Особенные случаи соприкасающегося шара (и плоскости) в точке пространственной кривой.

П. М. Дармостук.

Пусть дано уравнение кривой в параметрическом виде

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ z = \chi(s).$$

Возьмем за начало координат и начало счета дуг точку A, в которой первые две производные непрерывны, а третьи производные справа и слева не равны между собою; кроме того производная справа непрерывна справа, а производная слева — непрерывна слева.

Тогда координаты x, y, z раскладываются в строку справа от точки A по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \alpha s + \frac{\alpha'}{1.2R}\,.s^2 - \frac{s^3}{1.2.3}\left[\frac{\alpha'}{R^2}.\frac{dR}{ds} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT} + \varepsilon_1\right] \\ y &= \beta s + \frac{\beta'}{1.2R}\,s^2 - \frac{s^3}{1.2.3}\left[\frac{\beta'}{R^2}\,\frac{dR}{ds} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta''}{RT} + \varepsilon_2\right] \quad . \ . \quad (1) \\ z &= \gamma s + \frac{\gamma'}{1.2R}\,s^2 - \frac{s^3}{1.2.3}\left[\frac{\gamma'}{R^2}\,\frac{dR}{ds} + \frac{\gamma}{R^2} + \frac{\gamma''}{RT} + \varepsilon_3\right], \end{aligned}$$

где $\frac{dR}{ds}$ производная справа от радиуса кривизны, а T радиус кручения справа.

Координаты точек кривой слева от точки A выражаются формулами:

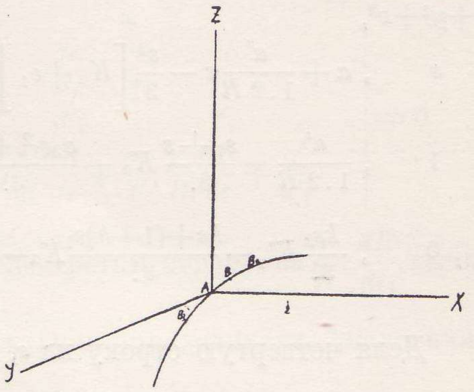
$$\begin{aligned} x &= \alpha s + \frac{\alpha'}{1.2R}s^2 - \frac{s^3}{3!}\left[\frac{\alpha'}{R^2}.\frac{dR}{ds_1} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT_1} + \eta_1\right] \\ y &= \beta s + \frac{\beta'}{1.2R}s^2 - \frac{s^3}{3!}\left[\frac{\beta!}{R^2}\,\frac{dR}{ds_1} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta''}{RT_1} + \eta_2\right] \quad . \ . \ . \ . \ (2) \\ z &= \gamma s + \frac{\gamma'}{1.2R}s^2 - \frac{s^3}{3!}\left[\frac{\gamma!}{R^2}\,\frac{dR}{ds_1} + \frac{\gamma}{R^2} + \frac{\gamma''}{RT_1} + \eta_3\right], \end{aligned}$$

где $\frac{dR}{ds_1}$ обозначает производную справа, а T_1 радиус кручения, справа.

Вследствие непрепрывности третьих производных справа и слева ε_i и η_i стремятся к нулю вместе с s.

Найдем предельное положение и величину радиуса шара, проведенного через точку A, две точки справа и одну точку слева от точки A.

Пусть $\frac{AB_2}{AB_1}=\frac{s_1}{s}=h(s)$. $\frac{AB_3}{AB_1}=\frac{s_2}{s}=-k(s)$, где $h(s)$ и $k(s)$—положительные, произвольные непрерывные функции, стремящиеся к произвольным наперед заданным положительным значениям, когда s стремится к нулю, при чем $h(s)$ стремится к пределу отличному от единицы. Обозначим координаты точек B_1, B_2, B_3 через (x_1, y_1, z_1), (x, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), тогда уравнение шара проходящего через точки A, B_1, B_2, B_3 напишется



Фиг. 1.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z. \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, \\ x_3^2+y_3^2+z^2{}_3, & x_3, & y_3, & z_3, \end{vmatrix}=0.$$

