О некоторых неравенствах, получаемых из интерполяционной формулы Лагранжа.

В. Ф. Бржечка.

1.

Тригонометрический полином n-го порядка

$$f(\theta) = a_o + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta + \ldots + a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами можно представить в виде

$$f(\theta) = e^{-n\theta i} F(e^{\theta i}), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

где

$$F(x) = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots + C_{2n} x^{2n}$$

есть полином степени $2n$.

Имеем

$$\cos k\theta = \frac{x^k + x^{-k}}{2}, \ \sin k\theta = \frac{x^k - x^{-k}}{2i}, \ x = e^{\theta i}, \ k = 0, 1, 2, \ldots n;$$

подставляя выражения для $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$ в (1) и умножая на $e^{n\theta i} = x^n$, получим

$$F(x) = a_o x^n + \sum_1^n \left\{ \frac{1}{2} a_k (x^{n+k} + x^{n-k}) + \frac{1}{2i} b_k (x^{n+k} - x^{n-k}) \right\},$$

что и т. д.

Очевидно, что

$$C_{2n} = \frac{a_n - b_n i}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Интерполяционная формула Лагранжа имеет вид:

$$g(x) = \sum_1^{2n} \frac{g(x_k)}{\varphi'(x_k)} \cdot \frac{\varphi(x_k)}{x - x_k},$$

при чем степень полинома $g(x)$ есть $2n - 1$, а $\varphi(x)$ степени $2n$ и все корни x_k полинома $\varphi(x)$ различные.

Напишем интерполяционную формулу Лагранжа, при чем за $g(x)$ примем $F(x) - C_{2n}(x^{2n} + 1)$, а за $\varphi(x)$ возьмем $x^{2n} + 1$ и корни $\varphi(x)$ обозначим через $x_1, x_2, \ldots x_k \ldots x_{2n}$; имеем

$$F(x) - C_{2n}(a^{2n} + 1) = \sum_1^{2n} \frac{F(x_k) - C_{2n}(x_k^{2n} + 1)}{2n x_k^{2n-1}} \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x - x_k};$$

так как $x_k^{2n}+1=0$, то из последнего находим

$$F(x)=\frac{1}{n}\sum_1^{2n}\frac{F(x_k)}{2x_k^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n}+1}{x-x_k}+C_{2n}(x^{2n}+1);$$

умножая обе части на x^{-n}, напишем последнее равенство следующим образом:

$$F(x).x^{-n}=\frac{1}{n}\sum_1^{2n}\frac{F(x_k).x_k^{-n}}{x_k^n}\cdot\frac{x^n+x^{-n}}{2}\cdot\frac{x_k}{x-x_k}+C_{2n}(x^n+x^{-n}).$$

Положим $x=e^{\theta i}$; очевидно, что

$$\theta_1=\frac{\pi}{2n},\ \theta_2=\frac{3\pi}{2n},\ .\ .\ .\ \theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi,\ .\ .\ .\ \theta_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\pi$$

$$\cos n\theta=\frac{x^n+x^{-n}}{2},\ x_k^n=i(-1)^{k-1},\ \operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_k}{2}-i=\frac{2ix_k}{x-x_k}$$

и так как $C_{2n}=\frac{a_n-b_ni}{2}$, то после подстановки $x=e^{\theta i}$ получим

$$f(\theta)=(a_n-b_ni)\cos n\theta+\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_1^{2n}f(\theta_k)(-1)^k(\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_k}{2}-i);$$

из последнего следует

$$f(\theta)=a_n\cos n\theta+\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_1^{2n}(-1)^kf(\theta_k)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_k}{2}\quad .\ .\ .\ .\ \text{(IV)}$$

Напишем формулу (IV) для $f(\theta+\psi)$:

$$f(\theta+\psi)=a_n\cos n\theta+\frac{\cos n\theta}{2n}\sum_1^{2n}(-1)^kf(\theta_k+\psi)\operatorname{cotg}\frac{\theta-\theta_k}{2};$$

дифференцируя последнее по θ и полагая потом $\theta=0$, получим

$$f'(\psi)=\frac{1}{4n}\sum_1^{2n}\frac{(-1)^{k+1}f(\theta_k+\psi)}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

Если положим, что $|f(\theta_k+\psi)|\leqslant M$ для $k=1,2,\ .\ .\ .\ 2n$; то получим

$$|f'(\psi)|\leqslant\frac{M}{4n}\sum_1^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

Вычислим теперь

$$\sum_1^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}.$$

Если $x_k=e^{\theta_k i}$, то $\sin\frac{\theta_k}{2}=\frac{x_k^{1/2}-x_k^{-1/2}}{2i}$ и $\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}=\frac{-4x_k}{(1-x_k)^2}$;

далее очевидно, что

$$\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=\frac{1}{2n}\sum_{1}^{2n}\frac{x}{x-x_k};$$

дифференцируя последнее по x и полагая потом $x=1$, найдем

$$n=\frac{1}{n}\sum_{1}^{2n}\frac{-x_k}{(1-x_k)^2},$$

а из последнего имеем

$$4n^2=\sum_{1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}},$$

так что (6) можем написать в виде:

$$|f'(\psi)|\leqslant Mn\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Итак, мы пришли к теореме С. Н. Бернштейна:

