Этюды по теории плоских кривых *)

Д. М. Синцов

IV. Мальтийский крест

1. Этой кривой носвящена статья W. Gacdcke в Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vercinigung Bd. 26. 1917 n° 1—4, S. 46—49. Он отмечает в ней, что G. Loria, (Spezielle algebraische u transcendente Kurven) этой кривой 6-го порядка не упоминает. Точечное ее уравнение довольно сложно:

$$(1)(x^2+y^2)^3=a^1x^4+20a^2x^2y^2-8a^2y^4-16a^4y^2$$

и впервые без ошибок получено W. Gaedecke **).

2. Мне хотелось бы указать здесь на тангенциальное уравнение кривой, которое получается в очень простом виде из параметрического уравнения (1)

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\varphi(1+\sin^2\varphi) \\ y&=-a\sin\varphi\,.\cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Это последнее легко получается из определения кривой, как отрицательной подэры Doppelleilinie (частный случай Münger'ова овала при $d=0$), —которой полярное уравнение

$$r=a.\,\mathrm{Cos}^2\varphi.\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Отсюда касательная Мальтийского креста

$$X\cos\varphi+Y\sin\varphi=a\cos^2\varphi\ \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Дифференцируя это уравнение (4) по φ и исключая φ, мы и получим, решая в отношени x и y уравнения (2).

3. Мы можем однако воспользоваться уравнением (4) для получения уравнения Мальтийского креста в тангенциальных координатах. Для этого отожествляем (4) с уравнением прямой

$$ux+vy+w=0$$

---

*) Первые две заметки этого заглавия помещены в Ученых Записках Научно-исслед. кафедр Украины, отд. мат., в. 2, 3—в Известиях Х. И. Н. О. в. 2.

**) Он отмечаэт ст. Pomey — N. Ann. (3) V. 1886 p. 20 — тем же методом, но с ошибками, Pelissier (Ib. (2) XII. 1873 p 459). Она рассматривается также M. d'Ocagne'ем в его книжке Coordonnées parallèles et axiales 1885 n° 50 p. 47—51, где приводится и чертеж. Надо впрочем отметить, что эго кривая—частый случай кривых, параллельных астроиде, которым у G. Loria посвящена в главе 5 отд. VII n° 263.

и т. о. имеем

$$\frac{u}{\cos\varphi}=\frac{v}{\sin\varphi}=\frac{w}{-a\cos^2\varphi}.$$

Возвышая равные отношения в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}=\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=\frac{u^2+v^2}{1}=\frac{w^2}{a^2\cos^4\varphi}$$

и таким образом

$$(u^2+v^2)w^2=a^2u^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

искомое уравнение. Мальтийский крест есть кривая 4-го класса.

Так как в силу (2) она уникурсальна, то род ее равен 0, и мы можем вычислить теперь все Плюккеровы числа кривой.

4. Уравнением (5) можно при его простоте воспользоваться для составления точечного ее уравнения. Не останавливаясь однако на этом, укажем, что составив взаимную поляру (5), имеем

$$z^2(x^2+y^2)=a^2x^2$$

что при $z=1$ будет:

$$y^2=a^2x^4-x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

это одна из кривых

$$y^2=R_4(x),$$

где $R_4(x)$ — многочлен 4-й степени, — имеющий в данном случае средние корни равные, т. о. кривая (6) имеет в начале координат уединенную точку, а след., (5) — двойственную особенность — уединенную касательную — безконечно-удаленную прямую. Получение особенных элементов удобнее для (6).

