Обобщение формулы Enneper'a-Beltrami на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения

$Pdx + Rdy + Qdz = 0$ (I).

Д. М. Синцов.

1. W. Blaschke в I т. своих Vorlesungen über Differentialgeometrie S. 70 — 71 дает весьма простой вывод интересной зависимости между тремя основными квадратичными дифференциальными формами:

1) квадратом элемента дуги кривой на поверхности (1-й дифференц. формой)

$$I \equiv ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

2) левой частью уравнения асимптотических линий (2-й дифф. формой

$$II \equiv rdx^2 + 2sdx\,dy + tdy^2$$

и 3) квадратом линейного элемента сферического изображения III.

Взяв за основные два взаимно-перпендикулярных напраправления линий кривизны $d_1\xi$ и $d_2\xi$ мы имеем в векториальной форме

$$I \equiv d_1\xi^2 + d_2\xi^2,\ II \equiv \frac{1}{R_1} d_1\xi^2 + \frac{1}{R_2} d_2\xi^2,\ III = \frac{1}{R_1^2} d_1\xi^2 + \frac{1}{R_2^2} d_2\xi^2$$

исключая $d_1\xi$ и $d_2\xi$ приходим к формуле

$$K.I - 2H.II + III = o \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

где K — Гауссова кривизна, H — средняя кривизна.

2. Интересно посмотреть, как соотношение (1) изменяется, если (I) не выполняет условия интегрируемости. Для ориентировки выведем соотв. соотношение принимая точку за начало и плоскость ей принадлежащую в силу (I)

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0$$

за плоскость XOY, и главные в ней направления за OX и OY.

Тогда

$$I \equiv dx^2 + dy^2 \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

$$II \equiv \frac{1}{R_1} dx^2 + \frac{1}{R_2} dy^2 \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

наконец

$$III \equiv \sum dP^2$$

если для упрощения вычислений принять $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$, и след. $dR = 0$. Т. обр. III приводится к виду

$$III = \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4}G^2\right)dx^2 + G\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)dxdy + \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4}G^2\right)dy_2$$

Вывести соотношение между тремя формами т. о. нельзя, и надо ввести четвертую форму, за которую естественнее всего принять левую часть уравнения линий кривизны (1-го определения), которое в выбранной системе имеет вид

$$IV \equiv dxdy \text{ (или } Kdxdy)$$

так что

$$III - G\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)IV = \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4}G^2\right)dx^2 + \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4}G^2\right)dy^2 \quad . \ . \ (c)$$

Условие совместности (a), (b), (c) дает нам таким образом соотношение в виде определителя, которое по раскрытии принимает вид;

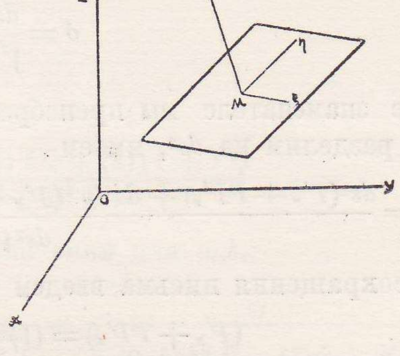
$$(K - \frac{1}{4}G^2).I - 2H.II + III - G\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)IV = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

оно и представляет то соотношение, которое мы хотели вывести, но только при частном выборе системы координат, и которое при $G = 0$ обращается в соотношение Beltrami-Enneper'a.

Чтобы получить его в общем виде можем прибегнуть к преобразованию координат.

Ход мысли такой: от системы координат xyz переходим к любой $\xi\eta\zeta$ с началом в данной точке M (x, y, z), за ось ζ-ов берем перпендикуляр к плоскости системы соответствующей этой точке, а оси 0ξ и 0η направляем по направлениям соотв. главным радиусом кривизны Надо составить выражения для косинусов

	$0x$	$0y$	$0z$
0ξ	a_1	b_1	c_1
0η	a_2	b_2	c_2
0ζ	$\frac{P}{\Delta}$	$\frac{Q}{\Delta}$	$\frac{-1}{\Delta}$



где берем

$R = -1$

$dz = Pdx + Qdy \quad . \ . \ (b)$

$\Delta^2 = 1 + P^2 + Q^2$.

