О целых функциях и прямых Жюлиа.

В. Гончаров.

1. Согласно теореме Пикара, всякая целая функция принимает любое значение a, кроме, может-быть одного, бесконечное число раз. Поэтому те значения a, которых функция не принимает или принимает конечное число раз, можно считать исключительными.

Из многочисленных обобщений и уточнений теоремы Пикара я упомяну результат Л. Бибербаха, который показал, что в случае, когда порядок функции ϱ больше, чем $\frac{1}{2}$, и конечен, функция принимает все значения, кроме, может-быть, одного, бесконечное число раз внутри всякого угла, величина которого превышает наибольшее из чисел $\frac{\pi}{\varrho}$ и $2\pi - \frac{\pi}{\varrho}$; в случае же порядка ϱ, не превышающего $\frac{1}{2}$, функция может не принимать двух значений в угле, величина которого сколь угодно мало отличается от 2π.

Следующий замечательный результат принадлежит Г. Жюлиа. Какова бы ни была целая функция, среди полупрямых, выходящих из данной точки, можно указать хотя бы одну такую, что в угле, имеющем вершину в данной точке и имеющем бисектрисой рассматриваемую полупрямую, как бы мал этот угол ни был, функция принимает любое значение, кроме, может быть одного. Всякую полупрямую, обладающую указанным свойством, мы будем называть прямою Жюлиа, или, короче, прямою (J). Выбор начальной точки—вершины угла—, очевидно, не имеет значения в том смысле, что прямые (J), проведенные из любой точки, постоянно имеют одни и те же направления.

2. Это свойство целых функций, замеченное Жюлиа, представляет собою непосредственное следствие из некоторых предложений, установленных П. Монтелем, и которыми мы в дальнейшем будем пользоваться. Основное понятие, введенное П. Монтелем,—понятие нормального семейства функции: семейство (совокупность) (F) функций голоморфных в некоторой открытой области $(\triangle)$ называется нормальным

*) L. Bieberbach Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Fuuntionen in der Umgebung wesentlich singul. Stelle (Mathem. Zeitschrift, Bd. 2 (1918)).

**) G. Julia Sur quelques propriétés des fonctions entières et méromorphes (Ann. Ec. Norm. (1919))

в этой области, если из всякой последовательности функций $[f_n(z)]$ $(n=1,2,3...)$, принадлежащих семейству (F), можно выделить частную последовательность $[f_{n_i}(z)]$ $(i=1,2,3...)$, такую, что во всякой замкнутой области $(\triangle_1)$, принадлежащей области $(\triangle)$, эта последовательность равномерно стремится к пределу — конечному или бесконечному; в первом случае, предел, очевидно, есть функция, голоморфная в $(\triangle)$. Дальше, семейство функций (F) называется нормальным в точке $z=z_0$, если оно нормально в некоторой окрестности этой точки. Точка, $z=z_0$ называется регулярной или иррегулярной точкой относительно семейства (F) в зависимости от того, нормально или не нормально семейство (F) в этой точке.

Исследования П. Монтеля*) показывают, что: 1) если функции семейства (F) в области $(\triangle)$ не принимают двух значений (a и b, $a \neq b$), или же только конечное число функций семейства (F) принимает эти значения, то семейство (F) нормально в области $(\triangle)$,

2) если семейство (F) нормально в каждой точке области $(\triangle)$ (т.-е. все точки $(\triangle)$ — регулярны), то семейство (F) нормально в области $(\triangle)$.

Отсюда следует, что, если семейство (F) не нормально в области $(\triangle)$, то должна быть в $(\triangle)$ хоть одна иррегулярная точка, в окрестности которой любое значение a, кроме, может быть, одного, принимается бесконечным числом функций семейства.

Жюлиа рассматривает семейство (F):

$$f_t(z) \equiv f(tz)$$

в области

$$(\triangle) \quad \begin{cases} 1-\sigma < r < 1+\sigma \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{cases} \qquad (0<\sigma<1) \quad (z=re^{i\theta}),$$

где $f(z)$ — целая функция, а t — параметр семейства, принимающий значения $\geqslant 1$.

Оставляя в стороне случай, когда $f(z)$ — полином, выберем ряд точек $z_n = t_n e^{i\theta_n}$ таких, что $|f(z)|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$.

