lg \frac{\lambda}{\lambda - 1} \geq n(r) \lg \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}} n(ur) \frac{du}{(u-1)u} \geq \frac{1}{s} n(r) \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}},$$

$$\int_{\lambda}^{\infty} n(ur) \frac{du}{(u-1)u} \leq s n(r) \int_0^{\infty} \frac{du}{(u-1)u^{1-\mu}}.$$

Значит:

$$A + C \leq n(r) \cdot P.$$



С другой стороны предполагая  $|z - a_n| > r_n e^{-\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}}$

$$B = \sum_{\frac{r}{\lambda} \leq r_n \leq \lambda r} \lg \left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| \geq - \sum_{\frac{r}{\lambda} \leq r_n \leq \lambda r} \frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}} = - \frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}} \left[ n(\lambda r) - n\left(\frac{r}{\lambda}\right) \right] \geq$$

$$\geq - \frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}} \left( s n(r) - \frac{1}{s} n(r) \right) = -(P-\varepsilon)n(r).$$

Итак:

$$\lg |f(z)| \geq A + B + C \geq P n(r) - (P-\varepsilon)n(r) = \varepsilon n(r)$$

отсюда следует:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \lg |f(z)| = \infty.$$

8. Из последнего предложения можно тотчас же получить некоторые выводы, касающиеся прямых ( $J$ ). Сохраним все сделанные до сих пор гипотезы, и положим для краткости

$$\eta = \arcsin e^{-\frac{P}{s-\frac{1}{s}}}, \quad \left( 0 < \eta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Пусть  $E$  есть совокупность точек сгущения, т. е. производная, от совокупности аргументов нулей  $a_n = r_n e^{i\theta_n}$  нашей функции. Пусть  $E_\eta$  — совокупность точек, находящихся на расстоянии  $\leq \eta$  от совокупности  $E^*$ ). Очевидно,  $E_\eta$  состоит из конечного числа замкнутых промежутков, не имеющих общих точек, которые обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ ;  $A_1, A_2, \dots, A_h$  пусть будут соответствующие им углы (со сторонами включительно). Я утверждаю, что 1) вне углов  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, h$ ) нет прямых ( $J$ ), а в каждом из углов  $A_i$  имеется по крайней мере одна прямая ( $J$ ). Нет надобности приводить доказательство, которое строится постоянно по одному и тому же методу.

Особенно интересен тот случай, когда  $\lambda$  и  $s$  можно выбрать таким образом, чтобы  $\eta$  было сколь угодно мало. В этом случае 1) всякая прямая ( $J$ ) непременно является прямой сгущения нулей (т. е. аргумент  $\theta = \theta^*$  прямой ( $J$ ) есть предельная точка совокупности  $\{\theta_n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )). 2) если между двумя прямыми, которые не суть прямые сгущения нулей, имеется бесчисленное множество нулей, то между ними имеется прямая ( $J$ ) — хоть одна.

В качестве простейшего примера рассмотрим функцию

$$\prod_1^\infty \left( 1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right), \quad \text{где } \rho < \frac{1}{2}. \quad \text{Для нее } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r\lambda)}{n(r)} = \lambda^\rho; \text{ положим } s = \lambda^\rho + \varepsilon = \lambda^\rho.$$

\*) Конечно, мы не различаем точек  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , отличающихся на  $2\pi$ .

Мы получим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} P(\lambda, \lambda^\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}} \right) \\ = \pi \operatorname{ctg} \pi \mu = \pi \operatorname{ctg} \pi (\rho + \varepsilon).$$

Если  $\varepsilon < \frac{1}{2} - \rho$ , то  $P$  при  $\lambda$  стремящемся к единице делается и остается больше некоторого постоянного положительного числа; вместе с тем  $s - \frac{1}{s} = \lambda^\mu - \frac{1}{\lambda^\mu}$  стремится к нулю, так что  $\eta$  может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому  $\theta = 0$  есть единственная прямая ( $J$ ).