Подставляя вместо x_1, y_1 z_1, x_2, y_2, z_2 их разложения по формулам (1), а вместо x_3, y_3, z_3, разложения по формулам (2) и сокращая на s, s_1, s_2, получим:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x & , & y & , & z \\ s & , \alpha+\frac{\alpha'}{1.2.R}s-\frac{s^2}{3!}[K_\alpha+\varepsilon_1], & & \beta+\frac{\beta'}{1.2.R}s-\frac{s^2}{3!}[K_\beta+\eta_1], & & \gamma+\frac{\gamma'}{1.2.R}s-\frac{s^2}{3!}[K_\gamma+\zeta_1] \\ s_1 & , \alpha+\frac{\alpha'}{1.2.R}s_1-\frac{s^2{}_1}{3!}[K_\alpha+\varepsilon_2], & & \beta+\frac{\beta'}{1.2.R}s_1-\frac{s^2{}_1}{3!}[K_\beta+\eta_2], & & \gamma+\frac{\gamma'}{1.2.R}s_1-\frac{s^2{}_1}{3!}[K_\gamma+\zeta_2] \\ s_2 & , \alpha+\frac{\alpha'}{1.2.R}s_2-\frac{s_2{}^2}{3!}[K'_\alpha+\varepsilon_3], & & \beta+\frac{\beta'}{1.2.R}s_2-\frac{s^2{}_1}{3!}[K'_\beta+\eta_3], & & \gamma+\frac{\gamma'}{1.2.R}s_2-\frac{s^2{}_2}{3!}[K'_\gamma+\zeta_2] \end{vmatrix}=0,$$

где $K_\alpha=\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds}+\frac{\alpha}{R^2}+\frac{\alpha''}{RT}$ и $K'_\alpha=\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\alpha}{R^2}+\frac{\alpha''}{RT_1}$; соответственные значения имеют K_β, K'_β, K_γ, K'_γ. Члены разложения s выше третьей не написаны.

Вычитая из третьей и четвертой строки вторую и деля третью строку на $s_1—s$, а четвертую на s, получим:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x & , y, & z \\ s & , \alpha+\frac{\alpha'}{1.2.R}s-\frac{s^2}{3!}[K_\alpha+\varepsilon_1] & , \ldots, & \ldots \\ 1 & , \frac{\alpha'}{1.2.R}-\frac{s_1+s}{3!}K_\alpha-\frac{\varepsilon_2 s_1{}^2-\varepsilon_1 s^2}{3!(s_1-s)} & , \ldots, & \ldots \\ -1-k & , -\frac{K\alpha'}{1.2.R}-\frac{\alpha'}{1.2.R}+\frac{Ks_2}{3!}K'_\alpha+\frac{s}{3!}K_\alpha-\frac{\varepsilon_3 s_2{}^2-\varepsilon_1 s^2}{3!s} & , \ldots, & \ldots \end{vmatrix}=0$$

так как $\frac{s_1}{s_2} = -k$ по условию. Умножая третью строку на $(1+k)$ и складывая с четвертой получим:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x & ,y & ,z \\ s & ,\alpha+\frac{\alpha'}{1.2R}s-\frac{s^2}{3!}\left[K_\alpha+\varepsilon_1\right] & ,\dots & ,\dots \\ 1 & ,\frac{\alpha'}{1.2R}-\frac{s_1+s}{3!}K_\alpha-\frac{\varepsilon_2 s_1{}^2+\varepsilon_1 s^2}{3!\,s} & ,\dots & ,\dots \\ 0 & ,\frac{ks_2}{3!}K'_\alpha-\frac{ks+(1+k)s_1}{3!}K_\alpha-\frac{\varepsilon_3 s_2{}^2-\varepsilon_1 s^2}{3!s}-\frac{(1+k)(\varepsilon_2 s_1{}^2-\varepsilon_1 s^2)}{3!\,(s_1-s)} & ,\dots & ,\dots \end{vmatrix}=0$$

Деля четвертую строку на s, потом на $-\frac{k^2}{3!}$, обозначая $\frac{k+(1+k)h}{k^2}$ через $A\geqslant 0$ и переходя к пределу, получим:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x & ,y & ,z \\ 0 & ,\alpha & ,\beta & ,\gamma \\ 1 & ,\frac{\alpha'}{1.2R} & ,\frac{\beta'}{1.2R} & ,\frac{\gamma'}{1.2R} \\ 0 & ,\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\alpha}{R^2}+\frac{\alpha''}{RT_1}+A\left(\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds}+\frac{\alpha}{R^2}+\frac{\alpha''}{RT}\right), & \dots, & \dots \end{vmatrix}=0$$

так как $\frac{\varepsilon_3 s_2{}^2-\varepsilon_1 s^2}{3!s^2}$ и $\frac{(1+k)\,(\varepsilon_2 s_1{}^2-\varepsilon_1 s^2)}{3!(s_1-s).s.}$ стремятся к нулю, первое выражение при всяком законе сближения точек, а второе, так как $lim\ \frac{s_1}{s}\neq 1$ по условию.