Последовательность функций $|f_{t_n}(z)|$ $(n=1,2,3\ldots)$ такова, что из нее нельзя выделить ни такой частной последовательности, которая в области $(\triangle)$ стремилась бы к бесконечности (ибо $|f_{t_n}(e^{i\theta_n})|<1$), ни такой, которая в той же области стремилась бы к некоторой голоморфной функции (иначе $f(z)$ была бы ограничена по модулю на кругах с центром $z=0$ и радиусами, равными t_n, что противоречит теореме Лиувилля). Значит, семейство $[f_{t_n}(z)]$ — не нормальное в области $(\triangle)$, и имеется иррегулярная точка, напр., $z=z_o$, в окрестности которой, скажем, в круге с центром $z=z_o$ и радиусом ε, любое значение a, кроме, может быть, одного, принимается бесконечным числом функций $f_{t_n}(z)$; или иными словами, функция $f(z)$ принимает

*) P. Montel. Sur les familles des fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (Ann. Ec. Norm., (1912)).

Sur les familles normales de fonctions analytiques (там же, (1916)).

всякое значение a, кроме, может-быть, одного, в бесконечном числе кругов с центрами $t_n z_0$ и радиусами $t_n \varepsilon$; следовательно,—и в угле, вершина которого $z=0$, бисектриса проходит через точку $z=z_0$, и величина которого ε—сколь угодно мала. Таким образом, основное предложение Жюлиа вытекает из сопоставления теорем Монтеля с теоремой Лиувилля.

Следует заметить, что из приведенного рассуждения не вытекает, что на всякой прямой (J) непременно имеется иррегулярная точка семейства $f_t(z)$ $(t \geqslant 1)$, хотя мы и не располагаем примером, опровергающим это предложение.

3. Естественно поставить вопрос о совокупности прямых (J) для целых функций различных порядков. В дальнейшем, я привожу некоторые результаты, касающиеся числа и расположения прямых (J).

Относительно наименьшего числа прямых (J) можно заметить следующее:

(1) Существуют функции любого порядка ϱ, не превышающего $\frac{1}{2}$, которые имеют только одну прямую (J). Таковы, напр., функции

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right) \qquad \left(\varrho \leqslant \frac{1}{2}\right),$$

для которых $\theta=0$ есть единственная прямая (J),

(2) существуют функции любого конечного порядка ϱ, большего, чем, $\frac{1}{2}$, которые имеют только две прямые (J). Примером могут служить функции Миттаг-Лефлера

$$E_\alpha(z) \equiv \sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma_{(1+n\alpha)}} \qquad \left(\varrho=\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{2}\right),$$

для которых прямыми (J) являются $\theta=\pm\,\alpha\frac{\pi}{2}$,

(3) существуют функции бесконечного порядка, имеющие только одну прямую (J). Такова функция (указанная также Миттаг-Лефлером)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{e^{e^{\zeta}}d\zeta}{\zeta-z} \qquad (\zeta=\xi+i\eta),$$

интегрирование производится по контуру (C), составленному из отрезков 1°. $\eta=-\pi$, $\xi \geqslant 0$, 2°. $\xi=0$, $|\eta| \leqslant \pi$, 3°. $\eta=\pi$, $\xi \geqslant 0$. Единственная прямая (J) есть $\theta=0$.

Вопрос о наибольшем числе прямых (J) решается следующим образом: существуют целые функции всех порядков, имеющие любую полупрямую прямой (J). Для случая $0<\varrho<\frac{1}{2}$ достаточно положить

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}\,e^{i\alpha_n}}\right),$$

где числа α_n были бы расположены везде густо в промежутке $|0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi|$. Любая точка круга $|z| = 1$ будет иррегулярной точкой семейства

$$f_{m^{\frac{1}{\rho}}}(z) \equiv f(m^{\frac{1}{\rho}} z) \qquad (m = 1,\ 2,\ 3\ldots);$$

чтоб убедиться в этом заметим, что

$$|f(z)| \geqslant \prod_1^\infty \left| 1 - \frac{r}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right|,$$

а последнее выражение возрастает неограничено для $r = m + \frac{1}{2}$ вместе с m. Подстановка $z = z^k$, (k — целое положительное) позволяет перейти к случаю любого конечного порядка. Нетрудно построить примеры и для случаев $\rho = 0$ и $\rho = \infty$.

