# Современное положение вопроса об обосновании евклидовой геометрии.

И. Чернушенко в Харькове.

## § 1. Введение.

После появления в 1899 г. имевшей столь блестящий успех работы Д. Гильберта Grundlagen der Geometrie, на очередь был поставлен вопрос о построении системы аксиом геометрии, которые были бы абсолютны независимы. Эту цель имели в виду, насколько мне известно только следующие авторы:

1. O. Veblen. A sytem of axioms for geometry. Trans. Am. Math. Soc. vol 5, 1904; pp. 343—384.

2. В. Ф. Каган. Основания геометрии. Опыт обоснования евклидовой геометрии. Одесса, 1905 г., сн. XV + 793. Также в записках Новоросийского университета т.т, 97 и 101, 1904-1905 г.г.

3. R. L. Moore. Sets of metrical hypotheses for geometry. Trans. Am. Math. Soc. v. 9, 1908; pp. 487—512.

E. V. Huntington. A set of postulates for abstract geometry exposed in terms of the simple relation of inclusion. Mathem. Ann. Bd 73, 1912-1913 s. 522-559.

Я оставляю в стороне работы К. Валена[1]), А. Швейцера[2]), Х. Мюнца[3]) и М. Гейгера[4]), так как эти авторы не намеревались дать доказательства абсолютной независимости своих аксиом. К. Вален имел в виду только порядковую независимость своих аксиом. А. Швейцер не дает доказательства независимости всех аксиом системы $^3R_3$ (сн. 389-390), а независимости аксиом $^1K_1$, $^2K_2$, $^3K_3$, и аксиом, введенных в главе VI (т. XXXV), совершенно не рассматривает. Х. Мюнц рассматривает независимость или, как он говорит, неприводимость только первых пяти аксиом, совершенно не касаясь вводимых далее аксиом VI-IX. М. Гейгер, установив только для линейных образов евклидовой геометрии 51 аксиому в 8 группах, рассматривает

---

[1]) K. Th. Valen. Abstrakte Geometrie. Leipzig, 1905.

[2]) A. R. Schveitzer, A theory of geometrical relations. Am. Journ. Math. v. XXXI, 1913, p. 37—56.

[3]) Ch. Müntz. Ein nichtreduzierbares Axiomsystem der Geometrie. Jaresber. d. Deut. Matem. Verein. Bd. 23, 1914.

[4]) M. Geiger. Sistematische Axiomatik der Enklidiscien Geometrie. Augsburg, 1924; s. XXIII + 271.

невыводимость своих аксиом, которая у него совпадает с порядковой независимостью, только для первых трех групп. Для остальных групп он не дает даже этого.

Что касается названных выше четырех работ. то я не имею в виду делать подробный разбор их содержания (рамки журнальной статьи тесны для этого), а намерен ограничиться только той частью их, которая занимается основными понятиями и постулатами. Как известно, при построении какой нибудь дедуктивной теории мы всегда приходим к понятиям, остающимся без определения, и к предложениям остающимся без доказательства [1]). Понятия называются неопределяемыми или основными, а предложения аксиомами или постулатами. От основных понятий требуется, чтобы они были неприводимы относительно данной системы постулатов. Чтобы доказать неприводимость системы основных понятий при данной системе постулатов, необходимо и достаточно найти для каждого основного понятия такое истолкование системы основных понятий, которое оправдывает систему постулатов и пролжает ее оправдывать, если изменить подходящим образом одно только значение рассматриваемого понятия.

Можно теперь же отметить, что ни один из указанных четырех авторов вопроса о неприводимости основных понятий совершенно не затрагивает.

Что касается независимости постулатов, то к ней пред'являются следующие требования. Постулаты должны быть 1) совместны или непротиворечивы, 2) независимы, 3) достаточны или катеригочны. Для доказательства совместности необходимо указать класс об'ектов, в котором все постулаты оправдываются.

Для докательства независимости постулатов необходимо для каждого из них дать такое истолкование основных понятий, которое оправдывало бы все постулаты, кроме одного рассматриваемого. Так говорит А. Падоа. То же говорят Д. Гильберт, О Веблен, В. Ф. Каган Э. В. Гентингтон, С. А. Богомолов [2]).

Независимость различают порядковую, если каждый постулат независим от всех предшествующих, и абсолютную, определение которой приведено выше.

Термин достаточность означает, что каждая теорема может быть выведена из положенных в основу постулатов. Можно подумать, что есть только один путь для доказательства достаточности системы постулатов, построить всю теорию [3]), но и здесь остается открытым вопрос, не понадобятся ли новые постулаты для решения дальнейших задач [4]).

---

[1]) A. Padoa. Bibliothèque du congrés internationale de philosophie. III. Logique et histoire des sciénces, 1901.

[2]) *A. Padoa*, l. c. 323. *D. Hilbert*. Elemente der Euclidischen Geometrie, Göttingen, Wintersemester 1898-99 (лит). *O. Veblen*. l. c. сн. 347. *В. Каган*. Задача обоснования геометрии. Одесса, 1908, сн. 33. F. V. Hutington. l. c. сн. 549. *С. А. Богомолов*. Основания геометрии. Москва—Петроград. 1923, сн. 40.

[3]) С. А. Богомолов. l. c. сн. 41.

[4]) В. Ф. Каган. Основания геометрии. сн. XIV и 780.

Иначе подходят к этому вопросу О. Веблен и Э. В. Гентингтон О. Веблен говорит, что его задачей является также показать, что „есть *в сущности только один класс*, в котором все двенадцать аксиом имеют силу. Или, говоря точнее, если два класса объектов $K$ и $K^1$ оправдывают двенадцать аксиом, то между элементами этих классов можно установить взаимно-однозначное соответствие таким образом, что если три элемента $A$, $B$, $C$ класса $K$ находятся в порядке $ABC$, то соответствующие им элементы $A'$, $B'$, $C'$ класса $K$ находятся в порядке $A'B'C'$. Следовательно, всякая теорема, высказанная в терминах точки и порядка (основные понятия у О. Веблена), или в противоречии с нашими аксиомами или одинаково верна для всех классов, удовлетворяющих аксиомам. Действительность какого либо возможного утверждения в этих терминах, следовательно, вполне определяется аксиомами, и всякая дальнейшая аксиома должна быть признана излишней“ (сн. 346). Систему, подобную описанной, О. Веблен называет категорической, в противном случае дизъюнктивной. Таким образом категоричность совпадает с достаточностью. То же говорит и Э. В. Гентингтон, который наряду с термином „система категорична“ употребляет другой: „достаточна для определиния единственного типа системы“ (сн. 524-525, 528). Этою теоремою „достаточности“ как ее называет Э. В. Гентингтон, О. Веблен и Э. В. Гентингтон заканчивают развитие своих систем. О типе пространств или сходственных пространствах (по Э. В. Гентингтону изоморфных) говорит и В. Ф Каган, не связывая однако этого вопроса с достаточностью (см. 780 — 782),

Прежде чем перейти к разбору намеченных систем постулатов я хочу остановиться на вопросе об абсолютной независимости. Дело в том, что не всегда авторы, строя псевдогеометрии для доказательства независимости своих постулатов, в точности выполняют требование, высказанное А. Падоа, и, повидимому, поддерживаемое ими самими. Но есть и прямое изменение этого требования. Так А. Швейцер говорит: „Let us denote by $C_n$ ($n = 1, 2, \ldots 8$) the class of points such that with respect to this class axiom n is contradicted and the remaining axioms are satisfied or are not effective (v. XXXI, сн. 386). То же А. Швейцер говорит и в другой своей заметке: „Note on a system of axioms for geometry“ [1]), Здесь прямо допускается, что некоторые постулаты могут совсем не осуществляться (are not effective). То же по существу, но в замаскированном виде, мы встречаем и у О. Веблена (сн. 352) и Э. В. Гентингтона (сн. 549), когда они говорят, что их постулаты удовлетворяются „vacuously“, т. е. условия для осуществления их постулатов не выполнены. Термин „vacuously“, повидимому, впервые встречается у Э. Гентингтона в его статье „Complete sets of postulates for the theory of real quontities“ [2]), где он приписывает введение этого термина проф. E. H. Moore'у. Не применяя

[1]) Trans. Am. Math. Sos. v. 10, 1909 г., сн. 312.
[2]) Trans. Am. Math. Soc. v. 4. 1903, сн. 364.

этого термина, Э. Г. Мур в сущности пользовался им в своей статье „On the projective axioms of geometry“ [1]), предложив для доказательства независимости аксиомы $I_6$ Д. Гильберта от остальных плоскую геометрию.