Можно указать простое (достаточное) условие для того, чтобы  $\eta$  могло быть сделано сколь угодно малым. Оно заключается в том, чтобы, обозначая:

$$\sigma(\lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\lambda r)}{n(r)} \quad (\lambda \geq 1),$$

нижняя производная справа от функции  $\sigma(\lambda)$ , взятая в точке  $\lambda = 1$ , т. е.  $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\sigma(\lambda) - 1}{\lambda - 1}$ , была меньше, чем  $\frac{1}{2}$ . Этот критерий вытекает из сравнения рассматриваемой функции с функциями  $\Pi \left( 1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right)$ ,  $\rho < \frac{1}{2}$ .

9. Делая более ограничительное предположение относительно правильности возрастания нулей функции  $f(z)$ , мы получаем более точные результаты. Так, напр., допуская, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \lg \frac{r_{n+p}}{r_n} = \lambda > 2 \quad (p \text{ целое положительное})$$

(что влечет за собой  $\rho < \frac{1}{2}$ ), мы приходим к заключению, что, по исключении из плоскости  $z$  кругов с центрами  $a_n$  и радиусами  $r_n e^{-n \left( \frac{\pi}{2p} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon \right)}$  — в оставшейся части плоскости  $f(z)$  возрастает неограниченно и равномерно вместе с  $z$ . Отсюда вытекают следствия относительно прямых ( $J$ ), аналогичные тем, которые были получены в случае, когда  $\eta$  могло быть сделано сколь угодно малым.

10. В заключение остановлюсь на функциях  $f(z) = \Pi \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right)$ , нулевого рода, все нули которых предполагаются вещественными и положительными, не делая, однако, никаких предположений отно-

сительности правильности их возрастания. Достаточно рассмотреть полуплоскость  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Заметим, что  $|f(z)|$  есть возрастающая функция от  $\theta$  (при постоянном  $r$ ), т. к. это имеет место для каждого множителя в отдельности. Поэтому если  $\theta_1 < \theta_2$  и  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta_1})| = \infty$ , то и  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta_2})| = \infty$ .

Притом  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2}})| = \infty$ , а предел  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(r)|$ , если существует, то

равен нулю. Отсюда ясно, что существует  $\beta \left(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  такое, что

$\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})| = \infty$  при  $\theta > \beta$ , но предел  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})|$  не существует

или не равен бесконечности, если  $\theta < \beta$ . Если бы оказалось, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$ , то точно также мы установили бы существование

$\alpha \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$  такого, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})| = 0$  при  $\theta < \alpha$ , и предел

$\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})|$  не существует или отличен от нуля при  $\theta > \alpha$ . Если

равенство  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$  не имеет места, положим формально  $\alpha = 0$ .

Итак, во всех случаях:

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Так, для функции  $\Pi \left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{p}}}\right)$  получаем  $\alpha = \beta = 0$  в случае

$$0 < \rho \leq \frac{1}{2}; \quad \alpha = \beta = \pi - \frac{\pi}{2\rho} \text{ в случае } \frac{1}{2} < \rho < 1.$$

Следующий пример показывает, что возможно неравенство  $\alpha < \beta$ :

$$f(z) = \Pi \left(1 - \frac{z}{q^n}\right)^{2^n} \quad \left(q > 2, \rho = \frac{\lg 2}{\lg q}\right).$$

Можно убедиться, что предел  $\lim_{p \rightarrow \infty} |f(q^p z)|$  (где  $p$  пробегает только целые значения, а  $z$  постоянно) равен бесконечности или нулю в зависимости от того, будет ли выражение

$$q^{2z}(1-z) \frac{f(z)}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

по модулю больше или меньше единицы. Т. к. это выражение, очевидно, меньше единицы в некоторой окрестности точки  $z = 1$ ,

и больше единицы в некоторой окрестности точки  $z = \frac{1}{q}$ , то полу-

чим для  $\theta$  достаточно малых:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})| = 0, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})| = \infty,$$

т. е.  $\alpha = 0, \beta > 0$ .

11. Возвращаемся к общему случаю. Применение метода нормальных семейств позволяет утверждать, что прямые  $\theta = \alpha$  и  $\theta = \beta$  — прямые (J). Отсюда, между прочим, вытекает, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})| = 0$ ,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\theta})| = \infty \text{ в угле } \alpha > \theta > \beta.$$

Мы убедимся дальше, что в угле  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  существует кривая  $(\Gamma_0)$ , идущая из начала в бесконечность, пересекая каждый круг  $|z| = r$  в одной точке, имеющая уравнение

$$(\Gamma_0) \quad \theta = \psi(r) \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq r < \infty \\ \alpha \leq \psi(r) \leq \beta \end{array} \right)$$

и обладающая тем свойством, что

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0 & \quad \text{в области } 0 \leq \theta \leq \psi(r) - \varepsilon \\ \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty & \quad \text{в области } \psi(r) + \varepsilon \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

(равномерно).

