Sur les polynomes multiplement monotones.

Par **Serge Bernstein**.

Nous disons qu'un polynome $P(x)$ est monotone d'ordre $h+1$ dans l'intervalle donné, lorsque toutes ses dérivées des $h+1$ ordres sont non négatives dans l'intervalle considéré.

Nous allons résoudre ici les deux problèmes suivants:

1-er problème. *Déterminer l'oscillation minima dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *d'un polynome* $P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p^n$ *monotone d'ordre* $h+1$ *dans cet intervalle.*

2-ème problème. *Déterminer l'oscillation minima, dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *d'un polynome* $P_n(x)$ *de degré non supérieur à n, monotone d'ordre* $(h+1)$, *si sa dérivée première reçoit dans un point de cet intervalle la valeur* 1.

Commençons par résoudre le premier problème. Je dis que la forme nécéssaire du polynome $P_n(x)$ que nous pouvons sans restreindre la généralité supposer non négatif dans l'intervalle $(-1, +1)$ est

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} (x-z)^h \varphi(z)\, dz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où $\varphi(z) \geqslant 0$ dans cet intervalle:

En effet, si on avait $P_n^{(k)}(-1) > 0$ pour une certaine valeur $k \leqslant h$, le polynome

$$Q_n(x) = P_n(x) - \frac{P_n^{(k)}(-1)(x+1)^k}{k!}$$

aurait également ses dérivées des $(h+1)$ ordres non négatives dans l'intervalle $(-1, +1)$, car on a $Q_n^{(i)}(x) = P_n^{(i)}(x)$ pour $i > k$, et par conséquent, $Q_n^{(k)}(x)$, étant croissant, est positif pour $x > -1$; donc, puisque $Q_n^{(k-1)}(-1) \geqslant 0$, $Q_n^{(k-1)}(x)$ est également positif pour $x > -1$, et ainsi de suite.

Supposons pour fixer les idées $n - h - 1 = 2m$ pair. Alors $\varphi(z) = u^2(z)$ est un polynome de degré n.

En effet, si on avait

$$\varphi(z) = s(z) . q(z)$$

où $q(z)$ ne possède que des racines extérieures à l'intervalle $(-1 \; +1)$, on pourrait diminuer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h \varphi(z)\, dz$$

eu remplaçant $\varphi(z)$ par la fonction également positive $\lambda s(z)$, où $\lambda < q(z)$ dans notre intervalle. Mais $s(z)$, étant de degré pair, ne saurait être que de la forme

$$s(z) = A(z-\alpha_1)^{2p_1}(z-\alpha_2)^{2p_2}\dots(z-\alpha_k)^{2p_k}(1-z^2) \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ou bien

$$s(z) = A(z-\alpha_1)^{2p_1}\dots(z-\alpha_k)^{2p_k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

la constante A devant être positive; or, pour la première forme cela n'est pas possible à cause de la condition que le coefficient de la plus haute puissance de z doit être positif. La forme (3) est donc seule admissible.

Si $n-h$ était pair, on trouverait pour $s(z)$ la forme

$$A(z-\alpha_1)^{2p_1}\dots(z-\alpha_k)^{2pk}(z+1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Par conséquent, nous sommes conduits à déterminer le minimum L de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1-z)^h u^2(z)\,dz,$$

lorsque le coefficient de z^m dans le polynome $u(z)$ de degré m est égal à

$$\sqrt{\frac{n(n-1)\dots(n-h)}{h!}}.$$

Donc $u(x)$ est à un facteur constant près le polynome de Jacobi de degré m

$$P_{m,h}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m.\,m\,!}\,\frac{1}{(1-x)^h}\,\frac{d^m}{dx^m}(1-x)^{m+h}(1+x)^m \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Ainsi

$$u(x) = \frac{2^m.\,m\,!}{(n-1)\dots(n-m)}\sqrt{\frac{n(n-1)\dots(n-h)}{h!}}\,P_{m,h}(x), \; . \; . \quad (6)$$