5. Не останавливаясь на выводе приводимых W. Gaedecke свойств кривой (14): *М. Крест = эвольвента астроиды* и в то же время *одна из параллельных ей кривых,* остановим наше внимание на связи Мальтийского креста еще с одной кривой. *Ортоптическая кривая М. креста есть корноида.*

Для вывода этой связи применим метод приводимый Hilton'ом Plane algebraic curves, Oxford 1920. Ортоптическая кривая есть геометрическое место вершины прямого угла, стороны которого касаются данной кривой, — т. е. геометрическое место точек (x,y), две проведенные из которых к кривой касательные перпендикулярны. Т. о. 2 корня уравнения, получаемого исключением w из (5) и

$$ux+vy+w=0$$

т. е. уравнения

$$(u^2+v^2)(ux+vy)^2-a^2u^4=0 \quad (7)$$

определяющего угловые коэффициенты $-\frac{v}{u}$ касательных к кривой (5), проходящих через точку (x,y), должны давать в произведении -1.

Условие этого для уравнения 4-ой степени

$$a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0$$

есть

$$(a_0a_3 + a_1a_4)(a_1 + a_3) + (a_0 + a_2 + a_4)(a_0 - a_1)^2 = 0$$

В нашем случае

$$a_0 = x^2 - a^2, \quad a_1 = 2xy = a_3, \quad a_2 = x^2 + y^2, \quad a_4 = y^2$$

и таким образом искомое уравнение ортоптической кривой Мальтийского креста напишется

$$8x^2y^2(x^2 + y^2 - a^2) + [2(x^2 + y^2) - a^2](x^2 - y^2 - a^2)^2 = 0$$

Если соберем высшие члены этого уравнения, то получим:

$$2(x^2 + y^2)^3 - a^2(5x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4) + 4a^4x^2 - a^6 = 0;$$

разделяя на 2 и означая $\frac{a}{\sqrt{2}} = r$, имеем

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(5x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4) + 8r^4x^2 - 4r^6 = 0$$

уравнение, совпадающее с данным Gaedecke уравнением корноиды при повороте на 90°, т. е при замене x через y и y через x.

V. Значение радиуса кривизны в обыковенной точке кривой.

Chr. Wiener в своем Lehrbuch d. darstellenden Geometrie B. I Abs. V, Abt. VI n° 246 S. 206-7, разбирая возможные случаи величины радиуса кривизны и следовательно взаимного расположения кривой и ее эволюты, устанавливает для обыкновенной точки кривой пять возможностей:

1°. Центр кривизны — обыкновенная точка на эволюте, радиус кривизны конечен и отличен от нуля. Примеры легко привести: обыкновенные точки циклоиды, кроме вершин, точки эллипса кроме вершин и т. д.

2° Центр кривизны на эволюте точка возврата, и острие обращено *от* кривой,—пример: вершина циклоиды, вершина на малой оси эллипса и т. д.

3° Центр кривизны на эволюте — точка возврата на бесконечности, в этом случае точка кривой, не будучи точечной особенностью, является особенностью тангенциальной—т. наз. Flachpunkt (точка уплощения). Пример: $y = x^4$ в начале координат.

4° Центр кривизны — точка возврата на эволюте (как и в сл. 2), но последняя обращена острием к кривой (пример—вершина параболы или гиперболы, концы большой оси эллипса.

Наконец случай 5° обыкновенная точка на кривой совпадает с точкою возврата эволюты, радиус кривизны обращается в 0.

Этот последний случай мне представляется *невозможным.* Здесь дело не идет конечно, о случаях, подобных концам малой оси эллипса, когда $a = b\sqrt{2}$, ибо, хотя точка возврата эволюты и лежит на эллипсе, но в вершине $(0, -b)$ лежит центр кривизны для точки $(0, +b)$ и обратно. Дело идет о совпадении центра кривизны с точкою, которой он соответствует.

Как аргумент возможности такого случая, приходит на мысль замечание, что для этого стоит только для любой кривой построить ее эвольвенту, и из всех их взять именно ту, которая проходит через соответствующий центр кривизны. Можно однако показать, что это не так, и что если одна из эвольвент проходит через точку возврата кривой, то эта точка будет особенной и на этой эвольвенте.