$$Pa_1 + Qb_1 = c_1 \qquad\qquad Pa_2 + b_2 = c_2$$

$$dx = a_1 d\xi + a_2 d\eta + \frac{P}{\triangle} d\zeta,\ dy = b_1 d\xi + b_2 d\eta + \frac{Q}{\triangle} d\zeta, dz = c_1 d\xi + c_2 d\eta - \frac{d\zeta}{\triangle}$$

подставляем в (1):

$$0 = d\xi(Pa_1 + Qb_1 - c_1) + d\eta\,(Pa_2 + Qb_2 - c_2) + \triangle\, d\zeta$$

т. е.

$$\triangle . d\zeta = 0 \qquad\qquad (\triangle \neq 0)$$

Итак имеем:

$$dx = a_1\, d\xi + a_2\, d\eta$$
$$dy = b_1\, d\xi + b_2\, d\eta$$
$$dz = (Pa_1 + Qb_1)\, d\xi + (Pa_2 + Qb_2\,)\, d\eta \equiv c_1\, d\xi + c_2 d\eta$$

Отсюда:

1⁰. $$I = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

Отметим сейчас же что основное соотношение

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1 \quad (i = 1{,}2)$$

дает

$$a_i^2(1 + P^2) + 2PQ\ \ a_i b_i + b^2(1 + Q^2) = 1,$$

а условие ортогональности 0ξ и 0η:

$$0 = a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, c_2 = a_1\, a_2\, (1 + P^2) + (a_1\, b_2 + b_1\, a_2\,)\, PQ + b_1\, b_2\, (1 + Q^2).$$

2⁰. Чтобы вывести преобразованное выражение 2-й диффер. формы, нам нужно остановиться на самых значениях a_i, b_i, о которых пока не не было речи, ибо 1-я форма преобразовывалась одинаково лишь бы новые оси были перпендикулярны, и только у нас $d\zeta = 0$

Теперь однако необходимо припомнить выражения для радиуса кривизны и уравнение линий кривизны.

Перпендикуляр из точки (x, y, z) на плоскость

$$(P + dP)\,(X - x - dx) + (Q + dQ)\,(Y - y - dy) - (Z - z - dz) = 0$$

принадлежащую б. близкой точке $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$, с помощью (1) приводится к виду

$$\delta = \frac{dxdP + dydQ}{\sqrt{P^2 + Q^2 + 1}}$$

где в знаменателе мы пренебрегаем dP и dQ в сравнении с P и Q; если разделим на ds^2, имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{ds^2(P'_x + PP'_z) + dxdy\ \ (P'_y + Q'_x + P'_z Q + Q'_z P) + dy^2(Q'_y + QQ'_z)}{ds^2\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}$$

для сокращения письма введем обозначения

$$(P'_x + PP'_z) = (1) \qquad (Q'_x + PQ'_z) = (3)$$
$$(P'_y + QP'_z) = (2) \qquad (Q'_y + QQ'_z) = (4)$$

Тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\frac{1}{R} = \frac{(1)dx^2 + (2+3)\,dxdy + (4)dy^2}{ds^2\sqrt{1+P^2+Q^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Обозначим

$$\frac{dx}{ds} = a, \; \frac{dy}{ds} = b$$

$$K = \frac{\sqrt{1+P+Q^2}}{R} = (1)\,a^2 + (2+3)\,ab + (4)\,b^2$$

Чтобы получить главные направления, ищем экстремум этого выражения, помня, что a и b связаны соотношением

$$(1+P^2)a^2 + 2PQab + (1+Q^2)b^2 = 1.$$

Получим:

$$\left.\begin{aligned} &(1)a + \frac{1}{2}(2+3)b - K[(1+P^2)a + PQb] = 0 \\ &\frac{1}{2}(2+3)a + (4)\,b - K[PQa + (1+Q^2)b] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

где K есть именно экстремальное значение $\dfrac{\sqrt{1+P^2+Q^2}}{R}$.