Простой пример покажет, что пользование „vacuously“ неправильно [2]), В своих литографированных лекциях [3]) Д. Гильберт показывает, что аксиома $II_4$ (о порядке 4 точек на прямой), во втором и следующих изданиях теорема, независима от $II_{1,2,3}$. Представим точки $A$, $B$ ,$C$ вещественными числами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ с условием, что $C$ лежит „между“ $A$ и $B$, когда $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$ (следовательно, по обычному выражению $C$ лежит позади $A$ и $B$). Очевидно. что аксиомы 1 — 3 выполняются. а 4 нет. В самом деле, пусть $ABCD$ распорядок четырех точек в смысл акс. 4. Тогда должно было быть $\beta > \alpha$, $\beta > \gamma$, $\beta > \delta$, и в то же время $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$ $\gamma > \delta$, что невозможно, Можно было бы добавить, что аксиомы $I_{1,2,3a}$ тоже удовлетворяются, а остальные аксиомы I группы и $II_5$ удовлетворяются vacuously, и заключить, что $II_4$ независима от всех аксиом I и II групп. Как известно, E. H. Moore доказал, что аксиома $II_4$ является следствием $II_5$ и остальных аксиом I и II групп [4]). Между тем это vacuously встречается и у позднейших американских авторов, напр.: E. R. Hedrick and Louis Ingold. „A set of axioms for line geometrie“ [5]), M. G. Gaba. „A set of postulates for general projective geometry“ [6]), примеры для пост. I и V без упоминания vacuously, Norbert Wiener. „A set of postulates for fields“ [7]) тоже без упоминания vacuously.

Ту же мысль о vacuously, но не пользуясь этим термином, защищает и В. Ф. Каган: „Постулат II не может найти себе применения, потому что в нашем пространстве не имеет место его условие... Но при условном характере этого постулата в нем отнюдь не содержится требование, чтобы в пространстве существовали точки, имеющие прямолинейпое расположение“ (сн. 767).

Это тоже неверно. Ведь всякий постулат представляет просто недоказанную теорему, и его условность только в форме выражения, но не по существу. Когда мы высказываем теорему: „если треугольник равнобедренный, то в нем углы при основании равны“, то конечно в ней содержится требование, чтобы в пространстве существовал равнобедренный треугольник. Доказательство условия теоремы обычно дается раньше теоремы, поэтому то, что высказывается в условии, называется *данным.* Иногда доказательство условия дается позже самой теоремы, и тогда теорема и все следствия из нее остаются

---

[1]) Trans. Am. Math. Soc. v. 3, 1902; сн. 145 примечание.

[2]) Этим примером я обязан одному замечанию проф. Д. М. Синцова.

[3]) См. ссылку [2]) сн. 88.

[4]) См. ссылку [1]).

[5]) Trans. Am. Mat. Soc. v. 15. сн. 205 — 214.

[6]) ilid. v. 16, 1905; сн. 51 — 61

[7]) ilid. v. 21, 1920; сн. 237 — 246.

на время условными. Иногда условие теоремы впоследствии отвергается, и в таком случае теорема и все следствия из нее не имеют места в системе (напр. В. Ф. Каган гл. XIX т.т. 2, 4, 6 и 6). Во всяком случае условие теоремы или принимается или отвергается, третьего нет. В постулате по существу дела ни условие ни заключение доказательству не подлежат. Условие постулата не может отвергаться, иначе пришлось бы просто удалить постулат целиком, следовательно, *условие постулата, как и заключение, принимается, как данное.*

Об остальных вопросах, касающихся постулатов, будет сказано при разборе отдельных работ.

## §. 2. Работа О. Веблена.

Основными поятиями у О. Веблена являеются „точка" и „порядок", соответствующий гильбертовскому „между".

Аксиом у О. Веблена 12.

I. Существуют по крайней мере две различных точки.

II. Если точки $A, B, C$ в порядке $ABC$, то они в и порядке $CBA$.

III. Если точки $A$, $B$, $C$ в порядке $ABC$ то они не в порядке $BCA$.

IV. Если точки $\mathrm{V}$, $B$, $C$ в порядке $ABC$, то $A$ отлична от $C$.

V. Если $A$ и $B$ две различных точки, то есть такая точка $C$, что $A$, $B$, $C$ в порядке $ABC$.

Опр. 1. *Прямая* $AB$ $(A \neq B)$ состоит из $A$, $B$ и всех точек $X$ в одном из возможных порядков $ABX$, $AXB$, $XAB$. Точки $X$ в порядке $AXB$ образуют *отрезок* $AB$. $A$ и $B$ *концы* отрезка:

VI. Если точки $C$ и $D$ $(C \neq D)$ лежат на прямой $A, B$, то $A$ лежит на прямой $CD$.

VII. Если существуют три различных точки, то существуют три точки $A$, $B$, $C$ ни в одном из порядков $ABC$, $BCA$ или $CAB$.

Опр. 2. Три различных точки, не лежащих на одной прямой, *вершины треугольника* $ABC$, *стороны* которого отрезки $AB$ $BC$, $CA$, и *граница* которого состоит из его вершин и точек сторон.

VIII. Если три различных точки $A,B,C$ не лежат на одной прямой, а $D$ и $E$ две точки в порядках $BCD$ и $CEA$, то существует такая точка $F$ в порядке $AFB$; что $D$, $E$ и $F$ лежат на одной прямой.

Опр. 5. Точка 0 *внутри* треугольника, если она лежит на отрезке, концы которого точки различных сторон треугольника. Совокупность таких точек — *внутренняя область* треугольника.

Опр. 6. Если $A, B, C$ образуют треугольник, то *плоскость* $ABC$ состоит из всех точек, прямолинейно расположенных (collinear) с какими-либо двумя точками сторон треугольника.

IX. Если существуют три точки, не лежащих на одной прямой, то существует такая плоскость $ABC$, что есть точка $D$, не лежащая на плоскости $ABC$.

Опр. 7. Если $A, B, C, D$ четыре точки не лежащих на одной плоскости, то они образуют *тетраэдр* $ABCD$, которого *грани* — внутренние области треугольников $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$ (если треугольники существуют), *вершины* которого четыре точки $A, B, C, D$ и *ребра* которого отрезки $AB, BC, CD, DA, AC, BD$. Точки граней, ребер и вершин составляют поверхность тетраэдра.

Опр. 8. Если $A, B, C D$ вершины тетраэдра, то пространство $ABCD$ состоит из всех точек, прямолинейно расположенных с какими-либо двумя точками граней тетраэдра.

X. Если существуют четыре точки, не лежащих ни на одной прямой, ни в одной плоскости, то существует такое пространство $ABCD$, что нет точки $E$, не расположенной прямолинейно с двумя точками пространства $ABCD$.

XI. Если существует бесконечность точек, то существует определенная пара точек $A, C$ такая, что если $[\sigma]$ бесконечная совокупность отрезков прямой $AC$, имещих свойство, что каждая точка отрезка $AC$ и его концы $A$ и $C$ являются точками отрезка $\sigma$, то есть и конечная совокупность $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$, с тем же свойством.

XII Еели $a$ прямая плоскости $\alpha$, то есть некоторая точка $C$ на $\alpha$, через которую проходит не более одной прямой в плоскости $\alpha$, не пресекающей $a$.

Нельзя не обратить внимания на громоздкую формулировку аксиом, вызванную, вероятно, стремлением сохранить за ними мнимую условность и тем оправдать применение vacuously. Возражение вызывает также появление в аксиомах новых терминов, введенных шестью определениями. Как справедливо указывает В. Ф. Каган, должна быть доказана независимость этих определений, которые можно назвать основными. Но об этом будет сказано дальше в § 4. Что касается конгруентности, то О. Веблен вводит ее определением на основе проэктивной геометрии, при помощи преобразований, оставляющих инвариантным мнимый круг на бесконечности.

О. Веблен ничего не говорит о совместности своих аксиом.

Для доказательства независимости своих аксиом О. Веблен указывает классы объектов, за исключением акс. XI, независимость которой от отстальных, по его мнению, хорошо известна. Автор отмечает, что классы $K_{\mathrm{I}} - K_{\mathrm{VIII}}$ все состоят из конечного числа объектов. Из указанных им псевдо-пространств особенно интересно $K_{\mathrm{VIII}}$. При доказательстве независимости аксиом vacuously применяется к последующим аксиомом, за исключением акс. V. Для нее О. Веблен указывает пространство $K_{\mathrm{V}}$, состоящее из точек 1 и 2 с условием, что точки $A$, $B$, $C$ находятся в порядке $ABC$ только в том случае, если $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$ (сн. 352). Здесь акс. V не удовлетворяется, I удовлетворяется, а все остальные удовлетворяются vacuously. Следовательно, остается недоказанной даже порядковая независимость акс. V.

Нетрудно видеть, что акс. V частью, а акс. VII целиком входят в акс. VIII. О. Веблен полагает, что форма, приданная им аксиоме М. Паша, менее требовательна, чем у М. Паша или у Д. Гильберта (сч. 341). С этим нельзя согласиться. Акс. $\mathrm{II}_4$ Д. Гильберта, как показал Н. Четверухин [1]), неявно предполагает внутренюю точку отрезка делая ненужной $II_{2a}$, а акс. VIII О. Веблена предполагает сверх того еще и внешнюю точку отрезка, при чем обе аксиомы предполагают существование трех точек не на одной прямой. Приходится признать, что аксиома М. Паша и ее видоизменения очень неудобны при построении системы независимых аксиом.

Интересно отметить также класс $K_1$, состоящий из одной точки с условием, что точки $A, B, C$ в порядке $ABC$ только в том случае, если $A \neq B \neq C$. Аксиома I не удовлетворяется, а все остальные удовлетворяются vacuously. Ясно что таким приемом можно „доказать" независимость какой угодно аксиомы, а не только I. А если в качестве $K_n$ взять класс, в котором вовсе нет точек, как это делает А. Р. Швейцер [2]), то будет доказана независимость какой-угодно аксиомы в любой системе.