et puisque

$$\int_{-1}^{+1}(1-z)^h\,P^2_{m,h}(z)\,dz = \frac{2^{h+1}}{2m+h+1},$$

donc l'oscillation minima cherchée

$$L = L_{m,h} = \frac{2^{h+1}}{n}\cdot\frac{2^{2m}.(m\,!)^2}{[(n-1)\dots(n-m)]^2}\cdot\frac{n(n-1)\dots(n-h)}{h!} =$$

$$= 2^n\,\frac{[m!(m+2)!]^2}{(n-1)!(2m)!\,h!} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Pour $h=0$, la formule (7) se réduit à la formule connue de Tchebyscheff.

Dans le cas, où le segment $(-1,+1)$ est remplacé par un intervalle quelconque l, on a manifestement

$$L^{(l)}_{m,h} = \left(\frac{l}{2}\right)^n L_{m,h} = l^n\,\frac{[m!(m+h)!]^2}{(n-1)!(2m)!\,h!} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Nous allons discuter les formules (7) et (8) pour n très grand, en faisant successivement les trois hypothèses: 1) $\frac{h}{n} \to 1$; 2) $\frac{h}{n} \to a$; 3) $\frac{h}{n} \to 0$, où $0 < a < 1$.

Remarquons auparavant que

$$\frac{L^{(l)}_{m,n+1}}{L^{(l)}_{m,h}} = l\,\frac{(m+h+1)^2}{n(h+1)} = l\left[1 + \frac{m^2}{n(h+1)}\right]$$

Donc, pour $l \geqslant 1$, $L^{(l)}_{m,h}$ augmente avec n, si m reste invariable. D'ailleurs, si m étant fixe, h augmente indéfiniment depuis 0, $L^{(l)}_{m,h}$ croît depuis la valeur $l^n \frac{(m!)^4}{(2m!)^2}$ jusqu'à la valeur asymptotique $l^n \frac{(m!)^2}{2m!}$.

Dans ce qui suit, nous supposons que *m croît indéfiniment.*

1) $\frac{h}{n} \to 1$. En appliquant la formule de Stirling, on trouve

$$L_{m,h} \sim 2^{h+1}\,\frac{(m+h)^{2m+2h+1}}{h^{h+\frac{1}{2}}\,(2m+h)^{2m+h+\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi m}. \quad \ldots\ldots (9)$$

Donc

$$\log L_{m,h} \sim (h+1)\log 2 + h\log\left(1+\frac{m}{h}\right) - (2m+h)\log\left(1+\frac{m}{m+h}\right) +$$

$$+\tfrac{1}{2}\log\pi m = (h+1)\log 2 + m - \frac{m^2}{2h} + \ldots - \left(m - \frac{m^2}{2(h+m)} + \ldots\right) -$$

$$-\left(\frac{m^2}{h+m} - \frac{m^3}{2(h+m)^2} + \ldots\right) + \frac{1}{2}\log\pi m \backsim (h+1)\log 2 - \frac{m^2}{2h} - \frac{m^2}{2(h+m)} +$$

$$+ \frac{m^3}{3h^2} + \frac{m^3}{6(h+m)^2} + \frac{1}{2}\log\pi m$$

En supposant que dans le second membre on ait pris tous les terms qui ne tendent pas vers 0, ainsi en admettant, par exemple, que $\frac{m^4}{h^3} \to 0$, on aura l'expression asymptotique

$$L_{m,h} \sim 2^{h+1}\,e^{-\frac{m^2}{h}+\frac{m^3}{h^2}}\sqrt{\pi m},$$

et en tout cas

$$L_{m,h} = 2^{h+1}\,e^{-\frac{m^2}{h}(1+\varepsilon)}\sqrt{\pi m}, \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

où ε tend vers 0 avec $\frac{m}{n}$. De même

$$L^{(l)}_{m,h} = \frac{l^n}{2^{2m}}\,e^{-\frac{m^2}{n}(1+\varepsilon)}\sqrt{\pi m}. \quad \ldots\ldots (10\text{ bis})$$

Donc, *pour* $l > 1$, $L^{(l)}_{m,h}$ *croît indéfiniment, tant que* $\frac{h}{n} \to 1$. *Au contraire pour* $l \leqslant 1$, $L^{(l)}_{m,n}$ *tend vers* 0.