Для определения этого K имеем квадратное уравнение

$$\begin{vmatrix} (1) - K(1+P^2) & \frac{1}{2}(2+3) - KPQ \\ \frac{1}{2}(2+3) - KPQ & (4) - K(1+Q^2) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$K^2(1+P^2+Q^2) - K\,[(1)(1+Q^2) - (2+3)\,PQ + (4)(1+P^2)] + (1)(4) - \frac{1}{4}(2+3)^2 = 0$$

Отсюда называя K_1 и K_2 корни его, имеем:

$$K_1 . K_2 = \frac{(1)(4) - \frac{1}{4}(2+3)^2}{1+P^2+Q^2}$$

$$K_1 + K_2 = \frac{(1)(1+Q^2) - (2+3)\,PQ + (4)(1+P^2)}{1+P^2+Q^2}$$

Отсюда получаются следующие значения для a_i, b_i:

$$\frac{a_i}{\frac{1}{2}(2+3) - K_i PQ} = \frac{b_i}{-(1) + K_i(1+P^2)} = \frac{c_i}{\frac{1}{2}(2+3)P - (1)Q + K_i Q}$$

или если возьмем 2-ые уравнения

$$\frac{a_i}{(4)-K_i(1+Q^2)}=\frac{b_i}{-\frac{1}{2}(2+3)+PQK_i}=\frac{c_i}{P(4)-\frac{1}{2}(2+3)Q-K_iP}$$

Перемножая эти соотношения почленно и складывая (если λ и μ общие значения 1-ых и 2-ых отношений):

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=\lambda\mu\left[\left(\frac{1}{2}(2+3)-K_1PQ\right)((4)-K_2(1+Q^2))+\right.$$

$$+(-(1)+K_1(1+P^2))\left(-\frac{1}{2}(2+3)+PQK_2\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}(2+3)P-(1)Q+K_1Q\right)\left(P(4)-\frac{1}{2}(2+3)\,Q-K_2Q\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}(2+3)(1)(1+Q^2)+\frac{1}{2}(2+3)(4)(1+P^2)-PQ\left\{\left((1)(4)+\frac{1}{4}(2+3)^2\right)\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(2+3)(1+P^2+Q^2)(K_1+K_2)+K_1K_2(1+P^2+Q^2)PQ\right]\lambda\mu$$

$$=\lambda\mu\left[PQ\left\{K_1K_2(1+P^2+Q^2)-(1)(4)+\frac{1}{4}(2+3)^2\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\;(2+3)\left\{(1)(1+Q^2)-PQ(2+3)+(4)(1+P^2)-(K_1+K_2)(1+P^2+Q^2)\right\}\right]$$

т. е. $=0$.

Мы обнаружили таким образом еще раз, что направления главных (экстремальных) кривизн взаимно ортогональны. Пусть соотв. радиусы R_1 и R_2. Подставим в (A) новые координаты

$$II\equiv\frac{ds^2}{R}=$$

$$\frac{(1)(a_1d\xi+a_2d\eta)^2+(2+3)(a_1d\xi+a_2d\eta)(b_1d\xi+b_2d\eta)+(4)(b_1d\xi+b_2d\eta)^2}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$$

$$=d\xi^2\frac{(1)a_1^2+(2+3)a_1b_1+(4)b_1^2}{\sqrt{1+P_2+Q^2}}+d\eta^2\frac{(1)a_2^2+(2+3)a_2b_2+(4)b_2^2}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$$

$$+2\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1+I^2+Q^2}}\left\{(1)a_1a_2+\frac{1}{2}(2+3)(a_1b_2+b_1a_2)+(4)b_1b_2\right\}$$

Коэффициент при $d\xi d\eta$ можно переписать

$$a_1\left\{(1)a_2+\frac{1}{2}(2+3)b_2)\right\}+b_1\left\{\frac{1}{2}(2+3)a_2+(4)b_2)\right\}$$

следовательно, в силу (B) он равен

$$K_2\,(a_2\,a_1\,(1+P^2)+PQ\,(a_1\,b_2+b_1\,a_2)+(1+Q^2)\,b_1\,b_2)$$

и следовательно по предыдущему равен нулю.