Именно, в качестве кривой  $(\Gamma_0)$  может быть выбрана, напр., кривая, определяемая равенством

$$|f(z)| = 1 \quad \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)^*$$

Доказательство основывается на том, что к кривым, получающимся при вращении  $(\Gamma_0)$ :

$$(\Gamma_\lambda) \quad \theta = \psi(r) + \lambda,$$

могут быть применены те же рассуждения, что и к прямым, выходящим из начала.

Заметим что  $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \alpha$ ,  $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \beta$  (здесь  $\alpha$  и  $\beta$  имеют прежние значения), так что всякая прямая  $\theta = \theta^*$  ( $\alpha < \theta^* < \beta$ ) пересекает кривую  $\Gamma_0$  бесконечное число раз, напр. в точках, для которых  $r = t_1, t_2, \dots, t_n, t_n \rightarrow \infty$ .

Это обстоятельство позволяет утверждать, что всякая полупрямая  $\theta = \theta^*$  ( $\alpha < \theta^* < \beta$ ) является прямой (J). В самом деле, семейство  $f t_n(z) \equiv f(t_n z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет иррегулярную точку  $r = e^{i\theta^*}$ , как вытекает из свойств кривой  $\Gamma_0$ .

12. Не лишено интереса, каких наибольших значений может достигать аргумент  $\beta$ , и в какой зависимости от порядка возрастания функции. Вот что удается установить в этом направлении.

\*) Если эта кривая состоит из отдельных ветвей, заканчивающихся на оси  $\theta = 0$ , можно соединить их отрезками оси.

Пусть дана возрастающая функция  $\omega(r)$  ( $r \geq 0$ ); подчиненная условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\omega(r)}{\lg r} = \infty.$$

Можно построить целую функцию нулевого рода с положительными нулями такую, что

$$(1) \quad n(r) \leq \omega(r)$$

$$(2) \quad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Мы придадим нашей функции вид

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{\sigma_k};$$

где кратности  $\sigma_k$  будут подобраны таким образом, чтобы удовлетворить условию (1), именно, положим

$$\sigma_1 = [\omega(a_1)], \quad \sigma_{k+1} = [\omega(a_{k+1})] - [\omega(a_k)] \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где, как прежде,  $[u]$  означает целую часть  $u$ ; тогда, при  $a_k \leq r < a_{k+1}$ , получим:

$$n(r) = n(a_k) = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k = [\omega(a_k)] \leq \omega(a_k) \leq \omega(r).$$

Чтобы удовлетворить условию (2), придется заставить числа  $a_k$  возрастать достаточно быстро.

Можно представить  $\lg |f(z)|$  в следующем виде:

$$\lg |f(z)| = \int_0^1 n(ur) \frac{du}{u} - \int_0^1 \left( n\left(\frac{r}{u}\right) - n(ru) \right) \frac{\cos \theta - u}{1 - 2u \cos \theta + u^2} du \quad (z = re^{i\theta}).$$

С одной стороны при  $r = a_k$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 n(ua_k) \frac{du}{u} &= \int_0^{\frac{a_{k-1}}{a_k}} n(ua_k) \frac{du}{u} + \int_{\frac{a_{k-1}}{a_k}}^1 n(ua_k) \frac{du}{u} \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{a_{k-1}}{a_k}} \omega(ua_k) \frac{du}{u} + \int_{\frac{a_{k-1}}{a_k}}^1 n(a_{k-1}) \frac{du}{u} \leq \int_0^{\frac{a_{k-1}}{a_k}} \omega(u) \frac{du}{u} + \omega(a_{k-1}) \lg \frac{a_k}{a_{k-1}}. \end{aligned}$$