2) Soit $\frac{h}{n-1}=a$, où $0<a<1$. Posons

$$\frac{h}{2(m+h)}=p,\ \frac{2m+h}{2(m+h)}=q \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Alors (9) prend la forme

$$L_{m,h}\sim\left[\frac{1}{p^p(2q)^q}\right]^{2(m+h)}\sqrt{\frac{\pi m}{pq}};\quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

donc

$$L_{m,h}^{(l)}\sim\left(\frac{l}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2qp^a}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{\pi m}{pq}}\sim 2\left(\frac{l}{4}\right)^n\left(\frac{(1+a)^{1+a}}{a^a}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{\pi m}{pq}}\ . \ (13)$$

Par conséquent, en posant

$$A=\frac{(1+a)^{1+a}}{a^a}\quad \ldots\ldots (14)$$

et en remarquant que, a croissant de 0 à 1, A croît depuis 1 jusqu'à 4, nous trouvons que $L_{m,n}^{(l)}$ *tend vers* 0 *tant que*

$$l<\frac{4}{A};\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

au contraire $L_{m,n}^{(l)}$ *croît indéfiniment, lorsque* $l\geqslant\frac{4}{A}$. En particulier, pour $l=\frac{4}{A}$, on a $L\sim\frac{2}{A}\sqrt{\frac{\pi m}{pq}}$.

Donc, *la grandeur maxima l du segment où l'oscillation peut tendre vers* 0, *augmente de* 1 *à* 4, *lorsque a diminue de* 1 *à* 0.

Il nous reste à examiner le dernier cas:

3) $\frac{h}{n}\to 0$, En supposant d'abord que $h\to\infty$, nous pouvons appliquer la formule (9). Alors

$$\log L_{m,h}\sim\left(h+\frac{1}{2}\right)\log\frac{m}{h}+(2m+2h+1)\log\left(1+\frac{h}{m}\right)-$$

$$-\left(2m+h+\frac{1}{2}\right)\log\left(2+\frac{h}{m}\right)+(h+1)\log 2+\frac{1}{2}\log\pi m=$$

$$=\left(h+\frac{1}{2}\right)\log\frac{m}{h}-\left(2m-\frac{1}{2}\right)\log 2+(2m+2h+1)\left[\frac{h}{m}-\frac{h^2}{2m^2}+\ldots\right]-$$

$$-\left(2m+h+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{2m}-\frac{h^2}{8m^2}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\log\pi m$$

$$\sim\left(h+\frac{1}{2}\right)\log\frac{m}{h}-2m\log 2+\frac{1}{2}\log 2\pi m+h+\frac{3h^2}{4m}.$$

Donc

$$L_{m,h}=\left(\frac{m}{h}\right)^{h+\frac{1}{2}}\frac{e^{h(1+\varepsilon)}}{2^{2m}}\sqrt{2\pi m},\quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

où ε tend vers 0, comme $\frac{h}{n}$. D'où

$$L_{m,h}^{(l)} = \frac{l^n}{2^{n+2m}}\left(\frac{m}{h}\right)^{h+\frac{1}{2}} e^{h(1+\varepsilon)} \sqrt{\pi n}\,, \quad \ldots\ldots (16 \text{ bis})$$

