Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque.

par

A. Suschkewitsch.

1. Nous considérons des groupes finis, dont l'operation est uniforme, associative, mais pas invertible uniformement. Ces groupes représentent une généralisation des groupes ordinaires que nous appelerons „classiques" pour les distinguer de nos groupes généralisés. J'ai prouvé *), qu'un tel groupe généralisé a toujours un sous-groupe spécial **K****) que j'ai nommé „le noyau"; ce groupe **K** est composé de $r \cdot s$ groupes classique $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots r;\ \lambda = 1, 2, \ldots s)$, simplement isomorphes deux à deux et sans éléments communs (chaque paire; leurs unités même sont differentes). Cette composition s'éclaircit du tableau suivant:

$$
\begin{array}{c|c}
\mathbf{K} = & \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_r \\
\hline
\| & \| \quad\ \| \quad \ldots \quad \| \\
\mathbf{B}_1 = & \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} + \ldots + \mathbf{C}_{r1} \\
+ & + \quad\ + \qquad\quad + \\
\mathbf{B}_2 = & \mathbf{C}_{12} + \mathbf{C}_{22} \ldots\ldots\ldots \mathbf{C}_{r2} \\
+ & + \quad\ + \qquad\quad + \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & + \quad\ + \qquad\quad + \\
\mathbf{B}_s = & \mathbf{C}_{1s} \quad \mathbf{C}_{2s} \ldots\ldots\ldots \mathbf{C}_{rs}
\end{array}
$$

Les $\mathbf{A}_\varkappa$ sont des groupes avec la loi gauche de l'inversion uniforme; de même signifient les $\mathbf{B}_\lambda$ des groupes avec la loi droite de l'inversion uniforme.

De plus j'ai examiné des propriétés de ce type des groupes, dit „groupes-noyaux" et j'ai trouvé le moyen de les représenter tous. À savoir un tel groupe-noyau est complètement défini, si l'on connait:

1) le groupe classique $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda} = \mathbf{C}$ (comme groupe abstrait);

2) les nombres r et s;

3) tous les produits $E_{11}E_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa = 2, \ldots r;\ \lambda = 2, \ldots s)$, comme des éléments du groupe $\mathbf{C}$; les $E_{\varkappa\lambda}$ signifient les unités des groupes $\mathbf{C}_\varkappa$.

Ces 3 conditions peuvent être choisies arbitrairement.

---

*) Voir ma thèse „Теория действия, как общая теория групп", Воронеж, 1922, Ch. VI.

**) Жирный шрифт взят вместо готического рукописи.

Des groupes avec un seul côté de la loi de l'inversion uniforme ainsi que des groupes classiques forment des cas spéciaux des groupes-noyaux, si un des deux nombres r, s ou tous les deux sont égals à l'unité.

Rappelons encore quelques formules concernantes des groupes-noyaux et faciles à démontrer. On a:

$$\mathbf{A}_\varkappa \mathbf{B}_\lambda = \mathbf{K};\ \mathbf{B}_\lambda \mathbf{A}_\varkappa = \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\mathbf{C}_{\varkappa\lambda} \mathbf{C}_{\mu\nu} = \mathbf{C}_{\mu\lambda}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

ou plus précis: $A_{\varkappa\lambda}$ étant un élément de $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$, on a:

$$A_{\varkappa\lambda} \mathbf{C}_{\mu\nu} = \mathbf{C}_{\mu\lambda};\ \mathbf{C}_{\mu\nu} A_{\varkappa\lambda} = \mathbf{C}_{\varkappa\nu} \quad \ldots \ldots \ldots (2^a)$$

$\mathbf{G}$ étant un groupe quelconque et $\mathbf{K}$ son noyau, on peut toujours trouver dans $\mathbf{G}$ des éléments X et Y à propiriété suivante:

$$X\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda;\ \mathbf{G}Y = \mathbf{A}_\varkappa; \quad \ldots \ldots (3)$$

(p. e. on peut prendre pour X chaque élément de $\mathbf{B}_\lambda$ et pour Y chaque élément de $\mathbf{A}_\varkappa$); on aura aussi:

$$X\mathbf{G}Y = \mathbf{C}_{\varkappa\lambda};\ \mathbf{G}X\mathbf{G} = \mathbf{G}Y\mathbf{G} = \mathbf{K} \quad \ldots \ldots (4)$$

Soit P un élément quelconque; ses puissances ne peuvent pas être toutes différentes; le cas suivant doit donc se présenter:

$$P^{k+m} = P^k.$$

Les plus petits possible des nombres k et m doivent s'appeler k — *le genre*, m — *l'ordre* d'élément P. Il est clair que le genre d'élément appartenant à un groupe classique (ou plus généralement, à un groupe-noyau) est égal à l'unité (ces éléments doivent aussi être appelés classique).