Умножая вторую строку на $\frac{1+A}{R^2}$ и вычитая ее из четвертой а третью умножая на $2R$, получим

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, \\ 0 & ,\alpha, & \beta, & \gamma, \\ 2R & ,\alpha', & \beta', & \gamma', \\ 0 & ,\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\alpha''}{RT_1}+A\left(\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds}+\frac{\alpha''}{RT}\right), & \frac{\beta'}{R^2}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\beta''}{RT_1}+\dots & \end{vmatrix}=0$$

Этот определитель можно представить в виде суммы двух определителей, сокращая предварительно на $\frac{1}{R}$,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, \\ 0 \quad , & \alpha, & \alpha, & \beta, \\ 2R \quad , & \alpha', & \beta', & \gamma', \\ 0 \quad , & \frac{\alpha'}{R}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\alpha''}{T_1}, & \frac{\beta'}{R}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\beta''}{T_1}, & \frac{\gamma'}{R}\frac{dR}{ds_1}+\frac{\gamma''}{T_1} \end{vmatrix} +$$

$$+A \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z, \\ 0 \quad , & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ 2R \quad , & \alpha', & \beta', & \gamma', \\ 0 \quad , & \frac{\alpha'}{R}\frac{dR}{ds}+\frac{\alpha''}{T}, & \frac{\beta'}{R}\frac{dR}{ds}+\frac{\beta''}{T}, & \frac{\gamma'}{R}\frac{dR}{ds}+\frac{\gamma''}{T_1} \end{vmatrix} = 0$$

Умножаем в первом определителе третью строку на $\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{ds_1}$, вычитаем ее из четвертой и выносим $\frac{1}{T_1}$ за знак определителя. Аналогично поступаем со вторым определителем. Получаем:

$$\frac{1}{T_1}\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z. \\ 0 \quad , & \alpha, & \beta, & \gamma. \\ 2R \quad , & \alpha', & \beta', & \gamma'. \\ -2T_1\frac{dR}{ds_1}, & \alpha'', & \beta'', & \gamma''. \end{vmatrix} + \frac{A}{T}\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z. \\ 0 \quad , & \alpha, & \beta, & \gamma. \\ 2R \quad , & \alpha', & \beta', & \gamma'. \\ -2T\frac{dR}{ds_1}, & \alpha'', & \beta'', & \gamma''. \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

Множитель при $\frac{1}{T_1}$ есть уравнение соприкасающагося шара слева, а при $\frac{A}{T}$ соприкасающагося шара справа. Таким образом мы получили пучек шаров, проходящих через круг пересечения соприкасающихся шаров справа и слева в данной точке. Следовательно, центры шаров будут лежать на полярной оси кривой в точке A. Чтобы исследовать изменение положения центра шара в зависимости от свойств кривой в даной точке при различных законах сближения точек B_1, B_2 и B_3, возьмем за систему координат основной триедр; тогда получаем:

$$\frac{1}{T_1}\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z \\ 0 \quad , & 1 & 0 & 0 \\ 2R \quad , & 0 & 1 & 0 \\ -2T_1\frac{dR}{ds_1}, & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{A}{T}\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z \\ 0 \quad , & 1 & 0 & 0 \\ 2R \quad , & 0 & 1 & 0 \\ -2T\frac{dR}{ds}, & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или разлагая по элементам второй строки

$$\frac{1}{T_1}\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & y, & z \\ 2R \quad , & 1 & 0 \\ -2T_1\frac{dR}{ds_1}, & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{A}{T}\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & y & z \\ 2R \quad , & 1 & 0 \\ -2T\frac{dR}{ds}, & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая эти определители получаем:

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{T_1}+\frac{A}{T}\right)-2R\left(\frac{1}{T}+\frac{A}{T}\right)y+2\left(\frac{dR}{ds_1}+A\frac{dR}{ds}\right)z=0.$$

Координаты центра шара

$$x=0;\ y=R;\ z=-\frac{\dfrac{dR}{ds_1}+A\dfrac{dR}{ds}}{\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{A}{T}}=-\frac{TT_1\left(\dfrac{dR}{ds_1}+A\dfrac{dR}{ds}\right)}{(T+AT_1)}$$

а радиус шара удовлетворяет уравнению

$$r^2=R^2+\left[\frac{TT_1\left(\dfrac{dR}{ds}+A\dfrac{dR}{ds}\right)}{T+AT_1}\right]^2.$$

Если бы $\dfrac{dR}{ds}=\dfrac{dR}{ds_1}$ и $T=T_1$, мы получили бы обычные формулы для соприкасающегося шара.

Рассмотрим, как изменяется z прн изменении A в зависимости от свойств кривой. Возьмем для этого производную по A от

$$z=-\frac{TT_1\left[\dfrac{dR}{ds_1}+A\dfrac{dR}{ds}\right]}{T+AT_1}$$

$$\frac{dz}{dA}=-TT_1\frac{T\dfrac{dR}{ds}-T_1\dfrac{dR}{ds_1}}{(T+AT_1)^2}$$

Очевидно, что когда $A=0$, то $z=-T_1\dfrac{dR}{ds_1}$, а когда $A=\infty$, то $z=-T\dfrac{dR}{ds}$.

Предположим что $-T_1\dfrac{dR}{ds_1}<-T\dfrac{dR}{ds}$, тогда

$$T_1\frac{dR}{ds_1}>T\frac{dR}{ds}\text{, следовательно}$$

знак производной $\dfrac{dz}{dA}$ зависит от знака произведения TT_1.

