Метод интегрирования дифференциального уравнения с частными производными второго порядка по двум переменным независимым приведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений Pfaff'a.

Ц. Руссьян.

ПЕРВАЯ СТАТЬЯ.

Обычно применяемый метод интегрирования дифференциального уравнения с частными производными второго порядка по двум переменным независимым

$$F\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0$$

есть метод характеристик *).

Я намерен изложить метод интегрирования, представляющий обобщение метода Lagrange'а отыскания полного интеграла дифференциального уравнения первого порядка путем интегрирования одного дифференциального уравнения в полных дифференциалах. В данном случае одно дифференциальное уравнение заменяется системой трех и вообще $2n-1$ уравнений этого вида.

Этот метод дает не только все результаты, полученные методом характеристик, но и новые, которые не могут быть получены этим последним; он дает также результаты, полученные J. König'ом **), применявшим к уравнению второго порядка метод Jacobi приведения интегрирования нелинейного уравнения первого порядка к интегрированию уравнения линейного.

§ 1.

Мы полагаем, что данное дифференциальное уравнение заключает хоть одну из вторых производных r, t, так как противный случай можно было бы свести к этому линейным преобразованием переменных независимых. Мы предположим далее, что оно разрешено относительно r и имеет вид

$$r = \theta\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

---

*) См., напр., Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d ı second ordre.

**) Mathematische Annalen, Bd XXIV.

Если $z=f(x,y)$ есть его интеграл, то система трех Pfaff'овых уравнений

$$\Omega_1=dz-pdx-qdy=0,\ \Omega_2=dp-\theta dx-sdy=0,\ \Omega_3=dq-sdx-tdy=0 \quad (\mathrm{I}')$$

с семью переменными x, y, z, p, q, s, t интегрируется пятью интегралами

$$z=f\ (x,y),\ p=\frac{\partial f}{\partial x},\ q=\frac{\partial f}{\partial y},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Обратно, если система пяти уравнений

$$u_i\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t,)=0 \quad i=1\ldots5$$

есть система интегралов Pfaff'овой системы (I') и разрешима относительно z, p, q, s, t, то определенная из них функция $z=f(x,y)$ есть интеграл дифференциального уравнения (I). Таким образом, интегрирование данного дифференциального уравнения второго порядка (I) сводится к интегрированию Pfaff'овой системы (I') пятью интегралами, разрешимыми относительно z, p, q, s, t.

Если $z=f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I), т. е. если он заключает пять произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и так, что уравнения

$z=f\ (x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5),\ p=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ q=\dfrac{\partial f}{\partial y},\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ разрешимы

относительно них, то полученные уравнения $u_i\,(x, y, z, p, q, s, t)=c_i$ $i=1\ldots5$ представляют систему пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I'). Обратно, если система пяти уравнений $u_i\,(x\ldots t)=c_i$ $i=1\ldots5$ есть система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I') и если они разрешимы относительно z, p, q, s, t, то определенная из них функция $z=f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I). Займемся отысканием его.

Займемся для этого отысканием системы пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I').

Она имеет следующие свойства:

Pfaff'ова система (I') интегрируется не менее, чем пятью независимыми интегралами. В самом деле, из формы ее следует, что z, p, q суть функции x, y. Подставляя выражение $q=q\,(x,y)$ в последнее уравнение системы, получим

$$\left(s-\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx+\left(t-\frac{\partial q}{\partial y}\right)dy=0$$

уравнение в четырех переменных x, y, s, t, которое интегрируется, очевидно, не менее, чем двумя интегралами, откуда и следует утверждение.

Pfaff'ова система (I') не допускает интегрируемой комбинации. Иначе мы имели-бы, что

$$\lambda_1\,\Omega_1+\lambda_2\,\Omega_2+\lambda_3\,\Omega_3=du$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не все нули и функция u не заключает переменных s, t; поэтому, в силу соотношений

$$\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial z}, \ \lambda_2 = \frac{\partial u}{\partial p}, \ \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial q}$$

мы имели бы, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial p} s + \frac{\partial u}{\partial q} t = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \lambda_2 = 0, \ \frac{\partial u}{\partial q} = \lambda_3 = 0,$$

а поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Omega_1 = du(x, y, z),$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} p = -\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial z} q = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

и снова следовало бы, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda_1 = 0.$$

Итак, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, что невозможно.

Пусть теперь система уравнений $u_i(x, y, z, p, q, s, t) = c_i \ \ i = 1 \dots 5$ будет система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I'). Пусть $u_1(x, z, p, q, s, t)$ будет какая-либо из функций $u_i \ \ i = 1 \dots 5$ так, что по предыдущему уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \ du_1 = 0$$

линейно независимы. Можно среди остальных функций $u_j \ \ i = 2 \dots 5$ найти функцию, напр., u_2 такую, что уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \ du_1 = 0, \ du_2 = 0$$

также линейно независимы.

Это утверждение есть частный случай общей теоремы: если Pfaff'ова система k независимых уравнений $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_k = 0$ интегрируется не менее, чем $m > k$ независимыми уравнениями и если, с другой стороны, имеем не менее, чем $m - 1$ независимых функций

$$u_1 \dots \ \ u_{m-1} \dots$$

таких, что $m - k - 1$ из них, напр., $n_1 \dots u_{m-k-1}$ таковы, что уравнения

$$\Omega_1 = 0 \dots \ \ \Omega_k = 0 \ \ du_1 = 0 \dots \ \ du_{m-k-1} = 0$$

линейно независимы, то среди остальных функций $u_{m-k} \dots$ можно найти такую функцию u, что m уравнений

$$\Omega_1 = 0 \dots \Omega_k = 0, \ du_1 = 0 \dots du_{m-k-1} = 0, \ du = 0$$

снова линейно независимы.