Les éléments du groupe $\mathbf{G}$, qui n'appartiennent pas à $\mathbf{K}$, nous partageons en deux classes: la 1-re classe est formée des éléments, dont une puissance quelconque (et par consequent toutes les puissances suivantes) appartient à $\mathbf{K}$; la 2-de classe est formée des éléments, dont aucune puissance n'appartient pas à $\mathbf{K}$. Il est clair que, P étant du genre k et de la 1-re classe, P^k est la plus petite puissance de P qui apppartient à $\mathbf{K}$.

De même distinguons nous entre les sous-groupes de $\mathbf{G}$ ceux qui ont des éléments communs avec $\mathbf{K}$ (et que nous appelons de la 1-re classe) et ceux qui n'ont pas de tels élements (nous les appelons de la 2-de classe); les sous-groupes de ce dernier type sont formés exclusivement par des éléments de la 2-de classe. Il est facile de voir, que chaque groupe $\mathbf{G}$ qui a un élément P de la 2 de classe a aussi au moins un sous-groupe de la 2-de classe, p. e. le groupe $\{P\}$, formé des puissances de P. Un groupe $\mathbf{G}$ qui n'a pas de sous-groupes de la 2-de classe soit nommé „du premier rang". Si un groupe $\mathbf{G}$ a des sous-groupe de la 2-de classe et du premier rang, nous appelons alors $\mathbf{G}$ „du second rang". En général un groupe $\mathbf{G}$ soit du rang n, lorsqu'il a au moins un sous-groupe du rang $n-1$, mais pas plus haut.

2. Prouvons encore quelques théorèmes généraux.

Théorème 1: Tout sous-groupe d'un groupe-noyau est aussi un groupe-noyau (ou un des ses cas spéciaux).

Démonstration: Soit $\mathbf{K} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \mathbf{A}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{s} \mathbf{B}_\lambda = \sum_{\varkappa,\lambda} \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$ le groupe noyau, $\mathbf{K}'$ — un de ses sous-groupes. Prenons un des groupes $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$; $\mathbf{K}'$ et $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$ peuvent être sans éléments communs et peuvent aussi en avoir; dans ce dernier cas tous éléments communs de $\mathbf{K}'$ et $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$ forment un groupe $\mathsf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}) \simeq \mathbf{C}'_{\varkappa\lambda}$ *), qui est classique, comme un sous-groupe du groupe classique $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$. Supposons de plus que $\mathbf{K}'$ contient un élément $A_{\mu\nu}$ du groupe $\mathbf{C}_{\mu\nu}$; $\mathbf{K}'$ contient alors le système $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda} A_{\mu\nu}$, qui a autant d'éléments divers que le groupe $\mathbf{C}'_{\varkappa\lambda}$; de plus on a: $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda} A_{\mu\nu} \simeq \mathbf{C}'_{\mu\lambda} < \mathbf{C}_{\mu\lambda}$ **); (d'après (2^a)); nous ne pouvons pas encore affirmer que $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ soit un groupe; en tout cas le système $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ produit un groupe $\{\mathbf{C}'_{\mu\lambda}\} \simeq \mathbf{C}''_{\mu\lambda}$, qui est contenu en $\mathbf{C}_{\mu\lambda}$ et en $\mathbf{K}'$. Cela établi, nous trouverons de même façon que le système $\mathbf{C}''_{\mu\lambda} E_{\varkappa\lambda} = \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$, ayant plus d'éléments divers que $\mathbf{C}'_{\varkappa\lambda}$ est aussi contenu en $\mathbf{K}'$ et en $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$; c'est une contradiction, car $\mathbf{C}'_{\varkappa\lambda} = \mathsf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\varkappa\lambda})$. Par conséquant, il est: $\{\mathbf{C}'_{\mu\lambda}\} = \mathbf{C}'_{\mu\lambda}$, c'est à dire $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ est un groupe. Il est, de plus: $\mathbf{C}'_{\mu\lambda} = \mathsf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\mu\lambda})$. Nous trouverons de même, $E_{\mu\lambda}$ étant l'unité de $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$: $\mathbf{C}'_{\varkappa\lambda} E_{\mu\lambda} = \mathbf{C}'_{\mu\lambda}$. Il s'ensuit de cela que $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ est simplement isomorphe avec $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$, car l'équation $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda} E_{\mu\lambda} = \mathbf{C}_{\mu\lambda}$ donne un isomophisme simple entre $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$ et $\mathbf{C}_{\mu\lambda}$ ***). On peut trouver de même façon: $A_{\mu\nu} \mathbf{C}_{\varkappa\lambda} = \mathsf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\varkappa\nu}) \simeq \mathbf{C}'_{\varkappa\nu}$; $A_{\mu\nu} \mathbf{C}'_{\mu\lambda} = \mathbf{C}'_{\varkappa\nu} A_{\mu\nu} = \mathsf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\mu\nu}) = \mathbf{C}'_{\mu\nu}$; tous ces groupes $\mathbf{C}'_{\varkappa\lambda}, \mathbf{C}'_{\mu\lambda}, \mathbf{C}'_{\varkappa\nu}, \mathbf{C}'_{\mu\nu}$ sont simplement isomorphes entre eux.

