Самопроективные или W — кривые.

(Интегральные кривые уравнения Jacobi).

Н. Душин.

1. *Определение $W-C$.*

Рассматриваемые кривые

A^0. с одной стороны являются ***инвариантными кривыми при коллинеарных преобразованиях***, допускающих одночленную группу (преобразований) и аналитически определяемых уравнениями:

$$\varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \ (i = 1, 2, 3) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Различным типам этих преобразований соответствуют и различные типы инвариантных кривых.

[S. Lie и F. Klein: „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces" Comptes rendus T. 70. 1870 p. 1222—1226, 1275—1279.

S. Lie и F. Klein: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche dürch eingeschlossenen system von einfach unendlich vielen vertauchbaren linearen Transformationen in sich übergehen" Mathem. Annalen B. IV. 1871 г.].

B^0. С другой стороны $W-C$ являются ***интегральными кривыми уравнения Jacobi.***

$$Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = o, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

где L, M и N — однородные многочлены 1 степени относ. x и y.

[*Jacobi* „De integratione aequationis differentialis

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + \\ + (C + C'x + C''y)dx = o$$ „Crelle Journal B. 24. 1842].

2^0. ***Основные типы коллинеарного преобразования плоскости.***

При определении инвариантных элементов коллинеарного преобразования, как известно, приходим к характеристическому ур-нию

$$\triangle(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\varrho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = o \ . \ . \ . \ (3)$$

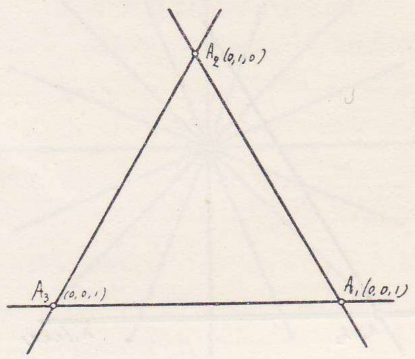
третьей степени относительно ϱ.

Отсюда имеем следующие основные типы коллинеарных преобразований плоскости.

I. Первый—когда все корни ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ *вещественны и различны. Инвариантной фигурой* в этом случае является треугольник вещественный во всех своих частях (фиг. 1) и

каноническими ур—ми коллинеации будут ур-ия вида

$$\varrho y_i = \varrho_i x_i. \ (i = 1, 2, 3) \ . \ . (4)$$



I. Фиг. 1.

I⁰. Частный случай—случай двух мнимых сопряженных корней

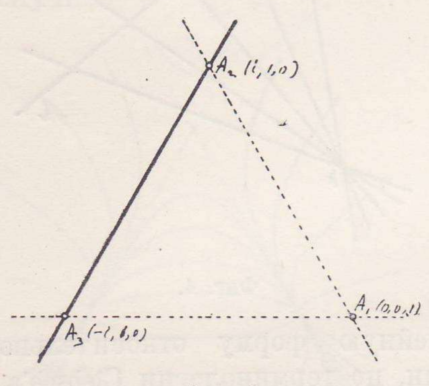
$(\varrho_2$ и $\varrho_3)$

Инвариантная фигура здесь будет определяться вещественной точкой A_1, вещественной прямой вне ее и двумя мнимыми прямыми (фиг. 2).

Канонические ур-ия преобразования:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho y_1 = mx_1 - nx_2 \\ \varrho y_2 = nx_1 + mx_2 \\ \varrho y_3 = kx_3 \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

II. Второй случай — случай двойного корня. $[\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3]$, при условии, что не все миноры $\triangle_{ik} = o$ $[\triangle_{ik}$ — миноры второго порядка относит. $a_{ik}]$.



Фиг. 2.

Инвариантная фигура состоит из двух пересекающихся инвариантных прямых, из коих прямая, соединяющая двойную инвариантную точку с простой, есть двойная прямая (фиг. 3).

Канонические ур-ния коллинеации этого типа будут

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho y_1 = \varrho_1 x_1 \\ \varrho y_2 = \varrho_2 x_2 \\ \varrho y_3 = \varrho_2 x_3 + \beta x_2, \text{ где } \beta \neq o \end{array}\right. \ . \ . \ . (6)$$

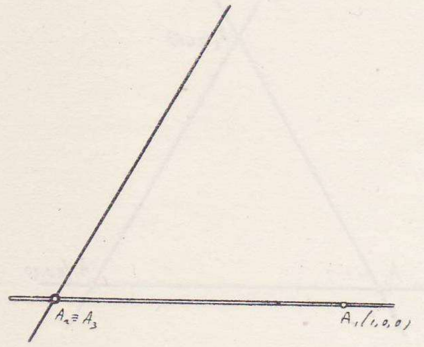
III. *Случай, когда имеем двойной корень* $[\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3]$ и *все миноры* $\triangle_{ik} = o$.

Инвариантная фигура состоит из ∞^1 инвариантных точек, лежащих на одной прямой l и ∞^1 инвариантных прямых, проходящих через одну точку A, причем точка A вне прямой l — случай *перспективной каллинеации* (фиг. 4).

Ее канонические ур-ия

$$\left.\begin{aligned}\varrho y_1 &= \varrho_1 x_1\\ \varrho y_2 &= \varrho_2 x_2\\ \varrho y_3 &= \varrho_2 x_3\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

IV. *Случай, когда ур-ие* $\triangle(\varrho) = o$ *имеет тройной корень* $[\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3]$, *но не все миноры* $\triangle_{ik} = o$.



Фиг. 3.

Инвариантная фигура состоит из тройной точки, лежащей на тройной прямой (фиг. 5) и *каноническая форма коллинеации* определяется ур-ем:

$$\left\{\begin{aligned}\varrho y_1 &= \varrho_1 x_1\\ \varrho y_2 &= a x_1 + \varrho_1 x_2\\ \varrho y_3 &= a x_2 + \varrho_1 x_3, \text{ где } a \neq o\end{aligned}\right. \quad \ldots (8)$$

V. *Наконец, последний случай, когда* $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ *и все* $\triangle_{ik} = o$.

Инвариантная фигура состоит из ∞' инвариантных точек, лежащих на одной прямой l и ∞' инвариантных прямых, проходящих через одну точку A, причем точка A лежит на прямой l — случай *элации* (фиг. 6).

Ее канонические ур-ия

$$\left\{\begin{aligned}\varrho y_1 &= \varrho_1 x_1\\ \varrho y_2 &= \varrho_1 x_2 + a x_1\\ \varrho y_3 &= \varrho_1 x_3 \quad , \text{ где } a \neq o\end{aligned}\right. \quad . (9)$$

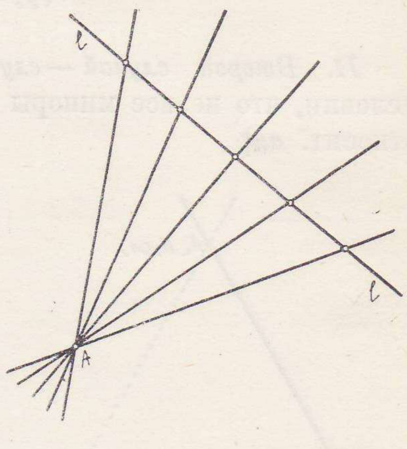
3⁰. *Связь коллинеации с коннексами и ур-ия Jacobi с коллинеацией.*

Применяя общее коллинеарное преобразование

$$\varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \ (i = 1, 2, 3) \ . \ (1)$$

к ур-ию $\sum u_i y_i = o$, где $i = 1, 2, 3$ и y_i точка прямой u_i, получим ур-ие

$$f(ux) \equiv \sum\sum a_{ik} u_i x_k = o \ \ . \ . (10),$$



Фиг. 4.

определяющее самую общую билинейную форму относительно контрагредиентных переменных u и x, или, по терминологии Clebsch'a, коннекс первого порядка и первого класса, короче коннекс (1, 1).

[*A. Clebsch.* Leçons sur la géométrie p. 351, 1883].

Выделим между билинейными коннексами *главный коннекс*

Фиг. 5.

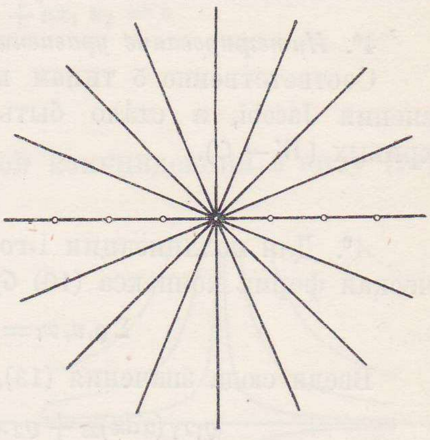
$$\sum u_i x_i = o \ (i = 1, 2, 3) \ \ldots\ldots (11)$$

и рассмотрим совокупность элементов, общих коннексам (10) и (11), так называемую *главную коинциденцию* коннекса.

При постоянном значении x_i, уравнение (10) представляет кривую огибаемую прямыми u_i, из числа их в силу условия (11) выделяются касательные, проходящие через точки x_i.

Соответственно, при постоянном значении u_i, уравнение (10) определяет кривую, образуемую точками x_i, из последних условием (11) выделяются точки пересечения с прямою u_i.

Меняя непрерывно x_i во втором случае (resp. u_i в первом), мы получаем всю кривую.



Фиг. 6.

Для определения уравнения кривых, образуемых таким способом, имеем в силу (11) следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\sum u_i X_i = o \\ &\sum u_i\ x_i = o \\ &\sum u_i (x_i + dx_i) = o \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} (12) \\ (i = 1, 2, 3) \end{matrix}$$

где x_i — точка инцидентная с прямой u_i, $x_i + dx_i$ — точка, соседняя с x_i и X_i — любая точка прямой u_i.

Для совместности этой системы имеем условие

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 + dx_1 & x_2 + dx_2 & x_3 + dx_3 \end{vmatrix} = o \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = o$$

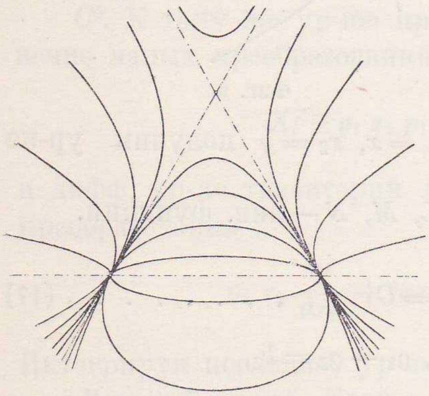
Разлагая последний определитель по элементам первой строки, получим

$$X_1 (xdx)_{23} + X_2 (xdx)_{31} + \\ + X_3 (xdx)_{12} = o,$$

где

$$(xdx)_{23} = x_2 dx_3 - x_3 dx_2$$

и т. д.



Фиг. 7.

Сравнивая с первым ур-ем системы (12), находим, что координаты u_i удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} \tau u_1 &= (xdx)_{23} \\ \tau u_2 &= (xdx)_{31} \\ \tau u_3 &= (xdx)_{12} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (13)$$

Введя эти значения в (10), получим

$$\begin{vmatrix} (a_{1k} x_k) & (a_{2k} x_k) & (a_{3k} x_k) \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = o \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

— дифференциальное уравнение искомых кривых.

Но последнее уравнение есть ур-ие Jacobi, приведенное к однородному виду.

Отсюда, ***связью уравнения Jacobi с коллинеарными преобразованиями можно воспользоваться для изучения свойств его интегральных кривых.***

4^0. *Интегрирование уравнения Jacobi.*

Соответственно 5 типам коллинеации получаем и 5 типов уравнения Jacobi, а стало быть и 5 типов семейств интегральных кривых ($W - C$).

I-й тип.