Ainsi $L_{m,h}^{(l)}$ tend vers 0 toutes les fois que $l < 4$. Le contraire a lieu naturellement pour $l \geqslant 4$; en particulier, pour $l = 4$, $L_{m,h}^{(4)}$ est de l'ordre

$$\left(\frac{l}{2}\frac{h}{m}\right)^h \sqrt{m}\,.$$

Si h reste fini, la conclusion énoncée subsiste qualitativement; mais la formule (16) doit être remplacée par

$$L_{m,h} \sim \pi \frac{2^{h+1}}{h\,!\,e^h} \cdot \frac{(m+h)^{2m+2h+1}}{(2m+h)^{2m+h}} =$$

$$= \frac{\pi}{h\,!\,e^h 2^{2m-1}}\left(1 + \frac{h}{2m+h}\right)^{2m+h} (m+h)^{h+1} \sim \frac{\pi m^{h+1}}{h\,!\,2^{2m-1}} \quad \ldots (17)$$

et

$$L_{m,h}^{(l)} \sim 2\pi\left(\frac{l}{4}\right)^n \frac{(2m)^{h+1}}{h\,!} = 2\pi\left(\frac{l}{4}\right)^n \frac{(n-1)^{h+1}}{h\,!} \quad \ldots\ldots (17 \text{ bis})$$

Avant de passer au second problème remarquons que la forme (2) correspondrait au cas, où le coefficient de z^n serait -1 au lieu de $+1$, et un calcul semblable donnerait pour l'oscillation minima $L'_{m,h}$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, la formule

$$L'_{m,h} = 2^n \frac{m!(m-1)!(m+h)!(m+h+1)!}{(n-1)!(2m)!\,h!} = \frac{m+h+1}{m} L_{m,h} \quad \ldots (18)$$

Comme on pouvait le prévoir $L'_{m,h}$ et $L_{m,h}$ ne différeront sensiblement que dans le cas, où h est grand vis-à vis de m.

2. Passons à présent à la solution du second problème.

Démontrons d'abord que la forme nécessaire du polynome $P_n(x)$ est encore la même:

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} (x-z)^h \varphi(z)dz\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

où $\varphi(z) \geqslant 0$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. En effet, il est évident que le point (ξ), où $P'_n(x)$ atteint la valeur 1, doit être $\xi = 1$, car c'est en ce point que $P'_n(x)$ est maximum, puisque $P''_n(x) \geqslant 0$. D'autre part, si $Q(x)$ est un polynome de degré non supérieur à n on doit avoir

$$P'_n(1) \,.\, Q(1) \geqslant P_n(1) \,.\, Q'(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

(en admettant, comme nous le pouvons, que $P_n(-1) = Q(-1) = 0$).

Cela étant, si le polynome cherché $P_n(x)$ n'avait pas toutes ses h premières derivées nulles pour $x = -1$, on pourrait construire le polynome

$$R(x) = \frac{P_n(x) - Q(x)}{P'_n(1) - Q'(1)} P'_n(1)\,,$$

où $Q(x) = (x+1)P'_n(-1) + \ldots + \frac{(x+1)^h}{h!} P_n^{(h)}(-1)$, qui aurait également ses dérivées von négatives avec $R'(1) = P'_n(1)$. Mais à cause de (19), on doit avoir

$$R(1) = \frac{P_n(1) - Q(1)}{P'_n(1) - Q'(1)} P'_n(1) \leqslant P_n(1);$$

donc $P_n(x)$ a la forme (1).

Je dis que $\varphi(z) = u^2(z)$ on bien $\varphi(z) = u^2(z)(z+1)$, suivant que son degré $n - h - 1$ est pair ou impair.

En effet, il s'agit de rendre minimum l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h \varphi(z) dz$$

sous la condition que

$$P'_n(1) = \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} \varphi(z) dz = \frac{1}{h}. \quad \ldots \ldots (20)$$

Soit

$$b = \frac{\int_{-1}^{+1} z(1-z)^{h-1} s(z) dz}{\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} s(z) dz}; \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

on aura $|b| < 1$, en supposant que $s(z)$ est le produit de tous les facteurs de $\varphi(z)$ qui correspondent aux racines α de $\varphi(z)$ telles que $-1 \leqslant \alpha < 1$. En posant alors $\varphi(z) = s(z).q(z)$, on pourra choisir une constante $\lambda < 0$ assez petite pour que l'on ait dans l'intervalle $(-1, +1)$

$$q_1(z) = q(z) + \lambda(z - b) > 0. \quad \ldots \ldots \ldots (22)$$

Si $q(z)$ ne se réduit pas à une constante, le degré de $q_1(z)$ na sera pas supérieur à celui de $q(z)$, et par conséquent le polynome

$$Q(x) = \int_{-1}^{x} (x-z)^h s(z) q_1(z) dz$$

sera de degré non supérieur à n, en satisfaisant, à cause de (21) à la condition

$$Q'(1) = h \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} s(z) q_1(z) dz = P'_n(1).$$