В самом деле, в противном случае, выбрав какие-либо k функции u из остальных, напр., $u_{m-k} \dots u_{m-1}$, мы имели бы, что

$$du_s = \lambda_s' \, du_1 + \dots + \lambda_s^{m-k-1} \, du_{m-k-1} + \sum_{1}^{k} j \mu_s^j \, \Omega_j$$

$$s = m - k, \dots m - 1.$$

Определитель $\triangle$ k-ой степени, составленный из коэффициентов μ_s^j, отличен от нуля, иначе мы имели бы одну или несколько зависимостей вида

$$\sum_{1}^{m-1} \alpha k_\alpha du_\alpha = 0,$$

где не все коэффициенты k_α нули, что невозможно, так как функции u независимы между собой.

Если же $\triangle$ отличен от нуля, то из написанных соотношений следовало бы, что

$$\Omega_j = \sum_{1}^{m-1} \alpha \lambda_j^\alpha \, du_\alpha$$

что невозможно, так как рассматриваемая Pfaff'ова система интегрируется не менее, чем m полными интегралами. Поэтому среди остальных функций u есть такая функция u, что уравнения

$$\Omega_1 = 0 \dots \quad \Omega_k = 0, \quad du_1 = 0 \dots \quad du_{m-k-1} = 0, \quad du = 0$$

линейно независимы.

Полагая $k = 3$, $m = 5$ и что функции $u_1 \dots u_5$ — рассматриваемые нами, получаем наше утверждение.

Пусть функция u_2 такова, что уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \ du_1 = 0, \ du_2 = 0$$

линейно независимы. Найдем необходимое и достаточное для этого условие. Оно состоит в том, чтобы не все определители пятой степени матриссы

$$\begin{matrix}
-p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\vartheta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t}
\end{matrix}$$

были равны нулю тождественно. Эту матриссу можно преобразовать в эквивалентную. Умножим элементы 3-й, 4-й и 5-й колонн соответственно на p, ϑ, s и прибавим к соответствующим элементам первой колонны; умножим затем элементы тех же колонн сответственно на q, s, t и прибавим к элементам второй колонны. Получим эквивалентную матриссу

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\overline{d}u_1}{dx} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\overline{d}u_2}{dx} & \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{matrix}$$

где

$$\frac{\overline{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \theta\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\overline{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}.$$

Могут быть неравными нулю только те ее определители, которые заключают 3-ю, 4-ю и 5-ю колонны. Следовательно, искомое необходимое и достаточное условие, чтобы уравнения

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \quad du_1 = 0, \quad du_2 = 0$$

были линейно независимы, состоит в том, чтобы не все определители второй степени матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}u_1}{dx} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\overline{d}u_2}{dx} & \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{matrix} \qquad (A)$$

были равны нулю тождественно. Это условие будем называть условием (A).

Если Pfaff'ова система (I') должна быть проинтегрирована наименьшим числом пяти полных интегралов $u_i = c_i \ i = 1\ldots5$, то Pfaff'ова система пяти независимых уравнений

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad du_1 = 0, \quad du_2 = 0$$

должна быть сполна интегрируемой.

Необходимые и достаточные условия, чтобы система k независимых уравнений Pfaff'a

$$\sum_1^n i X_i^j \quad dx_i = 0 \quad j = 1\ldots k$$

с n переменными $x_1 \ldots x_n$ была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы были равны нулю тождественно определители $k+2$-й степени

$$\begin{vmatrix} X'_\alpha & \ldots\ldots\ldots & X'_\beta \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ X^k_\alpha & \ldots\ldots\ldots & X^k_\beta \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \\ X^j_\alpha & \ldots\ldots\ldots & X^j_\beta \end{vmatrix} \ ^{*)} \qquad \begin{matrix} j = 1\ldots k \\ \alpha\ldots\beta = 1\ldots n. \end{matrix}$$

*) Ц. Руссьян, Записки Новороссийского Университета, 1898 г.

В данном случае они имеют вид:

$$
\begin{vmatrix}
-p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\
-p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix}
-p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\
-\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix}
-p & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p} & \frac{\partial u_1}{\partial q} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p} & \frac{\partial u_2}{\partial q} & \frac{\partial n_2}{\partial s} & \frac{\partial n_2}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\
-s & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0.
$$

Первое условие есть тождество при произвольных функциях u_1, u_2. Второе и третье имеют вид

$$
\frac{\bar{d}u_2}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\bar{d}u_2}{dy}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} + \frac{\partial u_2}{\partial s}\frac{\bar{d}(\theta u_1)}{\bar{d}(yt)} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx} + \frac{\bar{d}(\theta u_1)}{\bar{d}(ys)}\right) = 0,
$$

$$
\frac{\bar{d}(u_2 u_1)}{\bar{d}(xs)} + \frac{\bar{d}(u_2 u_1)}{\bar{d}(yt)} = 0,
$$

где

$$
\frac{\bar{d}(uv)}{\bar{d}(x\alpha)} = \frac{\bar{d}u}{dx}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\bar{d}v}{dx}, \quad \frac{\bar{d}(uv)}{\bar{d}(y\alpha)} = \frac{\bar{d}u}{dy}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\bar{d}v}{dy}.
$$

Таким образом функция u_2 должна удовлетворять системе линейных уравнений

$$
\frac{\bar{d}f}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\bar{d}f}{dy}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\bar{d}(\theta u_1)}{\bar{d}(yt)} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx} + \frac{\bar{d}(\theta u_1)}{\bar{d}(ys)}\right) = 0,
$$

$$\frac{\overline{d}\,(fu_1)}{d\,(xs)}+\frac{\overline{d}\,(fu_1)}{d\,(yt)}=0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\text{II})$$

при чем уравнения $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$, $\Omega_3=0$, $du_1=0$, $du_2=0$ линейно независимо. Но легко видеть из формы этих уравнений в виде приравненных нулю определителей, что и все функции u_i $i=1\ldots5$ должны удовлетворять этим условиям.

Рассмотрим теперь необходимые условия, которым должна удовлетворять только функция u_1.

Могут быть два случая: система (II) заключает два независимых уравнения, или одно уравнение есть следствие другого.

В первом случае она, как имеющая пять независимых решений u_i $i=1\ldots5$, должна быть полной. Это приводит к условиям, которым должна удовлетворять функция u_1.

Если же одно из уравнений (II) есть следствие другого, это опять приводит к условиям, которым должна удовлетворять функция u_1. Этими условиями мы займемся ниже в связи с интегрированием данного дифференциального уравнения (I).

