О соотношениях между коэффициентами ортогонального преобразования и параметрами Родрига.

И. Огиевецкий.

В этой заметке обнаруживаем некоторые свойства выражений для коэффициентов ортогонального преобразования при помощи одного предложения, являющегося следствием теоремы II*); выражающей дуалистический закон движения.

Предложение это вытекает из следующей теоремы. Если при движении n — мерного пространства самого в себе имеют место

$$U_i \ (P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, s_1 \ s_2, \ldots, s_n) = 0 \quad (1)$$

то имеют также место:

$$U_i \ (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n, s_1, s_2, \ldots, s_n, \overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n, S_1, \ldots, S_n) = 0; \quad (2)$$

где P_i, S_i, p_i, s_i обозначают четные и нечетные характеристики движения, при чем P_i и S_i принадлежат подвижному, а p_i и s_i неподвижному пространству, черта над P_i и p_i указывает, что индикатриса нечетных характеристик перешла из одного класса в другой, $U_i (i = 1, 2, \ldots, n;)$ — функции, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между четными и нечетными характеристиками движения, принадлежащие подвижному и неподвижному пространству.

Из этой теоремы вытекает следующее предложение:

Теорема I. Если при движении n — мерного пространства самого в себе имеют место

$$U_i \ (P_1, P_2, \ldots, P_n, W, S) = 0; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

то имеют также место

$$U_i \ (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n, -W, S) = 0; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

где P_i $(i = 1, 2, \ldots, n;)$ нечетные характеристики движения, W — вектор, n — мерного пространства, S — четная характеристика движения.

---

*) См. мою статью „Об одном дуалистическом законе и его приложениях" в „Ученых записках научно-исследовательских кафедр Украины" в. III (печатается) или мою статью: „Über ein schiefsymmetrisches Dualitätsgesetz", которая появится в 51 томе „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo".

Следствие I. Если при движении n — мерного пространства самого в себе имеют место:

$$U_i\,(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0; \quad \ldots \ldots (5)$$

то имеют также место:

$$U_i\,(\overline{P_1},\ \overline{P_2},\ \ldots,\ \overline{P_n}, -x_1, -x_2,\ \ldots, -x_n) = 0; \quad \ldots \ldots (6)$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ — Декартовы координаты точки n — мерного пространства, остальные обозначения сохраняют тот же смысл, что в теореме.

Предложение это основано на том, что вектор определяется n числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Следствие II. Если при движении n — мерного пространства самого в себе имеют место:

$$U_i\,(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n) = 0; \quad \ldots \ldots (7)$$

то имеют также место:

$$U_i\,(\overline{P_1},\ \overline{P_2},\ \ldots,\ \overline{P_n},\ \overline{\eta_1},\ \ldots,\ \overline{\eta_n}) = 0; \quad \ldots \ldots (8)$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — кватернионы, $\overline{\eta_1}, \overline{\eta_2}, \ldots, \overline{\eta_n}$, кватернионы, сопряженные с $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

Следствие III. Если при движении n — мерного пространства самого в себе имеют место:

$$U_i\,(P_1,\ P_2,\ \ldots\ P_n,\ l_0,\ l_1,\ l_2,\ l_3,\ l'_0,\ l'_1,\ l'_2,\ l'_3) = 0; \quad \ldots (9)$$

то имеют также место:

$$U_i\,(\overline{P_1},\ \overline{P_2},\ \ldots,\ \overline{P_n},\ l_9, -l_1, -l_2, -l_3,\ l'_0, -l'_1, -l'_2, -l'_3) = 0; \quad \ldots (10)$$

где l_0, l'_0 — скалярные части, а l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 — компоненты векторной части двух кватернионов η и η'.

Предложение это следует из того, что скалярные части кватернионов можно рассматривать как четные характеристики движения, а векторные части, как векторы.

Установим теперь некоторые соотношения между коэффициентами ортогонального преобразования и параметрами Родрига.

Как известно*) точка A_1, повернувшаяся вокруг некоторой оси OL, удовлетворяет с одной стороны уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z; \\ y' &= \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z; \\ z' &= \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

а с другой стороны уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} px' + ny' - mz' &= px - ny + mz; \\ -nx' + py' + lz' &= nx + py - lz; \\ mx' - ly' + pz' &= -mx + ly + pz; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

---

*) Ср. мою заметку: „Об одном свойстве формул Эйлера-Родрига“.

где x, y, z — координаты начального положения точки, а x', y', z' — конечного положения A_1, $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ — координаты точки K, лежащей на оси OL, расстояние которой от начала координат равно $tg\frac{\alpha}{2}$, где α — угол поворота точки A_1 вокруг оси; l, m, n, p — называют также параметрами Родрига. Подставив выражения для x', y', z' из (1) в (2), найдем, приравняв соответствующие коэффициенты при x, y, z, следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
p(\alpha_{11}-1)&=m\alpha_{31}-n\alpha_{21};\\
p\alpha_{12}&=m\alpha_{32}-n(\alpha_{22}+1);\\
p\alpha_{13}&=m(\alpha_{33}+1)-n\alpha_{23};\\
p\alpha_{21}&=n(\alpha_{11}+1)-l\alpha_{31};\\
p(\alpha_{22}-1)&=n\alpha_{12}-l\alpha_{32};\\
p\alpha_{23}&=n\alpha_{13}-l(\alpha_{33}+1);\\
p\alpha_{31}&=l\alpha_{21}-m(\alpha_{11}+1);\\
p\alpha_{32}&=l(\alpha_{22}+1)-m\alpha_{12};\\
p(\alpha_{33}-1)&=l\alpha_{23}-m\alpha_{13};
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (13)$$