Конечно, акс. 1 не независима, а представляет простое следствие II и III и целиком покрывается теоремой 2: „Из порядка $ABC$ следует, что $A$ отлично от $B$ и $B$ от $C$", которая доказывается на основании только II и III аксиом (сн. 354). Акс. I содержится также в IV, VII и VIII.

Следовательно, в системе О. Веблена аксиомы I и VII являются явно лишними, входя целиком в последующие. После упомянутой статьи Н. Четверухина можно думать, что и акс. II и V могут быть выведены из остальных.

Таким образом, О. Веблен не доказал, да и не мог доказать абсолютной независимости своих аксиом, так как некоторые из них явно связаны одна с другой. Не доказал О. Веблен и порядковой независимости для акс. V.

Доказательство абсолютной независимости аксиом и пользование всеми ими при развитии системы указывает на необходимость каждой из них в выставленной системе.

Не менее важно доказать достаточность системы аксиом для вывода из них любой теоремы в терминах основных понятий. Доказывая теорему „достаточности", ни О. Веблен ни Э. В. Гентингтон не объясняют однако, почему из теоремы достаточности вытекает достаточность системы аксиом. Мы хотим предложить здесь доказательство того, что это действительно так.

*Теорвма.* „Система аксиом достаточна, если она позволяет доказать теорему достаточности".

Доказательство. В самом деле пусть для некоторой системы $n$ аксиом $A_1, A_2, \ldots A_n$ доказана изоморфность классов объектов, удовлетворяющих этим аксимам (см. § 1), и допустим, что есть предложение $F$, выраженное в тех же основных понятиях, которое не может быть доказано на основании принятых аксиом и требует длясвоего доказательства новой аксиомы $A_{n+1}$. В качестве $A_{n+1}$ может быть взято и $P$.

[1]) N. Tschetweruchin. Über die Bedentung des Axioms von Pasch für die lineare Anordnungsaxiome. Jabresber. d. deut. Matem. Verein. Bd. 33, 1924; S. 65—74.

[2]) l. c. v. XXXI сн. 381, 386, 389.

$A_{n+1}$ не зависит от остальных $A$, поэтому существует класс $K_{n+1}$, в котором все $A_k$ ($k = 1, 2, \ldots n$) оправдываются, а $A_{n+1}$ нет. С другой стороны, так как $A_{n+1}$ совместна с остальными, то существует класс $K'$, в котором оправдываются все $A$, включая и $A_{n+1}$. Но по теореме достаточности классы $K_{n+1}$ и $K'$ изоморфны, так как в них обоих оправдываются $n$ первых аксиом. Следовательно $A_{n+1}$ имея место в классе $K'$, должна иметь место и в классе $K_{n+1}$. Противоречие доказывает, что наше предположение неверно, и, следовательно, нет такого $P$, которое не вытекало бы из принятых $n$ аксиом. Таким образом система аксиом является достаточой для построения всей теории, что и т. д.

Впрочем, и доказав теорему достаточности, мы еще не можем быть вполне уверены, что принятая система аксиом действительно достаточна. Предыдущее рассуждение подразумевает, что были форлированы все аксиомы, необходимые для доказательства теоремы достаточности. Если же какая-либо аксиома вошла в доказательство теоремы достаточности неявно, при доказательстве этой ли теоремы или одной из предыдущих, все равно, то наша система остается дизъюнктивной. Обнаружить эту дизъюнктивность можно, заметив или пробел в доказательстве, или существование другого класса объектов, не изоморфного тому, которым пользовались при доказательстве совместности аксиом, но в котором также удовлетворяются все аксиомы данной системы. Правда, и тот и другой способ имеют случайный характер и не могут поэтому быть признаны вполне удовлетворительными, но указать другого способа для обнаружения дизъюнктивности системы мы пока не в состоянии (см. § 4).

Во всяком случае значение теоремы достаточности очень велико, так как позволяет закончить цепь теорем доказательством этой теоремы. Большая заслуга Э. В. Гентингтона заключается в том, что он первый указал на значение этой теоремы и доказывал ее для систем аксиом, которые он строил для различных теорий [1]).

Из сказанного вытекает, что работа, притязающая на достаточность выставленных аксиом, должно быть снабжена самыми подробными доказательствами всех теорем, оканчивая теоремой достаточности.

Обращаясь к работе О. Веблена, мы видим, что она действительно заканчивается доказательством теоремы достаточности. Что же касается предыдущего, то вся третья глава, посвященная проэктивной геометрии (т. т. 43 — 83), оставлена вовсе без доказательств, по объяснению автора, в виду недостатка места и достаточной известности вопроса. При этом ссылки, как предупреждает автор, указывают часто не на подробности доказательства, а только на методы (сн. 372). В виду этого вопрос о достаточности аксиом О. Веблена остается для нас открытым.

---

[1]) E. V. Huntington. A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. Trans. Am. Math. Soc. v 3 1902; p. 264—279 и последующие статьи.

Подводя итоги по вопросам относительно аксиом, мы видим, что *в работе О. Веблена доказательство совместности аксиом отсутствует, доказательство абсолютной независимости не дано, да и не может быть дано, доказательство порядковой независимости не удалось, о доказательстве достаточности нельзя выказаться определенно.*

## § 3. Работа Р. Л. Мура.

Мы расматриваем работу Р. Л. Мура сейчас же после работы О. Веблена вследствие того, что система Р. Л. Мура представляет собою только некоторое видоизменение системы О. Веблена, и самая работа написина под влиянием и отчасти в сотрудничестве с О. Белленом (сн. 488).

Р. Л. Мур выставляет систему 15 постулатов, которые он называет допущениями (assumption), в терминах трех основных понятий: точки, порядка и конгруентности. Эти допущения следующие.

1) Аксиомы О. Веблена I и III — X, обозначаемые буквой O (order). В подстрочном примечании на сн. 488 автор поясняет, что аксиома II О. Веблена является следствием I и III — VIII вместе с $C_{1a}$, как доказано в статье автора, представленной им Американскому математическому обществу, но еще не опубликованной. Вероятно, в этом списке не надо считать аксиомы V О. Веблена, так как она целиком содержится в $C_{1a}$, По крайней мере аксиомы V нет в списке при доказательстве независимости в § 8 (сн. 507—508).

2) Допущения конгруентности, обозначенные все буквами $C$ со значками.

$C_{1a}$ „Если $B$ отлична от $C$, и $A'$ отлична от $B'$, то существует такая точка $C'$, что $A'B'C'$, и $BC \equiv B'C'$"

$C_{1b}$ „Если $B$ отлична от $C$, и $B'$ отлична от $B'$, то есть не более одной такой точки $C'$, что $A'B'C'$, и $BC \equiv B'C'$".

$C_2$. „Если $A$ отлична от $B$, $A'$ отлична от $B'$, $A''$ отлична от $B''$, $AB \equiv A'B'$ и $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A''B''$":

$C_3$. „Если $ABC$, $A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$".

$C_4$. „Если $A$, $B$ и $C$ три не прямолинейно расположенных точки, и $A'$, $B'$, $C'$ три не прямолинейно расположенных точки, и $CAD$, $C'A'D'$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$, $CD \equiv C'D'$, то $BD \equiv B'D'$".

3) Допущение непрерывности $K$, для которого автор берет или XI акс. О. Воблена или постулат о сечении Дедекинда для точек одного единственного отрезка в следующей форме: $K$. „Если существует какой-либо отрезок, то существует некоторый отрезок $AB$ такой, что если он составлен из двух совокупностей точек $[M]$ и $[N]$, причем каждая совокупность содержит по крайней мере две точки, и ни одна точка $X$ каждой совохупности не совпадает с точкой $Y$, и не такова, что $Y_1XY_2$, где $Y_1$ и $Y_2$ точки другой совокупности, то существует такая точка $C$, что $MCN$ для каждой $M$ и $N$ отличных от $C$".

4) Наконец допущение паралельности,

$P_0$ „Если существует какая-либо прямая и точка вне ее, то существует некоторая прямая $a$ и некоторая точка $A$ вне ее такие, что если $a$ и $A$ лежат в плоскости $\beta$, то в плоскости $\beta$ есть не более одной прямой, проходящей через $A$ и не имеющей общей точки с $a$“.

Все сказанное относительно формы и содержания аксиом О. Веблена, очевидно, применимо и к допущениям Р. Л. Мура.

$P_0$ отличается от XII акс. О. Веблена тем, что $P_0$ устанавливается для одной единственной плоскости, а XII для всякой. $P_0$ таким образом менее требовательна, чем XII, и теперь уже нельзя ввести конгруэнтности определением, что Р. Л. Мур и показывает в § 10 своей работы. Рассмотрим пространство, в котором точками будут точки обыкновенного евклидова пространства, лежащие по одну сторону определенной плоскости, а порядок определен, как обычно. Здесь $O$, $K$ и $P_0$ удовлетворяются, но отношения между отрезками, удовлетворяющего допущениям $C$, существовать не может. Если бы здесь удовлетворялись и $C$, то согласно т. 8 § 5 пространство было бы обыкновенным евклидовым пространством, и в нем через каждую точку вне каждой прямой можно было бы провести только одну прямую, не встречающую данной.