$\mathbf{K}'$ est donc comprosé des groupes $\mathbf{C}'_{\varkappa\lambda}$. Supposons p. e. (cela revient donc à nos dénotations) que $\mathbf{K}'$ contient des groupes $\mathbf{C}'_{11}, \mathbf{C}'_{12}, \ldots \mathbf{C}'_{1s'}$, $(s' \leqslant s)$, mais pas de groupes $\mathbf{C}_{1\nu}$ pour $v > s'$, — ainsi que $\mathbf{C}'_{21}, \ldots \mathbf{C}'_{r'1}$, mais pas $\mathbf{C}'_{\mu 1}$ pour $\mu > r'$; il s'ensuit alors que $\mathbf{K}'$ contient tous les groupes $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$ pour $\varkappa = 1, 2, \ldots r'$; $\lambda = 1, 2, \ldots s'$, et aucun autre. Soit: $\mathbf{C}'_{\varkappa 1} + \ldots + \mathbf{C}'_{\varkappa s'} \simeq \mathbf{A}'_\varkappa$; $\mathbf{C}'_{1\lambda} + \ldots + \mathbf{C}'_{r'\lambda} \simeq \mathbf{B}'_\lambda$; il est facile de voir que $\mathbf{A}'_\varkappa$ est un groupe avec la loi gauche de l'inversion uniforme, tandis que $\mathbf{B}'_\lambda$ est un groupe avec le côté droit de ce loi.

Nous avons donc:

$$\mathbf{K}' = \sum_{\varkappa=1}^{r'} \mathbf{A}'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{s'} \mathbf{B}'_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{r'} \sum_{\lambda=1}^{s'} \mathbf{C}'_{\varkappa\lambda},$$ ce que démontre notre théorème.

Théorème 2: Si $\mathbf{G}$ est un groupe à noyau $\mathbf{K}$, $\mathbf{H}$ — un sous-groupe du $\mathbf{G}$ de la 1-re classe, et $\mathsf{D}(\mathbf{K}, \mathbf{H}) = \mathbf{K}'$, — $\mathbf{K}'$ est le noyau du groupe $\mathbf{H}$.

Démonstration: D'après le théorème précédent $\mathbf{K}'$ est un groupe du type noyau; nous dénotons la structure du $\mathbf{K}'$ comme dans le théorème précédent.

Soit $K < \mathbf{C}'_{\varkappa\lambda} < \mathbf{K}'$; nous avons alors ***): $\mathbf{H}K < \mathbf{G}K = \mathbf{A}'_\varkappa, \mathbf{H}K < \mathbf{H}$; donc: $\mathbf{H}K < \mathbf{A}'_\varkappa = \mathsf{D}(\mathbf{H}, \mathbf{A}_\varkappa)$; d'autre part: $\mathbf{A}'_\varkappa < \mathbf{K}' < H$; $\mathbf{A}'_\varkappa K = \mathbf{A}'_\varkappa$; donc: $\mathbf{H}K = \mathbf{A}'_\varkappa$; et de même: $K\mathbf{H} = \mathbf{B}'_\lambda$.