Т. к. порядок указателей i и k α_{ik} — косинусов углов между подвижными и неподвижными осями зависит от индикатрисы пространства, поэтому α_{ik} — нечетные характеристики движения и на основании следствия I из девяти формул (13) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
p(\alpha_{11}-1)&=n\alpha_{12}-m\alpha_{13};\\
p\alpha_{21}&=n(\alpha_{22}+1)-m\alpha_{23};\\
p\alpha_{31}&=n\alpha_{32}-m(\alpha_{33}+1);\\
p\alpha_{12}&=l\alpha_{13}-n(\alpha_{11}+1);\\
p(\alpha_{22}-1)&=l\alpha_{23}-n\alpha_{21};\\
p\alpha_{32}&=l(\alpha_{33}+1)-n\alpha_{31};\\
p\alpha_{13}&=m(\alpha_{11}+1)-l\alpha_{12};\\
p\alpha_{23}&=m\alpha_{21}-l(\alpha_{22}+1);\\
p(\alpha_{33}-1)&=m\alpha_{31}-l\alpha_{32};
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (14)$$

Обнаружим теперь свойство выражений для косинусов углов между подвижными и неподвижными осями координат четырехмерного пространства.

Уравнения ортогонального преобразования в этом случае имеют вид:

$$x'_k=\alpha_{k0}x_0+\alpha_{k1}x_1+\alpha_{k2}x_2+\alpha_{k3}x_3\,; \quad |\,k=0,\ 1,\ 2,\ 3\,| \quad \ldots (15)$$

при чем

$$\sum_k \alpha_{ki}^2=1; \qquad \sum\alpha_{ki}\alpha_{kj}=0; \qquad |\,i\neq j\,| \qquad |\,\alpha_{ij}\,|=1; \quad \ldots\ldots (16)$$

Введя кватернионы

$$\left.\begin{aligned}
\eta&=l_0+i_1\,l_1+i_2\,l_2+i_3\,l_3\,;\\
\eta'&=l'_0+i_1\,l'_1+i_2\,l'_2+i_3\,l'_3\,;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

модуль которых равен единице и которые удовлетворяют условиям

$$\eta i_k \eta' = a_{0k} + a_{1k} i_1 + a_{2k} i_2 + a_{3k} i_3; \quad k = 0, 1, 2, 3; \ldots \quad (18)$$

можно показать *), что коэффициенты преобразования (15) удовлетворяют уравнениям:

$$
\begin{aligned}
a_{00} &= l_0 l'_0 + l_1 l'_1 + l_2 l'_2 + l_3 l'_3; && (19)\\
a_{10} &= l_1 l'_0 - l_0 l'_1 + l_3 l'_2 - l_2 l'_3; && (20)\\
a_{20} &= l_2 l'_0 - l_0 l'_2 + l_1 l'_3 - l_3 l'_1; && (21)\\
a_{30} &= l_3 l'_0 - l_0 l'_3 + l_2 l'_1 - l_1 l'_2; && (22)\\
a_{01} &= l_0 l'_1 - l_1 l'_0 + l_3 l'_2 - l_2 l'_3; && (23)\\
a_{11} &= l_0 l'_0 + l_1 l'_1 - l_2 l'_2 - l_3 l'_3; && (24)\\
a_{21} &= l_1 l'_2 + l_2 l'_1 + l_0 l'_3 + l_3 l'_0; && (25)\\
a_{31} &= l_1 l'_3 + l_3 l'_1 - l_0 l'_2 - l_2 l'_0; && (26)\\
a_{02} &= l_0 l'_2 - l_2 l'_0 + l_1 l'_3 - l_3 l'_1; && (27)\\
a_{12} &= l_1 l'_2 + l_2 l'_1 - l_0 l'_3 - l_3 l'_0; && (28)\\
a_{22} &= l_0 l'_0 + l_2 l'_2 - l_3 l'_3 - l_1 l'_1; && (29)\\
a_{32} &= l_2 l'_3 + l_3 l'_2 + l_0 l'_1 + l_1 l'_0; && (30)\\
a_{03} &= l_0 l'_3 - l_3 l'_0 + l_2 l'_1 - l_1 l'_2; && (31)\\
a_{13} &= l_1 l'_3 + l_3 l'_1 + l_0 l'_2 + l_2 l'_0; && (32)\\
a_{23} &= l_2 l'_3 + l_3 l'_2 - l_0 l'_1 - l_1 l'_0; && (33)\\
a_{33} &= l_0 l'_0 + l_3 l'_3 - l_1 l'_1 - l_2 l'_2; && (34)
\end{aligned}
$$

Так как l_0 и l'_0 — скалярные части, а l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 компоненты векторной части кватернионов η и η', то на основании следствия III из (20) следует:

$$a_{01} = (-l_1)\,(l'_0) - (l_0)\,(-l_1) + (-l_3)\,(-l'_2) - (-l_2)\,(-l'_3);$$

т. е. соотношение (23):

$$a_{01} = l_0 l'_1 - l'_0 l_1 + l_3 l'_2 - l_2 l'_3;$$

Точно также на основании следствия III из соотношений (21), (22), (25), (26), (27), (30) соответственно вытекают соотношения: (27) (31), (28), (32), (33).

Можно также показать, что правило преобразования индексов употребляемое C. Cailler **) при исследовании ортогонального преобразования четырехмерного пространства представляет собою во всех рассматриваемых им случаях теорему, вытекающую из указанного в начале этой статьи предложения.

26-VI-27.

---

*) См. C. Cailler. Introduction géométrique à la mécanique rationnelle, Paris, 1924, p. 402.

**) loc. cit. 3) §§ 126, 127, 128.