Если $TT_1>0$, то $\dfrac{dz}{dA}>0$ и z будет функция возрастающая, центр полученного шара при возрастании A от 0 до ∞ остается на отрезке, соединяющем центры соприкасающихся шаров справа и слева.

Если $TT_1 < 0$, то $\dfrac{dz}{dA} < 0$ и z будет функция убывающая, центр полученного шара при возрастании A от 0 до ∞ непрерывно изменяется от $-T_1 \dfrac{dR}{ds_1}$ до $-\infty$, потом от $+\infty$ до $-T\dfrac{dR}{ds}$ т. е. остается на полярной оси вне отрезка соединяющего центры соприкасающихся шаров.

* * *

Пусть кривая дана в параметрической форме

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ z = \chi(s).$$

Возьмем за начало координат и начало отсчета дуг точку A, в которой первые производные непрерывны, а вторые справа и слева различны, кроме того вторая производная справа непрерывна справа, а вторая производная слева непрерывна слева, тогда координаты x, y, z раскладываются справа от точки A по формулам

$$x = \alpha s + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{\alpha'}{R} + \varepsilon_1\right)$$

$$y = \beta s + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{\beta'}{R} + \varepsilon_2\right)$$

$$z = \gamma s + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{\gamma'}{R} + \varepsilon_3\right).$$

Координаты точек слева от точки A выражаются формулами

$$x = \alpha s + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{\alpha'_1}{R_1} + \eta_1\right)$$

$$y = \beta s + \frac{s_2}{1.2}\left(\frac{\beta'_1}{R_1} + \eta_2\right)$$

$$z = \gamma s + \frac{s^2}{1.2}\left(\frac{\gamma'_1}{R_1} + \eta_2\right), \text{ где}$$

α', β', γ', cos'ы углов, образуемые главной нормалью справа, а R радиус кривизны справа. α'_1, β'_1, γ'_1 и R_1 сооветственные значения слева. ε_i, η_i стремятся к нулю вместе с s.

Напишем уравнение шара, проходящего через четыре точки; как и в первой задаче, подставляя вместо координат их разложения и сокращая на s_1, s_2, s_3, получим:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z_2, & x, & y, & z \\ s & ,\ \alpha + \frac{s}{1.2}\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon_1\right), & \beta + \frac{s}{1.2}\left(\frac{\beta'}{R}+\varepsilon_2\right), & \gamma + \left(\frac{\gamma'}{R}+\varepsilon_3\right) \\ s_1 & ,\ \alpha + \frac{s_1}{1.2}\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon'_2\right), & \beta + \frac{s_1}{1.2}\left(\frac{\beta'}{R}+\varepsilon'_2\right), & \gamma + \left(\frac{\gamma'}{R}+\varepsilon'_3\right) \\ s_2 & ,\ \alpha + \frac{s_2}{1.2}\left(\frac{\alpha^!}{R_1}+\eta_1\right), & \beta + \frac{s_2}{1.2}\left(\frac{\beta^!}{R_1}+\eta_2\right), & \gamma + \left(\frac{\gamma^!}{R_1}+\eta_3\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитаем вторую строку из третьей и делим на $s_1 - s$ вычитаем вторую строку из четвертой и делим на s.

Получим

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x & , y, & z \\ s & , \alpha + \frac{s}{1.2}\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon_1\right) & , \ldots, & \ldots \\ 1 & , \frac{\alpha'}{1.2R} + \frac{s_1\varepsilon'_1 - \varepsilon_1 s}{1.2(s_1-s)} & , \ldots, & \ldots \\ -1-k & , -\frac{k\alpha'_1}{1.2R_1} - \frac{\alpha!}{1.2R} - \frac{k\eta'_1}{1.2} - \frac{\varepsilon_1}{1.2}, & \ldots, & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

при условии, что $\lim \frac{s_1}{s}$ не равен единице, $\lim \frac{s_1\varepsilon'_1 - s_1\varepsilon}{1.2(s_1-s)}$ равен нулю. Прибавляя к четвертой строке третью, переходя к пределу, сокращая на $-k$ и умножая третью строку $2R$, а четвертую на $2R_1$ получаем

$$\begin{vmatrix} x_2+y_2+z_2, & x, & y, & z \\ 0 \quad , & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R \quad , & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1 \quad , & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Уравнение полученного шара не зависит от закона сближения точек.

Найдем круг пересечения этого шара с соприкасающейся плоскостью справа. Для этого возьмем за систему координат основной триедр справа; при этом условии имеем $\alpha = \beta' = 1$; $\beta = \gamma = \alpha' = \gamma' = 0$.