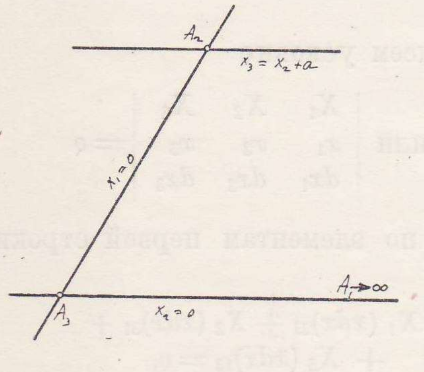
A^0. Для коллинеации I-го типа, определяемой ур-ми (4), каноническая форма коннекса (10) будет вида

$$\Sigma \varrho_i u_i x_i = o \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \quad \ldots \ldots \ldots \ (15)$$

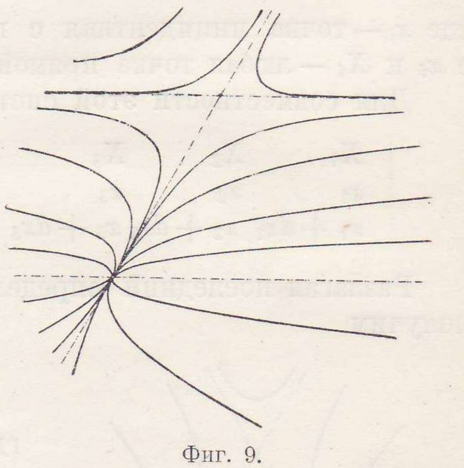
Введя сюда значения (13), получаем дифф. ур-ие.

$$\varrho_1 x_1 (xdx)_{23} + \varrho_2 x_2 (xdx)_{31} + \varrho_3 x_3 (xdx)_{12} = o \quad \ldots \ldots \ (16)$$

Последнее ур-ие есть упрощенное ур-ие Jacobi. Действительно



Фиг. 8.



Фиг. 9.

полагая $x_3 = 1$, $dx_3 = o$ и заменяя $x_1 = x$, $x_2 = y$ получим ур-ие Jacobi вида

$L(xdx - ydx) - Mdy + Ndx = o$, где L, M, N — лин. функции.

Интегрируя ур-ие (16), получим

$$x_1^{\varrho_2 - \varrho_3}\, x_2^{\varrho_3 - \varrho_1}\, x_3^{\varrho_1 - \varrho_2} = C \quad \ldots \ldots \ldots \ (17)$$

или полагая

$$\varrho_2 - \varrho_3 = k_1\,;\ \varrho_3 - \varrho_1 = k_2\,,\ \varrho_1 - \varrho_2 = k_3,$$

имеем

$$x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, x_3^{k_3} = C$$

где

$$k_1 + k_2 + k_3 = o \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ (18)$$

— ур-ие искомых интегральных кривых (фиг. 7).

B^0. Кривые (18) могут быть получены и непосредственно из ур-ий (4) колинеарного преобразования после λ — кратного его повторения.

Дело в том, что последнее, будучи приложено к точке $P(x_i)$ плоскости, заставляет ее переместиться в некоторое новое положение $P_1(y_i')$. Повторяя это преобразование еще раз, мы заставим точку $P_1(y_i')$ занять положение точки $P_2(y_i'')$, и так далее.

При такой операции точка P опишет некоторую кривую.

После λ — кратного повторения, ур-ия (4) примут вид:

$$\rho y_i = \rho_i^\lambda x_i \qquad , (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Исключая из этих ур-ий λ и ρ, получим

$$log\frac{\rho_2}{\rho_3} log\frac{y_1}{x_1} + log\frac{\rho_3}{\rho_1} log\frac{y_2}{x_2} + log\frac{\rho_1}{\rho_2} log\frac{y_3}{x_3} = o \quad (19)$$

или полагая

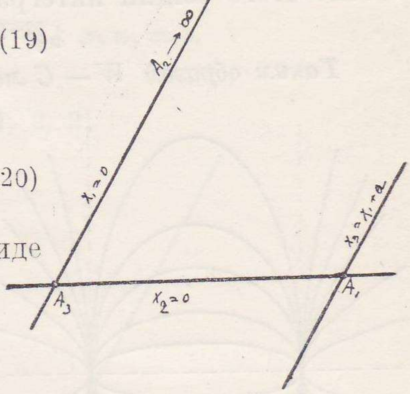
$$log\frac{\rho_2}{\rho_3} = r_1,\ log\frac{\rho_3}{\rho_1} = r_2\ \ log\frac{\rho_1}{\rho_2} = r_3 \quad . \ . \ . \ (20)$$

будем иметь ур-ие искомых кривых в виде

$$y_1^{r_1}\ y_2^{r_2}\ y_3^{r_3} = x_1^{r_1}\ x_2^{r_2}\ x_3^{r_3} = C,$$

где в силу (20)

$$r_1 + r_2 + r_3 = o.$$



Фиг. 10.

Равенства (20) позволяют сделать вывод, что ***рассматриваемые кривые при коллинеарном преобразовании остаются инвариантными.***

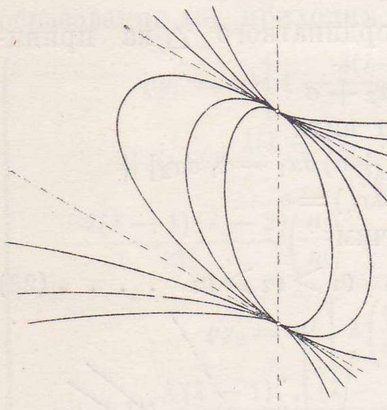
C^0. Наконец к ур-ию (18) можно притти еще одним путем, а именно: из рассмотрения траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований.

Для данного $\triangle$-ка коллинеации последнее имеет вид

$$Xf \equiv \Sigma\, \rho_i\, x_i\, p_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Отсюда дифф. ур-ие искомых кривых будет

$$\Sigma\, \rho_i\, x_i\, p_i = o$$



Фиг. 11.

и соответствующая совокупная система

$$\frac{dx_i}{\rho_i x_i} = dt \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Интеграция последнего дает

$$x_i = C_i e^{\rho_i t} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

Исключая отсюда t, получим

$$x_1^\alpha\ x_2^\beta\ x_3^\gamma = Ce^{(\ \rho_1 + \beta\rho_2 + \gamma\rho_3)t} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (22)$$

где α, β и γ показатели степеней, в которыс мы возводим предварительно ур-ия (21).

Выражение (22) будет общим $\int$-лом, если

$$\alpha + \beta + \gamma = o \text{ и } \alpha\varrho_1 + \beta\varrho_2 + \gamma\varrho_3 = o.$$

Первое условие необходимо для выполнения однородности, второе чтобы отсутствовало t.

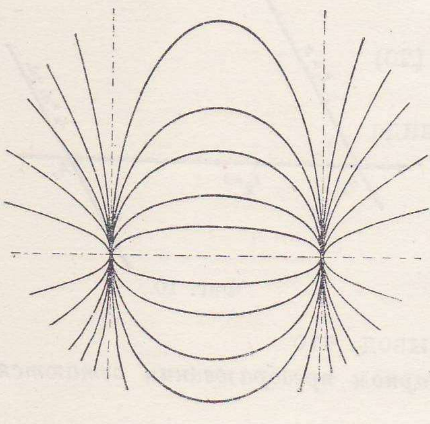
Из этих условий следует, что

$$\alpha = k(\varrho_2 - \varrho_3), \ \beta = k(\varrho_3 - \varrho_1), \ \gamma = k(\varrho_1 - \varrho_2)$$

После этого общий интеграл (22) принимает вид

$$x_1^{\varrho_2 - \varrho_3} \, x_2^{\varrho_3 - \varrho_1} \, x_3^{\varrho_1 - \varrho_2} = C.$$

Таким образом $W - C$ могут быть рассматриваемы:



Фиг. 12.

A⁰. как кривые главной коинциденции соответ. формы коннекса,

B⁰. как результат λ — кратного повторения коллинеарного преобразования.

C⁰. и как траектории соот. одночленной группы линейных преобразований по ее бесконечно малому преобразованию.

Рассмотрим еще следующие случаи расположения $W - C$ первого типа:

A⁰. Предположим, что *вершина A_1 координатного $\triangle$-ка удаляется в ∞-сть* (фиг. 8).

В этом случае уравнения сторон координатного $\triangle$-ка принимают вид

$$x_1 = o, \ x_2 = o \text{ и } x_3 = x_2 + a$$

и соответствующее дифф. ур-ие (16) будет вида

$$\varrho_1 x_1 [x_2 dx_2 - (x_2 + a) dx_2] + \varrho_2 x_2 [(x_2 + a) dx_1 - x_1 dx_2] + \\ + \varrho_3 (x_2 + a)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = o$$

Интегрируя последнее ур-ие мы получим

$$X_1^{\varrho_2 - \varrho_3} X_2^{\varrho_3 - \varrho_1} (X_2 + aX_3)^{\varrho_1 - \varrho_2} = C, \quad \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \quad \ldots \ldots (23)$$

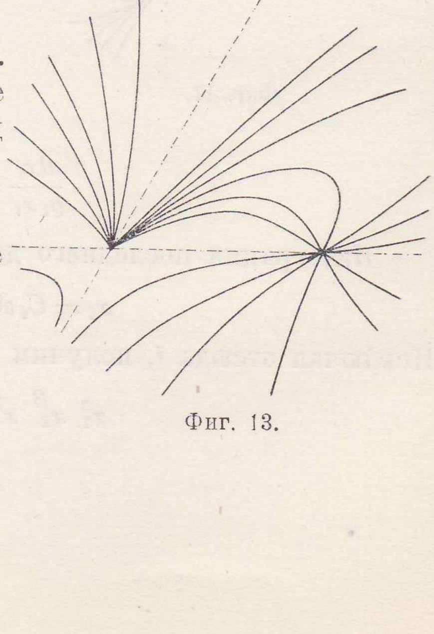
— ур-ие $W - C$ для данного $\triangle$-ка (фиг. 9).

B⁰. Предположим, *что вертина A_2. удаляется в бесконечность.* В этом случае координатный $\triangle$-к принимает вид фиг. 10; уравнения его сторон:

$$x_1 = o, \ x_2 = o \text{ и } x_3 = x_1 + a$$

Соответствующее диффер. ур-ие будет:

$$\varrho_1 x_1 [x_2 dx_1 - (x_1 + a) dx_2] + \\ + \varrho_2 x_2 [(x_1 + a) dx_1 - x_1 dx_2] \\ + \varrho_3 (x_1 + a)[x_1 dx_2 - x_2 dx_1] = o$$



Фиг. 13.

или

$$[(\varrho_3-\varrho_1)\,x_1+a\varrho_3]\,(x_1\,dx_2-x_2\,dx_1)-a\varrho_1\,x_1\,dx_2+a\varrho_2\,x_2\,dx_1=o$$

Отсюда получаем следующее уравнение $W-C$:

$$x_1^{\varrho_2-\varrho_3}\;x_2^{\varrho_3-\varrho_1}\;(x_1+ax_3)^{\;\varrho_1-\varrho_2}=C.\quad[\varrho_1>\varrho_2>\varrho_3]\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

Расположение кривых для этого случая имеем на фиг. 11 и 12.

I_0.—*Частный случай.*

A^0. Здесь коллинеация определяется ур-ми (5) и соответствующий коннекс (10) принимает вид

$$(mx_1-nx_2)\,u_1+(nx_1+mx_2)\,u_2+k\;x_3\,u_3=o.$$

Это ур-ие с помощью

$$u_x\equiv\Sigma\,u_i\,x_i=o\quad(i=1,\;2,\;2)$$

заменяется ур-ем.

$$(k-m)\,x_3\,u_3-nx_2\,u_1+n\,x_1\,u_2=o$$

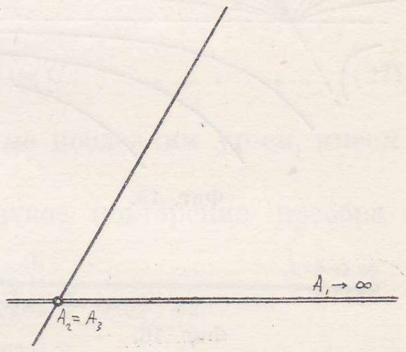
Откуда в силу (13) получаем

$$x_3\,(bx_1-ax_2)\,dx_1+x_3\,(ax_1+bx_2)\,dx_2-$$
$$-\,b\,(x_1^2+x_2^2)\,dx_3=o,$$

где $a=k-m,\ b=n.$

Интегрируя последнее ур-ие, имеем

$$\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_3}\,e^{\;A\,arctg\frac{x_2}{x_1}}=C.\quad(25)$$



Фиг. 14.