---

*) D est le signe du plus grand commun diviseur; le signe $\simeq$ signifie que nous désignons l'expression composée $\mathsf{D}(\mathbf{K}', \mathbf{C}_{\varkappa\lambda})$ plus simplement par $\mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$.

**) La dénotation $\mathbf{C}'_{\mu\lambda} < \mathbf{C}_{\mu\lambda}$ signifie que chaque élément de $\mathbf{C}'_{\mu\lambda}$ est contenu en $\mathbf{C}_{\mu\lambda}$.

***) Voir ma thèse déjà citée, ch. VI.

Nous obtenons un tel résultat pour chaque élément K de $\mathbf{K}'$.

Soit maintenant H un élément de $\mathbf{H}$ (mais pas nécessairement de $\mathbf{K}'$); le groupe $\mathbf{H}H$ contient toujours des éléments de $\mathbf{K}'$, car, K étant un élément de $\mathbf{K}'$, il est aussi $KH < \mathbf{K}'$. Donc, si nous désignons par $\mathbf{K}''$ le noyau du groupe $\mathbf{H}, \mathbf{K}'$ et $\mathbf{K}''$ ont nécessairement des éléments communs; soit K un tel élément; soit p. e. $K < \mathbf{C}'_{\varkappa\lambda}$; il est alors: $\mathbf{H}K = \mathbf{A}'_{\varkappa} < \mathbf{K}'', K\mathbf{H} = \mathbf{B}'_{\lambda} < \mathbf{K}''$; d'après (4) on a: $\mathbf{H}K\mathbf{H} = \mathbf{K}''$; d'autre part:

$$\mathbf{H}K\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{B}'_{\lambda} = \mathbf{H}.\sum_{\varkappa=1}^{r'} \mathbf{C}'_{\varkappa\lambda} = \sum \mathbf{A}_{\varkappa} = \mathbf{K}';$$

donc: $\mathbf{K}'' = \mathbf{K}'$, c. q. f. d.

Considérons maintenant des groupes $\mathbf{G}P$ et $Q\mathbf{G}$, P et Q étant des éléments quelconques du groupe $\mathbf{G}$. D'après le théorème 2 le noyau du groupe $\mathbf{G}_1 \simeq \mathbf{G}P$ est: $\mathbf{K}_1 \simeq \mathbf{D}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$, car $\mathbf{G}$, est manifestement de la 1-re classe ($\mathbf{K}$ étant comme ci-dessus le noyau de $\mathbf{G}$). Admettons que $\mathbf{K}_1$ contient un groupe $\mathbf{A}'_{\varkappa} < \mathbf{A}_{\varkappa}$; il est alors: $E_{\varkappa\lambda} < \mathbf{K}_1$; $\mathbf{G}_1 E_{\varkappa\lambda} = \mathbf{A}'_{\varkappa}$; d'autre part: $\mathbf{G}_1 E_{\varkappa\lambda} = \mathbf{G}(PE_{\varkappa\lambda})$; donc $\mathbf{A}'_{\varkappa} = \mathbf{A}_{\varkappa}$ (car l'ordre de $\mathbf{A}_{\varkappa}$ est la plus petite des ordres des groupes $\mathbf{G}X$, où $X < \mathbf{G}$). Le groupe-noyau $\mathbf{K}_1$ a donc la structure suivante:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}_{\alpha_1} + \mathbf{A}_{\alpha_2} + \ldots + \mathbf{A}_{\alpha r'} = \mathbf{B}'_1 + \mathbf{B}'_2 + \ldots + \mathbf{B}'_s;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r'}$ étant r' $(\leqq r)$ quelconques des indices $1, 2, \ldots r$;

$$\mathbf{B}'_{\lambda} = \mathbf{C}_{\alpha_1\lambda} + \mathbf{C}_{\alpha_2\lambda} + \ldots + \mathbf{C}_{\alpha r'\lambda};$$

autrement dit:

$$\mathbf{K}_1 = \sum_{\varkappa,\lambda} \mathbf{C}_{\varkappa,\lambda} \text{ pour } \varkappa = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r'};\ \lambda = 1, 2, \ldots s.$$

