Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$

Распространение на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ (1) *теоремы Гаусса.*

Д. М. Синцов.

Приведем уравнение (1) к виду

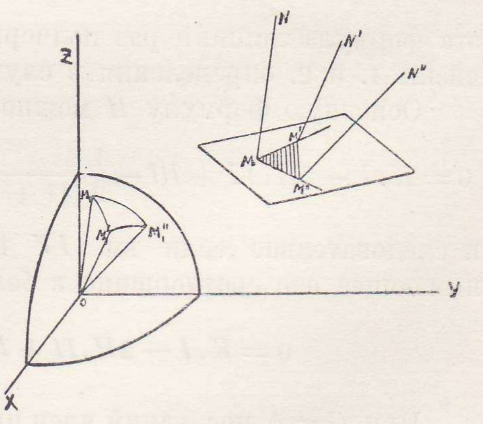
$$dz = Pdx + Qdy \qquad (1')$$

где P и Q функции x, y, z. В плоскости

$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y) \qquad (2)$$

проходящей через точку $M(x, y, z)$ вообразим два выходящие из M направления dx, dy, dz и $d'x$, $d'y$, $d'z$, иными словами две точки

$M' = (x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ и
$M'' = (x + d'x,\ y + d'y,\ z + d'z)$.



Этим точкам по (1') принадлежат плоскости (2) и нормали $M'N'$ и $M''N''$.

Проведя через начало O (или какую н. другую точку) прямые параллельные MN, $M'N'$ и $M''N''$ получим на сфере радiуса 1 с центром в O три точки M_1, M'_1, M''_1, и треугольник $M_1M'_1M''_1$ является сферическим изображением треугольника $M\,M'\,M''$.

Найдем площадь того и другого. Удвоенная площадь $M\,M'\,M''$

$$2S = \sqrt{(dxd'y - dyd'x)^2 + (dyd'z - dzd'y)^2 + (dzd'x - dxd'z)^2};$$

по (1')

$$(dyd'z - dzd'x) = dy\,(Pd'x + Qd'y) - (Pdx + Qdy)\,d'y =$$
$$= P(dyd'x - dxd'y)$$

и

$$(dzd'x - dxd'z) = d'x(Pdx + Qdy) - dx(Pd'x + Qd'y) = Q(d'xdy - d'ydx);$$

таким образом

$$2S = (dxd'y - dyd'x)\sqrt{1 + P^2 + Q^2} = V(dxd'y - dyd'x)$$

Займемся теперь площадью треугольника $M_1 M_1' M_1''$. Координаты его вершин

$$M_1:\quad \xi = \frac{P}{V},\ \eta = \frac{Q}{V},\ \zeta = \frac{-1}{V} \qquad (V^2 = 1 + P^2 + Q^2)$$

$$M_1':\quad \xi + d\xi = \frac{P}{V} + d\left(\frac{P}{V}\right) \text{ и т. д.}$$

$$M_1'':\quad \xi + d'\xi = \frac{P}{V} + d'\left(\frac{P}{V}\right)\ldots,$$

В виду малости сторон, можем его принять за плоский. Его площадь может быть поэтому выражена формулою

$$2S' = \sqrt{\Sigma(d\xi d'\eta - d\eta d'\xi)^2}$$

аналогичной предыдущей, и

$$d\xi = d\left(\frac{P}{V}\right) = \frac{VdP - PdV}{V^2} \text{ и т. д.}$$

Поэтому

$$d\xi d'\eta - d\eta d'\xi = \frac{1}{V^4}\begin{vmatrix} VdP - PdV & VdQ - QdV \\ Vd'P - Pd'V & Vd'Q - Qd'V \end{vmatrix}$$

$$= \frac{V}{V^4}\begin{vmatrix} dP & dQ & dV \\ d'P & d'Q & d'V \\ P & Q & V \end{vmatrix} = \frac{1}{V^4}(dPd'Q - dQd'P),$$