Уравнение шара напишется:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z_2, & y, & z \\ 2R \quad , & 1, & 0 \\ 2R_1 \quad , & \beta'_1 & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0$$

Полагая $z = 0$, найдем круг пересечения шара с соприкасающейся плоскостью

$$x^2 + y^2 + z_2 - 2Ry = 0$$

это уравнение показывает, что этот круг есть круг кривизны справа. Таким же методом можно показать, что шар проходит и через круг кривизны слева. Отсюда вытекает, что полярные прямые справа и слева пересекаются, и точка их пересечения есть центр найденного шара.

Найдем предельное положение плоскости, проходящей через точки A, B_1 и B_3. Если вместо координат точек B_1 и B_3 подставить их разложения, то уравнение напишется, после сокращения на s и s_2.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha'+\frac{s}{1.2}\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon_1\right), & \beta+\frac{s}{1.2}\left(\frac{\beta'}{R}+\varepsilon_2\right), & \gamma+\frac{s}{1.2}\left(\frac{\gamma'}{R}+\varepsilon_3\right) \\ \alpha+\frac{s_2}{1.2}\left(\frac{\alpha'_1}{R_1}+\eta_1\right), & \beta+\frac{s_2}{1.2}\left(\frac{\beta'_2}{R_1}+\eta_2\right), & \gamma+\frac{s_2}{1.2}\left(\frac{\gamma'_1}{R_1}+\eta_3\right) \end{vmatrix}=0.$$

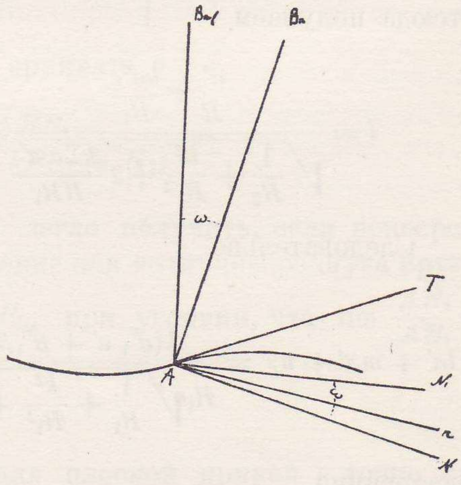
Вычитая вторую строку из третьей, деля на s и переходя к пределу получаем

$$\begin{vmatrix} x, & y & z \\ \alpha, & \beta & \gamma \\ -\frac{k\alpha'_1}{1.2R_1}-\frac{\alpha'}{1.2R}, & -\frac{k\beta'_1}{1.2R_1}-\frac{\beta'}{1.2R}, & -\frac{k\gamma'_1}{1.2R}-\frac{\gamma'}{1.2R} \end{vmatrix}=0$$

или умножая на $-\frac{1}{2}$, получаем:

$$\frac{1}{R}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix}+\frac{k}{R_1}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

т. е. пучек плоскостей, проходящих через линию пересечения соприкасающихся плоскостей справа и слева, т. е. через касательную. Очевидно, что круг, проведенный через точки B_3, A и B_1, одновременно находится на плоскости, проведенной через эти точки, и на шаре, проходящем через точки B_3, A, B_1 и B_2. Когда эти точки сближаются по какому-нибудь закону, то шар и плоскость стремятся к определенному предельному положению, для плоскости зависящему от закона сближения, а для шара нет. Очевидно, что предельное положение круга, проходящего через точки B_3, A и B_1, есть пересечение предельного положения шара с предельным положением соответствующей плоскости, т. е. уравнение этого круга представляется совокупностью уравнений (4) и (5). Каждой плоскости (5) соответствует круг сечения. Таким образом шар (4) в части, заключенной между двумя соприкасающимися плоскостями справа и слева, есть геометрическое место предельных положений кругов, проведенных через три точки кривой. Очевидно, что центры этих кругов при непрерывном изменении k описывают дугу окружности, заключенную между центрами кривизны справа и слева, диаметр которой равен половине диаметра шара (4).



Фиг. 2.

AN — главн. норм. справа
AN — главн. норм. слева
AB_n — бинорм. справа
AB_{n_1} — бинорм. слева
A_n — главн. норм. для плоскости (5)

Найдем радиус круга пересечения.