4. Совокупность прямых (J), или, точнее, совокупность соответствующих им аргументов, очевидно, — замкнутая. Можно утверждать, обратно, что если дана некоторая замкнутая совокупность полупрямых, исходящих из начала, то можно построить целую функцию любого порядка $\rho < \frac{1}{2}$, для которой совокупность прямых (J) будет тождественна с данной совокупностью. В самом деле, для этого достаточно подобрать аргументы нулей $a_n = n^{\frac{1}{\rho}} e^{i\alpha_n}$ таким образом, чтобы производная совокупность аргументов α_n совпала с данной совокупностью.

Что касается случая порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, то можно утверждать, что, какова бы ни была данная замкнутая совокупность полупрямых, исходящих из начала, всегда можно построить целую функцию порядка $\rho\left(\geqslant \frac{1}{2}\right)$, такую, чтобы, внутри данного угла, величина которого равна наибольшему из чисел $\frac{\pi}{\rho}$ и $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$, совокупность прямых (J) совпала бы с данной совокупностью. Для этого берем сумму или произведение (в зависимости от того, будет ли ρ больше или меньше единицы) соответствующей функции порядка $< \frac{1}{2}$ и функции Миттаг-Леффлера $E_{\frac{1}{\rho}}\,\omega(z)$, подобрав ω надлежащим образом.

5. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \leqslant \frac{1}{2}$; пусть $[a_n]$ $(n = 1,\ 2,\ 3\ldots)$, $(a_n = r_n e^{i\theta_n})$, — некоторая, может быть, частная последовательность ее нулей, причем предположим, что

$$\lim_{n \to \infty} \theta_n = \theta^*,$$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} < M,$$

где M — постоянное число. При этих условиях $\theta = \theta^*$ есть прямая (J).

В самом деле, согласно теореме Вимана, в случае $\varrho < \frac{1}{2}$ *) можно указать круги $|z| = t_n$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \infty$, на которых нижняя граница модуля функции неограниченно возрастает.

Последовательность функций

$$f_{t_{n_i}}(z) \equiv f(t_{n_i} z) \quad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

в области

$$(\triangle_\varepsilon) \quad \begin{cases} 1 - \sigma < r < 1 + \sigma \\ \theta^* - \varepsilon < \theta \leqslant \theta^* + \varepsilon \end{cases} \quad \left(\sigma = \frac{M-1}{M+1}\right)$$

не может стремиться ни к голоморфной функции (т. к. $|f_{t_n}(z)|$ при $|z| = 1$ неограниченно возрастает), ни к бесконечности (т. к. в области $(\triangle_\varepsilon)$ для достаточно больших n функция $f_{t_n}(z)$ непременно обращается в нуль). Значит, в области $(\triangle_\varepsilon)$ существует иррегулярная точка $z = \varrho_\varepsilon e^{i\psi_\varepsilon}$ семейства $[f_{t_n}(z)]$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, причем $|\psi_\varepsilon - \theta^*| < \varepsilon$ отсюда следует, что в угле $|\theta - \psi_\varepsilon| < \varepsilon$, а потому a fortiori в угле $|\theta - \theta^*| > |2\varepsilon$ функция $f(z)$ принимает бесконечное число раз всякое значение, кроме, может-быть, одного. Так как ε сколь угодно мало, то $\theta = \theta^*$ есть прямые (J).

Сохраняя прочие предположения, допустим теперь, что порядок функции ϱ больше, чем $\frac{1}{2}$. В этом случае можно утверждать, что во всяком угле, величина которого равна $2\pi - \frac{\pi}{\varrho}$, и который содержит прямую $\theta = \theta^*$ (в частности, допускается совпадение этой прямой с одной из сторон угла), имеется по крайней мере одна прямая (J).

Пусть расматриваемый угол есть

$$(A_0) \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \quad \left(\beta - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{\varrho}\right),$$

при чем $\alpha \leqslant \theta^* \leqslant \beta$. Согласно теореме Фрагмена**) в угле

$$(A_\varepsilon) \qquad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \theta \leqslant \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

*) В случае $\rho = \frac{1}{2}$ применим доказательство следующей теоремы, полагая $\alpha = \beta$.

**) Целая функция порядка $\rho \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$ не может оставаться ограниченной в угле, величина которого превышает $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$.