Очевидно, что в рассматриваемом пространстве это неверно.

Р. Л. Мур развивает следствия из своей системы допущений, ограничиваясь *указаниями* на доказательства (сн. 488). В § 5 в т. 8 он указывает, что из его системы допущений $O$, $C$, $K$, $P_0$ следует система Д. Гильберта, а потому и обыкновенная евклидова геометрия. Автор рассматривает и другие совокупности допущений, представляющие вариации указанной основной.

Что касается основных трех вопросов относительно постулатов, то *Р. Л. Мур не доказывает ни совместности своих допущений, ни их достаточности*, хотя и называет основную систему категорической (сн. 487).

Автор хочет доказать, что в его системе $O$, $C$, $K$ и $P_0$ каждое допущение независимо от всех остальных. Для доказательства независимости он пользуется отчасти примерами О. Веблена, дополняя их условиями относительно конгруэнтности, но для III, VI и всех $C$ строит свои примеры. Для $C$ указаны такие примеры, что каждое $C$ действительно абсолютно независимо от всех остальных, в других примерах остается vacuously. Так как аксиома V О. Веблена отдельно в список не входит, то *допущения Р. Л. Мура порядково независимы.*

## § 4. Работа В. Ф. Кагана.

В работе В. Ф. Кагана вопросу о системе основных посылок уделено около 179 страниц.

Работа разрослась до таких больших размеров по сравнению с аналогичными работами других авторов, потому что В. Ф. Каган поставил своей целью дать не план работы подобно другим, а самую работу (сн. XIV). Он доводит каждое доказательство до элементов, опуская иногда только такие детали, которые действительно не могут затруднить читателя. Этим работа В. Ф. Кагана выгодно отличается от других рассматриваемых нами работ, так как не возлагает на читателя труда, который должен быть выполнен автором.

В. Ф. Каган принимает 10 постулатов.

I. Между любыми двумя точками пространства $C$ и $D$ на всяком расстоянии, меньшем $CD$, от любой из них имеется точка прямолинейно относительно них расположенная (сн. 95).

II. Если две точки в пространстве расположены каждая прямолинейно относительно двух других точек, то они образуют с последними прямолинейный образ (сн. 104).

III. Если некоторое движение приводит две различные точки пространства $M$ и N в совмещенне с двумя различными же точками $M'$ и $N'$, то расстояния $\overline{MN}$ и $\overline{M'N'}$ равны (сн. 163).

IV. Никакое движение не совмещает всех точек пространства с одной и той же точкой (сн. 165).

V. Каковы бы ни были движения $S$ и $S'$, в пространстве имеется движение $SS'$, заменяющее последовательное производство их (сн. 172).

VI. Вращением вокруг двух точек $A$ и $B$ всякая третья точка $C$ может быть приведена в совмещение с любой точкой $C'$, коль скоро $\overline{AC} = \overline{AC'}$ и $\overline{BC} = \overline{BC'}$ (сн. 174).

VII. В пространстве существует плоскость (сн. 180).

VIII. Если три точки $A$, $B$ и $C$ расположены в одной плоскости, и из трех пар точек $AB$, $BC$ и $CA$ две пары расположены в этой плоскости по одну сторону точек $M$ и $N$, то точки третьей пары также расположены по одну сторону точек $M$ и $N$ (сн. 287).

IX. В пространстве имеется по крайней мере одна плоскость, в пределах которой всяким трем точкам, не имеющим прямолинейного расположения, отвечает по крайней мере одна точка пространства, одинаково от них удаленная (сн. 723).

X. В пространстве существует плоскость, при неподвижности которой все пространство остается в покое (сн. 750).

В эти десять постулатов входит явно 13 терминов и неявно 2, всего 15. Основными понятиями, неопределяемыми являются четыре: пространство, точка, движение, совмещение. Для всех остальных даются определения (сн. 772—773). Определения эти будем называть основными. Мы приведем лишь те определения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

5) Арифметическое число, отнесенное паре различных точек пространства, мы будем называть *расстоянием между этими точками* (опр. 10 гл. II).

6) Если $A$, $B$ и $C$ суть три различные точки в каком-либо пространстве, то трем парам точек $BA$, $BC$ и $CA$ отвечают три расстояния $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Если расстояния эти таковы, что одно из них равно сумме двум других, напр., если $\overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC}$, то мы будем говорить, что эти три точки расположены *прямолинейно* или, что

*каждая из этих трех точек расположена прямолинейно относительно двух других* (опр. 1 гл. VI).

7) При соотношении $\overline{CA} = \overline{AB} + \overline{BC}$ мы будем сверх того говорить, что точка $B$ расположена *между* точками $A$ и $C$ (опр. 1 гл. VI).

11) Если геометрическое место точек, равноотстоящих от двух точек $A$ и $B$, в некотором пространстве содержит точки, не расположенные на одной прямой, то мы будем называть его *плоскостью*; точки $A$ и $B$ мы будем называть *полюсами* плоскости (опр. 1 гл. XV).

14) Образ в каком-либо пространстве, который состоит из двух точек $A$ и $B$ и всех точек, расположенных между ними, мы будем называть *отрезком* $AB$ (опр. 3 гл. VI).

15) Во всяком пространстве мы будем называть *прямой линией* (или просто *прямой*) образ, который состоит из двух точек $A$ и $B$ и всех других точек пространства, расположенных прямолинейно относительно $A$ и $B$. Эту прямую линию мы будем называть прямой $AB$ (опр. 1 гл. VI).

12) Положим, что в некотором пространстве имеется плоскость $R$ и в ней две пары точек $A$, $B$ и $P$, $Q$. Если в этом пространстве нет прямой, проходящей через точки $P$ и $Q$, расположенной целиком в плоскости $R$ и встречающей отрезок $AB$, то мы будем говорить, что *точки $A$ и $B$ расположены в плоскости $R$ по одну сторону точек* $P$ и $Q$ (опр. 1 гл. XVIII).

Рассматривая пространство, как числовое многообразнее, автор принимает, как данное, теорию операций с вещественными числами и то, что эта теория не содержит внутренних противоречий (Гл. II опр. 2). Таким образом, постулат непрерывности автор относит к арифметике, чем, несомненно, значительно упрощает свою задачу.

Совместность постулатов, а вместе с ними и основных определений доказывается тем, что все они имеют место в аналитическом пространстве $E_3$, что удостоверяется соответствующими предложениями (сн. 759—760).

Развивая геометрическую систему и вводя по мере необходимости постулат за постулатом, В. Ф. Каган вместе с тем доказывал независимость каждого нового постулата от всех предыдущих. Таким образом, *постулаты В. Ф. Кагана порядково независимы.*

Последнюю главу LVIII В. Ф. Каган посвящает доказательству абсолютной независимости своих постулатов и основных определений и другим вопросам относительно постулатов.

В. Ф. Кагану действительно удалось доказать абсолютную независимость всех постулатов, кроме I и VII, как сейчас будет видно.

Автор дает доказательство абсолютной независимости своих постулатов, начиная с последнего. Повторив доказательство независимости для постулата X, автор доказывает независимость IX и VIII. Обращаясь к постулату VII, автор замечает, что „о независимости этого постулата от VIII — X в известном смысле не может быть и речи... Самое понятие о независимости постулата VII от постулатов

VIII — X не имеет содержания. Если остановиться на постулате X, то можно, конечно, сказать что он содержит уже требование, выраженное в постулате VII" и т. д. (сн. 761—762). Для доказательства же независимости постулата VII от предшествующих служит пространство $E_2$.

Затем автор последовательно доказывает абсолютную независимость постулатов VI — II. Обращаясь к постулату I, автор указывает, что в нем содержатся два утверждения: 1) что между любыми двумя точками $C$ и $D$ имеются промежуточные точки, и 2) что промежуточная точка имеется на любом расстоянии, меньшем нежели $CD$, от каждой из них.

Прежде всего автор хочет показать, что „из постулатов II — X не вытекает, что в пространстве, в котором они имеют место, существуют какие-либо три точки, прямолинейно расположенные" (сн. 765). Для этой цели автор строит новое пространство, 14-е. Он берет пространство из конечного числа ($n$) точек, при чем $n > 6$, за расстояние между любыми двумя точками принимает одно и то же арифметическое число, а за движения все возможные перемещения этих точек четного порядка, т. е. состоящие из четного числа парных перестановок. При этих условиях в построенном пространстве прямолинейное расположение точек не может иметь места. Затем автор показывает, что постулаты III — X удовлетворяются. „Постулат II не может найти себе применения, потому что в нашем пространстве не имеет места его условие... Но при условном характере этого постулата в нем отнюдь не содержится требование, чтобы в пространстве существовали точки, имеющие прямолинейное расположение" (сн. 766).