Or,

$$Q(1) = P_n(1) + \lambda \int_{-1}^{+1} (1-z)^h (z-b) s(z) dz = P_n(1) -$$

$$- \lambda \int_{-1}^{+1} (z-1)(z-b)(1-z)^{h-1} s(z) dz = P_n(1) - \lambda \left[\int_{-1}^{+1} z^2 (1-z)^{h-1} s(z) dz - \right.$$

$$\left. - b \int_{-1}^{+1} z(1-z)^{h-1} s(z) dz \right] < P_n(1)$$

en vertu de la relation

$$\int_{-1}^{+1} z^2 (1-z)^{h-1} s(z) dz . \int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} s(z)\, dz > \left[\int_{-1}^{+1} z(1-z)^{h-1} s(z) dz \right]^2$$

Donc $q(z)$ est une constante, est notre affirmation est démontrée.

Pour fixer les idées, plaçons nous dans l'hypothèse où $n - h - 1 = 2m$ est pair.

Nous devons donc minimer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^h u^2(z) dz ,$$

sous la condition que

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} u^2(z) dz = \frac{1}{h}, \quad \ldots\ldots \quad (20 \text{ bis})$$

où $u(s)$ est un polynome de degré m

$$u(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m .$$

On doit donc avoir pour un choix convenable de la constante λ

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} (z-\lambda) u(z) . z^k dz = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots m)$$

Donc, *il faut que*

$$(z - \lambda) u(z) = P_{m+1,\, h-1}(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

soit le polynome de Jacobi de degré $m+1$ (à un facteur constant près) qui satisfait précisément aux conditions que

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} P_{m+1, h-1}(z) . z^k dz = 0 \quad (k = 0, 1, .., m) \quad \ldots . \quad (24)$$

Alors

$$\int_{-1}^{+1}(1-z)^h u^2(z)dz=\int_{-1}^{+1}(1-z)(1-z)^{h-1}u^2(z)dz=$$

$$=(1-\lambda)\int_{-1}^{+1}(1-z)^{h-1}u^2(z)dz=\frac{1-\lambda}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

Donc, *le minimum cherché L_n sera réalisé, si λ sera la plus grande racine $\lambda_{m+1}^{(h-1)}$ du polynome de Jacobi $P_{m+1,h-1}(z)$.*

Par conséquent l'oscillation minima cherchée est donnée par la formule

$$L_n^{(h)}=\frac{1-\lambda_{m+1}^{(h)}}{h}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

En particulier, si $h=1$, le polynome $P_{m+1,h-1}(z)$ se réduit au polynome de Legendre de degré $m+1$, et on a dans ce cas

$$L_n=1-\lambda_{m+1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

où λ_{m+1} est la plus grande racine du polynome de Legendre.

Examinons ce dernier cas. L'équation de Legendre ne se résout d'une façon élémentaire que pour $m \leqslant 4$ (c'est à dire pour $n \leqslant 10$). Ainsi on a

$$\left.\begin{aligned} & L_2=1,\; L_4=1-\frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}423,\; L_6=1-\sqrt{\frac{3}{5}} \doteq 0225, \\ & L_8=1-\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \doteq 0{,}138,\; L_{10}=1-\sqrt{\frac{5}{9}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{7}}} \doteq 0{,}094. \end{aligned}\right\} (28)$$

Pour trouver la valeur asymptotique de L_n, posons $\lambda=1-y$; l'équation de Legendre prend alors la forme hypergéométrique

$$F\left(m+2,-(m+1),\,1,\frac{y}{2}\right)=1-(m+1)(m+2)\frac{y}{2}+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{(m+k+1)!}{(k!)^2(m-k+1)!}\left(-\frac{y}{2}\right)^k+\ldots=0.$$

La plus petite racine de cette équation sera donc la valeur cherchée de L_n, où $n=2m+2$.