функция $f(z)$ принимает сколь угодно большие по модулю значения; напр., в точках $z = t_n e^{i\omega_n}\left(\lim t_n = \infty,\ \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \omega_n \leqslant \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Как прежде, заключаем, что в области

$$(\triangle_\varepsilon) \quad \begin{cases} 1 - \sigma < r < 1 + \sigma \\ \alpha - \varepsilon < \theta < \beta + \varepsilon \end{cases} \qquad \left(\sigma = \frac{M-1}{M+1}\right)$$

последовательность $f_{t_n}(z) \equiv f(t_n z)\ n = 1, 2, 3\ ..)$ не образует нормального семейства. Значит, в области $(\triangle_\varepsilon)$ имеется иррегулярная точка $z = \rho_\varepsilon e^{i\psi_\varepsilon}$, и $f(z)$ принимает бесконечное число раз все значения, кроме, может-быть, одного, в угле $|\theta - \psi_\varepsilon| < \varepsilon$; отсюда легко заключить, что в угле (A_0) имеется прямая (J).

Обозначим через θ^* аргумент, соответствующий первой прямой (J), которая встречается в угле $\theta^* \leqslant \theta \leqslant \theta^* + \left(2\pi - \frac{\pi}{\varrho}\right)$, при возростании θ; через $\underline{\theta}^*$ — аргумент, соответствующий первой прямой (J), которая встречается в угле $\theta - \left(2\pi - \frac{\pi}{\varrho} \leqslant \theta \leqslant \theta^*\right.$, при убывании θ. Возможны два случая: 1^0, или $\underline{\theta}^* = \overline{\theta}^* = \theta^*$, т. е. $\theta = \theta^*$ есть прямая (J), или 2^0, $\underline{\theta}^* < \overline{\theta}^* < \theta^*$, и тогда непременно $\overline{\theta}^* - \underline{\theta}^* \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\varrho}$. Следует заметить, что, по крайней мере для $\varrho \leqslant 1$, предельная величина угла $2\pi - \frac{\pi}{\varrho}$, действительно, достигается, как показывают примеры:

$$f_\varrho(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\frac{1}{n^\varrho}}\right) \quad (\varrho < 1), \quad f_1(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad (\varrho = 1).$$

Для этих функций прямая сгущения нулей $\theta = \theta^* = 0$ является биссектрисой между прямыми $(J): \theta = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{2\varrho}\right)$. Это свойство не является обязательным, как следует из примера

$$f(z) \equiv f_\varrho(ze^{i\alpha})\, f_\varrho(ze^{-i\alpha}) \qquad \left(\alpha \leqslant \pi - \frac{\pi}{2\varrho}\right).$$

Было бы интересно выяснить, насколько необходимым является условие $\frac{r_{n+1}}{r_n} < M$ для того, чтобы две последние теоремы имели место. Во всяком случае, это условие играет существенную роль при докательстве, основанном на методе нормальных семейств.

6. В дальнейшем я рассматриваю исключительно случай функций нулевого рода, т. е. функций вида

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

предполагая $f(0)=1$. Чтобы, при определении прямых (J), можно было воспользоваться методом нормальных семейств, важно располагать сведениями двоякого характера: 1) должны быть известны точки, кривые или части плоскости, где, при неограниченном возрастании z, функция остается ограниченной, 2) должны быть известны точки, кривые или части плоскости, где, при неограниченном возрастании z, функция неограниченно возрастает. Предполагая данными нули функции, мы должны сосредоточить внимание на тех частях плоскости, где функция неограниченно возрастает вместе с z. Не так много известно предложений общего характера, относящихся к неограниченному возрастанию функции. Мы использовали уже теоремы Лиувилля, Вимана, Фрагмена. Чтобы пойти дальше, я, исходя из некоторых частных гипотез, относящихся к правильности возрастания нулей, дам некоторые уточнения теоремы Вимана.

7. Пусть, как обычно, $n(r)$ обозначает число нулей $f(z)$ (считая по кратности), модули которых не превышают r.

Допустим, что для для достаточно больших r имеет место неравенство:

$$\frac{n(\lambda r)}{n(r)} \leqslant s$$

где λ и s — постоянные числа, удовлетворяющие условию $\lambda > s > 1$.