Таким образом

$$II=\frac{1}{R_1}\,d\xi^2+\frac{1}{R_2}\,d\eta^2$$

3^0. Элемент сферического изображения

$$III=d\sigma^2=\left(d\left(\frac{P}{\triangle}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{Q}{\triangle}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{1}{\triangle}\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{\triangle^4}\left[\left(\triangle dP-Id\triangle\right)^2+\left(\triangle dQ-Qd\triangle\right)^2+d\triangle^2\right]$$

$$=\frac{1}{\triangle^4}\left[dP^2+dQ^2+\left(PdQ-QdP\right)^2\right]$$

Здесь

$$dP=P'_x dx+P'_y dy+(Pdx+Qdy)P'_z=(1)dx+(2)dy$$

Если ввести сюда ξ и η:

$$dP=[(1)a_1+(2)b_1]d\xi+[(1)a_2+(2)b_2]d\eta$$

С помощью (B) это выражение примет вид:

$$\left[K_1\left(a_1\,(1+P^2)+b_1PQ\right)+\frac{1}{2}\,((2)-(3))b_1\right]d\xi+$$

$$+\left[K_2\left(a_2\,(1+P^2)+b_2PQ\right)-\frac{1}{2}\,((2)+(4))\,b_2\right]d\eta$$

Заметим, что при наших обозначениях

$$G=-\,P\,\frac{\partial Q}{\partial z}+Q\,\frac{\partial P}{\partial z}-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(2)-(4).$$

Таким образом

$$dP=\left[\,K_1\,(a_1\,(1+P^2)+b_1\,PQ)+\frac{1}{2}\,Gb_1\,\right]d\xi+$$

$$+\left[\,K_2\,(a_2(1+P^2)+b_2PQ)+\frac{1}{2}\,Gb_2\,\right]d\eta$$

точно также

$$dQ=$$

$$=\left[K_1(a_1PQ+b_2(1+Q^2))-\frac{1}{2}\,Ga_1\right]d\xi+\left[K_2(a_2PQ+b_2(1+Q^2))-\frac{1}{2}\,Ga_2\right]d\eta$$

и отсюда

$$PdQ - QdP = d\xi\left[K_1\,(Pb_1 - Qa_1) - \frac{1}{2}\,G(Pa_1 + Qb_1)\right]$$

$$+ \,d\eta\left[K_2\,(Pb_2 - Qa_2) - \frac{1}{2}\,G(Pa_2 + Qb_2)\right]$$

Возвышая теперь в квадрат и складывая, имеем коэффициент при $d\xi^2$

$$\left[K_1\,(a_1\,(1 + P^2) + b_1\,PQ) + \frac{1}{2}\,Gb_1\right]^2 + \left[K_1\left(a_1\,PQ + b_1(1 + Q^2)\right) - \frac{1}{2}\,Ga_1\right]^2 +$$

$$+ \left[K_1\,(Pb_1 - Qa_1) - \frac{1}{2}\,G(Pa_1 + Qb_1)\right]^2$$

$$\equiv (1 + P^2 + Q^2)\;K_1^2 + \frac{1}{4}\,G^2,$$

ибо множители при них силу $a_1^2 + b_1^2 + (Pa_1 + Qb_1)^2 = 1$ обращаются в 1, а при K_1G множитель тожественно обращается в 0.

Точно также найдем коэффициент при $d\eta^2$ равным

$$(1 + P^2 + Q^2)\;K_2^2 + \frac{1}{4}\,G^2.$$

Остается вычислить коэффициент при $d\xi d\eta$

$$\left[K_1\,(a_1(1 + P^2) + b_1PQ) + \frac{1}{2}\,Gb_1\right]\cdot\left[K_2\,(a_2(1 + I^2) + b_2PQ) + \frac{1}{2}\,Gb_2\right]$$

$$+ \left[K_1(a_1PQ + b_1(1 + Q^2)) - \frac{1}{2}\,Ga_1\right]\cdot\left[K_2\,(a_2PQ + b_2\,(1 + Q^2)) - \frac{1}{2}\,Ga_2\right]$$

$$+ \left[K_1\,(Pb_1 - Qa_1) - \frac{1}{2}\,G(Pa_1 + Qb_1)\right]\;\left[K_2\,(Pb_2 - Qa_2) - \frac{1}{2}\,G(Pa_2 + Qb_2)\right].$$

При $K_1\,K_2$ множитель

$$(1 + P^2 + Q^2)\,((1 + P^2)a_1a_2 + PQ(a_1\,b_2 + b_1a_2) + b_1b_2\,(1 + Q^2) = 0$$

в силу доказанной ортогональности.