B^0. Применяя к точке P плоскости λ—кратное повторение преобразования (5), приходим к ур-ям вида

$$\left\{\begin{aligned}
\varrho y_1 &= m^\lambda\left[1-\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\left(\frac{n}{m}\right)^2+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{4!}\left(\frac{n}{m}\right)^4-\ldots+\right.\\
&\left.+(-1)^k\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-2_{k+1})}{(2k)!}\left(\frac{n}{m}\right)^{2k}+\ldots\right]x_1-m^\lambda\left[\lambda\left(\frac{n}{m}\right)-\right.\\
&\left.-\frac{\lambda(\lambda-1)\,(\lambda-2)}{3!}\left(\frac{n}{m}\right)^3+\ldots+(-1)^k\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-2k)}{(2k+1)!}\left(\frac{n}{m}\right)^{2k+1}+\ldots\right]x_2\\
\varrho y_2 &= m^\lambda\left[\lambda\left(\frac{n}{m}\right)-\frac{\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)}{3!}\left(\frac{u}{m}\right)^3+\ldots+\right.\\
&\left.+(-1)^k\frac{\lambda\,(\lambda-1)\ldots(\lambda-2k)}{(2k+1)!}\left(\frac{n}{m}\right)^{2k+1}+\ldots\right]x_1+m^\lambda\left[1-\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\left(\frac{n}{m}\right)^2+\right.\\
&+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{4!}\left(\frac{n}{m}\right)^4-\ldots+\\
&\left.+(-1)^k\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-2k+1)}{(2k)!}\left(\frac{n}{m}\right)^{2k}+\ldots\right]x_2\\
\varrho y_3 &= k^\lambda\,x_3
\end{aligned}\right.$$

Далее всегда можно положить $m^2+n^2=1$, ибо для этого стоит разделить обе части (5) на $\sqrt{m^2+n^2}$ и обозначить $\dfrac{\varrho}{\sqrt{m^2+n^2}}$ снова через ϱ.

Отсюда, полагая $n = \sin\theta$ и $m = \cos\theta$, получим

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho y_1 = \cos\lambda\theta x_1 - \sin\lambda\theta_2 & (x) \\ \varrho y_2 = \sin\lambda\theta x_1 + \cos\lambda\theta_2 & (xx) \\ \varrho y_3 = e^{\lambda \log k} x_3 & \end{array}\right.$$

Исключая отсюда ϱ, λ и θ, получим

$$\frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{y_3} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{-\lambda \log k}.$$

Далее из (x) и (xx) имеем

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{tg\lambda\theta + \frac{x_2}{x_1}}{1 - \frac{x_2}{x_1} tg\lambda\theta},$$

откуда

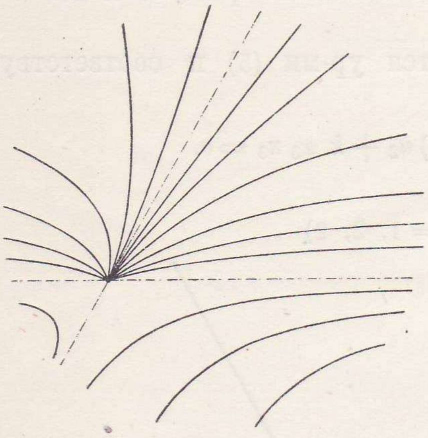
$$\lambda = \frac{1}{\theta}\left(arctg\frac{y_2}{y_1} - arctg\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Подставляя это значение λ в ур. (26) и полагая

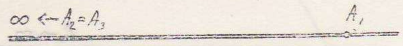
$$\frac{lgk}{\theta} = A$$

получим

$$\frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{y_3} e^{A arctg \frac{y_2}{y_1}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{A arctg \frac{x_2}{x_1}} = C$$



Фиг. 15.



Фиг. 16.

С. Наконец, исходя из бесконечно малого преобразования, которое в данном случае будет вида

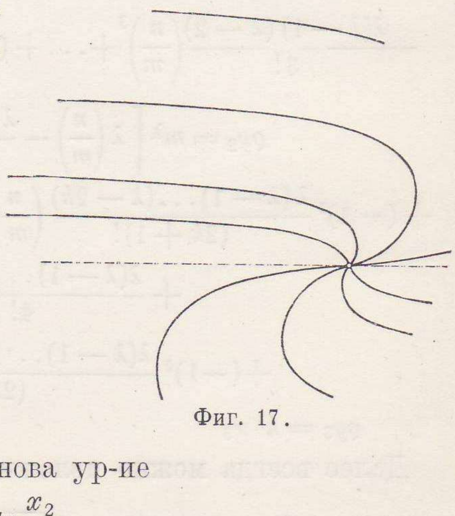
$$Xf \equiv (mx_1 - nx_2)p_1 + (nx_1 + mx_2)p_2 + k\, x_3\, p_3,$$

получим след. дифф. ур-ие траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований

$$(mx_1 - nx_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (nx_1 + mx_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \\ + kx_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = o.$$

Совокупная система, соответствующая этому ур-ию будет

$$\frac{dx_1}{mx_1 - nx_2} = \frac{dx_2}{nx_1 + mx_2} = \frac{dx_3}{kx_3}$$



Фиг. 17.

Интегрируя эту систему, получим снова ур-ие

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} e^{A arctg \frac{x_2}{x_1}} = C$$

II тип.

A^0. Коллинеация этого типа определяется ур-ем (6), а каноническая форма соответствующего коннекса ур-м.

$$\varrho_1 u_1 x_1 + \varrho_2 u_2 x_2 + (\varrho_2 x_3 + \beta x_2) u_3 = o$$

и в силу

$$u_x \equiv \Sigma u_i x_i = o$$

уравнением

$$(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 u_1 - \beta x_2 u_3 = o.$$

Введя сюда значения (13), имеем дифференциальное ур-ие

$$(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 (xdx)_{23} + \beta x_2 (xdx)_{12} = o.$$

Интегрируя, находим

$$(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta lg \frac{x_2}{x_1} = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

Интегральные кривые $(W-C)$, определяемые последним ур-ем, имеем на фиг. 13.

B^0, Применяя и в этом случае λ—кратное повторение преобразования (6). получим

$$\varrho y_1 = \varrho_1^\lambda x_1\,, \quad \varrho y_2 = \varrho_2^\lambda x_2\,, \quad \varrho y_3 = \varrho_2^\lambda x_3 + \lambda \beta \varrho_2^{\lambda-1} x_2$$

Исключая из этих ур-ий λ и ϱ, будем иметь

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{\frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{y_3}{y_2}} \cdot \frac{x_1}{x_2} \cdot \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2}}$$

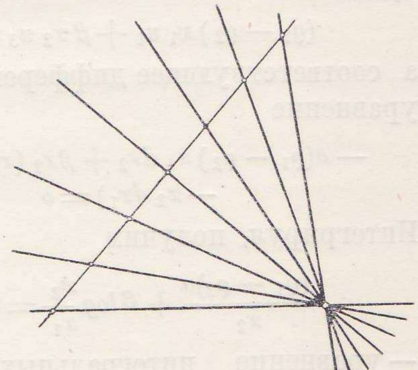
или после логарифмирования

$$lg \frac{y_1}{y_2} = \frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{y_3}{y_2}\, lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + lg \frac{x_1}{x_2} + \frac{\varrho_2}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2}\, lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

откуда

$$lg \frac{y_1}{y_2} + \frac{\varrho_2}{\beta}\, lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{y_3}{y_2} = lg \frac{x_1}{x_2} +$$

$$+ \frac{\varrho_2}{\beta}\, lg \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{x_3}{x_2}$$



Фиг. 18.

Наконец, полагая

$$\frac{\beta}{\varrho_2} = \beta_1 \qquad lg \varrho_1 = r_1 \qquad lg \varrho_2 = r_2\,,$$

получим

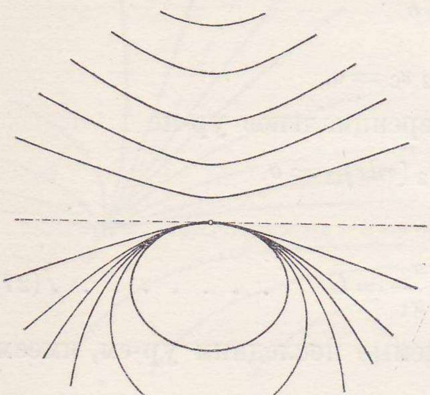
$$(r_1 - r_2) \frac{y_3}{y_2} + \beta_1\, log \frac{y_2}{y_1} = (r_1 - r_2) \frac{x_3}{x_2} +$$

$$+ \beta_1\, log \frac{x_2}{x_1} = C.$$

C^0. Символом бесконечно малого преобразования в данном случае будет выражение

$$Xf \equiv \varrho_1 x_1 p_1 + \varrho_2 x_2 p_2 + (\varrho_2 x_3 + \beta x_2) p_3 = o.$$

Дифференциальное ур-ие траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований:



Фиг. 19.

$$\varrho_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varrho_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\varrho_2 x_3 + \\ + \beta x_2) \frac{\partial f}{\partial x_3} = o$$

и соответствующая система совокупных уравнений

$$\frac{dx_1}{\varrho_1 x_1} = \frac{dx_2}{\varrho_2 x_2} = \frac{dx_3}{\beta x_2 + \varrho_2 x_3} = dt.$$

Откуда общий интеграл будет вида

$$\left(x_2 e^{-\frac{\rho_2}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2}}\right)^{\rho_1 - \rho_2} \cdot x_1^{\rho_2} x_2^{-\rho_1} = K$$

или

$$x_1^{\rho_2} x_2^{-\rho_2} e^{\frac{-\rho_2(\rho_1 - \rho_2)}{\beta} \cdot \frac{x_3}{x_2}} = K$$

Логарифмируя, снова приходим к ур-ию

$$(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{x_3}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_1} = C$$

Предположим теперь, что *вершина A_1 вырожденного координатного $\triangle$-ка удаляется в бесконечность* (фиг. 14).

Уравнение коннекса в этом случае будет

$$(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 u_1 + \beta x_2 u_3 = o,$$

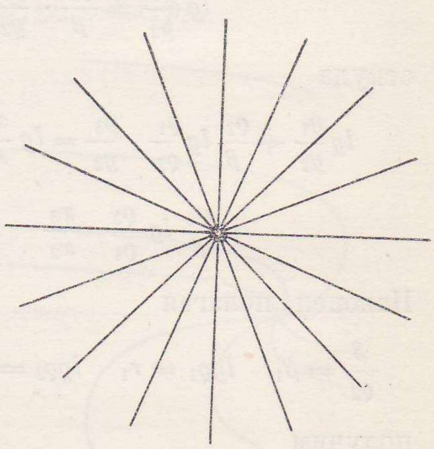
а соответствующее дифференциальное уравнение

$$- a(\varrho_1 - \varrho_2) x_1 dx_2 + \beta x_2 (x_1 dx_2 - \\ - x_2 dx_1) = o$$

Интегрируя, получим

$$\frac{(\varrho_1 - \varrho_2) a}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_1} = C \quad . \ . \ (28)$$

— уравнение интегральных кривых (W—C) фиг. 15.



Фиг. 20.

Предположим далее, *что удаляется в ∞-сть вершина* $A_2 \equiv A_3$ (фиг. 16).

Полагая $x_1 = x_2 - b$, будем для коннекса иметь уравнение.

$$(\varrho_1 - \varrho_2)(x_2 - b) u_1 + \beta x_2 u_3 = o$$

и дифференциальное уравнение вида

$$(\varrho_1 - \varrho_2)(x_2 - b)(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2) - \beta\, b x_2\,dx_2 = o$$

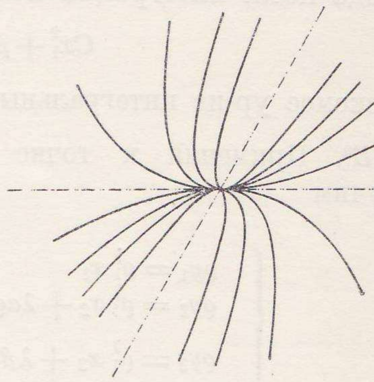
или

$$\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2)}{x_2^{\,2}} - \beta .\, b\,\frac{dx_2}{x_2\,(x_2 - b)} = o$$

откуда общий интеграл будет вида

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{x_3}{x_2} + \beta \log \frac{x_2}{x_2 - b} = C \quad . \ (29)$$

— фиг. 17.