Положим

$$P \equiv P(\lambda, s) = \alpha lg(\lambda-1) + lg\frac{\lambda}{\lambda-1} + \frac{1}{s}\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}} - s\int_\lambda^\infty \frac{du}{(u-1)u^{1-\mu}},$$

где $\alpha = \frac{1}{s}$ при $\lambda \geqslant 2$ и $=1$ при $\lambda < 2$, $\mu = \frac{lgs}{lg\lambda} < 1$.

Предположим, что P положительно.

Исключим из плоскости z круги γ_n с центрами a_n и радиусами $\varrho_n = r_n e^{-\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}}$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Тогда в оставшейся части плоскости функция возрастает неограниченно и равномерно вместе с переменной z.

Для доказательства заметим, прежде всего, что из неравенства

$$n(\lambda r) \leqslant sn(r)$$

вытекает

$$n\left(\frac{r}{\lambda}\right) \geqslant \frac{1}{s}n(r).$$

Дальше, предполагая $u > 1$ и обозначая через $\left[\frac{lgu}{lgs}\right]$ наибольшее целое число, заключающееся в $\frac{lgu}{lgs}$, получим:

$$n(ur) \leqslant s^{1+\left[\frac{lgu}{lgs}\right]} n(r) \leqslant s^{1+\frac{lgu}{lgs}} n(r) = s u^{\mu} n(r). \qquad (u>1)$$

Отсюда следует:

$$n(ur) \geqslant \frac{1}{s} u^{\mu} n(r) \qquad (u<1).$$

Обратимся к функции $f(z)$:

$$lg\,|f(z)| = \sum_1^{\infty} lg\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \geqslant \sum_{r_n<\frac{r}{\lambda}} lg\left(\frac{r}{r_n}-1\right) + \sum_{\frac{r}{\lambda}\leqslant r_n<\lambda r} lg\left|-\frac{z}{a_n}\right| +$$

$$+\sum_{r_n<\lambda r} lg\left(1-\frac{r}{r_n}\right) = A+B+C.$$

но:

$$A = \sum_{r_n<\frac{r}{\lambda}} lg\left(\frac{r}{r_n}-1\right) = \int_0^{\frac{r}{\lambda}} lg\left(\frac{r}{t}-1\right) du\,(t) = n\left(\frac{r}{\lambda}\right) lg\,(\lambda-1) +$$

$$+\int_0^{\frac{1}{\lambda}} n(ur)\,\frac{du}{(1-u)u}$$

$$C = \sum_{r_n>\lambda r} lg\left(1-\frac{r}{r_n}\right) = \int_{\lambda r}^{\infty} lg\left(1-\frac{r}{t}\right) dn(t) = n(\lambda r)\,lg\frac{\lambda}{\lambda-1} - \int_{\lambda}^{\infty} n(ur)\,\frac{du}{(u-r)u}.$$

С помощью предыдущих неравенств, получаем:

$$n\left(\frac{r}{\lambda}\right) lg(\lambda-1) \geqslant \alpha n(u) ly(\lambda-1),$$

$$n(\lambda r)\,lg\,\frac{\lambda}{\lambda-1} \geqslant n(r)\,lg\,\frac{\lambda}{\lambda-1},$$

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}} n(ur)\,\frac{du}{(u-1)u} \geqslant \frac{1}{s}\,n(r)\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}},$$

$$\int_{\lambda}^{\infty} n(ur)\,\frac{du}{(u-1)u} \leqslant s\,n(r)\int_0^{\infty} \frac{du}{(u-1)u^{1-\mu}}.$$

Значит:

$$A+C \leqslant n(r).\,P.$$

С другой стороны предполагая $|z-a_n|>r_n e^{-\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}}$

$$B=\sum_{\frac{r}{\lambda}\leqslant r_n\leqslant\lambda r} lg\left|1-\frac{z}{a_n}\right|\geqslant-\sum_{\frac{r}{\lambda}\leqslant r_n\leqslant\lambda r}\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}=-\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}\left[n(\lambda r)-n\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{P-\varepsilon}{s-\frac{1}{s}}\left(s\,n(r)-\frac{1}{s}\,n(r)\right)=-(P-\varepsilon)n(r).$$

Итак:

$$lg\,|f(z)|\geqslant A+B+C\geqslant P\,n(r)-(P-\varepsilon)\,n(r)=\varepsilon\,n(r)$$