в чем убедимся и непосредственным вычислением первого определителя. Точно также

$$d\eta d'\zeta - d\zeta d'\eta = \frac{P}{V^4}(dQd'P - dPd'Q),$$

$$d'\xi d\zeta - d'\zeta d\xi = \frac{Q}{V^4}(dPd'Q - dQd'P).$$

Таким образом

$$2S' = \frac{1}{V^4}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}(dPd'Q - dQd'P) = \frac{1}{V^3}(dPd'Q - dQd'P)$$

Отсюда

$$\frac{S'}{S} = \frac{dPd'Q - dQd'P}{V^4(dxd'y - dyd'x)}$$

Определитель в числителе $=\begin{vmatrix} dP & dQ \\ d'P & d'Q \end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} (1)dx+(2)dy, & (3)dx+(4)dy \\ (1)d'x+(2)dy', & (3)d'x+(4)d'y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} dx & dy \\ d'x & d'y \end{vmatrix}.$$

Таким образом

$$\frac{S'}{S}=\frac{(1)(4)-(2)(3)}{(1+P^2+Q^2)^2};$$

но

$$\begin{vmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P'_x+P'_z & P'_y+QP'_z \\ Q'_x+PQ'_z & Q'_y+QQ'_z \end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ P & Q & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

т. е. равен тому определителю (при $R=-1$), который мы вслед за Voss'ом, обозначали через $\triangle$.

Вводя в эту формулу обратно $-\frac{P}{R}, -\frac{Q}{R}$ вместо P, Q получим после небольших переделок:

$$\frac{dS'}{dS}=\frac{1}{(P^2+Q^2+R^2)^2}\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & R'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}=-\frac{\triangle}{V^2}$$

Тот же самый результат можно получить применяя к рассматриваемой задаче одну замечательую формулу C. Neumann'a (Ueber correspondierende Flächenelemente, Math. Ann. XI. S. 306—308).

Эта формула такова: пусть соответствие между двумя тройками переменных x, y, z и ξ, η, ζ устанавливается уравнениями:

$$\xi=\varphi(x, y, z),\ \xi=\psi(x, y, z),\ \zeta=\chi(x, y, z);$$

между соответствующими поверхностными элементами существует связь:

$$\frac{d\sigma}{ds}=(-)\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \alpha \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \beta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta'_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

где a, b, c косинусы углов с осями нормали к ds; α, β, γ — тоже для $d\sigma$ *).

Нейманн дает и приложение этой формулы к вычислению Гауссовой кривизны поверхности заданной уравнением $f(x, y, z)=0$.

Здесь соответствие таково:

$$R=\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+f_z'^2},\quad \xi=\frac{1}{R}f'_x,\quad \eta=\frac{1}{R}f'_y,\quad \zeta=\frac{1}{R}f'_z$$

и a, b, c, resp. α, β, γ тожественны с ξ, η, ζ.

***) Формулы свои C. Neumann дает без доказательства. После моего доклада в семинаре при кафедре геометрии такое доказательство было дано аспир. Я. П. Бланком.**

Но она приложима и к рассматриваемому нами случаю системы интегральных кривых уравнения

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

ибо здесь соответствие устанавливается формулами:

$$\xi = \frac{P}{V},\ \eta = \frac{Q}{V},\ \zeta = \frac{R}{V},\ V = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

$$K' = \frac{ds'}{ds} = (-1)\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y & \xi'_z & \xi \\ \eta'_x & \eta'_y & \eta'_z & \eta \\ \zeta'_x & \zeta'_y & \zeta'_z & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} \equiv \frac{(-1)}{(\Sigma V^2)^2}\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z & P \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z & Q \\ R'_x & R'_y & R'_z & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix}$$

Формулу Неймана для Гауссовой кривизны поверхности приводит J. Ed. Wright Invariants of quadratic differential forms — Cambr. tracts № 9 — на стр. 50 (§ 48), но с множителем $\frac{-1}{V^2}$ а не $\frac{-1}{V^4}$ и без ссылки на Неймана.