En prenant le groupe $Q\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}_2$, nous obtiendrons des résultats analogues. Donc:

Théorème 3: Le noyau $\mathbf{K}_1$ du groupe $\mathbf{G}P$ $(P < \mathbf{G})$ est composé d'un nombre quelconque r' $(\leqq r)$ des groupes $\mathbf{A}_{\varkappa}$; autrement dit, $\mathbf{K}_1 = \sum_{\varkappa,\lambda} \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$, où $\lambda = 1, 2, \ldots s$, et $\varkappa$ est égal à r quelconques des indices $1, 2, \ldots r$. De même, le noyau $\mathbf{K}_2$ du groupe $Q\mathbf{G}$ $(Q < \mathbf{G})$ est composé d'un nombre quelconque s' $(\leqq s)$ des groupes $\mathbf{B}$; autrement dit, $\mathbf{K}_2 = \sum_{\varkappa,\lambda} \mathbf{C}_{\varkappa,\lambda}$, où $\varkappa = 1, 2, \ldots r$, et λ est égal à s' quelconques des indices $1, 2, \ldots s$.

Colloraire: Le noyau du groupe $Q\mathbf{G}P$ a la structure suivante: $\sum_{\varkappa,\lambda} \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$, où $\varkappa$ parcourt r' quelconques des indices $1, 2, \ldots r$, et λ parcourt s' quelconques des indices $1, 2, \ldots s$.

Soit P un élément de $\mathbf{G}$ de la 1-re classe; et du genre k. Plus précis, soit $P^k < \mathbf{C}_{\varkappa\lambda}$; nous avons alors;

$$\mathbf{G} > P\mathbf{G} > P\mathbf{G}^2 > \ldots > \mathbf{G}P^k = \mathbf{A}_{\varkappa};$$

et de même:

$$\mathbf{G} > P\mathbf{G} > P^2\mathbf{G} > \ldots > P^k\mathbf{G} = \mathbf{B}_{\lambda}.$$

Soit maintenant P de la 2-de classe; aucune puissance de P n'est pas contenue dans $\mathbf{K}$; $\mathbf{G}$ contient P; donc $\mathbf{G}P > P^2$. $\mathbf{G}P^2 > P^3$, ect. Chaque groupe GP^m aura donc toujours des éléments de la 2-de classe et ne pourra pas par conséquant être égal à $\mathbf{A}_\varkappa$. De même, P^mG ne pourra pas être égal à $\mathbf{B}_\lambda$. Nous avons donc une nouvelle définition des éléments de la 1-re et de la 2-de classes. Donc:

Théorème 4: Tout élément P de $\mathbf{G}$ de la 1-re classe a la propriété suivante: k étant le genre de P, il est $\mathbf{G}P^k = \mathbf{A}_\varkappa$, $P^k\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda$. Si P est de la 2-de classe, l'ordre du groupe $\mathbf{G}P^m$ (pour chaque m) est plus grand que l'ordre de $\mathbf{A}_\varkappa$, et de même, l'ordre de $P^m\mathbf{G}$ est plus grand que l'ordre de $\mathbf{B}_\lambda$.

Posons la question suivante: quelle est la plus petite puissance d'un élément P de la 1-re classe, pour qu'on a: $\mathbf{G}P^l = \mathbf{A}_\varkappa$ ou $P^l\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda$? P est contenu dans $\mathbf{G}$; il doit donc être: $P^{l+1} < \mathbf{A}_\varkappa$; il est donc $l+1 = k$ le genre de P; $l = k - 1$. Il est évident que cette condition, étant nécessaire, n'est pas suffisante.

Soit $\mathbf{G}P = \mathbf{A}_\varkappa$; un tel élément P de $\mathbf{G}$ soit nommé le *réducteur droit* de $\mathbf{G}$; de même, si $P\mathbf{G} = \mathbf{B}_\lambda$, P soit nommé le *réducteur gauche* de $\mathbf{G}$; si toutes les deux conditions sont remplies en même temps, P doit être appelé le *réducteur à deux côtés*. Tous les éléments du noyau $\mathbf{K}$ sont des réducteurs à deux côtés de $\mathbf{G}$; il sont tous du genre 1; mais $\mathbf{G}$ peut aussi avoir des réducteurs R du genre 2; ils ne sont pas contenus dans $\mathbf{K}$. Le théorème suivant est évident:

Théorème 5: Tous les réducteurs de $\mathbf{G}$ (les éléments de $\mathbf{K}$ inclus) forment un groupe dont le noyau est $\mathbf{K}$. En général, si l'on adjoint à $\mathbf{K}$ un ou plusieurs réducteurs de $\mathbf{G}$, on obtient de nouveau un groupe.