В самом деле, уравнение инволюты некоторой кривой, заданной уравнением в параметрической форме, при чем параметром является дуга кривой:

$$\xi = \varphi(\sigma), \quad \eta = \psi(\sigma)\ ^{*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

выразится, как известно, при том же параметре

$$x = \xi + (c - \sigma)\xi', \quad y = \eta + (c - \sigma)\eta' \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

здесь $c - \sigma = n$ есть расстояние между точками (x, y) и (ξ, η), т. е. радиус кривизны инволюты. Произвольной постоянной c можно придать значение 0, и тогда в точке соответствующей $\sigma = 0$, начале счета дуг на данной кривой, радиус кривизны инволюты будет равен нулю, и следовательно получаем как раз нужный нам случай, — когда n обращается в нуль, и следовательно точка кривой и соответствующая ей точка инволюты совпадают. Не трудно однако убедиться, что при этом точка возврата (1) будет особенною и на инволюте.

Действительно, в предположении $c = 0$ уравнения (2) принимают вид

$$x = \xi - \sigma\xi', \quad y = \eta - \sigma\eta' \quad \ldots\ldots\ldots (2^1)$$

Отсюда

$$x' = -\sigma\xi'', \quad y' = -\sigma\eta'' \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

поскольку мы предположили, что точка (ξ, η) — точка возврата на эволюте, т. е. (1), при $\sigma = 0$

$$\xi' = 0 = \eta', \quad \xi'\eta'' - \eta'\xi'' = 0,$$

если ξ и η разлагаются в строку по степеням σ, и низший член относительно σ в ξ степени $1 + \alpha$, а в η степени $1 + \beta$. то $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и в силу последнего

$$\alpha + \beta - 1 > 0.$$

Поэтому порядок низшего члена в x', y' по (3) относительно σ есть $\alpha > 0$, соответств. $\beta > 0$ а в $x'y'' - y'x''$ — порядок $\alpha + \beta - 1 > 0$

---

*) См. напр. Синцов, Геометрические приложения дифф. исчисления 1908 г.

Т. обр. при $\sigma = 0$ имеем

$$x' = 0, y' = 0, x'y'' - y'x'' = 0,$$

т. е. точка (x,y) есть особенная на инволюте.

Пример. Тороида (кривая паралельная эллипсу) может быть получена, как огибающая кругов данного радиуса, центры которых лежат на этом эллипсе (G. Loria Spez. Kurven I изд. с. 646):

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - k^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Дифференцируя $(a) - \lambda(b)$ по α и по β найдем

$$x - \alpha = \frac{\lambda\alpha}{a^2}, \quad y - \beta = \frac{\lambda\beta}{b^2}$$

Откуда

$$\alpha = \frac{a^2x}{\lambda + a^2}, \beta = \frac{b^2y}{\lambda + b^2}$$

Вставляя в (a) и (b) и исключая λ, означим для краткости

$$x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2 = A,$$

$$a^2y^2 + b^2k^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2 = B$$

$$a^2b^2k^2 = C$$

Элиминанта по Catalan'у и Cayley примет вид

$$A^2B^2 + 4CA^3 - 27C^2 + 18CAB + 4B^3 = 0$$

Это уравнение и у G. Loria и G. Teixeira приводится с опечатками (у L. $4CA$ вм. $4CA^3$, у T. кроме того $4B^2$ вм. $4B^3$).

Тороида таким образом — кривая 8 порядка. Как параллельная эллипсу, она имеет общую с ним эволюту. Она состоит из двух ветвей, замкнутых и заключенных одна внутри другой. Внешняя при возрастании k стремится к кругу, внутренняя же при $k < \frac{b^2}{a}$ похожа на эллипс, при $k = \frac{b^2}{a}$ также похожа на эллипс, но имеет на большой оси две точки, которые однако по внешнему виду не отличить и которые выделяются лишь более сильным изломом. Так описательно отличает G. Loria точки притупления (Spitzpunkt) — представляющие точки, в которых тороида проходит через соотв. центр кривизны: это не обыкновенные ее точки, а тройные с тремя совпавшими касательными.

