Гауссова кривизна и линии кривизны $2^{\text{-го}}$ рода

Д. М. Синцова

Я. П. Бланку пришла счастливая мысль вычислить произведение радиусов кривизны, соответствующих направлениям линий кривизны 2-го рода. Оказалось, что обратная величина совпадает с тем, что я позволил себе назвать Гауссовой кривизной в отличие от полной кривизны — произведения главных мер кривизны. Вычисление радиусов кривизны в направлении линии кривизны 2-го рода можно провести еще так:

Возьмем для упрощения $R = -1$, т. е. рассмотрим интегральные кривые уравнения

$$dz = Pdx + Qdy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

и для сокращения означим

$$\begin{array}{ll} (P'_x + PP'_z) = (\mathrm{I}) & (Q'_x + PQ'_z) = (\mathrm{III}) \\ (P'_y + QP'_z) = (\mathrm{II}) & (Q'_y + QQ'_z) = (\mathrm{IV}) \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Тогда мера кривизны

$$\frac{1}{r} = \frac{dPdx + dQdy}{ds^2\sqrt{1 + P^2 + Q^2}} = \frac{(\mathrm{I})dx^2 + (\mathrm{II} + \mathrm{III})dxdy + (\mathrm{IV})dy^2}{ds^2\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}, \ldots (3)$$

а уравнение линий кривизны 2-го рода

$$\begin{vmatrix} dP & P & dx \\ dQ & Q & dy \\ 0 & -1 & Pdx + Qdy \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или

$$dP\Big(QPdx + (1 + Q^2)dy\Big) = dQ\Big(dx(1 + P^2) + QPdy\Big)$$

и таким образом можно положить

$$\begin{aligned} dP &= \lambda\Big[dx(1 + P^2) + PQdy\Big] \\ dQ &= \lambda\Big[QPdx + (1 + Q^2)dy\Big] \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Отсюда

$$dPdx + dQdy = \lambda \,.\, ds^2$$

т. е.

$$\lambda = \frac{dPdx + dQdy}{ds^2} = \frac{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Таким образом задача свелась на разыскание λ, — оно есть корень уравнения 2-го порядка, получаемого из (5) исключением dx и dy:

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{I}) - \lambda(1 + p^2) & (\mathrm{II}) - \lambda PQ \\ (\mathrm{III}) - \lambda PQ & (\mathrm{IV}) - \lambda(1 + Q^2) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

или

$$\lambda^2(1+P^2+Q^2) - \lambda[(1+Q^2)(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}+\mathrm{III})PQ + (1+P^2)(\mathrm{IV})] + (\mathrm{I})(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III}) = 0$$

Т. обр. произведение корней

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(\mathrm{I})(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III})}{(1 + P^2 + Q^2)}, \text{ а } \frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{(\mathrm{I})(\mathrm{IV})(- (\mathrm{II})(\mathrm{III})}{(1 + P^2 + Q^2)^2}$$

В этом выражении числитель можно преобразовать:

$$(\mathrm{I})(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III}) = \begin{vmatrix} P_x' + PP_z', & P_y' + QP_z' \\ Q_x' + PQ_z', & Q_y' + QQ_z' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} P_x' & P_y' & P_z' & P \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' & Q \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ P & Q & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и таким образом

$$(\mathrm{IV}) - (\mathrm{II})(\mathrm{III}) = -\Delta \ (\mathrm{I})$$

$$\frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{-\Delta}{(1 + P^2 + Q^2)^2}$$

Заменяя P и Q через

$$\frac{P}{R}, \ \frac{Q}{R}$$

получим:

$$\frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{-\Delta}{(P^2 + Q^2 + R^2)^2}.$$

Сумма корней того же уравнения дает

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} = \frac{(1 + Q^2)(\mathrm{I}) - (\mathrm{II} + \mathrm{III})PQ + (1 + P^2)(\mathrm{IV})}{(1 + P^2 + Q^2)^{3/2}}$$

т. е. равняется сумме мер кривизны главных направлений:

$$\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Но если возьмем направление перпендикулярное к r_1', и соотв. радиус r_1'', то

$$\frac{1}{r_1'}+\frac{1}{r_1''}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1'}+\frac{1}{r_2'}$$

т. е. $r_1''=r_2'$ и след. это 2-е направление — направление 2-й линии кривизны 2-го рода симметрично перпендикуляру к 1-й линии в отношении оси индикатрисы и т. о. касательные к линиям кривизны 1-го и 2-го рода имеют общую биссектрису.

Т. о. линии кривизны 2-го рода также связаны с „Гауссовой кривизной“, как линии кривизны 1-го рода с полной кривизной.