Затем автор показывает, что если даже принять, что в пространстве существуют точки, имеющие прямолинейное расположение, то из постулатов II — X не следует, что между любыми двумя точками имеется промежуточная точка. Для этой цели автор рассматривает 15-е пространство, точки которого распадаются на две категории. Первую категорию образуют три точки $A$, $B$ и $C$, а вторую 4 точки $X, X', Y, Y'$. Расстояния в этом семиточечном пространстве распределены следующим образом:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1.$$

$$\overline{XY} = \overline{X'Y'} = 1,\ \overline{YY'} = 2,\ \overline{X'Y} = \overline{XY'} = 3,\ \overline{XX'} = 4.$$

$$\overline{AY} = \overline{BY} = \overline{CY} = \overline{AY'} = \overline{BY'} = \overline{CY'} = 5$$

$$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{CX} = \overline{AX'} = \overline{BX'} = \overline{CX'} = 10$$

Движения есть и совершенные и несовершенные. Пусть $S_1, S_2 \ldots . S_6$ все совершенные сопряжения группы $A$, $B$, $C$ с самою собою, т. е. не относящие двух различных элементов одному и тому же, а $S_1', S_2' \ldots . S_{21}'$, все несовершенные сопряжения той же группы с самою собою. Пусть $T$ будет перестановка $(XX')(YY')$. Движения в пространстве состоят из всех сопряжений вида $S_i$, $S_j'$ и $S_j' T$. Затем автор показывает, что в построенном пространстве справедливы постулаты II — VIII. В частности постулат VII справедлив, так как в пространстве имеются 4 плоскости: 1) плоскость, имеющая своими полюсами точки $X$ и $X'$ или $Y$ и $Y'$ и состоящая из точек $A$, $B$, $C$; 2) три плоскости, имеющие своими полюсами две точки первой группы и состоящие из всех точек второй группы и третьей точки первой группы. Относительно постулатов IX и X автор ограничивается коротким заявлением, что требованиям этих постулатов удовлетворяет плоскость, состоящая из точек $A$, $B$ и $C$. Ясно, что это неверно. Постулат IX не удовлетворяется в плоскости $ABC$, так как в ней только 3 точки, а постулат IX требует, чтобы точка, равноудаленная от трех была в пределах плоскости. Но постулат IX в семиточечном пространстве не выполняется и в остальных плоскостях по условиям расстояния между их точками, что легко проверить. Следовательно независимость постулата I осталась недоказанной.

В. Ф. Каган заканчивает доказательство независимости своих постулатов заявлением, что считает доказанным, „что каждый из наших десяти постулатов не зависит от остальных“ (сн. 770).

Конечно с этим нельзя согласиться. Из сказанного по поводу доказательств независимости постулатов VII и I, напротив, ясно, что о их независимости не может быть и речи, так как постулат VII связан с VIII — X, а постулат I со II. Таким образом, *абсолютная независимость постулатов в системе В. Ф. Кагана не доказана и не может быть доказана.*

Затем автор переходит к доказательству независмости своих определений. Из 15 терминов, входящих в постулаты, автор выделяет четыре: пространство, точка, движение и совмещение, определения которых в его сочинении имеют, по его словам, чисто тавтологический характер. Он относит эти термины к основным и считает невозможным говорить об их независимости от остальных и от постулатов (сн. 773 - 774).

Под определением мы разумеем предложение, дающее определенное название понятию, составленному из других понятий, определенных раньше или принятых за основные. Определения вводятся только для упрощения речи, и можно было бы обойтись вовсе без новых терминов ценою усложнения речи и процесса доказательства. Однако дело обстоит иначе с теми терминами, которые были введены определениями и вслед затем встречаются в постулатах. Тем самым терминам приписываются известные свойства, и возникает вопрос, не представляет ли то предложение, которое мы считаем определением, теоремы, которая подлежит доказательству. С этими рассуждениями автора (сн. 770 - 772), которые мы приводим в сокращении, нельзя не согласиться. Для пояснения его мысли приведем пример. Плоскость была определена и затем фигурирует в 4 постулатах VII — X. Является вопрос, нельзя ли на основании только постулатов I — X и остальных определений доказать, что плоскость есть геометрическое место точек, не имеющих прямолинейного расположения и одинаково удаленных от двух данных точек. Если бы это оказалось возможным, то определение плоскости не было бы независимым.

Автор, по нашему мнению, успешно доказывает независимость почти всех своих определений. Мы остановимся только на двух терминах: 11) плоскость и 15) прямая, относительно которых не можем согласиться с рассуждениями автора. Если термин берется в новом значении, мы будем ставить его в кавычках.

О плоскости автор говорит: „если мы под термином „плоскость“ будем разуметь то, что разумели раньше под термином полуплоскость, то легко видеть, что мы удовлетворим всем постулатам. Справедливость постулата VIII требует некоторого размышления, но мы предоставим это читателю“ (сн. 779). Определение полуплоскости гласит: геометрическое место в пространстве $\Omega_8$ (т. е. в пространстве, удовлетворяющем первым 8 постулатам), состоящее из прямой и одной стороны плоскости, проходящей через эту прямую, относительно нее мы будем называть *полуплоскостью* (опр. 4 гл. XXIV, сн. 294). Ясно, что постулат IX для полуплоскости не удовлетворяется, так как точка, равноудаленная от трех данных, не расположенных прямолинейно, может находиться за пределами полуплоскости на ее продолжении. Таким образом, независимость определения плоскости осталась недоказанной.

Для доказательства независимости определения прямой автор предлагает разуметь под „прямой $AB$“ то, что обыкновенно разумеют под отрезком $AB$, сохраняя все остальное определения. Легко видеть, говорит автор, что это не отразится на значении термина: *обе точки $A$ и $B$ расположены в плоскости по одну сторону двух других точек $P$ и $Q$*. В самом деле, ни одна „прямая“, проходящая через точки $P$ и $Q$ и расположенная в плоскости, не встречает отрезка $AB$ в том и только в том случае, если прямая $PQ$ (подчеркнем, в прежнем значении этого слова) не встречает отрезка $AB$. Вследствие этого постулат VIII остается сраведливым, а об остальных постулатах и говорить нечего (сн. 779—780).

Прежде всего здесь то неудобство, что один и тот же образ, отрезок, имеет теперь два названия: отрезок и прямая. Но здесь есть и ошибка, которая станет ясна, если рассуждение автора перевести на обычный язык геометрии. Тогда получим: отрезок $PQ$ не встречает отрезка $AB$ в том и только в том случае, если прямая $PQ$ не встречает отрезка $AB$. Разумеется это не так. Отрезок $PQ$ может не встречать отрезка $AB$, а прямая $PQ$ в то же время встречать. Пусть точки $A$, $B$ и $C$ расположены так, что „прямая“ (отрезок) $PQ$ встречает отрезок $AB$, но не встречает отрезков $AC$ и $BC$. Точки $A$ и $C$ лежат тогда по одну сторону точек $P$ и $Q$, также $B$ и $C$, но $A$ и $B$ лежат по разные стороны точек $P$ и $Q$, и постулат VIII не оправдывается. Вместе с тем остается недоказанной и независимость определения прямой.

*Следовательно независимость определений В. Ф. Кагана осталась недоказанной.*

Покончив с вопросом о независимости основных посылок, В.Ф.Каган ставит вопрос о том, в какой мере определительны эти посылки для пространства, и показывает, что его посылки определяют не только так называемое реальное пространство, но и всякое с ним сходственное, например, плоское аналитическое пространство $E_3$. Автор называет сходственными два пространства в том случае, если между их элементами можно установить однозначное соответствие так, что 1) каждому элементу одного отвечает один и только один элемент другого и обратно, 2) расстояния между соответствующими точками в обоих пространствах равны и 3) каждому движению в одном пространстве отвечает в другом движение, производящее совмещение соответствующих точек. Таким образом В. Ф. Каган доказал теорему „достаточности", не замечая всего ее значения.

Поэтому дальше В. Ф. Каган ставит вопрос о достаточности посылок отдельно и говорит, что им опущены постулаты логические и арифметические, и также остались без определения многие термины как, например, *существует*, *различные точки* и др., и потому он не может признать своих посылок достаточными для формального обоснования геометрии. Он говорит далее: „мы формулировали лишь те термины и постулаты, которые характеризуют геометрическое исследование, и оставили в стороне те посылки, на которых покоится каждое рассуждение, к какой бы области оно ни относилось" (сн. 783).

Итак, автор признает свои геометрические посылки достаточными для формального обоснования геометрии. Мы напротив, попробуем доказать, что они недостаточны, для чего 1) укажем тот постулат, которым автор пользовался неявно, и 2) укажем пространство, отличное от $E_3$, в котором тем не менее имеют место все десять постулатов.

Рассмотрим доказателство т. 8 гл. XVI. Приводим полностью теорему и доказательство.

*Теорема 8.* „В пространстве $\Omega_7$ каждая точка прямой есть внутренняя ее точка". Док. Пусть $A$ будет произвольная точка прямой $AB$ и $B$ произвольная другая ее точка. Пусть $C$ будет средина отреза $AB$. Так как $AC = CB$, то $C$ и $B$ могут быть приведены в совмещение с точками $A$ и $C$ (т. 3). Это движение *приводит точу $A$ в некоторую точку $C'$*, которая принадлежит прямой $AB$ (т. 14 гл. XIV). Так как точка $C$ лежит между точками $A'$ и $B$, то точка $A$ лежит между точками $C'$ и $C$ (т. $6a$ гл. XIV). Иными словами, $A$ есть внутренняя точка нашей прямой".