Пусть перпендикуляр проведенный из начала координат к плоскости (5)образовывает углы, cosinus'ы которых с осями координат есть l, m, n. Возьмем за плоскость XOY плоскость (5) и за ось OX касательную. Пусть cosinus'ы углов, образованных новою осью Y со старыми осями координат, будут a, b, c. Тогда

cosinus угла образованного новою осью Y (главная нормаль плоскости) с главною нормалью справа $= a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \cos(n, N)$,

cosinus угла образованного новою осью Y с главною нормалью слева $= a\alpha'_1 + b\beta'_1 +_1 c\gamma'_1 = \cos(n, N_1)$,

cosinus угла образованного новою осью Z с главною нормалью справа $=$ $= l\alpha' + m\beta' + n\gamma'$,

cosinus угла образованного новою осью Z с главною нормалью слева $=$ $= l\alpha'_1 + m\beta'_1 + n\gamma'_1$

Таким образом уравнение шара (4) напишется

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z \\ 0 & , 1 & 0 & 0 \\ 2R & , 0 & \cos(n, N) & l\alpha' + m\beta' + n\gamma' \\ 2R_1 & , 0 & \cos(n, N_1) & l\alpha'_1 + m\beta'_1 + n\gamma'_1 \end{vmatrix} = 0 \;.\;.\;.\; (6)$$

Вычислим l, m и n. Уравнение плоскости (5) напишется в раскрытом виде так:

$$x\left(\frac{\alpha''}{R} + \frac{k\alpha''_1}{R_1}\right) + y\left(\frac{\beta''}{R} + \frac{k\beta''_1}{R_1}\right) + z\left(\frac{\gamma''}{R} + \frac{k\gamma''_1}{R_1}\right) = 0$$

отсюда получаем

$$l = \frac{\dfrac{\alpha''}{R} + \dfrac{k\alpha''_1}{R_1}}{\sqrt{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{k^2}{R_1{}^2} + 2\,\dfrac{k\Sigma\alpha'\alpha''}{RR_1}}}\;;\; m = \frac{\dfrac{\beta''}{R} + \dfrac{k\beta''_1}{R_1}}{\text{idem}}\;;\; n = \frac{\dfrac{\gamma''}{R} + \dfrac{k\gamma''_1}{R_1}}{\text{idem}}$$

Следовательно

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = \frac{k(\alpha''_1\alpha' + \beta''_1\beta' + \gamma''_1\gamma')}{R_1\sqrt{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{k^2}{R_1{}^2} + 2k\,\dfrac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}} = \frac{k\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \omega\right)}{\text{idem}} = -\frac{k\sin\omega}{\text{idem}}$$

аналогично

$$l\alpha'_1 + m\beta'_1 + n\gamma'_1 = \frac{\alpha''\alpha_1 + \beta''\beta_1 + \gamma''\gamma_1}{R\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{k^2}{R_1{}^2} + 2k\,\dfrac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}} = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \omega\right)}{\text{idem}} = \frac{\sin\omega}{\text{idem}}$$

Подставляя эти значения в уравнение шара (6) получим

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y & z \\ 0 \quad , & 1, & 0 & 0 \\ 2R \quad , & 0, & \cos(n,N), & -\dfrac{k\sin\omega}{R_1\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{k^2}{R_1{}^2}+2k\dfrac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}} \\ 2R_1 \quad , & 0, & \cos(n,\ N_1), & \dfrac{\sin\omega}{R\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{k^2}{R_1{}^2}+2k\dfrac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая по элементам второй строки и полагая $z=0$, найдем уравнения сечения шара (4) новой плоскостью XOY. После сокращения на $\dfrac{\sin\omega}{\sqrt{\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{k^2}{R_1{}^2}+2k\dfrac{\Sigma\alpha''\alpha''_1}{RR_1}}}$, уравнение напишется так:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & y, & 0 \\ 2R \quad , & \cos(n,\ N), & -\dfrac{k}{R_1} \\ 2R_1 \quad , & \cos(n,\ N_1), & \dfrac{1}{R} \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде:

$$(x^2+y^2+z^2)\left[\frac{1}{R}\cos(n,N)+\frac{k}{R_1}\cos(n,N_1)\right]-2y(1+k)=0$$

отсюда радиус круга сечения, или ордината y

$$y=\frac{(1+k)\,RR_1}{R_1\cos(n,N)+kR\cos(n,N_1)}\ (7),$$

Эту же формулу для радиуса легко получить, если непосредственно находить предельное выражение для величины радиуса круга, проведенного через точки A, B_1, B_3, при условии, что $\lim\dfrac{AB_3}{AB_1}=$

$=\lim\dfrac{s_2}{s}=-k.$

Это есть обобщение формулы для плоской кривой в точке, где вторые производные справа и слева не равны между собою, которая получается из данной, полагая $\cos(n,N)=\cos(n,N_1)=1$, если оба круга кривизны лежат по одну сторону от касательной и полагая $\cos(n,N)=1$, $\cos(n,N_1)=-1$, если круги кривизны лежат по разные стороны касательной.

В том случае, когда соприкасающиеся плоскости справа и слева совпадают, уравнение шара (4) переходит в уравнение соприкасающейся плоскости. Действительно уравнение (4) напишется тогда так:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & x, & y, & z \\ 0 & , \alpha', & \beta, & \gamma \\ 2R & ; \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1 & , \alpha, & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая из четвертой строки третью, видим, что все элементы четвертой строки за исключением первой обращаются в нуль, и уравнение напишется

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

это есть уравнение соприкасающейся плоскости.