Фиг. 21.

III тип.

A^0. Коллинеация этого типа определяется уравнением (7) и каноническая форма коннекса будет:

$$\varrho_1\, u_1\, x_1 + \varrho_2\,(u_2\, x_2 + u_3\, x_3) = o.$$

Откуда с помощью $u_x = o$ получаем

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\, x_1\, u_1 = o$$

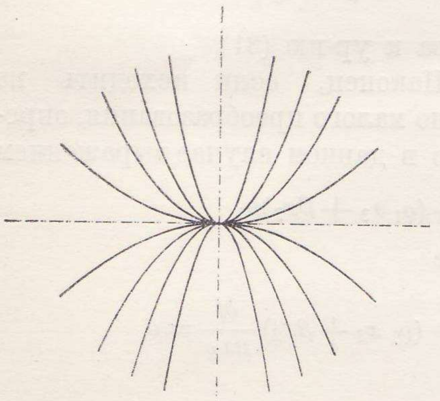
отсюда $u_1 = o$ и далее

$$x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2 = o$$

Интеграция этого уравнения дает

$$x_3 = Cx_2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (30)$$

Семейство кривых, определяемых этим ур-ем, — на фиг. 18.



Фиг. 22.

B^0. λ — кратное применение коллинеации (7) к точке плоскости дает

$$\varrho y_1 = \varrho_1^{\lambda} x_1 \quad \varrho y_2 = \varrho_2^{\lambda} x_2$$
$$\varrho y_3 = \varrho_2^{\lambda}\, x_3$$

Исключение отсюда ϱ и λ приводит к ур-ию (30).

C^0. К этому же ур-ию приходим и от бесконечно малых преобразований, интегрируя в этом случае дифференциальное ур-ие в частных производных вида

$$\varrho_1\, x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \varrho_2\, x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + \varrho_2\, x_3\,\frac{\partial f}{\partial x_3} = o.$$

IV тип.

A^0. Для четвертого типа ур-ия коллинеации суть ур-ия (8). Уравнение соответствующего коннекса

$$\varrho_1\,(u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3) + \alpha x_1\, u_2 + \beta x_2\, u_3 = o$$

Последнее с помощью $u_x = o$ приводится к виду

$$\alpha x_1 u_2 + \beta x_2 u_3 = o$$

и дифференциальное ур-ие искомых кривых будет

$$\alpha x_1 (xdx)_{31} + \beta x_2 (xdx)_{12} = o.$$

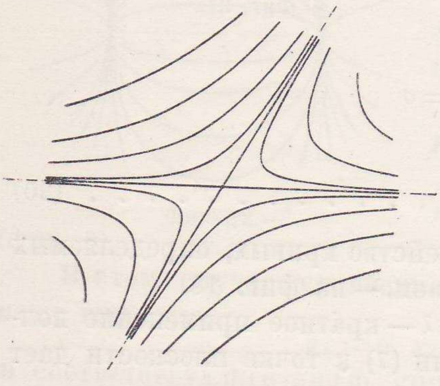
Отсюда после интеграции получаем:

$$Cx_1^2 + \beta x_2^2 - 2\alpha x_1 x_3 = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

— искомое ур-ие интегральных кривых (фиг. 19).

B^0. Применяя к точке плоскости преобразование (8) λ раз, получим

$$\begin{cases} \varrho y_1 = \varrho_1^\lambda x_1 \\ \varrho y_2 = \varrho_1^\lambda x_2 + \lambda\alpha\varrho_1^{\lambda-1} x_1 \\ \varrho y_3 = \varrho_1^\lambda x_3 + \lambda\beta\varrho_1^{\lambda-1} x_2 + \dfrac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\alpha\beta\varrho^{\lambda-2} x_1 \end{cases}$$



Фиг. 23.

После исключения из этих ур-ий ϱ и λ, приходим к ур-ям:

$$-\alpha\frac{y_3}{y_1} + \frac{1}{2}\beta\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = -\alpha\frac{x_3}{x_1} + $$
$$+ \frac{1}{2}\beta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = C$$

т. е. снова к ур-ию (31).

C^0. Наконец, если исходить из бесконечно малого преобразования, определяемого в данном случае выражением

$$Xf \equiv \varrho_1 x_1 p_1 + (\varrho_1 x_2 + \alpha x_1)p_2 + (\varrho_1 x_3 + \beta x_2)p_3$$

получим дифференциальное уравнение

$$\varrho_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\varrho_1 x_2 + \alpha x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (\varrho_1 x_3 + \beta x_2)\frac{\partial f}{\partial x_3} = o$$

и совокупную систему:

$$\frac{dx_1}{\varrho_1 x_1} = \frac{dx_2}{\varrho_1 x_2 + \alpha x_1} = \frac{dx_3}{\varrho_1 x_3 + \beta x_2} = dt$$

Интегралом последней системы будут ур-ия

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\varrho_1 t} \\ x_2 = C_2 e^{\varrho_1 t} + \alpha C_1 t e^{\varrho_1 t} \\ x_3 = C_3 e^{\varrho_1 t} + \beta C_2 t e^{\varrho_1 t} + \dfrac{\alpha\beta}{2} C_1 t^2 e^{\varrho_1 t}. \end{cases}$$

Исключая отсюда t, мы получим вновь уравнение (31)

V тип.

A^0. В последнем случае коллинеация определяется ур-ем (9).

Ур-ие соответствующего коннекса

$$\varrho_1 (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + \alpha x_1 u_2 = o$$

или с помощью $u_x = o$

$$\alpha x_1 u_2 = o$$

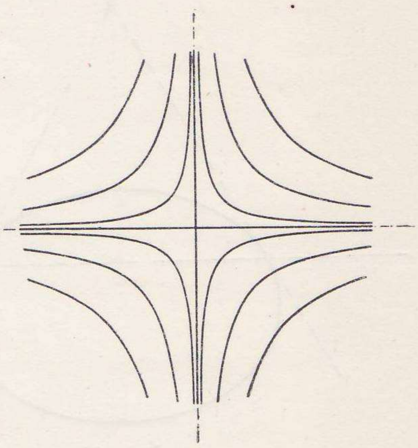
дифференциальное ур-ие кривых главной коинциденции в силу (13) будет:

$$u_2 = o \text{ или } (xdx)_{31} = o$$

откуда

$$x_1 + Cx_3 = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (32$$

— ур-ие интегральных кривых (фиг. 20)



Фиг. 24.

B^0. Применяя и здесь преобразование (9) последовательно λ раз, получим линейное преобразование той же си стемы, именно:

$$\varrho y_1 = \varrho_1^{\lambda} x_1\,, \quad \varrho y_2 = \varrho_1^{\lambda} x_2 + \lambda\, \alpha \varrho_1^{\lambda - 1} x_1\,,$$

$$\varrho y_3 = \varrho_1^{\lambda} x_3$$

Исключение из этих уравнений λ и ϱ дает ур-ие

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_1}{x_3} = C$$

т. е. уравнение (32)

C^0. К тому же ур-ию прийдем, если будем исходить из бесконечно малых преобразований, символ коих в данном случае

$$Xf \equiv \varrho_1 x_1 p_1 + (\alpha x_1 + \varrho_1 x_2) p_2 + \varrho_1 x_3 p_3$$

и дифф. ур-ие траекторий одночленной группы бесконечно малых преобразований

$$\varrho_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\alpha x_1 + \varrho_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \varrho_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = o$$

Интегрируя последнее ур-ие, получим опять ур-ие (32)

Частный случай. Если в системе (9) положить $\alpha = o$, то ур-ия коллинеации принимают вид

$$\varrho y_1 = \varrho_1 x_1\,, \quad \varrho y_2 = \varrho_1 x_2\,, \quad \varrho y_3 = \varrho_1 x_3\,,$$

а уравнение коннекса вид: $u_x = o$.

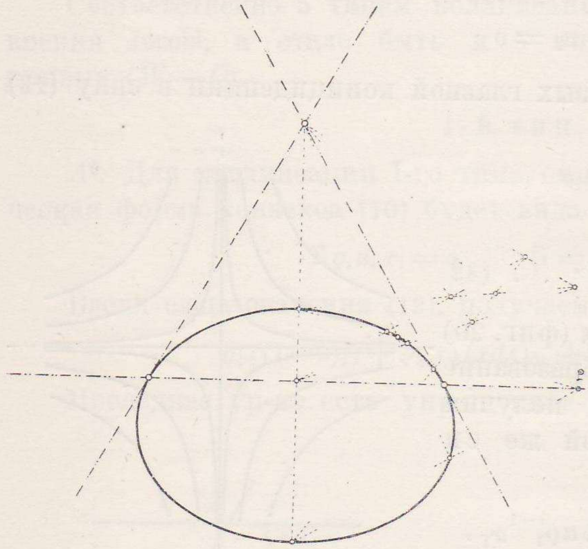
В этом случае, очевидно, каждая точка плоскости остается инвариантной (преобразуется в саму себя).

I. W — C первого типа.

5. Различные виды W—C этого типа.

Для $W-C$ первого типа мы получили уравнения:

A^0. для координатного $\triangle$-ка, все элементы которого вещественны и все вершины находятся на конечном расстояния:



Фиг. 25.

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3} = C,$$

где

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = o \quad . \; . \; (18)$$

или в виде

$$lg \frac{\varrho_2}{\varrho_3} lg \frac{y_1}{x_1} + lg \frac{\varrho_3}{\varrho_1} lg \frac{y_2}{x_2} + $$
$$+ lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2} lg \frac{y_3}{x_3} = o \quad . \; . \; . \; (19)$$

где

$$\nu_1 = lg \frac{\varrho_2}{\varrho_3}, \; \nu_2 = lg \frac{\varrho_3}{\varrho_1}$$

$$\text{и } \nu_3 = lg \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Общее расположение этих кривых имеем на фиг. 7.

B^0. Для координатного $\triangle$-ка, у которого *вершина* A_1 *находится на* ∞*—сти:*

$$x_1^{\varrho_2-\varrho_3} \; x_2^{\varrho_3-\varrho_1} (x_2 + a\, x_3)^{\varrho_1-\varrho_2} = C, \; \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \quad . \; . \; . \; . \; (23)$$

Расположение соответствующих кривых дает фиг. 9.

C^0. Для координатного $\triangle$-ка *с вершиной* A_2 *на* ∞*-сти:*

$$x_1^{\varrho_2-\varrho_3} x_2^{\varrho_3-\varrho_1} (x_1 + a x_3)^{\varrho_1-\varrho_2} = C, \; \varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \; (24)$$

Общее расположение этих кривых имеем на фиг. 11 и 12.

Вторая фигура дает расположение кривых, когда вершина A_2 удаляется в ∞-сть по направлению, перпендикулярному к противоположной стороне.