В анализе R. Lilienthal'я Differentialgeometrie B. I, изложение которого в этом вопросе примыкает к анализу L'Hospital'я, в основу положена классификация Staudt'a, и по отношению к таким точкам говорится только, что касательная в них *обыкновенная*. Мы приходим таким образом к выводу: *в обыкновенной точке кривой радиус кривизны равен нулю не бывает.*

По отношению к тороиде интересно отметить. что при $k=b$ при раскрытии скобок свободный член в уравнении оказывается равным нулю, члены с первыми степенями x и y не входят, при x^2 и xy коэффициенты также 0, а при y^2:

$$-4b^2(a^2-b^2)^4$$

Таким образом в точке (0,0) уравнение касательной

$$-4b^2(a^2-b^2)^4y^2=0$$

Это точка самокасания, и тороида, — если взять ряд кривых при различных значениях k, — дает хороший пример перехода от пары узлов (*resp.* пары двойных касательных) к точке самокасания.

В своем курсе Дифференциальной Геометрии 1908—Зап. Харьк. Универ.—отд. 1 отт. с. 50-я доказывал, что в точке возврата радиус кривизны обращается в 0. Это доказательство состоит в указании, что в выражении y'':

$$F'''_{x^3}+3F^{14}_{x^2y}\,y'+3\,F''_{xy^2}y'^2+F'''_{y^3}\,y'^3+3\left(F''_{xy}+F''_{y^2}y'\right)y''=0\ ^{*)}$$

Множитель при y'' обращается для точки возврата в 0; оно предполагает, что многими

$$F'''_{x^3}+3\,F'''_{x^2y}\,y'+3\,F''_{xy^2}\,y'^2+F'''_{y^3}y'^3$$

не обращается при этом в 0. Это имеет место для обыкновеньой точки возврата (1 рода, — капр. $y^2=x^3$, но уже для точки возврата 2-го рода это выражение может обратить и b0 и значение радиуса принимая вид $\frac{0}{0}$ может быть и конечным и безконечно—большим.

Возьмем, напр., кривую,

$$(y-x^2)^2-x^5=0,$$

имеющую в начале координат точку возврата 2-го рода.

Представив ее в параметической форме $x=t^2, y=t^4+Et^5$, где $E=\pm 1$, найдем что радиус кривизны

$$R=,\frac{[4+t^4(4+5Et)^2]^{3/2}}{16+30^2t}$$

и след.. при $t-0$ радиус кривизны для той и другой ветви $=\frac{1}{2}$ напротив кривая

$$y^2-x^5=0$$

в точке $(0^2,0)$ имеет то, что называется Rückkehrflachpunkt. Здесь $F''_{xy}-F''_{xx}\,F''_{yy}=40\,x^3$ при $x=0$, равно 0, двойной корень $y'=0$, но так как $F'_{x_84}=-60x^2$, $F'''_{x^2y}=F'''_{xy^2}=F'''_{y^2}=0$, т. е. все произвольные 3 порядка обращается в 0, и для y'' значения получается неопределенность %.

---

*) При этом, разумеется, подразумевается, что не все производные 2-го порядка обращаются в 0.

Приведя к параметрической форме уравнение: $x = t^2, y = t^5$ получим, что при $t = 0$, $R = \infty$.

Относительпо точек перегиба Chr. Wiener там же n° 243 (s. 255) утверждает, что в точке перегиба радиус может быть безконечностью или нулем. Последний случай также мне представляется подлежащим ограничению: он возможен тогда, когда мы имеем переход кривой с одной стороны касательной на другую (Wendetangente), но точка будет особенной, хотя и имеющей только одну вещественную касательную. Последнего рода примеры могут быть построены напр.,

$$y = xe^{x^{2/3}}$$

или даже более простые, — которыеподойдут по соотв. случаи классификации R. Lilienthal'я, но не будут обыкновенными точками кривой. И доказательство этого может быть проведено сведением при помощи двойственного преобразования этого вопроса на разрешенный выше.