Уравнение (7), если круг кривизны справа и круг кривизны слева лежат по одну сторону касательной, напишется в таком виде: $y = \frac{(1+k)RR_1}{R_1+kR}$ при $k=0: y=R$, при $k=\infty$, $y=R_1$ пусть $R_1 > R$.

Возьмем производную от y по k

$$\frac{dy}{dk} = \frac{k(R_1-R)RR_1}{(R_1+kR)^2},$$

так как k число положительное, то y есть функция возрастающая. Следовательно при непрерывном возрастании k от 0 до ∞, центр круга движется по нормали от R до R_1, т. е. центр круга всегда находится на отрезке, соединяющем центр, кривизны справа и слева.

Если центры кругов кривизны справа и слева будут лежат по разные стороны касательной, то уравнение (7) напишется

$$y = \frac{(1+k)RR}{R_1-kR}.$$

очевидно, что y есть функция возрастающая. При непрерывном изменении k y увеличивается от R до $+\infty$, а потом от $-\infty$ до $-R_1$, т. е. центр круга всегда лежит вне отрезка соединяющего кривизны справа и слева.

До сих пор на кривую в точке A накладывалось условие, что в данной точке она имеет только вторые производные справа и слева. Пусть теперь кривая имеет справа и слева непрерывные производные по крайней мере третьего порядка.

$$x = \alpha s + \frac{s^2\alpha'}{1.2R} - \frac{s^3}{1.2.3}\left[\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds} + \frac{\alpha}{R^2} + \frac{\alpha''}{RT} + \varepsilon_1\right] = f(s)$$

$$y = \beta s + \frac{s^2\beta'}{1.2R} - \frac{s^3}{1.2.3}\left[\frac{\beta'}{R^2}\frac{dR}{ds} + \frac{\beta}{R^2} + \frac{\beta''}{RT} + \varepsilon_2\right] = \varphi(s)$$

$$y = \gamma s + \frac{s^2\gamma'}{1.2R} - \frac{s^3}{1.2.3}\left[\frac{\gamma'}{R^2}\frac{dR}{ds} + \frac{\gamma}{R^2} + \frac{\gamma''}{RT} + \varepsilon_2\right] = \psi(s)$$

и аналогичные разложения для точек слева.

Шар (4) имеет соприкосновение с кривой в точке A второго порядка. Действительно подставляя вместо x, y и z. $\varphi(s)$, $\psi(s)$ и $\chi(s)$ получим функцию $F(s)$.

$$F(s) = \begin{vmatrix} \varphi^2(s) + \psi^2(s) + \chi^2(s), & \varphi(s), & \psi(s), & \chi(s) \\ 0 \quad , & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R \quad , & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1 \quad , & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix},$$

которая при $s = 0$ равна нулю, $F(0) = 0$; $F'(s)$ при $s = 0$ тоже равна нулю, так как в этом случае первая строка определителя равна второй. $F''(s)$ справа при $s = 0$ равна нулю, так как первая сторона будет пропорциональна третьей, а $F''(s)$ слева при $s = 0$ равна нулю, так как первая строка будет пропорциональна четвертой строке.

Найдем, какому аналитическому условию должна удовлетворять кривая в точке A, чтобы соприкасающиеся шары справа и слева совпадали. Очевидно, что в этом случае соприкасающийся шар должен проходить одновременно и через круг кривизны справа и через круг кривизны слева, а значит соприкасающийся шар должен совпасть с шаром (4). А для того, чтобы шар (4) имел прикосновение третьего порядка с кривой в точке A, необходимо и достаточно, чтобы производные от $F(s)$ третьего порядка справа и слева при $s = 0$ были бы равны нулю.

Третья производная от $F(s)$ справа при $s = 0$ напишется так

$$F'''(0) = \begin{vmatrix} 0, & -\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{\alpha}{R^2} - \frac{\alpha''}{RT}, & -\frac{\beta'}{R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{\beta}{R_2} - \frac{\beta''}{RT}, & -\frac{\gamma'}{R}\frac{dR}{ds} - \frac{\gamma}{R_2}\frac{\gamma''}{RT} \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1, & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix}$$

умножая вторую строку на $\frac{1}{R^2}$, а третью на $\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}$, складывая их с первой и приравнивая нулю, получим условие, чтобы шар (4) имел соприкосновение третьего порядка справа которое после умножения на $-RT$, напишется так:

$$\begin{vmatrix} -2T\frac{dR}{ds}, & \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ 0, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2R, & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ 2R_1, & \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем этот определитель по элементам первого столбца и сократим на 2; получаем:

$$-T\frac{dR}{ds}(\alpha'_1\alpha''+\beta'_1\beta''+\gamma'_1\gamma'')+R(\alpha'_1\alpha'+\beta_1'\beta'+\gamma'_1\gamma)-R_1=0$$