D^0. Применяя к кривым (18) или, что тоже, к кривым

$$x_2^{\nu_2} \, x_3^{\nu_3} = C x_1^{-\nu_1}$$

проективное преобразование, переводящее *сторону* основного $\triangle$-ка $x_3 = o$ в бесконечно удаленную прямую, получаем ур-ие наших кривых в декартовой системе координат, именно:

$$y = C x^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

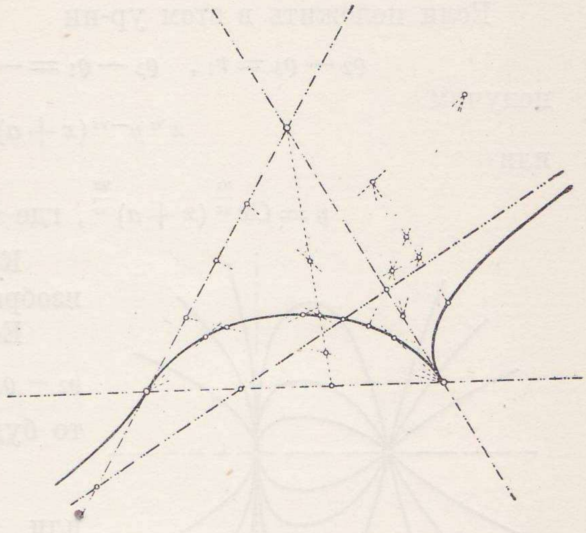
или, если положить $C = a^{1-n}$,

$$y = a^{1-n} \, x^n.$$

Последнее ур-ие

a^0. при $n = \dfrac{p}{p-q} > o$ есть обобщенное ур-ие ***семейства парабол высшего порядка*** (фиг 21 и 22);

b^0. при $n = -\dfrac{p}{p-q} < o$ $[p > q]$ уравнение (33) определяет *семейство гипербол высшего порядка* (фиг. 23 и 24). Таким образом, *все $W-C$ первого типа через соответствующее проективное преобразование переходят в ∞' высших парабол и гипербол*;



Фиг. 26.

c^0. Среди гипербол имеются кривые, определяемые ур-ем

$$x^{\nu_1} y^{\nu_2} = C,$$

где

$$\nu_1 > o, \ \nu_2 > o \text{ и } \nu_1 + \nu_2 = 1.$$

Это так называемые *политропные кривые;*

d^0. при n—иррациональном, ур-ие (33) определяет интерсцендентные параболы и гиперболы (*адиабаты*);

E^0. При $C = 1$ уравнение (18) принимает вид

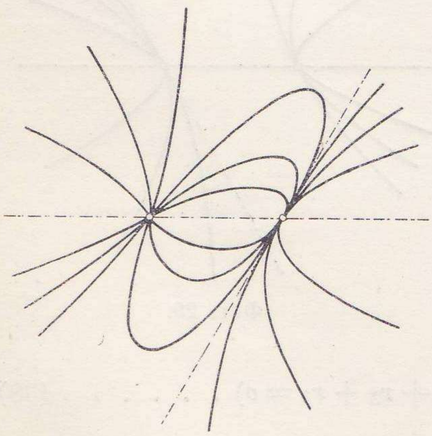
$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3} = 1 \ (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = o) \quad (34)$$

Введя в рассмотрение барицентрические координаты μ_1, μ_2, μ_3, связь коих с прямолинейными выражается ур-ми

$$\sigma\mu_1 = l_1 x_1, \ \sigma\mu_2 = l_2 x_2, \ \sigma\mu_3 = l_3 x_3$$

мы ур-ие (34) приводим к виду

$$\frac{\mu_1}{l_1^t} = \frac{\mu_2}{l_2^t} = \frac{\mu_3}{l_3^t}$$



Фиг. 27.

Последнее ур-ие дает нам кривые, определяющие *геометрическое место точек, барицентрические координаты коих μ_1, μ_2, μ_3 пропорциональны одной и той же степени t соответствующих сторон l_1, l_2 и l_3.*

Имеем кривые „*Les potentielles triangulaires*“ *de Longchamps*—фиг. 25 и 26. [*G. de Longchamps* „Sur la potentielle triangulaire“ Mathesis т. VI. 1886].

F^0. Как и в случае D^0, применяя к кривым (24) преобразование $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ получим ур-ие

$$x^{\rho_2-\rho_3}\, y^{\rho_3-\rho_1}\, (x+a)^{\rho_1-\rho_2} = C.$$

Если положить в этом ур-ии

$$\rho_2 - \rho_3 = \nu_1\,, \quad \rho_3 - \rho_1 = -\nu_2 \text{ и } \rho_1 - \rho_2 = \nu_3\,,$$

получим

$$x^{\nu_1}\, y^{-\nu_2}\, (x+a)^{\nu_3} = C$$

или

$$y = C x^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} (x+a)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}}, \text{ где } \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Кривые, определяемые этим ур-ем изображены на фиг. 27—30.

Если положить

$$\rho_2 - \rho_3 = \nu_1\,, \ \rho_3 - \rho_1 = \nu_2\,, \ \rho_1 - \rho_2 = \nu_3$$

то будем иметь

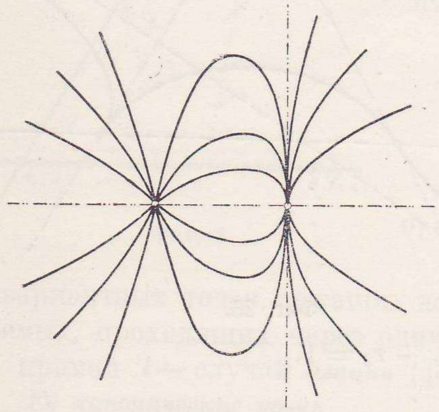
$$x^{\nu_1}\, y^{\nu_2}\, (x+a)^{\nu_3} = C$$

или

$$y = \frac{C}{x^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} (x+a)^{\frac{\nu_3}{\nu_2}}}$$

где

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = o. \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$



Фиг. 28.

Расположение кривых имеем на фиг. 31 и 32.

G^0. Аналогично, применяя к кривым (23) то же преобразование

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1$$

получим

$$x^{\rho_2-\rho_3}\, y^{\rho_3-\rho_1}\, (y+a)^{\rho_1-\rho_2} = C$$

Если положить здесь

$$\rho_3 - \rho_1 = +\nu_2 \quad \rho_1 - \rho_2 = \nu_3$$
$$\text{и } \rho_2 - \rho_3 = -\nu_1\,,$$

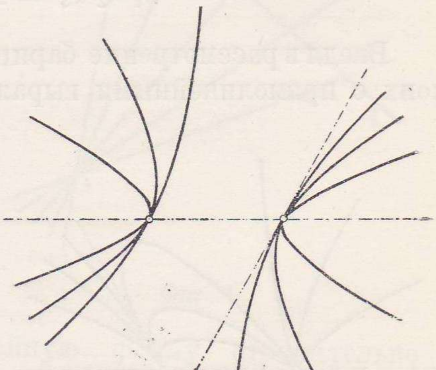
то будем иметь

$$x = C y^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (y+a)^{\frac{\nu_3}{\nu_1}}, \ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = o) \quad (37)$$

Если положить

$$\rho_3 - \rho_1 = \nu_2\,, \quad \rho_1 - \rho_2 = \nu_3\,,$$
$$\rho_2 - \rho_3 = \nu_1\,,$$

то получим



Фиг. 29.

$$x = \frac{C}{y^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (y+a)^{\frac{\nu_3}{\nu_1}}}, \quad (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = o) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Кривые, определяемые ур-ми (37) и (38), расположатся аналогично фиг. 27—32.

6⁰. *Свойства W—C первого типа.*

A^0. 1. Кривые, определяемые ур-ем (19). вообще ***трансцендентны***, они будут ***алгебраическими***, если $lg \frac{\varrho_i}{\varrho_k}$ — числа целые, положительные или отрицательные.

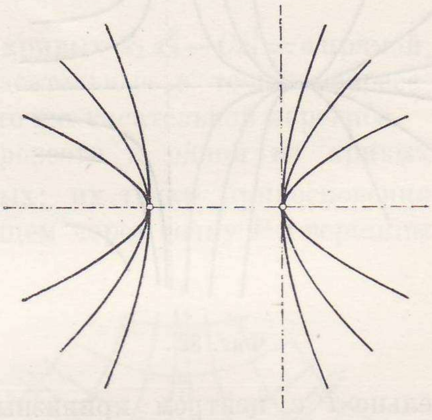
2. Уравнение W—C в тангенциальных координатах будет того же вида, что и в точечных, т. е.

$$u_1^{\nu_1}\ u_2^{\nu_2}\ u_3^{\nu_3} = C \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (39)$$

3. Из ур-ий (18) и (39) следует, что в случае вещественного $\triangle$-ка все вещественные W—C проходят через две его вершины и в этих вершинах они касаются его сторон.

4. W—C имеют особенные точки только в вершинах основного $\triangle$-ка, и двойственно: только стороны основного $\triangle$-ка могут быть особенными касательными.

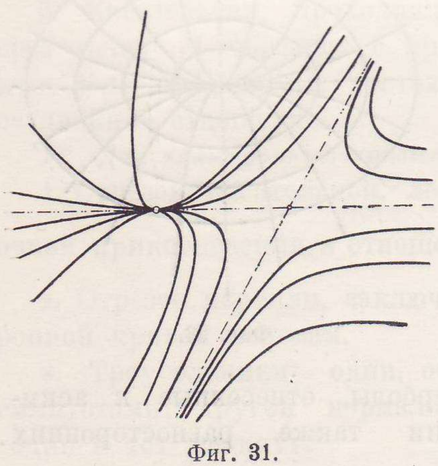
5. Совокупность линейных преобразований (4) переводит координатный $\triangle$-к и W—C в себя самих.



Фиг. 30.

6. Касательная к какой-либо из W—C системы образует с другими кривыми точечный ряд *u*. Меняя положение касательной, будем получать точечные ряды, проективные первоначальному ряду.

7. Двойное отношение точки прикосновения касательной к кривой W и трех точек пересечения касательной со сторонами основного $\triangle$-ка постоянно на всей кривой и на каждой кривой той же системы.



Фиг. 31.

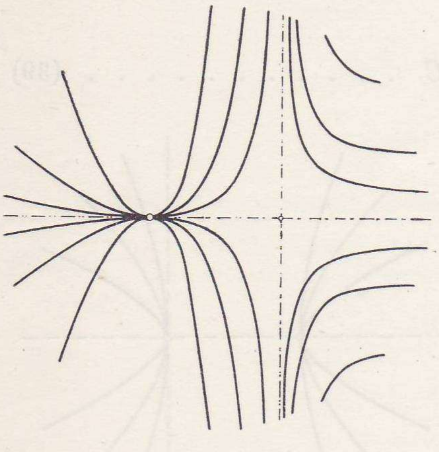
8. Касательные в любой точке P кривой W образует с тремя прямыми, соединяющими P с вершинами координатного $\triangle$-ка, постоянное двойное отношение.

9. Если на каждой касательной T кривой W определим точку P, составляющую с тремя точками пересечения T со сторонами основного $\triangle$-ка постоянное двойное отношение, то точка P опишет W—C той же системы.

10. Если в каждой точке P кривой W построим прямую, образующую с прямыми PA_1, PA_2 PA_3 постоянное двойное отношение, то эта прямая огибает W—C той же системы,

11. Точки кривых (18), которых касательные проходят через точку $(x_1\,x_2\,x_3)$, лежат на коническом сечении, проходящем через вершины $A_1\,A_2\,A_3$ и точку $(x_1\,x_2\,x_3)$.

12. Если во всех точках пересечения прямой с системой $W—C$ проведем касательные, то последние касаются конического сечения, которое касается секущей прямой и трех сторон основного $\triangle$-ка.



Фиг. 32.

13. Взаимная поляра W—кривой системы относительно конического сечения, имеющего основным $\triangle$-ком полярный $\triangle$-к, есть кривая той же системы.

14. Если в точке $W—C$ проведем коническое сечение, которое ее касается и которое в то же время проходит через вершины основного $\triangle$-ка, то радиус кривизны W—C в точке касания вдвое больше радиуса кривизны (в этой же точке) конического сечения [Fouret, Jamet].

15. Центр кривизны $W—C$ в точке P расположен симметрично относительно P с центром кривизны конического сечения, проходящего через вершины основного $\triangle$-ка и касательного к $W—C$ в точке P.

16. Всякая ковариантная кривая относительно $W—C$ есть кривая той же системы.

17. W - C принадлежат к системе с характеристиками $\mu = 1$, $\nu = 1$.

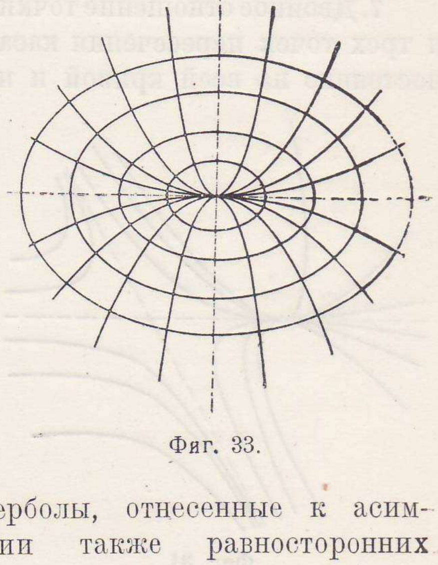
B^0. *В частности для парабол и гипербол высшего порядка $y = Cx^n$:*

1. Ортогональные траектории $W—C$ определяемых ур-ем $y = Cx^n$ выражаются ур-ем

$$x^2 + ny^2 = C$$

т. е. *$W—C$ суть ортогональные траектории подобных концентрических конических сечений.*

При $n = 2$: параболы $y = Cx^2$ суть траектории концентрических подобных и подобно расположенных эллипсов—фиг. 33;



Фиг. 33.