Возвращаясь к выведенной нами формуле мы можем отметить что в этом случае, как и в других, происходит расщепление свойств: произведение мер кривизн главных (экстремальных) направлений, формально совпадая с Гауссовою кривизною поверхности, обладает и ее свойством характеризовать точки пространства (resp. поверхности) как эллиптические, гиперболические или параболические. Эта мера кривизны выражается как показано в пред. работе

$$K = -\frac{\triangle'}{4(P^2 + Q^2 + R^2)^2}$$

Предел же отношения б. малого треугольника к площади его сферического изображения

$$K' = -\frac{\triangle}{(P^2 + Q^2 + R^2)^2}.$$

Так как

$$\triangle' = G^2 + 4\,\triangle,$$

то ясно, что при $G = 0$ оба выражения совпадают

Геометрическое значение G.

Rogers дал интересное геометрическое об'яснение величины G.

Рассмотрим геодезическую (прямейшую) линию, — такую, которой выпрямляющая плоскость совпадает с плоскостью системы:

$$P(X - x) + Q\ (Y - y) + R(Z - z) = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

или кривую, для которой ребра подвижного триедра $\alpha,\ l,\ \lambda$ дают

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0 \qquad (\text{или } Pdx + Qdy + Rdz = 0)$$

$$P\lambda+Q\mu+R\nu=0 \quad \left(\text{или} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0\equiv\right.$$

$$\left.\equiv P(y'z''-z'y'')+Q\,(z'x''-x'z'')+R(x'y''-y'x'')\right)$$

В силу этих двух соотношений для кривой, косинусы углов ее главной нормали пропорциональны P, Q, R:

$$\frac{l}{P}=\frac{m}{Q}=\frac{n}{R};$$

отсюда мера кручения этой линии:

$$\frac{1}{\varrho}=-r^2\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \frac{dl}{ds} & \frac{dm}{ds} & \frac{dn}{ds} \end{vmatrix}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{1}{Vds^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix};$$

иначе:

$$-\frac{1}{\varrho}=\lambda\frac{d\left(\frac{P}{V}\right)}{ds}+\mu\frac{d\left(\frac{Q}{V}\right)}{ds}+\nu\frac{d\left(\frac{R}{V}\right)}{ds},$$

что можно подробнее расписать

$$=\frac{1}{V}\left[(\lambda\alpha P'_x+\lambda\beta P'_y+\lambda\gamma P'_z)+(\mu\alpha Q'_x+\mu\beta Q'_y+\mu\gamma Q'_z)+\right.$$

$$\left.+(\nu\alpha R'_x+\nu\beta R'_y+\nu\gamma R'_z)\right]-\frac{1}{V}\frac{dV}{ds}(\lambda l+\mu m+\nu n).$$

Последнее слагаемое равно нулю.

Возьмем в той же плоскости (2) направление перпендикулярное к главной касательной; для него $\alpha\beta\gamma$ заменяются через $\lambda\mu\nu$, положительное направление будет противоположно; так что:

$$-\frac{1}{\varrho'}=-\alpha\frac{d\left(\frac{P}{V}\right)}{ds}-\beta\frac{d\left(\frac{Q}{V}\right)}{ds}-\gamma\frac{d\left(\frac{R}{V}\right)}{ds}$$

$$=-\frac{1}{V}\left[(\alpha\lambda P'_x+\alpha\mu P'_y+\alpha\nu P'_z)+(\beta\lambda Q'_x+\beta\mu Q'_y+\beta\nu Q'_z)\right.$$

$$\left.+(\gamma\lambda R'_x+\gamma\mu R'_y+\gamma\nu R'_z)\right]$$

Складывая, имеем сумму мер кручения по двум взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{V}\left[(\lambda\beta-\mu\alpha)(P'_y-Q'_x)+(\lambda\gamma-\nu\alpha)(P'_z-R'_x)+\right.$$

$$\left.+(\mu\gamma-\beta\nu)(Q'_z-R'_y)\right]$$

$$=\frac{1}{V^2}\left[P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{V^2}G.$$