Нами подчеркнут вывод, не имеющий основания ни в постулатах, ни в основных определениях, так как термин *движение* автор принял за основной, относя анализ его за пределы своего сочинения (сн. 773). В данном случае автор принимает, что „всякое движение в пространстве приводит каждую точку пространства в некоторую определенную точку того же пространства". Но ведь это новый постулат движения. Тем же неформулированным постулатом автор пользуется и при доказательстве т. 24 гл. XVI, когда говорит, что движение приводит точки $C$, $D$ и $E$ в совмещение с точками $C'$, $D'$ и $E'$, да, вероятно и в других местах, отыскивать которые собственно нет надобности, так как достаточно и одного примера.

Хотя указанный постулат и имеется у В. Ф. Кагана в гл. II в виде теоремы 6, все же он остается постулатом. Теорема 6 вытекает непосредственно из определений 3,4 и 10 гл. II, из которых нельзя делать выводов, так как в конце-концов определения 3 и 4 (сопряжения, которое затем названо движением) совсем не попали в список основных определений, а из определения 10 вошло только расстояние.

Тепер укажем пространство, в котором также выполняются все 10 постулатов, для чего лишь немного изменим пространство $E_3$. Мы возьмем в обыкновенном евклидовом пространстве только точки, лежащие по одну сторону какой-либо плоскости, сохраним между ними прежние расстояния и оставим все движения. Например, возьмем точки лежащие по одну сторону координатной плоскости $XOY$, именно с положительной координатой $Z$. В этом пространстве все постулаты I — X имеют место. Ограниченность простанства не играет роли для постулатов движения, так как движение является лишь точечным преобразованием, постулат IX выполняется во всякой плоскости, параллельной плоскости $XOY$, а об остальных нечего и говорить. Таким образом система В. Ф. Кагана оказалась диз'юнвтивной. Указанное нами пространство исключается как-раз новым постулатом, доказывая вместе с тем его независимость от остальных. Движение, приводящее точку $(0, 0, 4)$ в точку $(0, 0, 1)$, точки $(0, 0, 2)$ уже ни в какую точку этого пространства не переводит. Заметим, что отмеченный нами постулат входит, как часть, в 9 постулат Ф. Шура [1]; он является также первым постулатом движения у С. А. Богомолова [2].

Таким образом, несмотря на то, что В. Ф. Каган доказал теорему достаточности, *его система все же оказалась недостаточной*. Этот пример поясняет соображения высказанные нами в § 2.

Заметим, что точно также оказалась недостаточной система аксиом Д. Гильберта, как это показал В. Ф. Каган, так как все аксиомы Д. Гильберта удовлетворяются одновременно в двух пространствах В. Ф. Кагана в $E_3$ и $\mathrm{E}_3$. Пространство $\mathrm{E}_3$ обыкновенное евклидово пространство с обыкновенными движениями. Пространство $E_3$ содержит те же точки и с теми же расстояниями между ними, как $\mathrm{E}_3$, и допускает те же движения, что и $\mathrm{E}_3$, с добавлением вращения около плоскости. Это последнее пространство В. Ф. Каган исключает с помощью постулата X.

---

[1]) F. Schur. Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin, 1919, S. 28.

[2]) l. c. сн. 68.

Покончив с достаточностью, В. Ф. Каган переходит к вопросу о необходимости его постулатов для обоснования евклидовой геометрии. Хотя автор и признает все постулаты необходимыми в пределах его системы, однако это не так. Ясно, что постулат VII может быть выпущен, так как он повторяется в следующих за ним VIII — X.

Наконец, автор ставит еще один вопрос о том, необходим ли каждый постулат во всем его об'еме, или требования его можно сократить, и указывает, что и его постулаты допускают сокращения. Мы не будем касаться здесь предложенных автором изменений, так как он не рассматривает во всей полноте вновь возникающих вопросов о независимости и о выводе прежней системы из новой.

Подводя итоги, мы можем сказать, что *В. Ф. Каган дал систему постулатов, обладающих порядковой независимостью. Абсолютная независимость постулатов не доказана. Независимость основных определений не доказана. Система основных посылок недостаточна.*

## § 5. Работа Э. В. Гентингтона.

В системе Э. В. Гентингтона основными понятиями являются $K$, класс элементов, и $R$, отношение включения между элементами. Основных определений, т. е. определений входящих в постулаты терминов около 27. Э. В. Гентингтон ограничивается замечанием, что все эти определения могут быть выражены прямо в терминах основных понятий. Конечно, этого недостаточно. Надо или прямо выражать постулаты в терминах основных понятий, как этого требует А. Падоа, или, следуя В. Ф. Кагану, доказывать независимость основных определений. Э. В. Гентингтон не сделал ни того ни другого. Эти определения занимают около 7 страниц, поэтому мы выпишем только некоторые.

1. Если $A$ элемент класса $K$, то $A$ будет называться абстрактным шаром или просто *шаром*.

2. Если $ARB$, то мы скажем, что шар $A$ *внутри* шара $B$, или что *$B$ содержит $A$*.

4. Если $A$ шар, и если нет другого шара $X$ такого, что $XRA$, то $A$ называется абстрактной точкой или просто *точкой*; т. е. точка есть шар, который не содержит внутри себя никакого другого шара.

5. Пусть $A$ и $B$ какие-либо данные точки. Если $X$ такая точка, что всякий шар, содержащий $A$ и $B$, содержит также $X$, то говорят, что $X$ принадлежит *отрезку* $[AB]$ или $[BA]$.

Итак отрезок $[AB]$ есть класс точек, единственно определяемых $A$ и $B$. Точки $A$ и $B$ принадлежат отрезку и называются *конечными точками*. Если мы исключим конечные точки, то класс оставшихся называется *внутренней частью* отрезка $[AB]$ и может быть обозначен $(AB)$. Если $(AB)$ нулевой класс, то отрезок $[AB]$ называется *пустым*.

6. Если $X$ такая точка, что $A$ принадлежит отрезку $[BX]$, то скажем, что $X$ принадлежит к классу, обозначенному $[AB']$ и называемому продолжением $[AB]$ за точку $A$. Его граница состоит из точки $A$.

Так же определяется продолжение за точку $B$, внутренняя часть продолжения и пустое продолжение. Анологично 5 — 7 даются определения 10 — 12 для треугольника и 27 — 29 для тетраэдра.

8. Если $A$ и $B$ две различных точки, то *прямая* $AB$ есть класс всех точек, которые принадлежат отрезку $[AB]$ или одному из двух его продолжений. Мы говорим, что три точки расположены прямолинейно, если какая-либо одна из них принадлежит прямой, определенной двумя другими.

Аналогичные определения даются для плоскости — 13 и пространства — 30.

15. Предположим, что мы имеем дело с системой $(K,R)$, в которой плоскости имеют все свойства, требуемые постулатами 6 — 8. Тогда, если две прямые $AB$ и $CD$ лежат в одной плоскости и не имеют общей точки, то называются *параллельными* и мы пишем $AB \parallel CD$.

Для обозначения, что две прямые $AB$ и $CD$ или параллельны или совпадают, мы будем пользоваться обозначением $AB \sim CD$.

17. Пусть $[AB]$ некоторый данный отрезок. Если есть параллелограмм $AXBY$, в котором $[AB]$ диагональ, и если другая диагональ пересекает $[AB]$ в $M$, то $M$ называется *средней* точкой отрезка $[AB]$. Если есть только одна такая точка $M$ (что всегда будет иметь место в каждой системе, в которой постулаты 1 — 11 имеют силу), то $M$ называется *срединой* $[AB]$, и мы пишем $M =$ ср. $AB$. В этом случае говорят, что отрезок $[AB]$ *разделен пополам* в $M$.

20. Если $O$ точка внутри шара $S$, и если каждая пара хорд, которые пересекаются в $O$, суть диагонали параллелограмма, то $O$ называется *центром* шара. Какая-либо хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*, и он делится в центре пополам. Каждая половина диаметра называется *радиусом*.

21. Два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ называются *конгруэнтными* — символически $AB \equiv CD$ — тогда и только тогда, когда удовлетворено одно из следующих условий:

1) Если два отрезка $[AB]$ и $[CD]$ на одной прямой, то мы должны иметь или $[AB] = [CD]$, или ср. $AC =$ ср. $BD$, или ср. $AD =$ ср. $BC$, а если они лежат на параллельных прямых, то должны быть противоположными сторонами параллелограмма.

2) Если они имеют общую конечную точку (илн общую средину), но не лежат на одной прямой, то они должны быть радиусами (или диаметрами) одного шара.

3) Если они не лежат ни на одной прямой, ни на параллельных, и не имеют ни конечной общей точки, ни общей средины, то должны быть два отрезка $[OX]$ и $[OY]$, которые конгруэнтны данным отрезкам согласно 1) и конгруэнтны один другому согласно 2).

Здесь интересно то, что автор вместо точки, как основного понятия, берет твердое тело, шар. То же самое еще раньше было сделано Д. С. Шором [1]).