С другой стороны (при  $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ):

$$\int_0^1 \left( n\left(\frac{a}{u}\right) - n(ua_k) \right) \frac{\cos \theta - u}{1 - 2u \cos \theta + u^2} du \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \left( n \left( \frac{a_k}{\cos \theta} \right) - n(a_k \cos \theta) \right) \int_0^1 \frac{\cos \theta - u}{1 - 2u \cos \theta + u^2} du = \left( n \left( \frac{a_k}{\cos \theta} \right) - n(a_k \cos \theta) \right) \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \geq \\ &\geq \sigma_k \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = ([\omega(a_k)] - [\omega(a_{k-1})]) \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lg |f(a_k e^{i\theta})| \leq \int_0^{a_{k-1}} \omega(u) \frac{du}{u} + \omega(a_{k-1}) \lg \frac{a_k}{a_{k-1}} - ([\omega(a_k)] - [\omega(a_{k-1})]) \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Чтобы удовлетворить, напр., условию  $|f(a_k e^{i\theta})| < 1$ , достаточно выбрать  $a_k$  таким образом, чтобы было:

$$\begin{aligned} [\omega(a_k)] \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \omega(a_{k-1}) \lg a_k &> \int_0^{a_{k-1}} \omega(u) \frac{du}{u} - \omega(a_{k-1}) \lg a_k + \\ &+ [\omega(a_{k-1})] \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Это всегда возможно, т. к. при  $\theta < \frac{\pi}{3}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( [\omega(r)] \lg \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \omega(a_{k-1}) \lg r \right) = \infty.$$

30-III 1927, Париж.

## О соотношениях между коэффициентами ортогонального преобразования и параметрами Родрига.

И. Огневский.

В этой заметке обнаруживаем некоторые свойства выражений для коэффициентов ортогонального преобразования при помощи одного предложения, являющегося следствием теоремы II\*); выражающей дуалистический закон движения.

Предложение это вытекает из следующей теоремы. Если при движении  $n$ -мерного пространства самого в себе имеют место

$$U_i (P_1, P_2, \dots, P_n, S_1, S_2, \dots, S_n, p_1, p_2, \dots, p_n, s_1, s_2, \dots, s_n) = 0 \quad (1)$$

то имеют также место:

$$U_i (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n, s_1, s_2, \dots, s_n, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n, S_1, \dots, S_n) = 0; \quad (2)$$

где  $P_i, S_i, p_i, s_i$  обозначают четные и нечетные характеристики движения, при чем  $P_i$  и  $S_i$  принадлежат подвижному, а  $p_i$  и  $s_i$  неподвижному пространству, черта над  $P_i$  и  $p_i$  указывает, что индикатриса нечетных характеристик перешла из одного класса в другой,  $U_i (i = 1, 2, \dots, n)$  — функции, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между четными и нечетными характеристиками движения, принадлежащие подвижному и неподвижному пространству.

Из этой теоремы вытекает следующее предложение:

*Теорема I.* Если при движении  $n$ -мерного пространства самого в себе имеют место

$$U_i (P_1, P_2, \dots, P_n, W, S) = 0; \quad (3)$$

то имеют также место

$$U_i (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n, -W, S) = 0; \quad (4)$$

где  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  нечетные характеристики движения,  $W$  — вектор,  $n$ -мерного пространства,  $S$  — четная характеристика движения.

\*) См. мою статью „Об одном дуалистическом законе и его приложениях“ в „Ученых записках научно-исследовательских кафедр Украины“ в. III (печатается) или мою статью: „Über ein schief-symmetrisches Dualitätsgesetz“, которая появится в 51 томе „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo“.

*Следствие I.* Если при движении  $n$ -мерного пространства самого в себе имеют место:

$$U_i(P_1, P_2, \dots, P_n, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \dots \dots \dots (5)$$

то имеют также место:

$$U_i(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n, -x_1, -x_2, \dots, -x_n) = 0; \dots \dots \dots (6)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — Декартовы координаты точки  $n$ -мерного пространства, остальные обозначения сохраняют тот же смысл, что в теореме.

Предложение это основано на том, что вектор определяется  $n$  числами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

*Следствие II.* Если при движении  $n$ -мерного пространства самого в себе имеют место:

$$U_i(P_1, P_2, \dots, P_n, \eta_1, \dots, \eta_n) = 0; \dots \dots \dots (7)$$

то имеют также место:

$$U_i(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n) = 0; \dots \dots \dots (8)$$

где  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — кватернионы,  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_n$ , кватернионы, сопряженные с  $\eta_1, \dots, \eta_n$ .