Теперь можем приступить к решению поставленного выше вопроса об определении системы пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I').

Пусть u_1 уже удовлетворяет упомянутым только что условиям. Тогда система (II) имеет не менее пяти независимых решений, среди которых находится и функция u_1. На основании вышедоказанной общей теоремы (стр. 115) среди остальных решений есть такое, напр., u_2, что уравнения системы

$$\Omega_1=0,\ \Omega_2=0,\ \Omega_3=0,\ du_1=0,\ du_2=0$$

линейно независимы, так что u_1, u_2 удовлетворяют условию (A). Так как функции u_1, u_2 удовлетворяют системе (II), она сполна интегрируема. Функции u_3, u_4, u_5 системы пяти полных интегралов $u_i=c_i$ $i=1\ldots5$ Pfaff'овой системы (I') определяются, как независимые решения, отличные от u_1, u_2 полной системы двух линейных уравнений, соответствующих системе Pfaff'a

$$\Omega_1=0,\ \Omega_2=0,\ \Omega_3=0,\ du_1=0,\ du_2=0$$

Она имеет вид, как легко видеть, приравненных нулю двух независимых определителей матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{d}f}{dx} & \dfrac{\overline{d}f}{dy} & \dfrac{\partial f}{\partial s} & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\overline{d}u_1}{dx} & \dfrac{\overline{d}u_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\overline{d}u_2}{dx} & \dfrac{\overline{d}u_2}{dy} & \dfrac{\partial u_2}{\partial s} & \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{matrix} \qquad (B)$$

Эту полную систему будем называть системой (B).

Итак, система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I') найдена, отвлекаясь на время от упомянутых условий для функции u_1. При чем, если два уравнения системы (II) независимы, она эквивалентна системе (B), как имеющая те же независимые решения. В этом случае система пяти полных интегралов, заключающая уравнение $u_1 = c_1$, — единственна.

Во втором случае, если одно уравнение системы (II) есть следствие другого, Pfaff'ова система (I') имеет бесчисленное множество систем полных интегралов, заключающих уравнение $u_1 = c_1$.

В самом деле, пусть $u_i = c_i$ $(i = 1 \ldots 5)$ есть одна система полных интегралов, определенных, как выше указано. Функции u_i $i = 1 \ldots 5$ суть решения единственного уравнения системы (II). Пусть u_6 будет последнее его решение, независимое от u_i $(i = 1 \ldots 5)$.

Пусть $\varphi(u_1 \ldots u_5; u_6)$ будет произвольная функция решений $u_1 \ldots u_6$, подчиненная единственному условию, заключать решение u_6. Если она с функцией u_1 удовлетворяет условию (A), ее можно принять за функцию v_2, аналогичную u_2, и, поступая, как выше, найдем систему пяти полных интегралов $u_1 = c_1$ $v_j = \Gamma_j$ $(j = 2 \ldots 4)$ Pfaff'овой системы (I'), но отличную от системы $u_i = c_i$ $(i = 1 \ldots 5)$, так как из последней не следует, чтобы $v_2 = \varphi(c_1 \ldots c_5; u_6)$ было постоянным.

Если же функция φ не удовлетворяет условию (A), так что все определители матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{d}u_1}{dx} & \dfrac{\overline{d}u_1}{\overline{d}y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\overline{d}v_2}{dx} & \dfrac{\overline{d}v_2}{dy} & \dfrac{\partial v_2}{\partial s} & \dfrac{\partial v_2}{\partial t} \end{matrix} \qquad (A)$$

нули тождественно, функция $u_2 + \varphi(u_1 \ldots u_5;\ u_6)$ ему, очевидно, удовлетворяет и может быть взята за функцию, аналогичную u_2, и мы получим систему пяти полных интегралов, отличную от системы $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$.

Таким образом, мы имеем бесчисленное множество функций $\Psi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$, которые можем брать за решения аналогичные u_2.

Если предположим, что функции Ψ заключают все решения u_i $i = 1 \ldots 6$, получим бесчисленное множество независимых между собой систем по пяти интегралов Pfaff'овой системы (I'):

$$u_1 = c_1,\ \Psi_1 = c_2,\ v_3 = c_3,\ v_4 = c_4,\ v_5 = c_5;$$

$$u_1 = c_1,\ \Psi_2 = \Gamma_2.\ w_3 = \Gamma_3,\ w_4 = \Gamma_4,\ w_5 = \Gamma_5;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

так как, напр., Ψ_1 не есть функция от u_1, Ψ_2, w_3, w_4, w_5 только.

Необходимое и достаточное условие, чтобы имел место этот второй случай, состоит в том, чтобы были равны нулю тождественно определители матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)}, & \dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)}, & -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}+\dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}, & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dy} \end{matrix} \quad (C),$$

составленной из коэффициентов уравнений системы (II). Если обозначим через $\triangle$, A, B, B_1, C определители ее

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial s}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2$$

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} \\ -\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}+\dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right), & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} \\ -\dfrac{\overline{d}u_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx}+\dfrac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & -\dfrac{\overline{d}u_1}{dy} \end{vmatrix},$$

легко убедиться, что $B \equiv B_1$, $A \equiv \triangle\dfrac{\overline{d}\theta}{dy} + B\dfrac{\partial\theta}{\partial s} + C\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$.

§ 2.

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании Pfaff'овой системы (I') в связи с интегрированием данного дифференциального уравнения (I). Здесь могут представиться три случая:

$$1)\ \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0,$$

$$2)\ \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \equiv 0,$$

но не все элементы равны нулю;

$$3)\ \frac{\partial u_{1,2}}{\partial s} \equiv \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} \equiv 0.$$

В этой статье мы рассмотрим первый и второй случай. Третьему мы посвятим особую статью.