при $n = -1$: равносторонние гиперболы, отнесенные к асимптотам суть ортогональные траектории также равносторонних гипербол—фиг. 34.

2. Двойное отношение точки прикосновения касательной к кривой с точкми пересечения ее со сторонами $\triangle$-ка равно n.

3. Геометрическое место оснований нормалей, проведенных из точки (xy) плоскости к кривой $x^p\ y^{p-q} = a^{2p-q}$ есть обыкновенная гипербола.

C^0. *Для кривых 2-го пор.* $x_2\, x_3 - C x_1^2 = o$ [получаемых из ур-я (19) при условии $\varrho_2\, \varrho_3 - \varrho_1^2 = o$].

1. Если через вершину A_i основного $\triangle$-ка проведем две прямые, то прямые, соединяюшие их точки пересечения с кривыми $x_2 x_3 - C x_1^2 = o$, пересекаются в одной точке P противоположной стороны (фиг. 25).

D^0. *Для кривых 3-го пор.* $x_2\, x_3^2 - C x_1^2 = o$ [получаемых из ур-ия (19) при условии $\varrho_2\, \varrho_3^2 - \varrho_1^3 = o$].

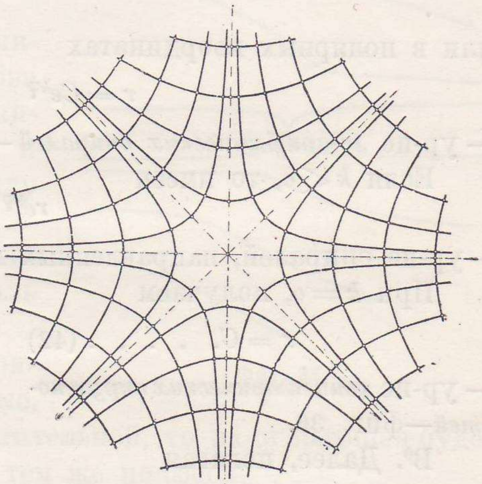
1. Если пересечем прямой систему кривых $x_2\, x_3^2 - C x_1^3 = o$ прямой, проходящей через точку возврата, то касательные в точках пересечения все сходятся в одной и той же точке касательной перегиба.

3. Из точки P плоскости можно провести к одной из кривых семейства $x_2\, x_3^2 - C x_1^3 = o$ *три* касательных; их точки прикосновения лежат на коническом сечении, проходящем через точку P и вершины A_1, A_2, A_3 основного $\triangle$-ка.

3. Касательные эти имеют всегда одно и тоже двойное отношение с PA_1 (или PA_3), если точка P движется по какой либо другой кривой нашей системы.

4. Из точки касательной перегиба к какой либо кривой системы можно провести *одну* касательную; из точки касательной возврата — *две* касательные; из точки M кривой — *одну* касательную.

5. Касательная, проходящая через точку M образует с прямыми MA_1, MA_2, и MA_3 постоянное двойное отношение.



Фиг. 34.

E^0 *Для политропных кривых.*

1. Отрезок касательной, лежащей между асимптотами, делится точкой прикосновения в отношении $\dfrac{v_1}{v_2}$.

2. Отрезок нормали, заключенной между осями, делится политропной кривой пополам.

3. Треугольники: один, образованный касательной и обоими асимптотами, другой нормалью и обоими осями — оба вписаны в один и тот же круг.

F^0. *Для потенциальной кривой.*

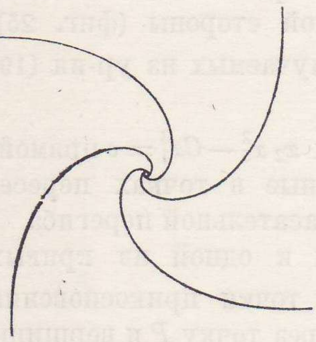
1. Потенциальная кривая $\triangle$-ка проходит через его центр тяжести.

2. Кривая Longchamps'а проходит через центр вписанного в $\triangle$-к круга, через центр тяжести $\triangle$-ка и точку Lemoin'а.

3. Кривая Longchamps'а проходит через две конечные точки средней стороны и в них касается обоих других сторон $\triangle$-ка.

I⁰. *W—C для коорд. $\triangle$-ка с мнимыми элементами.*

[Частный случай $W—C$ первого типа].



Фиг. 35.

7⁰. *Различные виды W—C в этом случае.*

В этом случае $W—C$ определяются ур-м:

$$\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_2}\, e^{A\,\mathrm{arctg}\frac{x_2}{x_1}} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

A^0. Применяя к ним преобразование, переводящее

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1,$$

получаем

$$\sqrt{x^2+y^2}\; e^{A\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}} = C \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

или в полярных координатах

$$r = Ce^{k\varphi} \quad \text{при } k > o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

— ур-ие *логарифмических спиралей* — фиг. 35.

Если $k < o$, то имеем

$$re^{k\varphi} = C$$

—ур-ие спиралей, направленных в обратную сторону.

При $k = o$, получаем

$$r = C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

— ур-ие *концентрических окружностей*—фиг. 36.

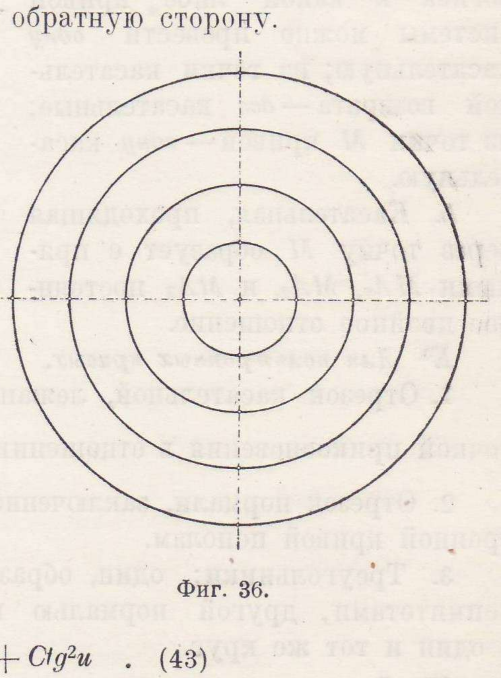
B⁰. Далее, полагая

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = y,$$

получим

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{y}\, e^{A\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}} = C$$

Переходя к полярным координатам и полагая $\frac{1}{x} = tgu$ будем иметь ур-ие



Фиг. 36.

$$r^2 = \frac{Ce^u}{\sin^2 u} + Ctg^2 u \quad . \quad (43)$$

Получаем уравнение кривых, расположение которых имеем на фиг. 37.

8^0. *Свойства логарифмической спирали.*

1. Логарифмическая спираль пересекает радиусы векторы, выходящие из точки O под одним и тем же углом.

2. Полюс логарифмической спирали есть асимптотическая точка.

3. Радиус кривызны логарифмической спирали = длине полярной нормали.

4. Натуральное уравнение логарифмической спирали

$$ks = \rho - \sqrt{k^2 + 1}\; C.$$

5. Длина дуги логар. спирали от полюса до точки P

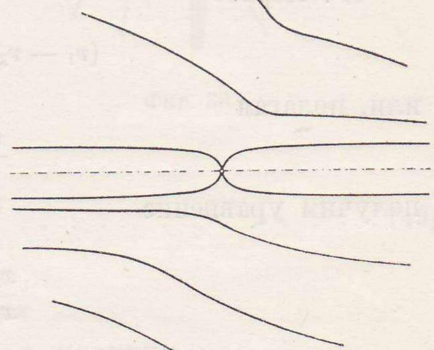
$$s = \frac{r}{\cos\varphi} = PT$$

— длине касательной в точке P до пересечения ее с перпендикуляром к радиусу вектору OP в точке O.

6. Все логарифмические спирали с одним и тем же углом под'ема подобны.

7. Каждая логарифмическая спираль относительно полюса подобна сама себе; все логарифмические спирали с одним и тем же полюсом и углом под'ема конгруэнтны между собой.

8. Эволюта логарифмической спирали есть конгруэнтная спираль с тем же полюсом.



Фиг. 37.

9. Если через все точки логарифмической спирали проведем прямые, образующие постоянный угол с касательной, то их огибающая будет снова логарифмическая спираль с тем же полюсом.

10. Подэра логарифмической спирали относительно полюса есть снова логарифмическая спираль с тем же полюсом и тем же углом под'ема.

11. Если в полюсе логарифмической спирали поместить светящуюся точку, то каустика будет снова логарифмическая спираль, конгруэнтная данной.

12. Если через точку P плоскости проведем касательные ко всем завиткам логарифмической спирали, то геом. м. точек прикосновения есть окружность, проходящая через точку P и полюс спирали.

13. Логарифмическая спираль принадлежит к системе кривых с характеристиками $\mu = 1$, $\nu = 1$.

14. Если пересечем логарифмическую спираль прямой u и во всех точках пересечения построим касательные, то огибающая последних будет парабола, касающаяся прямой u и имеющая своим фокусом полюс спирали.

15. Взаимная поляра логарифмической спирали относительно соприкасающейся равносторонней гиперболы с центром в полюсе есть снова логарифмическая спираль той же системы.

16. Зная две точки и полюс, можно построить сколько угодно точек логарифмической спирали.

17. Если угол φ возрастает в арифметической прогрессии, то радиусы векторы, выходящие из полюса, возрастают в геометрической прогрессии.

18. Зная две ее точки P_1, P_2 и полюс O, строим на OP_2 треугольник OP_2P_3 подобный Δ-ку OP_1P_2. Полученная точка P_3 будет принадлежать нашей кривой.

Подобное построение можно продолжить и дальше.

II. W—C второго типа.

9⁰. Различные виды кривых этого типа.

Для $W-C$ второго типа мы получили уравнения:

A^0. Первое

$$(v_1 - v_2)\frac{x_3}{x_2} + \beta\, lg\frac{x_2}{x_1} = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

или, полагая

$$\frac{v_1 - v_2}{\beta} = \frac{1}{b}$$

получим уравнение

$$\frac{x_2}{x_1}\, e^{\frac{x_3}{bx_2}} = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Общее расположение кривых, определяемых этим ур-ем имеем на фиг. 13.

B^0. Для случая, когда вершина A_1 удаляется в бесконечность, уравнение кривых принимает вид

$$\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)a}{x_2} + \beta\, lg\frac{x_2}{x_1} = C. \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Соответствующие кривые изображены—на фиг. 15.

C^0. Когда удаляется в бесконечность точка $A_2 = A_3$, то уравнение кривых в этом случае будет вида:

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{x_3}{x_2} + \beta\, lg\frac{x_2}{x_2 - b} = C \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Кривые, определяемые этим ур-ем,—на фиг. 17.

D^0. Применяя к кривым (44) преобразование, при котором

$$x_1 = y,\ x_2 = x \text{ и } x_3 = 1,$$

получим

$$y = Cx\, e^{\frac{1}{bx}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Кривые, соответствующие этому уравнению имеем на фиг. 38.

Уравнение кривых (44) в линейных координатах будет

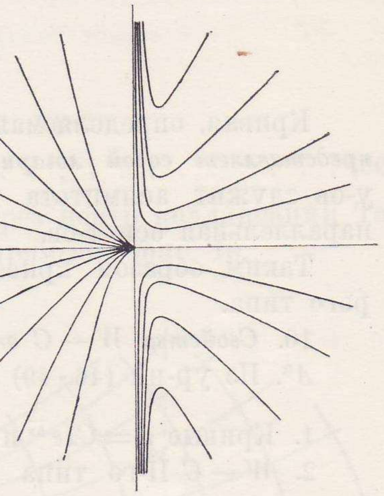
$$\frac{u_1}{bu_3} = C e^{\frac{u_2}{bu_3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Применяя к нему преобразование

$$u_1 = v, \ u_2 = u, \ u_3 = 1$$

получим

$$v = C e^{\frac{u}{b}} \quad . \quad . \quad (47)$$



Фиг. 38.