*Следствие III.* Если при движении  $n$ -мерного пространства самого в себе имеют место:

$$U_i(P_1, P_2, \dots, P_n, l_0, l_1, l_2, l_3, v_0, v_1, v_2, v_3) = 0; \dots \dots (9)$$

то имеют также место:

$$U_i(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n, l_0, -l_1, -l_2, -l_3, v_0, -v_1, -v_2, -v_3) = 0; \dots (10)$$

где  $l_0, v_0$  — скалярные части, а  $l_1, l_2, l_3$  и  $v_1, v_2, v_3$  — компоненты векторной части двух кватернионов  $\eta$  и  $\eta'$ .

Предложение это следует из того, что скалярные части кватернионов можно рассматривать как четные характеристики движения, а векторные части, как векторы.

Установим теперь некоторые соотношения между коэффициентами ортогонального преобразования и параметрами Родрига.

Как известно\*) точка  $A_1$ , повернувшаяся вокруг некоторой оси  $OL$ , удовлетворяет с одной стороны уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z; \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z; \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

а с другой стороны уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} px' + ny' - mz' &= px - ny + mz; \\ -nx' + py' + lz' &= nx + py - lz; \\ mx' - ly' + pz' &= -mx + ly + pz; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

\*) Ср. мою заметку: „Об одном свойстве формул Эйлера-Родрига“.



где  $x, y, z$  — координаты начального положения точки, а  $x', y', z'$  — конечного положения  $A_1, \frac{l}{p}, \frac{m}{p}, \frac{n}{p}$  — координаты точки  $K$ , лежащей на оси  $OL$ , расстояние которой от начала координат равно  $lg \frac{\alpha}{2}$ ,

где  $\alpha$  — угол поворота точки  $A_1$  вокруг оси;  $l, m, n, p$  — называют также параметрами Родрига. Подставив выражения для  $x', y', z'$  из (1) в (2), найдем, приравняв соответствующие коэффициенты при  $x, y, z$ , следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} p(\alpha_{11} - 1) &= m\alpha_{31} - n\alpha_{21}; \\ p\alpha_{12} &= m\alpha_{32} - n(\alpha_{22} + 1); \\ p\alpha_{13} &= m(\alpha_{33} + 1) - n\alpha_{23}; \\ p\alpha_{21} &= n(\alpha_{11} + 1) - l\alpha_{31}; \\ p(\alpha_{22} - 1) &= n\alpha_{12} - l\alpha_{32}; \\ p\alpha_{23} &= n\alpha_{13} - l(\alpha_{33} + 1); \\ p\alpha_{31} &= l\alpha_{21} - m(\alpha_{11} + 1); \\ p\alpha_{32} &= l(\alpha_{22} + 1) - m\alpha_{12}; \\ p(\alpha_{33} - 1) &= l\alpha_{23} - m\alpha_{13}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Т. к. порядок указателей  $i$  и  $k$   $\alpha_{ik}$  — косинусов углов между подвижными и неподвижными осями зависит от индикатрисы пространства, поэтому  $\alpha_{ik}$  — нечетные характеристики движения и на основании следствия I из девяти формул (13) получаем:

$$\left. \begin{aligned} p(\alpha_{11} - 1) &= n\alpha_{12} - m\alpha_{13}; \\ p\alpha_{21} &= n(\alpha_{22} + 1) - m\alpha_{23}; \\ p\alpha_{31} &= n\alpha_{32} - m(\alpha_{33} + 1); \\ p\alpha_{12} &= l\alpha_{13} - n(\alpha_{11} + 1); \\ p(\alpha_{22} - 1) &= l\alpha_{23} - n\alpha_{21}; \\ p\alpha_{32} &= l(\alpha_{33} + 1) - n\alpha_{31}; \\ p\alpha_{13} &= m(\alpha_{11} + 1) - l\alpha_{12}; \\ p\alpha_{23} &= m\alpha_{21} - l(\alpha_{22} + 1); \\ p(\alpha_{33} - 1) &= m\alpha_{31} - l\alpha_{32}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Обнаружим теперь свойство выражений для косинусов углов между подвижными и неподвижными осями координат четырехмерного пространства.