Пусть $\dfrac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(st)} \neq 0$. В этом случае полная система (B) имеет вид

$$\frac{\overline{d}(fu_1 u_2)}{d(x,s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{d}f}{dx}, & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \dfrac{\partial t}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_1}{dx}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_2}{dx}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial n_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0, \quad \frac{\overline{d}(fu_1 u_2)}{d(y,s,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{d}f}{dy}, & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_1}{dy}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \dfrac{\overline{d}u_2}{dy}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0;$$

Она разрешима относительно $\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{dy}$, а потому ее независимые решения u_i $i = 1 \ldots 5$ независимы относительно z, p, q, s, t; система пяти полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$ Pfaff'овой системы (I') разрешима относительно z, p, q, s, t и определенная из них функция $z = f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I)).

Этот случай распадается в свою очередь на два в зависимости от того, будут ли уравнения системы (II) независимы между собой, или одно есть следствие другого. В первом случае, Pfaff'ова система (I') имеет одну только систему полных интегралов, заключающую уравнение $u_1(x \ldots t) = c_1$, и поэтому данное дифференциальное уравнение второго порядка (I) имеет один только полный интеграл, удовлетворяющий другому дифференциальному уравнению второго порядка

$$u_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t) = c_1.$$

Во втором случае Pfaff'ова система (I') имеет бесчисленное множество различных систем полных интегралов, заключающих уравнение $u_1(x \ldots t) = c_1$, и, следовательно, данное дифференциальное уравнение второго порядка (I) имеет бесчисленное множество полных интегралов, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$u_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t) = c_1.$$

Рассмотрим первый случай.

В этом случае функции u_i $i = 1 \ldots 5$ суть все независимые решения системы (II), которая должна быть полной, что даст условия для функции u_1.

Найдем их. Так как в этом случае система (II) эквивалентна системе (B), разрешимой относительно $\frac{\overline{df}}{dx}, \frac{\overline{df}}{dy}$, она сама должна быть разрешимой относительно $\frac{\overline{df}}{dx}, \frac{\overline{df}}{dy}$, а потому $\triangle \neq 0$, т. е. u_1 должна удовлетворять неравенству

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 \neq 0.$$

Разрешив систему (II), получим:

$$\triangle\frac{\overline{df}}{dx} + A\frac{\partial f}{\partial s} + B\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$\triangle\frac{\overline{df}}{dy} + B\frac{\partial f}{\partial s} + C\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Чтобы она была полной, необходимо и достаточно, чтобы ей соответствующая Pfaff'ова система пяти уравнений была сполна интегрируемой.

Эта последняя имеет вид:

$$\Omega_1 = dz - p dx - q\,dy = 0, \quad \Omega_2 = dp - \theta dx - s dy = 0,$$

$$\Omega_3 = dq - s dx - t\,dy = 0, \quad \triangle\, ds - A\,dx - B dy = 0,$$

$$\triangle\, dt - B dx - C dy = 0.$$

Необходимое и достаточное условие, чтобы она была сполна интегрируемой, состоит в том, чтобы были равны нулю тождественно определители

$$\begin{vmatrix} -p, & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta, & -s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s, & -t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -A, & -B & 0 & 0 & 0 & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & \triangle \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ a & b & \dots & \dots & \dots & c & d \end{vmatrix}$$

где $a, b \dots c, d$ суть коэффициенты при $dx, dy, \dots . ds, dt$ ее уравнений. Употребляя то же преобразование, которое мы употребляли при выводе условия (A) (стр. 116), этим условиям можно дать вид

$$\begin{vmatrix} -A, & -B, & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Если a, b, c, d суть коэффициенты при dx, dy, ds, dt первого и третьего уравнений, эти условия суть тождества. Если a, b, c, d суть коэффициенты второго уравнения, соответствующее условие есть тождество в силу соотношения

$$A \equiv \triangle \frac{\overline{d\theta}}{dy} + B\frac{\partial\theta}{\partial s} + C\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot$$

Остаются таким образом только два условия

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} -A, & -B & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ -A & -B & \triangle & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} -A, & -B & \triangle & 0 \\ -B, & -C & 0 & \triangle \\ \frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{dy} & \frac{\partial}{ds} & \frac{\partial}{dt} \\ -B & -C & 0 & \triangle \end{vmatrix} = 0$$

Найдем их вид и покажем, что они сводятся к одному. Для этого выведем свойство определителей α, β, где функция $u_1(x, y \dots t)$ произвольна. Разлагая их и пользуясь тем, что

$$\triangle \frac{\bar{d} u_1}{dx} + A\frac{\partial u_1}{\partial s} + B\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv 0, \quad \triangle\frac{\bar{d}u_1}{dy} + B\frac{\partial u_1}{\partial s} + C\frac{\partial u_1}{\partial t}\equiv 0$$

при произвольном виде функции u_1, имеем, что

$$-\alpha.\frac{\partial u_1}{\partial s} \equiv \triangle\Big[\triangle\Big(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\Big) - B\Big(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(yt)}\Big) -$$

$$-\frac{\bar{d}u_1}{dx}\Big(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dy} + B\frac{\partial\triangle}{\partial s} + C\frac{\partial\triangle}{\partial t}\Big) - \frac{\partial u_1}{\partial s}\Big(\triangle\frac{\bar{d}A}{dy} + B\frac{\partial A}{\partial s} + C\frac{\partial A}{\partial t}\Big) -$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big(\triangle\frac{\bar{d}B}{dy} + B\frac{\partial B}{\partial s} + C\frac{\partial B}{\partial t}\Big)\Big],$$

$$\beta\frac{\partial u_1}{\partial t} = \triangle\Big[\triangle\Big(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\Big) - B\Big(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(yt)}\Big) - \frac{\bar{d}u_1}{dy}\Big(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dx} +$$

$$+A\frac{\partial\triangle}{\partial s} + B\frac{\partial\triangle}{\partial t}\Big) - \frac{\partial u_1}{\partial s}\Big(\triangle\frac{\bar{d}B}{dx} + A\frac{\partial B}{\partial s} + B\frac{\partial B}{\partial t}\Big) - \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big(\triangle\frac{\bar{d}C}{dx} +$$

$$+A\frac{\partial C}{\partial s} + B\frac{\partial C}{\partial t}\Big)\Big].$$

или проще: обозначая через $\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}$ операции

$$\triangle\frac{\bar{d}}{dx} + A\frac{\partial}{\partial s} + B\frac{\partial}{\partial t}, \quad \triangle\frac{\bar{d}}{dy} + B\frac{\partial}{\partial s} + C\frac{\partial}{\partial t},$$