Если абсолютное значение тригонометрического полинома порядка n не превышает M, то абсолютное значение его производной не превышает Mn*). Знак равенства в (7) имеет место только в том случае, если $f(\psi)$ будет вида

$$M\sin n(\psi-\theta_k).$$

2.

a) Пусть имеем полином $P(x)$ степени $n-1$ и предположим, что $n-1$ число нечетное; возьмем полином Чебышева

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\arccos x.$$

Корни полинома $T_n(x)$ будут

$$x_1=\cos\frac{\pi}{2n},\ x_2=\cos\frac{3\pi}{2n},\ \ldots\ x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ \ldots\ x_n=\cos\frac{2n-1}{2n}\pi;$$

далее очевидно, что

$$T_n(0)=\frac{1}{2^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Найдем теперь такие величины

$$T_n'(0),\ T_n'(x_k),\ T_n''(0)\ \text{и}\ \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}$$

$$T_n'(x)=\frac{n}{2^{n-1}}\sin n\arccos x\,.\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

---

*) a) См. Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle professées a la Sorbonne par Serge Bernstein, стр. 39.

b) Другие доказательства отличные от нашего см.: M. Riesz, Jahresb. d. d. M. V. 1914. XXIII стр. 354; F. Riesz, Comptes Rendus за 1914 год стр. 1657; Fekete, Crelle 146, стр. 81.

так что

$$T_n'(0)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$T_n'(x_k)=\frac{n}{2^{n-1}}\sin n\cdot\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi},$$

так что

$$T_n'(x_k)=\frac{n}{2^{n-1}}\cdot(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

точно также легко покажем, что

$$T_n''(0)=\frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

далее ищем

$$\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}=-\left[\frac{T_n'(x)}{T_n(x)}\right]_{x=0}'=-\left[\frac{T_n''(x)\,T_n(x)-T_n'^2(x)}{T_n^2(x)}\right]_{x=0}=n^2,$$

так что

$$\sum_1^n\frac{1}{x_k^2}=n^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Напишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$P(x)=\sum_1^n\frac{P(x_k)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{T_n(x)}{x-x_k};$$

очевидно, что

$$P(x+t)=\sum_1^n\frac{P(x_k+t)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

Дифференцируя последнее по x и полагая потом $x=0$, получим

$$P'(t)=\sum_1^n\frac{P(x_k+t)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{-x_kT_n'(0)-T_n(0)}{x_k^2};$$

последнее на основании (1), (2) и (3) можно написать так:

$$P'(t)=\sum_1^n\frac{P(x_k+t)}{n}\cdot(-1)^k\cdot\frac{\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi}{\cos^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Если теперь предположим, что $|P(x_k+t)|\leqslant M$ для t в интервале $-1\leqslant t\leqslant 1$, то (6) нам даст

$$|P'(t)|<\frac{M}{n}\sum_1^n\frac{1}{\cos^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi},$$

а последнее на основании (5) нам даст

$$|P'(t)|<Mn \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Пришли к результату: если полином $P(t)$ нечетной степени $n-1$ в интервале $-1-\cos\frac{\pi}{2n}\leqslant t\leqslant 1+\cos\frac{\pi}{2n}$ удовлетворяет неравенству $|P(t)|\leqslant M$, то в интервале $-1\leqslant t\leqslant 1$ будет $|P'(t)|<Mn$.

b) Пусть имеем полином $P(x)$ степени n и пусть n есть число четное, а коэффициент при x^n пусть будет a_n. Напишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$P(x)-a_n T_n(x)=\sum_1^n \frac{P(x_k)-a_n T_n(x_k)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{T_n(x)}{x-x_k};$$

из последней находим

$$P(x)=\sum_1^n \frac{P(x_k)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{T_k(x)}{x-x_k}+a_n T_n(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Напишем формулу (8) для $P(x+t)$; имеем

$$P(x+t)=\sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{T_n(x)}{x-x_k}+a_n T_n(x);$$

дифференцируя последнее по x и полагая потом $x=0$, найдем

$$P'(t)=\sum_1^n \frac{P(x_k+t)}{T_n'(x_k)}\cdot\frac{-x_k T_n'(0)-T_n(0)}{x_k^2}+a_n\,.\,T_n'(0).$$

Принимая во внимание (1), (2), (3) и (5) и полагая, что

$$|P(x_k+t)|\leqslant M$$

в интервале

$$-1\leqslant t\leqslant 1,$$

получим

$$|P'(t)|<Mn \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Пришли к результату: если полином четной степени n в интервале

$$-1-\cos\frac{\pi}{2n}\leqslant t\leqslant 1+\cos\frac{\pi}{2n}$$

удовлетворяет неравенству

$$|P(t)|\leqslant M,$$

то в интервале $-1\leqslant t\leqslant 1$ будет

$$|P'(t)|<Mn$$

Очевидно, что полученные нами результаты не противоречат теореме А. А. Маркова *).

---

*) А. Марков. Об одном вопросе Д. И. Менделеева, 1889 г.