Уравнения ортогонального преобразования в этом случае имеют вид:

$$x'_k = \alpha_{k0}x_0 + \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \alpha_{k3}x_3; \quad |k = 0, 1, 2, 3| \dots \dots (15)$$

при чем

$$\sum_k \alpha_{ki}^2 = 1; \quad \sum_k \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 0; \quad |i \neq j| \quad |\alpha_{ij}| = 1; \dots \dots \dots (16)$$

Введя кватернионы

$$\left. \begin{aligned} \eta &= l_0 + i_1 l_1 + i_2 l_2 + i_3 l_3; \\ \eta' &= l'_0 + i_1 l'_1 + i_2 l'_2 + i_3 l'_3; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

модуль которых равен единице и которые удовлетворяют условиям

$$\eta_k \eta^l = \alpha_{0k} + \alpha_{1k} i_1 + \alpha_{2k} i_2 + \alpha_{3k} i_3; \quad k = 0, 1, 2, 3; \dots (18)$$

можно показать\*), что коэффициенты преобразования (15) удовлетворяют уравнениям:

$$\alpha_{00} = l_0''_0 + l_1''_1 + l_2''_2 + l_3''_3; \quad (19)$$

$$\alpha_{10} = l_1''_0 - l_0''_1 + l_3''_2 - l_2''_3; \quad (20)$$

$$\alpha_{20} = l_2''_0 - l_0''_2 + l_1''_3 - l_3''_1; \quad (21)$$

$$\alpha_{30} = l_3''_0 - l_0''_3 + l_2''_1 - l_1''_2; \quad (22)$$

$$\alpha_{01} = l_0''_1 - l_1''_0 + l_3''_2 - l_2''_3; \quad (23)$$

$$\alpha_{11} = l_0''_0 + l_1''_1 - l_2''_2 - l_3''_3; \quad (24)$$

$$\alpha_{21} = l_1''_2 + l_2''_1 + l_0''_3 + l_3''_0; \quad (25)$$

$$\alpha_{31} = l_1''_3 + l_3''_1 - l_0''_2 - l_2''_0; \quad (26)$$

$$\alpha_{02} = l_0''_2 - l_2''_0 + l_1''_3 - l_3''_1; \quad (27)$$

$$\alpha_{12} = l_1''_2 + l_2''_1 - l_0''_3 - l_3''_0; \quad (28)$$

$$\alpha_{22} = l_0''_0 + l_2''_2 - l_3''_3 - l_1''_1; \quad (29)$$

$$\alpha_{32} = l_2''_3 + l_3''_2 + l_0''_1 + l_1''_0; \quad (30)$$

$$\alpha_{03} = l_1''_3 - l_3''_0 + l_2''_1 - l_1''_2; \quad (31)$$

$$\alpha_{13} = l_1''_3 + l_3''_1 + l_0''_2 + l_2''_0; \quad (32)$$

$$\alpha_{23} = l_2''_3 + l_3''_2 - l_0''_1 - l_1''_0; \quad (33)$$

$$\alpha_{33} = l_0''_0 + l_3''_3 - l_1''_1 - l_2''_2; \quad (34)$$

Так как  $l_0$  и  $l'_0$  — скалярные части, а  $l_1, l_2, l_3$  и  $l'_1, l'_2, l'_3$  компоненты векторной части кватернионов  $\eta$  и  $\eta^l$ , то на основании следствия III из (20) следует:

$$\alpha_{01} = (-l_1) (l'_0) - (l_0) (-l_1) + (-l_3) (-l'_2) - (-l_2) (-l'_3);$$

т. е. соотношение (23):

$$\alpha_{01} = l_0''_1 - l'_0 l_1 + l_3''_2 - l_2''_3;$$

Точно также на основании следствия III из соотношений (21), (22), (25), (26), (27), (30) соответственно вытекают соотношения: (27), (31), (28), (32), (33).

Можно также показать, что правило преобразования индексов употребляемое С. Cailler\*\*) при исследовании ортогонального преобразования четырехмерного пространства представляет собою во всех рассматриваемых им случаях теорему, вытекающую из указанного в начале этой статьи предложения.

26-VI-27.

\*) См. С. Cailler. Introduction géométrique à la mécanique rationnelle, Paris, 1924, p. 402.

\*\*) loc. cit. 3) §§ 126, 127, 128.