3. Considérons maintenant un groupe à noyau classique; soit $\mathbf{G}$ un tel groupe et $\mathbf{K} \simeq E + A + B + C + \ldots$ sont noyau classique (E étant l'unité de $\mathbf{K}$).

Soit P un élément quelconque de $\mathbf{G}$, mais pas de $\mathbf{K}$. Il est $\mathbf{G}E = E\mathbf{G} = \mathbf{K}$; à cause de cela PE est EP sont des éléments de $\mathbf{K}$; p. e. $PE \simeq A$; de plus:

$$EP = (EP)\,E = E\,(PE) = EA = A; \text{ donc:}$$

$$PE = EP \simeq A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Soit $B < \mathbf{K}$; $PB = P(EB) = (PE)\,B = AB$; de même: $BP = BEP = BA$

Donc: $$PB = AB; \quad BP = BA \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Appelons A l'élément du noyau *conjugué* avec P. En général les éléments P et Q doivent être appelés *conjugués*, lorsgu'il est $PE = QE$ (donc aussi $EP = EQ$).

Soit A conjugué avec P, B — avec Q; nouc avons:

$$PE = EP = A, \quad QE = EQ = B;$$

$QP(E = P(QE) = PB = AB$; et de même: $E(PQ) = AB$; c'est à dire PQ est conjugué avec AB. Donc:

Theorème 6: Le groupe $\mathbf{G}$ est généralement isomorphe à son noyau classique $\mathbf{K}$; cet isomorphisme est donné par la formule: $\mathbf{G}E = \mathbf{K}$:

Corollaire 1: P étant conjugué aves A, il est aussi P^λ conjugué avec A^λ. Si n est l'ordre de A, P^n est conjugué avec E.

Corollaire 2: L'ordre de chaque élément P est divisible par l'ordre d'élément du noyau, conjugué avec P.

Corollaire 3: Si l'ordre de P est rélatif prime avec l'ordre du noyau $\mathbf{K}$, P doit être conjuqué avec l'unité E de $\mathbf{K}$.

Un cas particulier des groupes à noyau classique se présente, si notre groupe est commutatif, c'est à dire, si nous avons: $PQ = QP$ pour tous les éléments P, Q de notre groupe. Il est alors:

$$(PQ)^m = P^m Q^m.$$

Soit un de ces éléments, p. e. P, de la 1-re classe et du genre k; P^k est alors contenu dans $\mathbf{K}$; donc:

$$(PQ)^k = P^k Q^k < \mathbf{K},$$

(car tous les éléments de $\mathbf{K}$ sont des réducteurs du groupe $\mathbf{G}$); c'est à dire PQ est aussi de la 1-re classe, du genre $\leqq k$. Il s'en suit:

Théorème 7: Dans un groupe commutatif le produit d'un élément de la 1-re classe et du genre k par un autre élément quelconque est aussi de la 1-re classe et du genre $\leqq k$.

Corollaire: Dans un groupe commutatif tous les éléments de la 1-re classe et du genre $\leqq k$ forment un groupe.

4. *Sur „l'addition" des groupes classiques.* Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux groupes classiques sans éléments communs (leurs unités sont aussi differentes). Nous posons le problème suivant; est-ce possible que $\mathbf{G} \simeq \mathbf{A} + \mathbf{B}$ soit un groupe? Pour ce but nous devons définir tous les produits AB et BA, A étant $< \mathbf{A}$, et $B < \mathbf{B}$. Il est évident que la loi de l'inversion uniforme ne peut pas être remplie pour $\mathbf{G}$. En effet, soit, p. e., $AB = A' < \mathbf{A}$; en désignant par A'' le produit $A^{-1}A' < \mathbf{A}$, nous obtenons: $AA'' = A'$, c'est à dire: $AB = AA''$ sans avoir $B = A''$. En prenant $AB < \mathbf{B}$ nous obtiedrons le même.

Tâchons alors à définir AB et BA de telle façon, pour que la loi associative au moins soit conservée pour $\mathbf{G}$.