Т. т. при $\frac{1}{4}\,G^2$ множитель

$$b_1\,b_2 + a_1\,a_2 + (Pa_1 + Qb_1)\,(Pa_2 + Q'_2) = 0$$

Наконец при $\frac{1}{2}\,G$ имеем множитель

$$K_1\,[b_2\,(a_1\,(1 + P^2) + b_1\,PQ) - a_2\,(a_1\,PQ + b_1\,(1 + Q^2\,)) -$$
$$- (Pb_1 - Qa_1\,)\,(Pa_2 + Qb_2\,)]$$
$$+ K_2\,[b_1\,(a_2\,(1 + P^2) + b_2\,PQ) - a_1\,(a_2\,PQ + b_2\,(1 + Q^2)) -$$
$$- (Pb_2 - Qa_2\,)\,(Pa_1 + Qb_1)]$$
$$= (K_1 - K_2\,)(a_1\,b_2 - a_2\,b_2\,)\,(1 + P^2 + Q^2\,)$$

Таким образом окончательно

$$(1+P^2+Q^2)^2 \cdot III = \left[(1+P^2+Q^2)\,K_1^2+\frac{1}{4}G^2\right]d\xi^2 +$$

$$+\left[(1+P^2+Q^2)\,K_2^2+\frac{1}{4}\,G^2\right]d\eta^2$$

$$+\frac{1}{2}\,G(K_1-K_2)\,(a_1\,b_2-b_1\,a_2)\,d\xi d\eta$$

4⁰. Уравнение линий кривизны

$$\begin{vmatrix} (1)\,dx+\frac{1}{2}(2+3)dy, & dx(1+P^2)+PQdy \\ \frac{1}{2}\,(2+3)dx+(4)dy, & PQdx+(1+Q^2)\,dy \end{vmatrix} = 0$$

преобразуется при той же подстановке

$$\begin{vmatrix} \sum\left[(1)a_1+\frac{1}{2}\,(2+3)b_1\right]d\xi, & \sum\left[(1+P^2)a_1+PQd_1\right]b\xi, \\ \sum\left[\frac{1}{2}\,(2+3)a_1+(4)b_1\right]d\xi, & \sum\left(PQa_1+(1+Q^2)d_1\,l\,\xi\right) \end{vmatrix}$$

заменяя по (B) 1-й столбец и вычитая из него 2-й умноженный на K_2 имеем

$$=(K_1-K_2)\,d\xi d\eta \begin{vmatrix} a_1\,(1+P^2)+b_1\,PQ, & (1+P^2)\,a_2+PQb_2 \\ PQa_1+(1+Q^2)\,b_1\,, & PQa_2+(1+Q^2)\,b_2 \end{vmatrix}$$

$$=(K_1-K_2)\,d\xi d\eta \begin{vmatrix} a_1\;b_1 \\ a_2\;b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1+P^2 & PQ \\ PQ & 1+Q^2 \end{vmatrix}$$

$$=(1+P^2+Q^2)\,(K_1-K_2)\,(a_1\,b_2-a_2\,b_1)\,d\xi d\eta$$

Это мы и принимаем за 4-ую форму

$$(1+P^2+Q^2).\;\;IV=(K_1-K_2)\,(a_1\,b_2-b_1\,a_2)\,d\xi d\eta,$$

что уже дает возможность составить желаемую формулу, ибо

$$(1+P^2+Q^2)^2\,III=\left[(1+P^2+Q^2)\,K_1^2+\frac{1}{4}\,G^2\right]d\xi^2 +$$

$$+\left[(1+P^2+Q^2)\,K_1+\frac{1}{4}\,G^2\right]d\eta^2\;+\frac{1}{2}\,G.IV.(1+P^2+Q^2)$$

и таким образом имеем

$$I=d\xi^2+d\eta^2$$

$$II=\frac{1}{R_1}d\xi^2+\frac{1}{R_2}d\eta^2$$

$$III - \frac{\frac{1}{2}G.IV}{(1+P^2+Q^2)} = \left[\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4}\frac{G^2}{(1+P^2+Q^2)^2}\right]d\xi^2 +$$

$$\left[\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{4}\frac{G^2}{(1+P^2+Q^2)^2}\right]d\eta^2$$

и исключая $d\xi^2$, $d\eta^2$ имеем определитель

$$\begin{vmatrix} I & 1 & 1 \\ II & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \\ III - \frac{GIV}{2(1+P^2+Q^2)} & \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4}\frac{G^2}{(1+P^2+Q^2)}, & \frac{1}{R_2^2} + \frac{G^2}{4(1+P^2+Q^2)^2} \end{vmatrix} = 0$$