имеем, что

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial s} \equiv \triangle\Big[\varDelta\Big(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\Big) - B\Big(\frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(yt)}\Big)$$

$$-\frac{\bar{d}u_1}{dx}\frac{\delta\varDelta}{\delta y} - \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta A}{\delta y} - \frac{\partial u_1}{dt}\frac{\delta B}{\delta y}\Big],$$

$$\beta\frac{\partial u_1}{\delta t} \equiv \triangle\Big[\varDelta\Big(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\Big) - B\Big(\frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\varDelta u_1)}{d(yt)}\Big)$$

$$-\frac{\bar{d}u_1}{dy}\frac{\delta\varDelta}{\delta x} - \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta B}{\delta x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\delta C}{\delta x}\Big].$$

Можно показать, что

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}\frac{\delta\varDelta}{\delta y} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta A}{\delta y} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\delta B}{\delta y} \equiv \frac{\bar{d}u_1}{dy}\frac{\delta\varDelta}{\delta x} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\delta B}{\delta x} + \frac{\partial u_1}{\partial l}\frac{\delta C}{\delta x}$$

и что, следовательно,

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial s} \equiv \beta\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Именно, так как

$$\frac{\delta u_1}{\delta x} \equiv 0, \quad \frac{\delta u_1}{\delta y} \equiv 0,$$

то

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u_1}{\delta y}\right) \equiv 0\,, \quad \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x}\right) \equiv 0.$$

Заменяя в первом тождестве $\frac{\delta u_1}{\delta y}$ его выражением, получим

$$\frac{\delta \Delta}{\delta x}\frac{\bar{d} u_1}{dy} + \frac{\delta B}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\delta C}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\triangle \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\bar{d} u_1}{d_y}\right) - B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) - C\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right).$$

Переставляя во второй части порядок дифференцирования и помня, что

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dy}\right) \equiv \frac{\bar{d}}{\delta y}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dx}\right) - \frac{\bar{d}\theta}{dy}\frac{\partial u_1}{\partial p},$$

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dx}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial p} - \frac{\partial u_1}{\partial q}, \quad \frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dx}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial p},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p}, \quad \frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial q},$$

$$A \equiv \triangle\frac{\bar{d}\theta}{dy} + B\frac{\partial\theta}{\partial s} + C\frac{\partial\theta}{\partial t},$$

дадим первому тождеству вид

$$\frac{\delta \Delta}{\delta x}\frac{\bar{d} u_1}{dy} + \frac{\delta B}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\delta C}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\triangle \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\bar{d} u_1}{dx}\right) - A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) - B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right).$$

Второе же тождество по замене $\frac{\delta u_1}{\delta x}$ его выражением имеет вид

$$\frac{\delta \triangle}{\delta y}\ \frac{\bar{d} u_1}{dx} + \frac{\delta A}{\delta y}\ \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\delta B}{\delta y}\ \frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\triangle \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\bar{d} u_1}{ux}\right) - A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) - B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right).$$

Откуда, сравнивая эти тождества, получим, что

$$\frac{\bar{d} u_1}{\alpha x}\ \frac{\delta \triangle}{\delta y} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\ \frac{\delta A}{\delta y} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\ \frac{\delta B}{\delta y} \equiv \frac{\bar{d} u_1}{dy}\ \frac{\delta \triangle}{\delta x} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\ \frac{\delta B}{\delta x} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\ \frac{\delta C}{\delta x} \text{ ч. и т. д.}$$

Итак,

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial s} \equiv \beta\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Откуда следует, что определители α, β—полиномы относительно производных, имеют вид

$$-\alpha \equiv \omega\frac{\partial u_1}{\partial t}\,, \quad \beta \equiv \omega\frac{\partial n}{\partial s}.$$

Поэтому условия $\alpha = 0$, $\beta = 0$ сводятся к

$$\omega\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0\,, \quad \omega\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0.$$

Но так как $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ не нули одновременно, иначе было бы, что

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} = 0\,,$$

находим, что оба условия сводятся к одному

$$\omega = 0.$$

Это и есть искомое условие для функции $u_1\ (x \ldots t)$.

Оно в развернутом виде есть

$$\triangle\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xt)}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{dx}\left(\triangle \frac{\bar{d}\triangle}{dy} + B\frac{\partial\triangle}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + C\frac{\partial\triangle}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\triangle\frac{\bar{d}A}{dy} + B\frac{\partial A}{\partial s} + C\frac{\partial A}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\triangle\frac{\bar{d}B}{dy} + B\frac{\partial B}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + C\frac{\partial B}{\partial t}\right) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

или же

$$\triangle\left(\frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(Bu_1)}{d(yt)}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(\triangle u_1)}{d(yt)}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{\partial y}\left(\triangle\frac{\bar{d}\triangle}{dx} + A\frac{\partial\triangle}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + B\frac{\partial\triangle}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\triangle\frac{\bar{d}B}{dx} + A\frac{\partial B}{\partial s} + B\frac{\partial B}{\partial t}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\triangle\frac{\bar{d}C}{dx} + \right.$$

$$\left. + A\frac{\partial C}{\partial s} + B\frac{\partial C}{\partial t}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

по сокращении левых частей на $\frac{\partial n_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$. Это есть дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка, линейное относительно вторых производных *). Его порядок при решении данной задачи не понижается, так как оно заключает член

$$-\triangle\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\,.$$

Итак, полный интеграл данного дифференциального уравнения второго порядка (I) находится в этом случае следующим образом: ищется функция $u_1\ (x, y, z, p, q, s, t)$, как интеграл уравнения (III) такой, что $\triangle \neq 0$. Функции $u_2 \ldots u_5$ ищутся, как остальные независимые решения полной системы (II). Они независимы относительно z, p, q, s, t.