отсюда следует:

$$\lim_{z\to\infty} lg\,|f(z)|=\infty.$$

8. Из последнего предложения можно тотчас же получить некоторые выводы, касающиеся прямых (J). Сохраним все сделанные до сих пор гипотезы, и положим для краткости

$$\eta=\arcsin\, e^{-\frac{P}{s-\frac{1}{s}}},\ \left(0<\eta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть E есть совокупность точек сгущения, т. е. производная, от совокупности аргументов нулей $a_n=r_n e^{i\theta_n}$ нашей функции. Пусть E_η — совокупность точек, находящихся на расстоянии $\leqslant\eta$ от совокупности E*). Очевидно, E_η состоит из конечного числа замкнутых промежутков, не имеющих общих точек, которые обозначим через $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_h$; $A_1,\ A_2,\ldots A_h$ пусть будут соответствующие им углы (со сторонами включительно). Я утверждаю, что 1) вне углов A_i $(i=1,\ 2,\ldots h)$ нет прямых (J), а в каждом из углов A_i имеется по крайней мере одна прямая (J). Нет надобности приводить доказательство, которое строится постоянно по одному и тому же методу.

Особенно интересен тот случай, когда λ и s можно выбрать таким образом, чтобы η было сколь угодно мало. В этом случае 1) всякая прямая (J) непременно является прямой сгущения нулей (т. е. аргумент $\theta=\theta^*$ прямой (J) есть предельная точка совокупности $[\theta_n]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$. 2) если между двумя прямыми, которые не суть прямые сгущения нулей, имеется бесчисленное множество нулей, то между ними имеется прямая (J) — хоть одна.

В качестве простейшего примера рассмотрим функцию $\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}}\right)$, где $\rho<\frac{1}{2}$. Для нее $\lim_{r\to\infty}\frac{n(r\lambda)}{n(r)}=\lambda^\rho$; положим $s=\lambda^{\rho+\varepsilon}=\lambda^\mu$.

*) Конечно, мы не различаем точек θ_1 и θ_2, отличающихся на 2π.

Мы получим:

$$\lim_{\lambda \to 1} P(\lambda, \lambda^{\mu}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{(1-u)u^{1-\mu}} \right)$$

$$= \pi ctg \pi \mu = \pi ctg \pi (\varrho + \varepsilon).$$

Если $\varepsilon < \frac{1}{2} - \varrho$, то P при λ стремящемся к единице делается и остается больше некоторого постоянного положительного числа; вместе с тем $s - \frac{1}{s} = \lambda^{\mu} - \frac{1}{\lambda^{\mu}}$ стремится к нулю, так что η может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому $\theta = 0$ есть единственная прямая (J).

Можно указать простое (достаточное) условие для того, чтобы η могло быть сделано сколь угодно малым. Оно заключается в том, чтобы, обозначая:

$$\sigma(\lambda) = \underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{n(\lambda r)}{n(r)} \qquad (\lambda \geqslant 1),$$

нижняя производная справа от функции $\sigma(\lambda)$, взятая в точке $\lambda = 1$, т. е. $\underline{\lim}_{r \to 1} \frac{\sigma(\lambda) - 1}{\lambda - 1}$, была меньше, чем $\frac{1}{2}$. Этот критерий вытекает из сравнения рассматриваемой функции с функциями $\Pi\left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right)$, $\varrho < \frac{1}{2}$.

9. Делая более ограничительное предположение относительно правильности возрастания нулей функции $f(z)$, мы получаем более точные результаты. Так, напр., допуская, что

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} n \, lg \frac{r_{n+p}}{r_n} = \lambda > 2 \qquad (p \text{ целое положительное})$$

$\left(\text{что влечет за собой } \varrho < \frac{1}{2}\right)$, мы приходим к заключению, что, по исключении из плоскости z кругов с центрами a_n и радиусами $r_n e^{-n\left(\frac{\pi}{2p} ctg \frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon\right)}$ — в оставшейся части плоскости $f(z)$ возрастает неограниченно и равномерно вместе с z. Отсюда вытекают следствия относительно прямых (J), аналогичные тем, которые были получены в случае, когда η могло быть сделано сколь угодно малым.