Постулатов у Э. В. Гентингтона 26.

## *Общие законы.*

Пост. 1. Пусть $A, B, C$ какие-либо (абстрактные) шары. Если $A$ внутри $B$ и $B$ внутри $C$, то $A$ внутри $C$.

2. Если $A$ внутри $B$, то $A$ и $B$ различны.

3. a) Если класс шаров, содержащих точку $A$, тот же самый, что и класс шаров, содержащих точку $B$, то $A = B$. b) Если класс точек внутри шара $S$ тот же самый, что и внутри шара $T$, то $S = T$.

4. Если $X$ точка отрезка $[AB]$, то $(AB]$ „простая сумма" двух отрезков $[AX]$ и $[BX]$.

5. Если две прямых имеют две различных общих точки, они совпадают.

6. Если $X$ точка треугольника $[ABC]$, то $[ABC]$ „простая сумма" трех треугольников $[ABX]$, $[ACX]$ и $[BCX]$.

7. Если отрезок $[XY]$ пересекает отрезок $[AB]$, то треугольники $[ABX]$ и $[ABY]$ не имеют общей точки, исключая точек $[AB]$.

8. Если две плоскости имеют три общих не прямолинейно расположенных точки, они совпадают.

9. Если две прямые параллельны третьей, то они или параллельны или совпадают.

10. Если $AB$ и $CD$ параллельные прямые, то ни одна из 4 точек $A, B, C, D$ не лежит внутри треугольника, образованного тремя другими.

11. (4-хточечный пост.). Пусть $A, B, C, D$ какая-либо совокупность 4 точек, никакие три из которых не расположены прямолинейно, и $A', B', C', D'$ какая-либо другая совокупность 4 точек, никакие три из которых не расположены прямолинейно. Рассмотрим две совокупности из 6 прямых $AB$, $AC$, $AD$, $BC$, $BD$, $CD$ и $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $B'C'$, $B'D'$, $C'D'$, которые определяют эти точки. Если первые пять прямых одной совокупности, взятые в порядке, параллельны (или совпадают) первым пяти прямым другой совокупности, взятым в том же порядке, то оставшаяся шестая прямая первой совокупности будет параллельна (или совпадать) с оставшейся шестой прямой другой совокупности. Т. е. если $AB \sim A'B'$, $AC \sim A'C'$, $AD \sim A'D'$, $BC \sim B'C'$ и $BD \sim B'D'$, то также $CD \sim C'D'$.

12. Если $AB \equiv CD$ и $CD \equiv EF$, то $AB \equiv EF$.

13. Если поверхности двух концентрических шаров пересечены одним радиусом в $A$ и $X$ и другим радиусом в $B$ и $Y$, то $[AX] \equiv [BY]$.

14. Пусть $A, B, C, X$ четыре точки, из которых первые три расположены прямолинейно, и пусть $A', B', C', X'$ другая совокупность

[1]) Д. С. Шор. Геометрия фигур. Вестник Опытной Физики, № 386, сн. 36—39.

четырех точек, из которых первые три расположены прямолинейно. Рассмотрим две совокупности из шести отрезков, определяемых этими точками. Тогда, если $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, $AX \equiv A'X'$ и $BX \equiv B'X'$, то мы будем всегда иметь также $CX \equiv C'X'$.

15. Если $X$ точка тетраэдра $[ABCD]$, то $[ABCD]$ „простая сумма“ четырех тетраэдров $[ABCX]$, $[ABDX]$, $[ACDX]$ и $[BCDX]$.

16. Если отрезок $[XY]$ пересекает треугольник $[ABC]$, то тетраэдры $[ABCX]$ и $[ABCY]$ не имеют никаких общих точек кроме точек $[ABC]$.

17. Если $ABCD$ есть пространство, то каждая точка принадлежит этому пространству.

18. Если прямая $XY$ параллельна плоскости $ABC$, то ни одна из 5 точек $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$ не принадлежит тетраэдру, образуемому 4 другими.

## *Постулаты существования.*

$E$ 1. В классе $K$ существуют по крайней мере две различных точки.

$E$ 2. Если $AB$ прямая, то есть точка $X$ вне этой прямой.

$E$ 3. Если $AB$ прямая и $C$ точка вне этой прямой, то есть такая точка $X$, что $CX \parallel AB$. Система, в которой удовлетворяется этот постулат, может быть названа системой, в которой можно свободно проводить параллельные прямые. Вообще, только в таких системах определения, относящиеся к конгруэнтности, имеют какой-либо смысл.

$E$ 4. Если $[AB]$ какой-либо отрезок в системе, в которой параллельные можно проводить свободно, то на какой-либо полупрямой $OP$ есть такая точка $X$, что $[OX] \equiv [AB]$. Т. е. какой-либо данный отрезок можно „отложить“ на какой-либо данной полупрямой.

$E$ 5. Если $S_1$, $S_2$, $S_3$. . . бесконечная последовательность шаров, каждый из которых лежит внутри одного из предшествующих, то есть точка $X$, которая лежит внутри их всех.

$E$ 6. Если какой-либо шар имеет центр, то каждый шар имеет центр, при условии, конечно, что это не одна и та же точка.

$E$ 7. Если $ABC$ плоскость, то есть по крайней мере одна точка вне этой плоскости.

Постулаты Э. В. Гентингтон разделил на две группы: 1) постулаты „общие законы“ и постулаты „существования“. „Под постулатом существования мы понимаем постулат, который требует существования некоторого элемента, удовлетворяющего определенным условиям, например, предложение, что прямая, проходящая через вершину треугольника и внутреннюю точку, должна пересекать противоположную сторону, или предложение, что через точку вне данной прямой всегда возможно провести по крайней мере одну параллельную. Под общим законом мы понимаем предложение формы: *если* такие-то и такие-то точки, прямые и пр. существуют, *то* между ними будут такие-то и такие-то отношения“; например, предложение, что если $B$ между $A$ и $C$ и $X$ между $A$ и $B$, то $X$ между $A$ и $C$; или предложение, что если две различных прямых параллельны третьей прямой, то они параллельны одна другой“ (сн. 523—524).

Автор сам признает, что его попытка не вполне удачна. В примечании к т. 15 он говорит, что хотя постулат 9 дан в форме общего закона, однако дает возможность заключить о существовании точек пересечения многих прямых; при этом автор добавляет, что такое же замечание применимо и к постулату 10. Эти постулаты можно было бы назвать замаскированными постулатами существования. Собственно говоря, этими словами автор сам разрушает свое построение. Мы можем добавить, что замечание автора может быть приложено и к постулату 8, который дает теорему 13: „В треугольнике $[ABC]$, если $X$ на стороне противоположной $A$ и $Y$ на стороне противоположной $B$, то отрезки $[AX]$ и $[BY]$ будут иметь общую точку“. Эта теорема нисколько не отличается от т. 19, которую автор называет теоремой относительно „существований“ и для которой автору понадобились постулаты $E_1 - E_3$. Теорема 19 гласит: „Если точка $P$ внутри треугольника $[ABC]$, то прямая $AP$ пересекает противоположную сторону $(BC)$“.

Э. В. Гентингтон как-будто видит существенное различие между двумя группами своих постулатов в том, что в постулатах существования в их заключении речь идет о новых элементах по сравнению с условием постулата. С нашей точки зрения это различие несущественно, так как в постулате нет разницы между условием и заключением. Этим и об'ясняется неудача Э. В. Гентингтона.

Для доказательства совместности своих постулатов Э. В. Гентингтон указывает пример, где роль точек играют шары конечных размеров.

Достаточность системы удостоверяется теоремой 47, теоремой достаточности: „Если две системы $(K, R)$ удовлетворяют всем постулатам гл. II, то они изоморфны относительно $K$ и $R$“.

К сожалению, и здесь, как и у О. Веблена, доказательства большей частью отсутствуют. В конце работы Э. В. Гентингтон дает доказательство 13 отдельных теорем, которые могли бы, по его мнению, затруднить читателя, но это, конечно, не может заменить связного изложения всей системы. Поэтому для нас *вопрос о достаточности системы Э. В. Гентингтона остается открытым.*

Относительно независимости своих постулатов Э. В. Гентингтон предупреждает, что „общие законы“ независимы друг от друга, а постулаты существования независимы друг от друга и от общих законов. При этом автор добавляет, что незначительными изменениями формулировки легко было бы обеспечить абсолютную независимость соединенного списка общих законов и постулатов существования, но что эти изменения внесли бы бесполезную искусственность, от которой постулаты в их теперешнем состоянии свободны.

Если бы не это последнее замечание о легкости добиться абсолютной независимости, то можно было бы и не включать работы

Э. В. Гентингтона в наш обзор. Мы полагаем, что добиться абсолютной независимости в рассматриваемой системе не так то легко, что сейчас будет видно.

По содержанию псевдогеометрий интерес новизны представляет пользование системами первоначальных чисел и составленных из них произведений, причем „точками“ оказываются первоначальные числа, а $R =$ „множитель“, а также пример 1, о котором будет сказано дальше.