Решая уравнения $u_i = c_i \quad i = {}_1 \ldots {}_5$ относительно z, p, q, s, t, находим искомый полный интеграл $z = f\ (x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5)$ данного дифференциального уравнения (I) единственный, который удовлетворяет уравнению второго порядка

$$u_1\ (x\,y\,z\,p\,q\,s\,t) = c_1\,.$$

---

*) Дифференциональное уравнение второго порядка, которому должна удовлетворять функция $u_1(x \ldots t)$ найдено J. König'ом (l. c.) иным путем.

§ 3.

Полагая опять, что $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0$, рассмотрим второй случай, когда одно уравнение системы (II) есть следствие другого. В этом случае все определители матриссы (C) нули, а потому и

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 = 0\,.$$

Из этого условия следует, что $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$, иначе было бы, что и $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$, а, следовательно и $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \equiv 0$.

Если же $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$, то независимые определители матриссы (C), суть $\triangle$, B, C. Но так как

$$\triangle \frac{\overline{d}u_1}{dy} + B\frac{\partial u_1}{\partial s} + C\frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv 0,$$

то необходимое и достаточное условие, чтобы все определители матриссы (C) были нули тождественно, состоит в том, чтобы

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

$$C = \left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}(\theta u_1)}{(dys)}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\overline{d}u_1}{dy}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \;\ldots\ldots\; \text{(IV)}$$

— искомые условия для функции u_1.

Если λ, μ суть корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\xi - \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \;(a),$$

то дифференциальные уравнения (IV), которым должна удовлетворять функция u_1, имеют одну из двух форм

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,\quad \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \mu\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\overline{d}\theta}{dy}\,\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0 \;\ldots\; (\text{IV}_1),$$

или

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,\quad \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\overline{d}\theta}{dy}\,\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0 \;\ldots\; (\text{IV}_2).$$

Если функция $u_1\ (x, y, z, p, q, s, t)$ удовлетворяет какой-либо из этих линейных систем и если $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$, то функция $u_2\ (x, y, \ldots t)$ определяется, как решения уравнения

$$\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0,$$

к которому сводится система (II), так что $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0$, что всегда возможно, иначе дифференциальное уравнение $\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0$ было бы следствием предыдущего, что невозможно, так как оно не заключает $\frac{\partial f}{\delta x}$. Остальные функции u_3, u_4, u_5 определяются, как остальные независимые решения полной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\bar{d}(fu_1u_2)}{d(xst)} = 0\,, \quad \frac{\bar{d}(fu_1u_2)}{d(yst)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Если систему полных интегралов Pfaff'овой системы (II)

$$u_i\,(x, y, z, p, q, s, t = c_i \quad i = 1 \ldots 5$$

разрешим относительно z, p, q, s, t, функция $z = f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ есть полный интеграл данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий и дифференциальному уравнению

$$u_1\,(x\,y\,z\,p\,q\,s\,t) = c_1 \text{ *)}.$$

Таких полных интегралов есть в рассматриваемом случае бесчисленное множество, так как в этом случае есть бесчисленное множество различных систем пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I[1]), заключающих уравнение $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$, и таких, что

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} \neq 0.$$

Доказательство, аналогично приведенному в общем случае (стр. 120).

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1,$$

которому удовлетворяет бесчисленное множество различных полных интегралов данного (I) находится в инволюции с данным.

Функция $u_1(x, y, z, p, q, s, t)$, удовлетворяющая одной из систем (IV$_1$) (IV$_2$), обладает, очевидно, свойством, что du_1 есть интегрируемая комбинация соответствующей Pfaff'овой системы, которая имеет или вид

$$dy - \mu dx = 0, \quad dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - \theta dx - sdy = 0,$$

$$dq - sdx - tdy = 0, \quad ds + \lambda dt - \frac{\bar{d}\theta}{dy}\,dx = 0 \ \ldots\ldots \text{(V}_1\text{)},$$

или вид

$$dy - \lambda dx = 0, \quad dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - \theta dx - sdy = 0,$$

$$dq - sdx - tdy = 0, \quad ds + \mu dt - \frac{\bar{d}\theta}{dy}\,dx = 0 \ \ldots\ldots \text{(V}_2\text{)}$$

---

*) Этот метод интегрирования указан J. König'ом (l. c.).

и представляет дифференциальные уравнения характеристик второго порядка данного дифференциального уравнения (I), соответствующих корням μ, λ квадратного уравнения (a).

Если v_1, v_2 суть решения одной и той же системы (IV_1), или (IV_2), можно положить $u_1 = \varphi\,(v_1, v_2)$ лишь бы

$$\frac{\partial \varphi(v_1, v_2)}{\partial s} \neq 0.$$

Если $u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0\right)$ есть решение системы (IV_1), а v_1 системы (IV_2), можно принять функцию v_1, за u_2, лишь бы $\frac{\partial v_1}{\partial s} \neq 0$ и $\lambda \neq \mu$.

Мы не будем останавливаться долее на свойствах решений системы (IV), названных Goursat инвариантами (*l. c.*).

Изложенный способ определения полных интегралов данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющих дифференциальному уравнению $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$, находящемуся в инволюции с данным, т. е. которого левая часть $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t)$ удовлетворяет одной из систем (IV), состоит в том, чтобы найти решение u_2 дифференциального уравнения

$$\frac{\bar{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

такое, что $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(xs)} \neq 0$ и затем определить функции u_3, u_4, u_5, как независимые решения полной системы

$$\frac{\bar{d}(fu_1u_2)}{d(xst)} = 0\,, \quad \frac{\bar{d}(fu_1u_2)}{d(yst)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

Тогда система пяти уравнений $u_i = c_i \;\; i = 1 \ldots 5$, разрешимых относительно z, p, q, s, t есть полный интеграл Pfaff'овой системы (I^1) и дает искомый полный интеграл данного дифференциального уравнения (I). Но функции u_3, u_4, u_5 суть также решения уравнения

$$\frac{\bar{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\bar{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0 \;\; \text{(II) (стр. 119).}$$

Поэтому мы, зная функцию u_1, искали еще четыре решения этого уравнения, так что уравнения $u_i = c_i \; i = 1 \ldots 5$ представляют систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимую относительно z, p, q, s, t.