что по разложении определителя и сокращении на $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ дает

$$1.\left(K - \frac{1}{4}\frac{G^2}{(1+P^2+Q^2)^2}\right) - 2H.II + III - \frac{1}{2}\frac{G}{(1+P^2+Q^2)^2}IV = 0.$$

5^0. Рассмотрим еще 5-ю дифференциальную форму, именно, дифференциальное уравнение линий кривизны 2-го определения — огибающие направлений, в которых бесконечно-близкие нормали системы

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{X-x-dx}{P+dP} = \frac{Y-y-dy}{Q+dQ} = \frac{Z-z-dz}{-1}$$

пересекаются.

Условие пересечения и есть искомое уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad 0 = \begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ Pdx + Qdy & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Здесь надо ввести

$$dP = (1)\,dx + (2)\,dy, \quad dQ = (3)\,dx + (4)\,dy$$

и преобразовать оси координат:

$$dx = a_1\,d\xi + a_2\,d\eta, \quad dy = b_1\,d\xi + b_2\,d\eta$$

и след.

$$Pdx + Qdy = (Pa_1 + Qb_1)\,d\xi + (Pa_2 + Qb_2)\,d\eta$$

и

$$dP = ((1)a_1 + (2)\,b_1)\,d\xi + ((1)a_2 + (2)\,b_2)\,d\eta$$

$$dQ = ((3)\,a_1 + (4)b_1)\,d\xi + ((3)a_2 + (4)\,b_2)\,d\eta$$

По подстановке определитель примет вид

$$0 = \begin{vmatrix} a_1\,d\xi + a_2\,d\eta, & P, & ((1)a_1 + (2)b_1)\,d\xi + ((1)a_2 + (2)b_2)\,d\eta \\ b_1\,d\xi + b_2\,d\eta, & Q, & ((3)a_1 + (4)b_1\,d\xi + ((3)\,a_2 + (4)b_2)\,d\eta \\ (Pa_1 + Qb_1) + (Pa_2 + Qb_2)d\eta, & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

последний столбец можно по предыдущему заменить через

$$\left[K_1\left(a_1\left(1+P^2\right)+b_1 PQ\right)+\frac{1}{2} G b_1\right] d\xi+$$
$$+\left[K_2\left(a_2\left(1+P^2\right)+b_2 PQ\right)+\frac{1}{2} G b_2\right] d\eta$$

$$\left[K_1\left(a_1 PQ+b_1\left(1+Q^2\right)-\frac{1}{2} G a_1\right] d\xi+\right.$$
$$\left.+K_2\left(a_2 PQ+b_2\left(1+Q^2\right)-\frac{1}{2} G a_2\right] d\eta$$

разлагая по элементам этого столбца видим, что определитель есть квадратичная форма вида

$$A d\xi^2+B d\xi d\eta+C d\eta^2$$

выполняя на самом деле подсчет, убеждаемся, что

$$A=C=-\frac{1}{2} G$$

$$B=-\left(K_1-K_2\right)\left(a_1 b_2-b_1 a_2\right)\left(1+P^2+Q^2\right)$$

таким образом можем принять

$$V=+\frac{1}{2} G\left(d\xi+d\eta^2\right)+\left(K_1-K_2\right)\left(a_1 b_2-b_1 a_2\right)\left(1+P^2+Q^2\right) d\xi d\eta$$
$$=+\frac{1}{2} G . I+\left(1+P^2+Q^2\right)^2 IV$$

эта формула лишний раз подчеркивает, что обе системы линий кривизны 1. и 2. определения в случае интегрируемости совпадают.

Основную формулу II можно переписать

$$0=K . I-2 H . II+III-\frac{1}{2} \frac{G}{\left(1+P^2+Q^2\right)^2}\left(\frac{1}{2} G . I+\left(1+P^2+Q^2\right) IV\right)$$

и следовательно если вм. IV ввести форму V, то получим занимающее нас соотношение в более простом виде

$$0=K . I-2 H . II+III-\frac{1}{2} \frac{G}{\left(1+P^2+Q^2\right)^2} . V$$

При $G=0$ последний член пропадает и имеем формулу Эннепера-Бельтрами.