10. В заключение остановлюсь на функциях $f(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$, нулевого рода, все нули которых предполагаются вещественными и положительными, не делая, однако, никаких предположений отно-

сительно правильности их возрастания. Достаточно рассмотреть полуплоскость $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Заметим, что $|f(z)|$ есть возрастающая функция от θ (при постоянном r), т. к. это имеет место для каждого множителя в отдельности. Поэтому если $\theta_1 < \theta_2$ и $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\theta_1})| = \infty$, то и $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\theta_2})| = \infty$. Притом $\lim\limits_{r \to \infty} \left|f(re^{i\frac{\pi}{2}})\right| = \infty$, а предел $\lim\limits_{r \to \infty} |f(r)|$, если существует, то равен нулю. Отсюда ясно, что существует $\beta\left(0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{r}\right)$ такое, что $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\theta})| = \infty$ при $\theta > \beta$, но предел $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\theta})|$ не существует или не равен бесконечности, если $\theta < \beta$. Если бы оказалось, что $\lim\limits_{r \to \infty} f(r) = 0$, то точно также мы установили бы существование $\alpha\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ такого, что $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\theta})| = 0$ при $\theta < \alpha$, и предел $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\theta})|$ не существует или отличен от нуля при $\theta > \alpha$. Если равенство $\lim\limits_{r \to \infty} f(r) = 0$ не имеет места, положим формально $\alpha = 0$. Итак, во всех случаях:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Так, для функции $\Pi\left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}}\right)$ получаем $\alpha = \beta = 0$ в случае $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$; $\alpha = \beta = \pi - \frac{\pi}{2\rho}$ в случае $\frac{1}{2} < \rho < 1$.

Следующий пример показывает, что возможно неравенство $\alpha < \beta$:

$$f(z) = \Pi\left(1 - \frac{z}{q^n}\right)^{2^n} \qquad \left(q > 2,\ \rho = \frac{lg2}{lgq}\right).$$

Можно убедиться, что предел $\lim\limits_{p \to \infty} |f(q^p z)|$ (где p пробегает только целые значения, а z постоянно) равен бесконечности или нулю в зависимости от того, будет ли выражение

$$q^2 z(1 - z)\,\frac{f(z)}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

по модулю больше или меньше единицы. Т. к. это выражение, очевидно, меньше единицы в некоторой окрестности точки $z = 1$, и больше единицы в некоторой окрестности точки $z = \frac{1}{q}$, то получим для θ достаточно малых:

$$\underline{\lim}_{r \to \infty} |f(re^{i\vartheta})| = 0, \qquad \overline{\lim}_{r \to \infty} |f(re^{i\vartheta})| = \infty,$$

т. е. $\alpha = 0,\ \beta > 0$.

11. Возвращаемся к общему случаю. Применение метода нормальных семейств позволяет утверждать, что прямые $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ — прямые (J). Отсюда, между прочим, вытекает, что $\lim\limits_{r \to \infty} |f(re^{i\vartheta})| = 0$, $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} |f(re^{i\vartheta})| = \infty$ в угле $\alpha > \theta > \beta$.

Мы убедимся дальше, что в угле $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ существует кривая (Γ_0), идущая из начала в бесконечность, пересекая каждый круг $|z| = r$ в одной точке, имеющая уравнение

$$(\Gamma_0) \qquad \theta = \psi(r) \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \leqslant r < \infty \\ \alpha \leqslant \psi(r) \leqslant \beta \end{array}\right)$$

и обладающая тем свойством, что

$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = 0 \qquad \text{в области } 0 \leqslant \theta \leqslant \psi(r) - \varepsilon$$
$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty \qquad \text{в области } \psi(r) + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi$$

(равномерно).

Именно, в качестве кривой (Γ_0) может быть выбрана, напр., кривая, определяемая равенством

$$|f(z)| = 1 \qquad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)^{*)}$$

Доказательство основывается на том, что к кривым, получающимся при вращении (Γ_0):

$$(\Gamma_\lambda) \qquad \theta = \psi(r) + \lambda,$$

могут быть применены те же рассуждения, что и к прямым, выходящим из начала.

Заметим что $\underline{\lim}_{r \to \infty} \psi(r) = \alpha$, $\overline{\lim}_{r \to \infty} \psi(r) = \beta$ (здесь α и β имеют прежние значения), так что всякая прямая $\theta = \theta^*$ $(\alpha < \theta^* < \beta)$ пересекает кривую Γ_0 бесконечное число раз, напр. в точках, для которых $r = t_1, t_2, \ldots t_n,\ t_n \to \infty$.