E^0. Применяя к кривым (44) преобразование

$$x_1 = y, \ x_2 = 1 \ \text{и} \ x_3 = x$$

и соответственно

$$u_1 = v, \ u_2 = 1 \ \text{и} \ u_3 = u$$

получим из уравнения (44)

$$y = C e^{\frac{x}{b}} \quad . \quad . \quad (48)$$

—ур-ие *семейства логарифмических кривых*—фиг. 39,

а из уравнения (45)

$$v = C u e^{\frac{1}{bu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

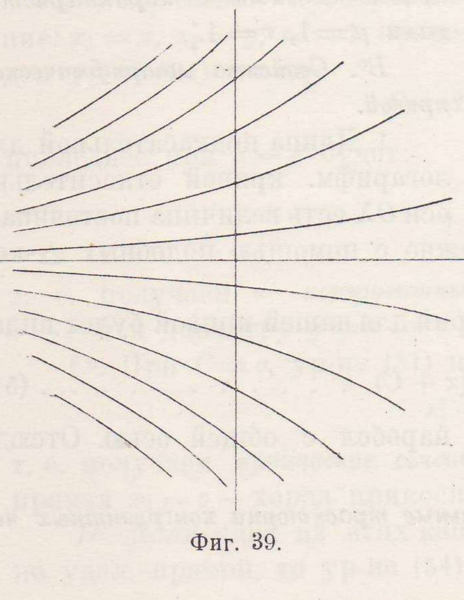
F^0. Применяя преобразование

$$x_1 = y, \ x_2 = x$$

к кривым (28) и полагая $(\varrho_1 - \varrho_2)\, a = -\alpha$, получим

$$y = C x e^{\frac{\alpha}{\beta x}}$$

т. е. кривые типа (46).



Фиг. 39.

G^0. Применяя преобразование

$$x_2 = y, \ x_3 = x$$

к кривым (29) и полагая $\varrho_1 - \varrho_2 = \alpha$, $\frac{\alpha}{\beta} = A$ и $C = lg\, \frac{1}{C'}$ получим

$$y = \frac{b}{1 - Ce^{A\frac{x}{y}}}$$

или в полярной системе координат

$$r = \frac{b}{\sin\varphi\, (1 - Ce^{A\, ctg\varphi})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Кривые для этого уравнения имеем на фиг. 40.

H^0. Отнесем логарифмическую кривую, определяемую ур-м (48) к косоугольной системе координат, в которой примем: за ось OY прямую, проходящую через начало под углом $\varphi = 45^0$ к оси OX, а за новое начало точку $(0, -b)$.

В этой новой системе координат ур-ие (48) будет вида:

$$X - Y + a = Ce^{-\frac{1}{\alpha}} \text{. . . . .} \quad (51)$$

Кривая, определяемая последним ур-м, наз. ***кривой Debeaune'a. Она представляет собой логарифмику, отнесенную к косоугольным осям:*** осью у-ов служит асимптота кривой $x - y + a = o$, а осью x-ов прямая, параллельная оси x-ов.

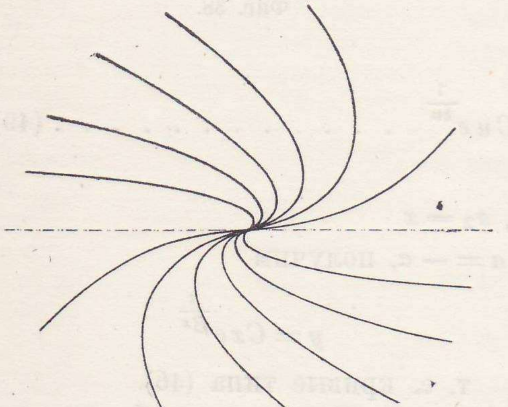
Таким образом кривая Debeaune'a принадлежит к $W - C$ второго типа.

10. ***Свойства $W - C$ второго типа.***

A^0. Из ур-ий (46-49) следует, что

1. Кривые $y = Cxe^{\frac{1}{bx}}$ и $y = Ce^{\frac{x}{b}}$ двойственны.
2. $W - C$ II-го типа суть проекции лагарифмических кривых.
3. Если из любой точки P плоскости провести касательные к $W - C$ II-го типа, то геом. место точек прикосновения есть коническое сечение, проходящее через точку P и точку A_3 $(x_1 = o, x_2 = o)$, иначе

$W - C$ кривые II-го типа суть кривые системы с характеристиками $\mu = 1$, $\nu = 1$.



Фиг. 40.

B^0. ***Свойства логарифмической кривой.***

1. Длина подкасательной для логарифм. кривой относительно оси OX есть величина постоянная.
2. Зная одну точку кривой, можно с помощью подобных $\triangle$-ков построить все ее остальные точки.
3. Ур-ие ортогональных траекторий для нашей кривой будет вида:

$$y^2 = 2p\ (x + C) \text{ . . . .} \quad (51)$$

т. е. имеем систему конгруэнтных парабол с общей осью. Отсюда можно сказать:

$W - C$ II-го типа суть ортогональные траектории конгруэнтных паробол с общей осью. Фиг. 41.

C^0. ***Свойства кривой Debeaune'a***

1. Если длину отрезка асимптоты, заключенного между точками пересечения с нею касательной и прямой, проходящей через точку

касания II-но оси абсцисс, назовем *подкасательной*, то *длина подкасательной кривой Debeaune'а есть величина постоянная.*

2. Геом. м. касательных, проведенных из точки P плоскости к данной кривой будет *гипербола*, проходящая через эту точку, стало быть *Кривая Debeaune'а есть кривая системы с характеристиками* $\mu = 1$, $\nu = 1$.

III. W — C остальных типов

11⁰. *W — C третьего типа.*

В случае перспективной коллинеации ур-ие

$$x_3 = Cx_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

определяет *пучок прямых*, проходящих через центр коллинеации Таким образом в этом случае $W—C$ суть прямые — фиг. 18.

12⁰. *W—C четвертого типа.*

В этом случае ур-ие

$$Cx_1^2 + \beta x_2^2 - 2\alpha x_1 x_3 = o \quad . \; (31)$$

дает пучек конических сечений — фиг. 19.

A^0. Применяя преобразование, при котором

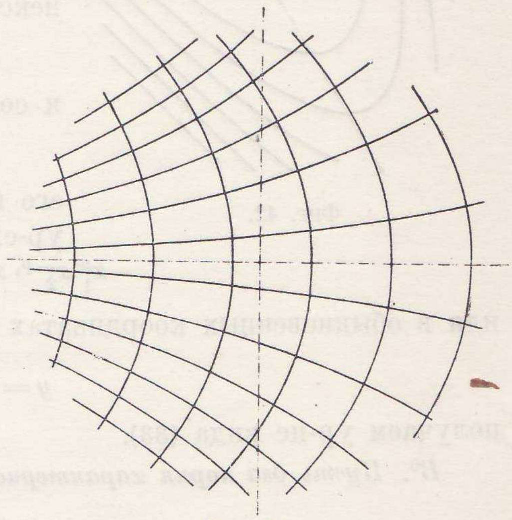
$$x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = 1$$

получим

$$Cx^2 + \beta y^2 - 2\alpha x = o \quad . \; (52)$$

— *пучок конических сечений, имеющих соприкосновение 3-го пор.*

B^0. Применяя преобразование: $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_1 = 1$, приведем ур-ие (31) к виду



Фиг. 41.

$$C + \beta x^2 - 2\alpha y = o;$$

последнее при $\alpha = \beta$ будет:

$$y - \frac{1}{2} x^2 = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; (53)$$

т. е. получаем ∞' *конгруэнтных парабол*, отнесенных к касательной $x = o$ и к диаметру $y = o$ (ось параб.) — фиг. 42 и 43.

C^0. При $C = o$, ур-ие (31) переходит при $\beta = \alpha$ в ур-ие

$$x_2^2 - 2x_1 x_3 = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

т. е. получаем *коническое сечение*, касающееся прямых $x_1 = o$, $x_3 = o$; прямая $x_2 = o$ — хорда прикосновения — фиг. 25.

D^0. Если одна из этих касательных, напр. $x_1 = o$ совпадает с ∞ — но удал. прямой, то ур-ие (54) приводится к виду

$$x_2^2 - 2x_3 = o$$

т. е. снова получаем *параболу*.

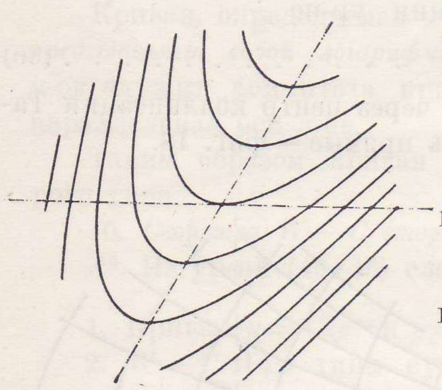
13^0. *$W-C$ пятого типа.*

В данном случае ур-ие

$$x_1 + Cx_3 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

определяет *пучок прямых*, проходящих через центр гомологии ($x_1 = o$, $x_3 = o$), лежащей на оси—фиг. 20.

14^0. ***Случаи вырожденной коллинеации и $W-C$.***



Фиг. 42.

Когда один или несколько корней характеристического уравнения $\triangle(\varrho) = 0$ обращаются в нуль, соответствущая коллинеация наз. *вырожденной.*

Рассмотрим следующие случаи:

A^0. Пусть один из корней, напр. $\varrho_3 = 0$.

Тогда каноническая форма коннекса (15) переходит в

$$\varrho_1 u_1 x_1 + \varrho_2 u_2 x_2 = 0$$

и соответствующее дифф. ур-ие будет

$$\varrho_1 x_1 (xdx)_{23} + \varrho_2 x_2 (xdx)_{31} = 0$$

его интегральные кривые определяются ур-ем:

$$x_1^{\varrho_2} x_2^{-\varrho_1} x_3^{\varrho_1 - \varrho_2} = C$$

или в обыкновенных координатах

$$y = Cx^{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

получаем ур-ие вида (33).

B^0. Пусть два корня характеристического ур-ия $= 0$, напр.

$$\varrho_2 = \varrho_3 = 0.$$

Ур-ие коннекса [A^0 стр. 41] в этом случае будет

$$\varrho_1 u_1 x_1 + \beta x_2 u_3 = 0,$$

соответствующее дифференц. ур-ие

$$\varrho_1 x_1 (xdx)_{23} + \beta x_2 (xdx)_{12} = 0.$$

Его интеграл

$$\varrho_1 \frac{x_3}{x_2} + \beta lg \frac{x_2}{x_1} = C$$

Получаем ур-ие вида (27).

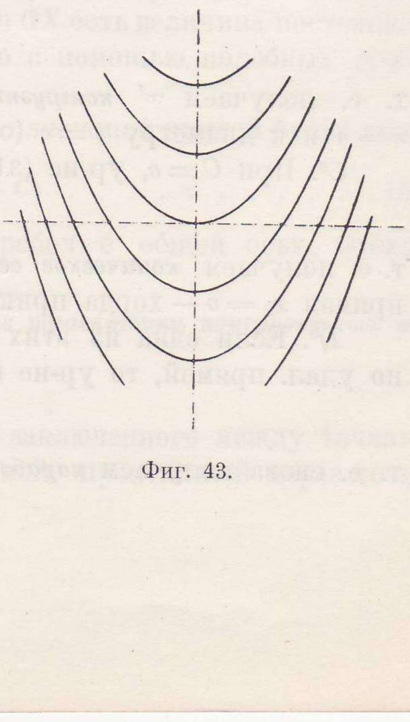
C^0. Наконец, когда все 3 корня характ. ур. равны нулю: $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$.

Каноническая форма коннекса [A^0 стр. 43 тип IV] имеет вид:

$$\alpha x_1 u_2 + \beta x_2 u_3 = 0$$

а диффр. ур-ие

$$\alpha x_1 (xdx)_{31} + \beta x_2 (xdx)_{12} = 0.$$



Фиг. 43.