Мы решим теперь более обший вопрос, который даст и иные интегралы дифференциального уравнения (I), удовлетворяющие уравнению $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$: зная функцию u_1 и зная все решения дифференциального уравнения (II), найти систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимых относительно z, p, q, s, t, и заключающих уравнение $u_1 = c_1$.

Иначе, зная функцию u_1 и систему интегралов Pfaff'овой системы, соответствующей дифференциальному уравнению (II), найти систему интегралов Pfaff'овой системы (I'), разрешимую относительно z, p, q, s, t и заключающую уравнение $u_1 = c_1$.

Pfaff'ова система, сответствующая уравнению (II), имеет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\, dy - \frac{\partial u_1}{\partial t}\, dx = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial s}\, dz - \left(p\,\frac{\partial u_1}{\partial s} + q\,\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dx = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\, dp - \left(\theta\,\frac{\partial u_1}{\partial s} + s\,\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dx = 0,\ \ \frac{\partial u_1}{\partial s}\, dq - \left(s\,\frac{\partial u_1}{\partial s} + t\,\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) dx = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\, ds + \frac{du_1}{dx}\, dx = 0,\ \ \frac{\partial u_1}{\partial s}\, dt + \frac{du_1}{dy}\, dx = 0\,.$$

Но функция u_1 удолетворяет системе (IV_1), или (IV_2). Положим, что она удовлетворяет системе (IV_1) так, что $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda\, \frac{\partial u_1}{\partial s}$. Эта система имеет тогда вид:

$$dy\ \lambda dx = 0,\ dz\ (p + \lambda q)\, dy = 0,\ dp - (\theta + \lambda s)\, dx = 0\ .\ .\quad \text{(VI)}$$

$$dq - (s + \lambda t)\, dx = 0,\ \ ds + \frac{\dfrac{du_1}{dx}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial s}}\, dt = 0,\ \ dt + \frac{\dfrac{du_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial s}}\, dx = 0.$$

Пусть

$$y = y\,(x, x_0 \ldots t_0) \ldots t = t\,(x, x_0 \ldots t_0)$$

будет система полных интегралов ее, главная относительно $x = x_0$. Рассмотрим формулы преобразования

$$x = \alpha - \alpha_0 + x_0,\ \ y = y\,(x,\ x_0 \ldots t_0) \ldots t = t\,(x,\ x_0 \ldots t_0)$$

переменных $x, y \ldots t$ к новым $x_0 \ldots t_0$, где α есть параметр. Так как $u_1 = c_1$ есть один из интегралов системы (VI), то, очевидно, вследствие этих формул $u_1\,(x, y, \ldots t) = u_1\,(x_0 \ldots t_0)$.

Если, поэтому, переменные $x,\ y,\ z, \ldots t$ связаны условием $u_1\,(x \ldots t) = c_1$, новые переменные $x_0 \ldots t_0$ связаны условием $u_1(x_0 \ldots t_0) = c_1$.

Преобразуем этими формулами Pfaff'ову систему (I')

$$\Omega = dz - pdx - qdy = 0,\ \ \Omega_2 = dp - \theta dx - sdy = 0,$$

$$\Omega_3 = dq - sdx - tdy = 0,$$

в которую мы полагаем уже внесенной зависимость $u_1 = c_1$. Найдем вид преобразованной системы. Для этого найдем $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha}$.

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dz - pdx - qdy) = d\,\frac{dz}{d\alpha} - \frac{dp}{d\alpha}\, dx - pd\,\frac{dx}{d\alpha} -$$

$$-\frac{dq}{d\alpha}\, dy - qd\,\frac{dy}{d\alpha} = d\,(p + \lambda q) - (\theta + \lambda s)\, dx - (s + \lambda t)\, dy -$$

$$- qd\lambda = dp - \theta dx - sdy + \lambda\,(dq - sdx - tdy) = \Omega_2 + \lambda \Omega_3.$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dp - \theta dx - s dy) = d\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial s}{\partial \alpha}dy - s\frac{\partial y}{\partial \alpha} =$$

$$= d(\theta + \lambda s) - \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial y} + (p + \lambda q)\frac{\partial \theta}{\partial z} + (\theta + \lambda s)\frac{\partial \theta}{\partial p} + \right.$$

$$\left. + (s + \lambda t)\frac{\partial \theta}{\partial q} - \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy - s d\lambda,$$

или после простых преобразований

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial y}(dy - \lambda dx) + \frac{\partial \theta}{\partial z}\Omega_1 + \frac{\partial \theta}{\partial p}\Omega_2 + \frac{\partial \theta}{\partial q}\Omega_3 +$$

$$+ \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial \theta}{\partial s}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial \theta}{\partial t}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy + \frac{\partial \theta}{\partial s}ds + \frac{\partial \theta}{\partial t}dt + \lambda ds.$$

Заменяя $\frac{\partial \theta}{\partial s}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ выражениями $-(\lambda + \mu)$, $-\lambda\mu$, получим

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha} = \left(\frac{\overline{d\theta}}{dy} + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx} + \mu\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)(dy - \lambda dx) + \frac{\partial \theta}{\partial z}\Omega_1 + \frac{\partial \theta}{\partial p}\Omega_2 +$$

$$+ \frac{\partial \theta}{\partial q}\Omega_3 - \mu\left(\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy + ds + \lambda dt\right).$$

Но в силу уравнений (IV_1)

$$\frac{\overline{d\theta}}{dy} + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}} + \mu\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}} \equiv 0;$$

далее, так как $u_1 = c_1$, то

$$du_1 = 0 = \frac{\overline{du_1}}{dx}dx + \frac{\overline{du_1}}{dy}dy + \frac{\partial u_1}{\partial z}\Omega_1 + \frac{\partial u_1}{\partial p}\Omega_2 + \frac{\partial u_1}{\partial q}\Omega_3 +$$

$$+ \frac{\partial u_1}{\partial s}ds + \frac{\partial u_1}{\partial t}dt,$$

или

$$\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy + ds + \lambda\, dt \equiv -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_1 - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_2 - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial q}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_3,$$