Автор широко пользуется применением vacuously, не давая почти нигде пояснений своих примеров и редко указывая, какие постулаты удовлетворяются vacuously. Убедившись на первых семи примерах, что автор пользуется vacuously не только для последующих постулатов, но и для предшествующих, мы, начиная с примера 7, уже не проверяли последующих постулатов. В отношении предшествующих постулатов автор пользуется vacuously: в прим. 3a для пост. 1; в прим. 6 для пост. 4 и 5; в прим. 8 для пост. 4, 5 и 7; в прим. 10 для пост. 4, 5, 7, 9; в прим. 15 для пост. 4 — 14; в прим. 16 для пост. 9, 11 — 14; в прим. 17 для пост. 4 — 16; в прим. 18 для пост. 4—14 и 16; в прим. $E_1$ для всех общих законов, а также и для всех последующих постулатов; в прим. $E_2$ для пост. 6 — 11; 13 — 18; в прим. $E_3$ для пост. 4 — 18; в прим. $E_4$ для пост. 12 — 14; в прим. $E_7$ для пост. 15 — 18.

Мы приведем лишь несколько примеров.

„*Пример 16*. Пусть $K$ будет класс, содержащий следующие числа:

1) семь первоначальных чисел: $A, B, C, D, X, Y, Z$;

2) все произведения этих чисел по два, *исключая* $XY$;

3) все произведения этих чисел по три, *исключая* $ABC, AXY, BXY, CXY$ и $XYZ$;

4) все произведения этих чисел по четыре, *исключая* $ABCX, ABCY, ABCZ, ABDX, ABXY, ACDY, ACXY, AXYZ, BCXY, BXYZ$ и $CXYZ$;

5) следующие произведения чисел по пяти: $ABCDZ, ABDXZ, ABDYZ, ACDXZ, ACDYZ, ADXYZ, BCDXY, BCDXZ, BCDYZ, BDXYZ, CDXYZ$;

6) следующие производения чисел по шести: $ABCDXZ, ABCDYZ, ABDXYZ, ACDXYZ, BCDXYZ$;

7) число $ABCDXYZ$;

и пусть $R$ есть отношение „множитель“.

Здесь все отрезки пустые, исключая $[XY]$, который содержит $D$, и все треугольники пустые, исключая $[ABC]$, который содержит $D$. Все тетраэдры пустые, исключая $[ABDX]$, $[ABCX]$, $[ABXY]$, $[ACDY]$, $[ABCY]$ и $[ACXY]$, каждый из которых содержит $Z$. Постулат 16 не удовлетворяется, так как $Z$ лежит по обе стороны плоскости $ABC$“ (сн. 552—553).

Вот и все. Здесь, как уже указано, постулаты 9, 11 — 14 удовлетворяются vacuously, но постулат 10 просто не удовлетворяется, даже с точки зрения автора, хотя автор этого и не замечает.

В плоскости $ABC$ есть точка $D$. Прямые $AB$ и $CD$ общей точки не имеют, так как все отрезки, кроме $[XY]$, пустые. По опр. 15 прямые $AB$ и $CD$ параллельны, так как постулаты 6 — 8 удовлетворяются (ср. пример 18). *Постулат 10 не удовлетворяется,* так как точка $D$ лежит внутри треугольника $ABC$.

Пример $E$ 1 представляет повторение $K_1$ О. Веблена.

Впечатление неожиданности производит пример 1.

Пример 1. Пусть $K$ будет класс, состоящий из трех особ: человека $A$, его отца $B$ и его деда $C$. Пусть $R$ будет отношение „сын". Тогда $ARB$ и $BRC$ истинны, в то время как $ARC$ ложно, так что постулат 1 не удовлетворяется. Так как в этой системе есть только одна „точка", именно $A$, то все другие общие законы 2—18 удовлетворены vacuously, т. е. условия, при которых эти постулаты становятся действующими, не выполнены (сн. 549).

Мы можем предложить пример еще более неожиданный.

Пусть класс $K$ состоит из трех об'ектов: волка $A$, козы $B$ и капусты $C$, и пусть $R$ = „ест". Тогда $ARB$ и $BRC$ истинны, а $ARC$ ложно.

Мы полагаем, что пример Э. В. Гентингтона, как и наш, доказывает только то, что не всякое отношение транзитивно, но не больше.

Заметим по поводу рассмотренной системы постулатов, что она наиболее громоздкая из известных нам, за исключением системы М. Гейгера, несмотря на то, что в ней всего два основных понятия, как и в системе О. Веблена. Только постулатов о параллельных пять. Подводя итоги, видим, что *Э. В. Гентингтон доказал совместность своих постулатов; независимость, даже порядковая, не доказана; вопрос о достаточности остается открытым.*

---

## § 6. Заключение.

Прежде чем перейти к общим выводам, мне хотелось бы коснуться еще затронутого В. Ф. Каганом вопроса о минимуме требований в постулатах. Вопрос о минимуме можно рассматривать с двух сторон.

Во-первых, можно стремиться к минимуму утверждений. Тогда оказывается, что аксиома $I_3$ Д. Гильберта сложна и легко разбивается на две. Также сложны акс. VIII О. Веблена, пост. I В. Ф. Кагана и многие другие. Так как постулат есть недоказанная теорема, то принимая во внимание классическую форму теоремы, можно сказать, что минимальное количество утверждений во всяком постулате два: одно в условии и другое в заключении. Постулаты, состоящие из одного утверждения, в роде того, что существуют по крайней мере две различных точки или существует по крайней мере одна точка являются излишними, так как неизбежно повторяются в условиях последующих постулатов.

Мы полагаем, что минимум утверждений можно считать обязательным. Этот минимум утверждений можно назвать минимумом содержания.

Во-вторых, можно стремиться к тому, чтобы утверждения постулата касались наименьшего числа об'ектов. Например, аксиома XII О. Веблена относится ко всякой плоскости и ко всякой прямой в плоскости, а допущение $P_0$ Р. Л. Мура к одной плоскости и одной прямой в ней. Судя по примеру Р. Л. Мура, такой минимум ведет к увеличению числа аксиом, что вряд ли желательно. Впрочем, имеющиеся примеры не позволяют сделать решительного заключения, об обязательности или даже возможности такого минимума. Этот минимум в отличие от первого можно назвать минимумом об'ема.

Подводя общий итог, мы видим, что авторы рассмотренных работ поставленной себе цели не достигли отчасти, конечно, вследствие того, что вопросы, встретившиеся им, еще не были решены и стали ясны теперь именно благодаря их работам. *Мы еще не имеем системы постулатов необходимых и достаточных для построения евклидовой геометрии*, необходимых, как раз'яснено выше, в пределах каждой выставленной системы. Построение такой системы, являющейся сейчас очередной и насущной задачей, дело будущего. Мы не разделяем пессимизма Ф. Шура [1]) относительно возможности построения системы абсолютно независимых постулатов. П. Герц [2]) доказал, правда для предложений вида $a \rightarrow b$, что для замкнутой системы таких предложений всегда имеется по крайней мере одна система независимых аксиом.

Тем не менее рассмотренные нами работы имеют большое значение, так как они расчистили путь для будущих исследователей. Поставив себе в нашем обзоре узкие рамки, мы не могли указать на многие достоинства этих работ. Авторы подходили к решению задачи с различных точек зрения, в их работы вложено столько труда и искусства, что эти работы являются для каждого занимающегося основаниями геометрии прекрасной школой. Особенно в этом отношении ценна работа В. Ф. Кагана, единственная, дающая полное развитие системы и наиболее удачная в отношении независимости постулатов.

9 января 1926 г.

---

*Übersicht.* Es werden die der Begründug der Euklidishen Geometrie gewidmeten Werke von O. Veblen, W. Kagan, R. Moore und E. Huntington betrachtet. Der Verfasser beschäftigt sich nur mit Grundprämissen dieser Systeme von Axiomen: Grundbegriffen, Gruddefinitionen und Postulaten. Die Frage über die Unabhängigkiet der Postulate bespechend, zeigt er im § 1, die Benutzung von „vacuoulsy“ sei bei den Unabhängigkeitsbeweisen unerlaubt. Im § 2 wird gezeigt, dass man zum Hinreichendheitsbeweise eines Axiomsystems die Entwickelung des Systems mit dem Beweise des Hinreichendheitstheorems, wie es E. Huntingten nennt, abschliéssen kann. Was die Grundbegriffe

---

[1]) l. c. Vorwort, s. VII.

[2]) P. Hertz. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. Math. Ann. Bd 87, S. 246 — 269, § 9.

anlangt, beweist keiner der genannten vier Autoren deren Nichtreducierbarkeit. W. Kagan's Versuch die Unabhängigkeit seiner Grunddefinitionen zu beweisen ist nicht gelungen. Die Verträglichkeit der Postulaten beweisen nur W. Kagan und E. Huntington. Absolute Unabhängigkeit der Postulaten hat keiner von vier Autoren erreicht. Ordinal unabhängig sind nur Systeme von W. Kagan und R. Moore. W. Kagan's System ist nicht hinreichend, die Frage über Hinreichendheit dreier übrigen bleibt offen.

Wir besitzen also noch kein Axiomsiystem der Euklidischen Geometrie das sämmtlichen drei Forderungen: der Vertäglichkeit, absoluter Unabhängigkeit und Hinreichendheit genüge.