Это обстоятельство позволяет утверждать, что всякая полупрямая $\theta = \theta^*$ $(\alpha < \theta^* < \beta)$ является прямой (J). В самом деле, семейство $f t_n(z) \equiv f(t_n z) (n = 1, 2 \ldots)$ имеет иррегулярную точку $r = e^{i\theta^*}$, как вытекает из свойств кривой Γ_0.

12. Не лишено интереса, каких наибольших значений может достигать аргумент β, и в какой зависимости от порядка возрастания функции. Вот что удается установить в этом направлении.

---

*) Если эта кривая состоит из отдельных ветвей, заканчивающихся на оси $\theta = 0$, можно соединить их отрезками оси.

Пусть дана возрастающая функция $\omega(r)$ $(r \geqslant 0)$; подчиненная условию

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\omega(r)}{lg r} = \infty.$$

Можно построить целую функцию нулевого рода с положительными нулями такую, что

$$(1) \qquad n(r) \leqslant \omega(r)$$

$$(2) \qquad \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Мы придадим нашей функции вид

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{\sigma_k},$$

где кратности σ_k будут подобраны таким образом, чтобы удовлетворить условию (1), именно, положим

$$\sigma_1 = [\omega(a_1)], \qquad \sigma_{k+1} = [\omega(a_{k+1})] - [\omega(a_k)] \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где, как прежде, $[u]$ означает целую часть u; тогда, при $a_k \leqslant r < a_{k+1}$, получим:

$$n(r) = n(a_k) = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k = [\omega(a_k)] \leqslant \omega(a_k) \leqslant \omega(r).$$

Чтобы удовлетворить условию (2), придется заставить числа a_k возрастать достаточно быстро.

Можно представить $lg\,|f(z)|$ в следующем виде:

$$lg\,|f(z)| = \int_0^1 n(ur)\frac{du}{u} - \int_0^1 \left(n\left(\frac{r}{u}\right) - n(ru) \right) \frac{\cos\theta - u}{1 - 2u\cos\theta + u^2}\,du \qquad (z = re^{i\theta}).$$

С одной стороны при $r = a_k$:

$$\int_0^1 n(ua_k)\frac{du}{u} = \int_0^{\frac{a_{k-1}}{a_k}} n(ua_k)\frac{du}{u} + \int_{\frac{a_{k-1}}{a_k}}^1 n(ua_k)\frac{du}{u} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\frac{a_{k-1}}{a_k}} \omega(ua_k)\frac{du}{u} + \int_{\frac{a_{k-1}}{a_k}}^1 n(a_{k-1})\frac{du}{u} \leqslant \int_0^{a_{k-1}} \omega(u)\frac{du}{u} + \omega(a_{k-1})\, lg\frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

С другой стороны $\left(\text{при } 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$:

$$\int_0^1 \left(n\left(\frac{a}{u}\right) - n(ua_k) \right) \frac{\cos\theta - u}{1 - 2u\cos\theta + u^2}\,du \geqslant$$

$$\geqslant \left(n\left(\frac{a_k}{\cos\theta}\right) - n(a_k\cos\theta)\right)\int_0^1 \frac{\cos\theta - u}{1-2u\cos\theta+u^2}\,du = \left(n\left(\frac{a_k}{\cos\theta}\right)-n(a_k\cos\theta)\right) lg\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sigma_k\; lg\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} = ([\omega(a_k)] - [\omega(a_{k-1})]\; lg\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Следовательно,

$$lg\,|f(a_k e^{i\theta})| \leqslant \int_0^{a_{k-1}} \omega(u)\frac{du}{u} + \omega(a_{k-1})\; lg\,\frac{a_k}{a_{k-1}} - ([\omega(a_k)] - [\omega(a_{k-1})]\; lg\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Чтобы удовлетворить, напр., условию $|f(a_k e^{i\theta})| < 1$, достаточно выбрать a_k таким образом, чтобы было:

$$[\omega(a_k)]\; lg\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \omega(a_{k-1})\; lg\, a_k > \int_0^{a_{k-1}} \omega(u)\frac{du}{u} - \omega(a_{k-1})\; lg\, a_k +$$

$$+ [\omega(a_{k-1})]\; lg\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Это всегда возможно, т. к. при $\theta < \frac{\pi}{3}$

$$\lim_{r\to\infty}\left([\omega(r)]\; lg\,\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \omega(a_{k-1})\; lg r\right) = \infty.$$

30-III 1927. Париж.