Soit donc $\mathbf{G} \simeq \mathbf{A} + \mathbf{B}$ un groupe associatif, mais sans la loi de l'inversion uniforme. D'après la théorie général $\mathbf{G}$ doit avoir un noyau $\mathbf{K}$, qui consiste en groupes classiques sans éléments communs et isomorphes deux à deux. Dans notre cas il doit être: 1) $\mathbf{K} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1$, ou 2) $\mathbf{K} = \mathbf{A}_1$, ou 3) $\mathbf{K} = \mathbf{B}_1$; $\mathbf{A}_1$ signifie un sous-groupe de $\mathbf{A}$ (peut être $= \mathbf{A}$); de même, $\mathbf{B}_1$ est un sous groupe de $\mathbf{B}$ (ou $= \mathbf{B}$); dans le cas 1) $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ doivent être simplement isomorphes. Prouvons que dans les cas 1) ou 2) $\mathbf{A}_1$ doit être $= \mathbf{A}$. Soit E l'unité de $\mathbf{A}$, par consequent aussi de $\mathbf{A}_1$; la théorie générale nous apprend, que $E\mathbf{G}E = \mathbf{A}_1$ (d'après (4)); d'autre part: $E\mathbf{A}E = \mathbf{A}$; $\mathbf{A} < \mathbf{G}$; $E\mathbf{A}E < E\mathbf{G}E$; $\mathbf{A} < \mathbf{A}_1$; donc: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$. De même, dans les cas 1) ou 3) $\mathbf{B}_1$ doit être égal à $\mathbf{B}$. Trois cas donc sont possibles: 1) $\mathbf{K} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{G}$; 2) $\mathbf{K} = \mathbf{A}$; 3) $\mathbf{K} = \mathbf{B}$.

Le cas 1) peut se présenter seulement, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont simplement isomorphes; dans ce cas un côté de la loi de l'inversion uniforme est rempli pour $\mathbf{G}$; il est: $\mathbf{AB}=\mathbf{A}$, $\mathbf{BA}=\mathbf{B}$, ou: $\mathbf{AB}=\mathbf{B}$, $\mathbf{BA}=\mathbf{A}$.

Les cas 2) et 3) présentent évidemment le même. Considérons, par exemple, le cas 2). $\mathbf{G}$ a dans ce cas le noyau classique $\mathbf{A}$. D'apres le théorème *6* $\mathbf{G}$ est généralement isomorphe à son noyau $\mathbf{A}$. Un élément quelconque P de $\mathbf{G}$ est conjugué avec l'élément $PE=EP$ du noyau (E étant l'unité de $\mathbf{A}$). Donc:

$$\mathbf{B}E\simeq \mathbf{A}_1<\mathbf{A}.$$

Prouvons que $\mathbf{A}_1$ est un groupe. Soient P et Q des éléments de $\mathbf{B}$; $PQ\simeq R$; $PE\simeq A$, $QE\simeq B$, $RE\simeq C$; A, B, C sont des éléments de $\mathbf{A}_1$. Nous prouvons que $AB=C$; en effet:

$$AB=(PE)B=P(EB)=PB=P(QE)=(PQ)E=RE=C.$$

$\mathbf{A}_1$ est donc un sous-groupe de $\mathbf{A}$; $\mathbf{A}_1$ est donc classique; $\mathbf{B}$ est isomorphe à $\mathbf{A}_1$; à l'élément P de $\mathbf{B}$ correspond un seul élément PE de $\mathbf{A}_1$; mais pas inversement: il peut arriver que, P et Q étant des éléments différents de $\mathbf{B}$, il soit: $PE=QE\simeq A<\mathbf{A}_1$. C'est à dire le groupe $\mathbf{B}$ est homomorphe à $\mathbf{A}_1$ (d'apres *Frobenius*); d'apres la théorie des groupes classiques $\mathbf{A}_1$ est dans ce cas simplement isomorphe au groupe complémentaire $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ étant un sous-groupe invariant de $\mathbf{B}$.