или обозначая через ω угол между соприкасающимися плоскостями справа и слева получим:

$$-T\frac{dR}{ds}\sin\omega+R\ \cos\omega-R_1=0.$$

Таким же методом получается условие, чтобы шар (4) имел соприкосновение третьего порядка слева

$$-T_1\frac{dR_1}{ds}\sin\omega+R_1\cos\omega-R=0.$$

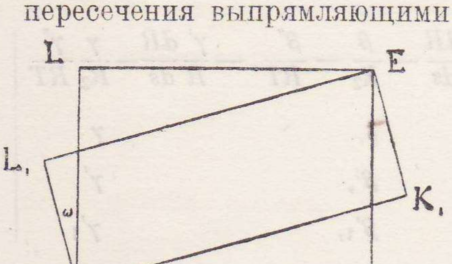
Равенство нулю этих двух выражений есть необходимое и достаточное условие, чтобы шар (4) имел соприкосновение третьего порядка справа и слева или иными словами, чтобы соприкасающиеся шары справа и слева между собою совпадали.

Интересно отметить, что в этом случае уравнение соприкасающегося шара (4) не зависит от радиуса кручения.

Как следствие двух предыдущих условий можно получить, что

$$\left(T\frac{dR}{ds}\right)^2+R^2=\left(T_1\frac{dR}{ds_1}\right)^2+R_1{}^2.$$

Обратив внимание, что $-T\frac{dR}{ds}$ и $-T\frac{dR}{ds_1}$ есть радиусы кругов пересечения выпрямляющими плоскостями справа и слева соприкасающегося шара, легко найти геометрически условия необходимые и достаточные, чтобы соприкасающиеся шары справа и слева между собою совпадали, т. е. чтобы шар (4) был бы соприкасающимся. Для этого нужно найти условие, при котором бы точки A, K, K_1, L, L_1 лежали бы на одной окружности.



Фиг. 3.

$AK=2R$ $\qquad$ $AK=2R_1$

$AL=-2T\frac{dR}{ds}$; $\qquad$ $LA=-2T_1\frac{dR_1}{ds}$

Если эти точки лежат на одной окружности, то проводя через точку L отрезок LE параллельный и равный

AK_1 получим, что AE есть диаметр. Проектируя ломанную линию $ALEK_1$ на AK_1 и сокращая на 2 получим:

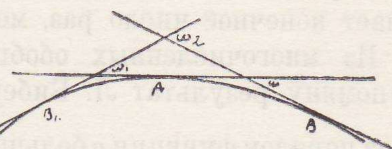
$$-T_1 \frac{dR}{ds} \sin\omega + R\cos\omega - R_1 = 0$$

так же получаем, что

$$-T \frac{dR}{ds} \sin\omega + R_1 \cos\omega - R = 0.$$

Очевидно, что это условие есть и достаточное.

Пусть точка A плоской кривой обыкновенная точка, в которой радиусы кривизны справа и слева различны. В зависимости от формы кривой в этой точке центры кругов кривизны будут лежать по одну сторону касательной или по различные стороны. Рассмотрим сначала первый случай. Возьмем точки B и B_1 по разные стороны от точки A. Обозначим AB через s, AB_1 через s_1. Тогда, по определению радиуса кривизны справа,



Фиг. 4.

имеем $R = \lim \frac{s}{\omega}$ и $R_1 = \lim \frac{s_1}{\omega_1}$. Пусть B и B_1 стремятся к точке A так, чтобы $\lim \frac{s_1}{s} = k$.

Из чертежа видно, что $\omega_2 = \omega + \omega_1$.

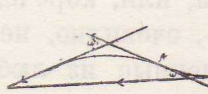
Найдем

$$\rho = \lim \frac{\smile B_1B}{\omega_2} = \lim \frac{s + s_1}{\omega_1 + \omega} = \lim \frac{1 + \frac{s_1}{s}}{\frac{\omega_1}{s_1} \cdot \frac{s_1}{s} + \frac{\omega}{s}} = \frac{1 = k}{\frac{k}{R_1} + \frac{1}{R}} = \frac{(1+k)RR_1}{R_1 + kR}$$

Рассмотрим второй случай.

Из чертежа видно, что $|\omega_2| = \omega_1 - \omega$.

Найдем



Фиг. 5.

$$\rho = \left| \lim \frac{\smile B_1B}{\omega_2} \right| = \left| \lim \frac{s + s_1}{\omega_1 - \omega} \right| =$$

$$= \left| \lim \frac{1 + \frac{s_1}{s}}{\frac{\omega_1}{s_1} \cdot \frac{s_1}{s} + \frac{\omega}{s}} \right| = \lim \left| \frac{(1+k)\, RR_1}{R_1 - kR} \right|$$

Эти формулы можно получить пользуясь предельным кругом.