Par conséquent, pour n très grand,

$$L_n=\frac{\alpha_m}{(m+1)(m+2)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

où $\lim\limits_{m=\infty} \alpha_m=\alpha$ est la plus petite racine de l'équation de Bessel

$$J_0(\sqrt{2\alpha})=1-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\ldots\frac{1}{(k!)^2}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^k+\ldots=0. \quad . \; . \; (30)$$

On trouve

$$\alpha \doteq 2{,}89 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

à 0,01 près.

Revenons au cas général. Le même changement de variables conduit à mettre le polynome de Jacobi sous le forme hypergéométrique

$$F\left(m+h+1, -(m+1),\ h, \frac{y}{2}\right) = 1 - \frac{(m+1)(m+h+1)}{h.1}\frac{y}{2} + \cdots$$

$$+ \cdots \frac{(m+1)\ldots(m+2-k)(m+h+1)\ldots(m+h+k)}{h(h+1)\ldots(h+k-1).k!}\left(-\frac{y}{2}\right)^k + \ldots = 0. \quad (32)$$

Si y est la plus petite racine de cette équation, on a

$$L_n^{(h)} = \frac{y}{h}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

En particulier, pour $m = 0$, c'est à dire $n = h + 1$, on a la valeur évidente

$$L_n^{(n-1)} = \frac{2}{h+1} = \frac{2}{n}.$$

Pour $m = 1$ $(n = h + 3)$, on a

$$L_n^{(n-3)} = 2\,\frac{(n-1)(n-2) - \sqrt{2(n-1)(n-2)}}{n(n-1)(n-3)} = 2\left[\frac{n-2}{n(n-3)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n(n-3)}\sqrt{2\frac{n-2}{n-1}}\right] \sim \frac{2}{n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

On vérifie aisément d'une façon générale que, si m étant fixe, h croît indéfiniment, l'équation hypergéométrique a pour limite

$$\left(1 - \frac{y}{2}\right)^{m+1} = 0\,;$$

donc dans ce cas également

$$L_n^{(h)} \sim \frac{2}{n}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Supposons au contraire h fini et faisons croître m indéfiniment. Alors en posant

$$\frac{1}{2}(m+1)(m+h+1)\ y = u \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

nous voyons que u tend pour $m \to \infty$, vers la plus petite racine de l'équation de Bessel

$$J_{h-1}(2\sqrt{u}) = 0,$$

qui pour $h = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
est égale à $u_h \mp 1{,}444$	3,671	6,591	10,176	14,38	19,28	24,9	30,8	37,4	44,9
pour $h = 11$	12	13	14	15	16	17	18	19	
est égale à $u_h \mp 52{,}9$	60,8	69,7	79,2	89,3	100	111	123	139	
Donc pour $h = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
limite de $m^2 L_n^{(h)} \mp 2{,}89$	3,67	4,39	5,09	5,75	6,43	7,1	7,7	8,31	8,98
pour $h = 11$	13	14	15	15	16	17	18	19	
limite de $m^2 L_n^{(h)} \mp 9{,}56$	10,13	10,72	11,31	11,9	12,5	13,06	13,67	14,21	

On aperçoit que lim $mnL_n^{(h)} = \infty$, si m et h croissent tous les deux infiniment; c'est ce qui résulte du fait que si on pose $u = th$, l'équation $J_{h-1}(2\sqrt{th}) = 0$ ténd vers $e^{-t} = 0$, lorsque $h \to \infty$. Ainsi le produit $(m+1)nL_n^{(h)}$ qui pour $m = 0$ est égal à 2 croît infiniment avec m; de même, si h croît de 0 à l'infini ce même produit croit indéfiniment depuis la valeur *) 4.