Étant donnés deux groupes classiques $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, prenons un de ces groupes, p. e. $\mathbf{A}$, comme noyau de $\mathbf{G}$. Choisissons un sous-groupe $\mathbf{A}_1$ de $\mathbf{A}$, qui soi simplement isomorphe à un groupe complémentaire $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{B}$. Soit:

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}+\mathbf{C}P+\mathbf{C}Q+\ldots;$$
$$\mathbf{A}_1\simeq E+A+B+\ldots;$$

l'isomorphisme de $\mathbf{A}_1$ et $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$ donne une corréspondance:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{C} & \text{correspond à} & E \text{ (l'unité)}, \\ \mathbf{C}P & \quad\text{,,} & \text{,,}\ A, \\ \mathbf{C}Q & \quad\text{,,} & \text{,,}\ B, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Définissons maintenant: pour *chaque* élément $S<\mathbf{C}$

$$SE=E,\ (SP)E=A,\ (SQ)E=B,\ldots;$$

en vertu de (5) nous devons admettre:

$$ES=E,\ E(SP)=A,\ E(SQ)=B,\ldots$$

et en vertu de (6):

$$PA=(PE)A,\ AP=A(EP),$$

P étant $<\mathbf{B}$, $A<\mathbf{A}$

Ces conditions définissent le groupe $\mathbf{G}$ entièrement. Il est facile de se convaincre que la loi associative est remplie pour le groupe $\mathbf{G}$ ainsi construit.

Faisons encore quelques observations. Si K est l'unité du groupe $\mathbf{B}$, il est toujours $K < C$, donc: $KE = EK = E$; pour chaque élément $A < \mathbf{A}$ il est: $KA = AK = A$; K est donc l'unité générale pour tous les éléments de $\mathbf{G}$.

On peut prendre $\mathbf{C} = \mathbf{B}$; nous aurons alors pour chaque $P < \mathbf{B}$: $PE = EP = E$, $PA = AP = A$ pour chaque $A < \mathbf{A}$. C'est à dire tous les éléments de $\mathbf{A}$ sont pour le groupe $\mathbf{B}$ les „éléments-zéros"; ce cas est le plus simple; il est le seul possible, si $\mathbf{B}$ est un groupe simple, et $\mathbf{A}$ n'a pas de sous-groupe simplement isomorphe à $\mathbf{B}$. Le second cas-limite nous avons, si $\mathbf{B}$ est homomorphe au gr upe $\mathbf{A}$ tout-entier; il est dans ce cas: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}E = E\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Ce cas comprend ausi le cas, où $\mathbf{B}$ est simplement isomorphe à $\mathbf{A}$; dans ce dernier cas une autre construction du groupe $\mathbf{G}$ est possible, à savoir, — comme groupe avec la loi droite ou gauche de l'inversion uniforme. Excepté ce cas, nous voyons, que $\mathbf{G}$ est toujours du 2-d rang; le groupe $\mathbf{B}$ est „subordonné" au groupe $\mathbf{A}$. Observons que $\mathbf{A}_1 + \mathbf{B} \simeq \mathbf{G}_1$ est aussi un groupe avec le noyau $\mathbf{A}_1$.

Théorème 8: Étant donnés 2 groupes classiques $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sans élément commun, on peut toujours construire un groupe associatif $\mathbf{G} \simeq \mathbf{A} + \mathbf{B}$; excepté le cas, où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont simplement isomorphes, le groupe $\mathbf{G}$ est à noyau classique.

Ce théorème est aussi vrai pour n groupes classiques donnés et sans éléments communs. Cependant ce cas général présente des difficultés spécifiques; nous reviendrons à ce problème dans un autre article.

РЕЗЮМЕ:

О некоторых случаях конечных групп без закона однозначной обратимости.

А. Сушкевич.

Вначале перечисляются основные свойства групп без закона однозначной обратимости. Элементы и подгруппы такой группы делятся на 2 класса Доказываются теоремы: всякая подгруппа так-назыв. группы-ядра есть тоже группа-ядро. Если $\mathbf{G}$ — группа с ядром $\mathbf{K}$, а $\mathbf{H}$ ее подгруппа 1-го класса, то ядро группы $\mathbf{H}$ есть общий наибольший делитель групп $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$. Выясняется строение ядер групп: $\mathbf{G}P$, $Q\mathbf{G}$, $Q\mathbf{G}P$, где P и Q — элементы из $\mathbf{G}$. Далее, рассматриваются группы с классическим ядром и, как частный их вид, — коммутативные группы. Наконец, рассматривается проблема „сложения" классических групп, которая и решается для случая двух групп.