Его интегральные кривые определятся ур-ем:

$$Cx_1^2 + \beta x_2^2 - 2\alpha x_1 x_3 = 0,$$

в этом случае приходим к ур-ию (31).

Таким образом с геометрической стороны вырожденные коллинеации ничего нового не дают. Во всех указанных случаях получаем рассмотренные выше кривые.

15⁰. *Значение $W—C$ в теории дифференциальных ур-ий.*

Расположение интегральных кривых ур-ия Jacobi (или что тоже $W—C$) вблизи его особенных точек лежит, как известно, в основе классификации обыкновенных критических точек дифференциального ур-я 1-го порядка и 1-ой степени.

Последняя классификация дана H. Poincaré.

[H. Poincaré. „Sur les courbes définies par les équations différentielles" J. de Math. (3), 7, 1881].

Однако следует заметить, что типы особенных точек, установленные H. Poincaré, *впервые встречаются в работе Н. Жуковского.* Кинематика жидкого тела Матем. Сб. Т. VIII, 1876, стр. 61 или Соч. I, стр. 92.

На это обстоятельство, а также и на то, что *вопрос о критических точках дифференциального ур-ия тесно связан с изучением различных типов самопроективных кривых* ($W—C$) обращает внимание проф. Д. М. Синцов. [Д. М. Синцов. Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек диффер. ур-я 1-го пор. 1924 г.].

В своей работе Н. Жуковский рассматривает для бесконечно малых линий токов следующее дифф. ур-ие

$$\frac{dx_1}{m_1 x_1 - nx_2} = \frac{dx_2}{nx_1 + m_2 x_2} = \frac{dx_3}{kx_3}$$

или в обыкновенных координатах

$$\frac{dx}{m_1 x - ny} = \frac{dy}{nx + m_2 y}.$$

Взяв последнее ур-ие в виде

$$dx\,(nx + m_2 y) = dy\,(m_1 x - ny)$$

и заменив в нем

$$m_1 = \frac{m_2 + m_1}{2} - \frac{m_2 - m_1}{2}$$

$$m_2 = \frac{m_2 + m_1}{2} + \frac{m_2 - m_1}{2},$$

умножим на интегрирующий множитель

$$M = \frac{1}{(m_2 - m_1)\,xy + n\,(x^2 + y^2)}$$

Тогда получим

$$\frac{(m_2-m_1)(ydx+xdy)+2n(xdx+ydy)}{(m_2-m_1)xy+n(x^2+y^2)}=\frac{(m_2+m_1)(xdy-ydx)}{(m_2-m_1)xy+n(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{\frac{m_2+m_1}{n}\,d\frac{y}{x}}{\frac{y_2}{x_2}+\frac{m_2-m_1}{n}\cdot\frac{y}{x}+1}\qquad\ldots\ldots\quad(55)$$

Определив кривые, удовлетворяющие этому ур-ию, Жуковский исследует также и его критические точки, понимая под последними „точки, в которых линии токов пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну“.

Рассматривает он следующие случаи:

A^0. ***Первый, когда*** $(m_2-m_1)^2>4n^2$

В этом случае ур-ие интегральных кривых имеет вид:

$$\log\left[(m_2-m_1)xy+n(x^2+y^2)\right]=$$

$$=\log C+\frac{m_2+m_1}{\sqrt{(m_2-m_1)^2-4n^2}}\log\frac{2n\left(\frac{y}{x}\right)+(m_2-m_1)-\sqrt{(m_2-m_1)^2-4n^2}}{2n\left(\frac{y}{x}\right)+(m_2-m_1)+\sqrt{(m_2-m_1)^2-4n^2}}$$

Положив

$$ny+\frac{(m_2-m_1)-\sqrt{(m_2-m_1)^2-4n^2}}{2}x=\sqrt{n}.\lambda.X$$

$$ny+\frac{(m_2-m_1)+\sqrt{(m_2-m_1)^2-4n^2}}{2}x=\sqrt{n}.\lambda.Y,$$

получим

$$XY=C\left(\frac{X}{Y}\right)^A,$$

где

$$A=\frac{m_2+m_1}{\sqrt{(m_2-m_1)^2-4n^2}}$$

Обозначая

$$1-A=-r_2\qquad 1+A=r_1,$$

будем иметь

$$Y=CX^{\frac{r_2}{r_1}}$$

— ур-ие, рассмотренное нами выше [стр. 15, ур-ие (33)].

Отсюда:

I^0. При $\frac{r_2}{r_1}>0$ получаем ур-ие парабол высшего порядка, изображенных на фиг. 21 и 22.

II⁰. При $\frac{r_2}{r_1} < 0$ — ур-ие гипербол высшего порядка; расположение кривых на фиг. 23 и 24.

III⁰. При $\frac{r_2}{r_1} = 1$ — ур-ие пучка прямых — фиг. 20.

Рассматривая расположение кривых во всех этих случаях, а также сравнивая полученные результаты с работой Walther von Dyck'a.

[*Walther von Dyck*. „Ueber die singulären Stellen eines Systems von Differentialgeichûngen erster Ordnûng. München Ber. 1909],

приходим к следующим выводам:

В I-ом случае — ***всякая*** линия тока (интегральная кривая) ***проходит*** через критическую точку.

Такую точку называют *узлом*. [noeud — H. Poincaré, Knotenpunkt — W. Dyck].

Во II-ом случае — через критическую точку проходят две и только две линии тока (две интегральные кривые) — у нас: асимптоты гипербол, получающиеся из ур-ия (33) при $C = 0$.

Такую точку называют ***нейтральной***, [Col — Poincaré, Doppelpûnktt — W. Dyck].

В III-м — имеем критическую точку — Büschelpûnkt [— W. Dyck].

B⁰ Рассмотрим теперь расположение кривых при условии, когда

$$(m_2 - m_1)^2 - 4n^2 = 0.$$

В этом случае ур-ие (55), представленное в виде

$$\frac{(m_2 - m_1)(ydx + xdy) + 2n(xdx + ydy)}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{m_2 + m_1}{n} d\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x} + \frac{m_2 - m_1}{2n}\right)^2 + 1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4n^2}} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

преобразуется в

$$\frac{(m_2 - m_1)(ydx + xdy) + 2n(xdx + ydy)}{(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{m_2 + m_1}{n} d\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x} \pm 1\right)^2}$$

Интегрируя последнее ур-ие и полагая затем $\frac{m_2 + m_1}{n} = B$, получим

$$\log[(m_2 - m_1)xy + n(x^2 + y^2)] = \log C + B\frac{1}{\frac{y}{x} \pm 1}.$$

или

$$(m_2 - m_1)\, xy + n\,(x^2 + y^2) = Ce^{B\frac{1}{\frac{y}{x} - 1}}$$

и наконец, в полярных координатах

$$(m_2 - m_1)\, r^2 \sin\varphi \cos\varphi + nr^2 = Ce^{\frac{B}{tg\varphi \pm 1}}$$

При $m_2 - m_1 = -2n$:

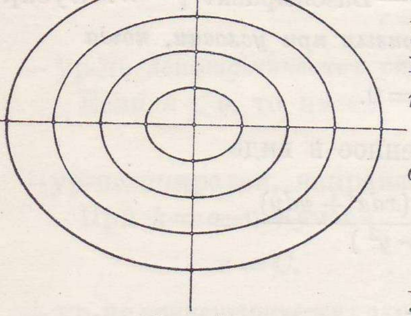
$$r^2\,(1 - \sin 2\varphi) = Ce^{\frac{B}{tg\varphi \pm 1}}$$

и, наконец, заменяя $\varphi = \frac{\pi}{4} + u$, имеем при верхнем знаке

$$r = \frac{C}{\sin u e^{ctg u - 1}},$$

где $B = 4$.

В рассматриваемом случае все интегральные кривые проходят через полюс (Фиг. 40).



Фиг. 44.

VI. *Эту точку Жуковский выделяет в точку, отличную от узла.* В случае узла, если взять всю систему кривых, имеем точку перегиба, *а здесь — точку пресечения (остановки).*

В схеме W. Dyck'а последняя точка отсутствует.

C⁰. *В том случае, когда*

$$(m_2 - m_1)^2 - 4n^2 < 0$$

ур-ие (55) дает:

$$\log\left[(m_2 - m_1)\, xy + n\,(x^2 + y^2)\right]$$

$$= \log C + \frac{2(m_2 + m_1)}{n\sqrt{4n^2 - (m_2 - m_1)^2}}\; arctg\, \frac{2n\frac{y}{x} + (m_2 - m_1)}{\sqrt{4n_2 - (m_2 - m_1)^2}}$$

или

$$(m_2 - m_1)\, xy + n\,(x^2 + y^2) =$$

$$= Ce^{\frac{m_2 + m_1}{n^2\sqrt{1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4n^2}}}\, arctg\, \frac{\frac{y}{x} + \frac{m_2 - m_1}{2n}}{\sqrt{1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4n^2}}}}$$

имеем ур-ие логарифмических спиралей, которое переходит в

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{k\,arc\,tg\,\frac{y}{x}} \text{ — фиг. 35.}$$

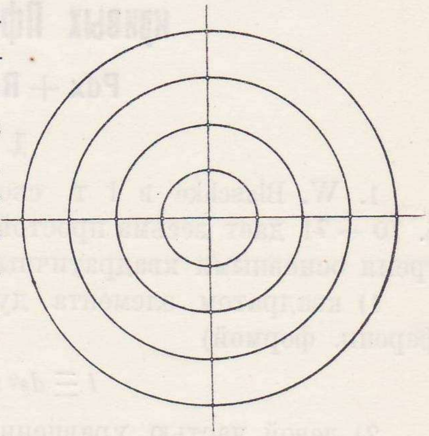
V⁰. *В этом члучае* ни одна линия тока (интегральная кривая) не проходит через критическую точку, но асимптотически к ней приближается, все время закручиваясь вокруг нее. Такую точку называют *фокусом* [foyer = H. Poincaré, Wirbelpunkt — W. Dyck].

D⁰. При $m_2 + m_1 = 0$
спирали переходят в *эллипсы*:

$$2m_2\, xy + n\,(x^2 + y^2) = C \text{ — фиг. 44.}$$

E⁰. При $k = 0$, логарифмические спирали переходят в *окружности* — фиг. 45.

VI⁰. В случаях D⁰ и E⁰ ни одна линия тока (интегральная кривая) не проходит через критическую точку, но в отличие от предыдущего случая эта последняя будет окружена замкнутыми линиями.



Фиг. 45.

Такую точку называют *центром* (centre–Poincaré, Isolierter Pûnkt–W. Dyck].

VII⁰. *Кроме указанных критических точек, мы имеем еще одну критическую точку.* Последняя получается для интегральных кривых в том случае, когда характеристическое ур-ие $\triangle(\rho) = 0$ имеет тройной корень.

Соответствующие интегральные кривые ур-ия Jacobi имеем на фиг. 19. Здесь мы имеем пучок конических сечений, имеющих соприкосновение 3-го порядка. Случай этот не указан ни Жуковским, ни W. Dyck'ом.

Такую точку можно назвать (Д. М. Синцов) — point d'osculation, Berührungpunkt.

16⁰. *Литература о W-C.* Кроме указанной выше, назовем еще следующие работы.

1. *Encyklopädie* der Mathem. Wissensch ften. B. III. Heft 2/3.
2. *S. Lie.* Vorlesungen über Continuirliche Gruppen 1893.
3. *G. Loria.* Spezielle algebr. ünd transcend. ebene Kurven.
4. *H. Wieleitner.* Spezielle ebene Kurven.
5. *G. Fouret.* Sur les courbes planes transcendantes, susceptibles de faire partie d'un système (μ, ν). Bull. de la société Math. de France. T. II. 1873-74.
6. *M. Jamet.* Sur les surfaces et les courbes tetraedrales symetriques. Ann. de l'école normale supér T. IV. 1887.
7. *Д. Синцов.* К вопросу об особенных элементах коннекса. Изв. Каз. Физ.-Мат. Общ-ва 1902.
8. *D. Sinzov.* On the theory of connexes. Труды V Мат. Конгреса в Кембридже.
9. *G.-H. Halphen.* Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Salmon. Traité de géom. anal. 1884.