Il est probable que dans tous les cas, pour n très grand, on a

$$2 \leqslant \frac{n^2 L_n^{(h)}}{h+1} \leqslant 8. \qquad (37)$$

Donc, si h *est de l'ordre* n, $L_n^{(h)}$ *sera de l'ordre de* $\frac{1}{n}$.

Je me bornerai à prouver cette dernière affirmation. Posons $\frac{h-1}{m+1} = \alpha$, Considérons l'intégrale

$$M = \int_{-1}^{+1} (1-z)^{\alpha} \varphi_1(z) dz, \qquad (38)$$

où $\varphi_1(z)$ est un polynome de degré $2m+1$ non négatif et croissant.

En vertu d'un résultat connu **), on a dans tout l'intervalle

$$\varphi_1(z) \leqslant \frac{1}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{(m+\alpha+1)!\,(m+\alpha+2)!}{\alpha!\,(\alpha+1)!\,m!\,(m+1)!} M \quad . \ . \ . \quad (39)$$

Or, nous pouvons mettre le polynome $P_n(x)$ sous la forme

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} (x-z)^{h-1} \varphi_1(z)\, dz, \qquad (1^{\text{bis}})$$

où $\varphi(z)$ est non négatif et croissant. Ainsi $L_n^{(h)}$ est le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-1} \varphi_1(z)\, dz$$

sous la condition que

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z)\, dz = \frac{1}{h-1} = M.$$

Mais de (38) nous tirons, en remplaçant α par $h-2$

$$\varphi_1(z) \leqslant \frac{1}{2^{h-1}} \cdot \left[\frac{(m+h)!}{(m+1)!\,(h-1)!}\right]^2 \frac{(m+1)(h-1)}{(m+h)} M$$

$$\sim \frac{(m+h)^{2(m+h)} M}{(m+1)^{2(m+1)}(h-1)^{2(h-1)} \cdot 2^h \pi};$$

---

*) Voir la page 50 de mon livre „Sur les propriétés extremales etc““.

**) G. Pólya und Szegö „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis“ t. II. p. 97.

Donc

$$\varphi_1(z) \leqslant \left[\frac{(1+a)^{1+a}}{(a\sqrt{2})^a}\right]^{2m+2} \frac{M}{2\pi} = \varrho^{2m+2} \frac{M}{2\pi}.$$

Il en résulte que

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z)\, dz < \frac{\varrho^{2m+2} M \delta^{h-1}}{2\pi(h-1)}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

d'où

$$\int_{-1}^{1-\delta} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z)\, dz > M\left[1 - \frac{\varrho^{2m+2}\delta^{h-1}}{2\pi(h-1)}\right] = M(1-\varepsilon)$$

où ε tend vers 0 avec $\frac{1}{h}$, si

$$\varrho^2 \delta^a \leqslant 1,$$

c'est à dire pour

$$\delta \leqslant (1+a) \cdot \frac{2a^2}{(1+a)^2}^{-\frac{2}{a}}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Après avoir ainsi fixé δ, remarquons que

$$\int_{-1}^{1-\delta} (1-z)^{h-1} \varphi_1(z) > \sigma \int_{-1}^{1-\delta} (1-z)^{h-2} \varphi_1(z) dz > M\delta(1-\varepsilon).$$

Donc

$$L_n > \frac{\delta}{h-1}(1-\varepsilon) > \frac{2}{e^2} \frac{h-1}{(h+m)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

pour h et m très grand. Comme d'autre part, on a evidemment $L_n < \frac{2}{h}$, L_n est bien de l'ordre de $\frac{1}{h}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{n}\right)$, lorsque h et n sont du même ordre. D'ailleurs de l'inégalité (42) il résulte qu'en général

$$\frac{n^3 L_n}{h-1} > \frac{2}{e^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

si h et m croissent infiniment d'une façon quelconque. L'inégalité (43) que nous venons de démontrer est un peu moins forte que la première partie de l'inégalité (37), dont la démonstration exigerait une étude plus complète de la valeur de la plus petite racine de l'équation hypergéométrique (32).