а потому окончательно

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha}=\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}+\mu\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)\Omega_1+\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}+\mu\frac{\frac{\partial u_1}{\partial p}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)\Omega_2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial q}+\mu\frac{\frac{\partial u_1}{\partial q}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)\Omega_3.$$

Наконец,

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha}=\frac{\partial}{\partial \alpha}(dq-s\,dx-t\,dy)=d\frac{\partial q}{\partial \alpha}-\frac{\partial s}{\partial \alpha}dx-\frac{\partial t}{\partial \alpha}dy-t\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha}=$$

$$=d(s+\lambda\, t)+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dx+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}dy-td\lambda=ds+\lambda dt+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\alpha x+\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}=$$

$$=-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_1-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial p}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_2-\frac{\frac{\partial u_1}{\partial q}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\Omega_3.$$

Таким образом $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_1$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_2$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_3$ удовлетворяют системе линейных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}Z_i=a_{i1}\ Z_1+a_{i2}\ Z_2+a_{i3}\ Z_3 \qquad i=1.2.3.$$

Поэтому Ω_i $i=1,2,3$ имеют вид

$$\Omega_i=\alpha_{i1}\ \Omega_1^0+\alpha_{i2}\ \Omega_2^0+\alpha_{i3}\ \Omega_3^0 \qquad i=1.2.3.$$

где Ω_i^0— значения Ω_i при $\alpha=\alpha_0$ и имеют вид

$$\Omega_1^0=dz_0-p_0dx_0-q_0\ dy_0,\ \Omega_2^0=dp_0-\theta_0\ dx_0-s_0\ dy_0,$$
$$\Omega_3^0=dq_0-s_0\ dx_0-t_0\ dy_0,\ \text{а}\ \theta_0=\theta(x_0\ldots t_0).$$

Поэтому, чтобы помощью решений дифференциального уравнения (II) найти систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I[1]), заключающую уравнение $u_1=c_1$, можно поступить следующим образом:

Достаточно проинтегрировать Pfaff'ову систему

$$\Omega_1^0=dz_0-p_0\ dx_0-q_0\ dy_0=0,\ \ \Omega_2^0=dp_0-\theta_0\ dx_0-s_0\ dy_0=0,$$
$$\Omega_3^0=dq_0-s_0\ dx_0-t_0\ dy_0=0$$

шестью интегралами

$$u_1(x_0\ldots t_0)=c_1,\ v_j(x_0\ldots t_0)=0 \quad j=2\ldots 6,$$

не представляющими системы интегралов системы дифференциальных уравнений (VI), и исключить $x_0\ldots t_0$ из системы уравнений

$$y=y(x,x_0\ldots t_0)\ldots \qquad t=t(x,x_0\ldots t_0) \qquad u_1(x_0\ldots t_0)=c_1$$
$$v_j(x_0\ldots t_0)=0 \qquad j=2\ldots 6.$$

Если полученные уравнения

$$u_1(x\ldots t) = c_1 \qquad u_j(x\ldots t) = 0 \qquad j = 2.3.4.5$$

разрешимы относительно z, p, q, s, t, определенная из них функция $z = \varphi(xy)$ есть искомый интеграл данного дифференциального уравнения (I).

Наиболее удобный способ выполнить это заключается в следующем: достаточно определить функции $x_0(\omega)\ldots t_0(\omega)$ параметра ω, удовлетворяющие уравнениям

$$u_1(x_0\ldots t_0) = c_1 \quad \frac{dz_0}{d\omega} - p_0\frac{dx_0}{d\omega} - q_0\frac{dy_0}{d\omega} = 0, \quad \frac{dp_0}{d\omega} - \theta_0\frac{dx_0}{d\omega} - s_0\frac{dy_0}{d\omega} = 0,$$

$$\frac{dq_0}{d\omega} - s_0\frac{dx_0}{d\omega} - t_0\frac{dy_0}{d\omega} = 0$$

и исключить параметр ω из уравнений

$$y = y[x,\ x_0(\omega)\ldots t_0(\omega)]\ldots \qquad t = t[x,\ x_0(\omega),\ldots t_0(\omega)].$$

Это есть обычный способ определения интеграла данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющего и уравнению $u_1(x, y, z, p, q, st) = c_1$, находящемуся в инволюции с данным.

Если существуют две независимые функции v_1, v_2, удовлетворяющие одной и той же системе (IV_1), или (IV_2), то в этом случае можно получить интеграл Cauchy, представляющий поверхность, проходящую через данный пояс

$$x = x(\omega),\ y = y(\omega),\ z = (\omega),\ p = p(\omega),\ q = q(\omega).$$

§ 4.

До сих пор мы получали результаты по большей части известные, но одним и тем же методом. Перейдем теперь к следующему, новому случаю.

Пусть $\dfrac{\partial(u_1, n_2)}{\partial(st)} = 0$, но не все производные $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial s}$, $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial t}$ нули.

Можно показать, что в этом случае $\dfrac{\partial u_1}{\partial s}$, $\dfrac{\partial n_2}{\partial s}$ не нули одновременно и что $\dfrac{d(u_1\ u_2)}{d(ys)} \neq 0$.

Пусть

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = \frac{\partial u_2}{\partial s} = 0.$$

Не трудно видеть, что в таком случае из уравнений (II) (стр. 118, 119), которым удовлетворяют u_1 и u_2, следует, что

$$\frac{d(u_1\ u_2)}{d(xt)} = 0,\ \frac{d(u_1\ u_2)}{d(yt)} = 0.$$

Так как $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ уже не нули одновременно, то из уравнений

$$\frac{\bar{d}\,(u_1, u_2)}{d\,(xt)} = 0, \quad \frac{\bar{d}\,(u_1, u_2)}{d\,(yt)} = 0, \quad \frac{\partial\,(u_1, u_2)}{\partial\,(st)} = 0$$

следует, что все определители матриссы (A) нули, что невозможно. Итак, $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{\partial u_2}{\partial s}$ не нули одновременно.

Из этого следует, что

$$\frac{\bar{d}\,(u_1\, u_2)}{d\,(ys)} \neq 0.$$

В противном случае $\frac{\partial\,(u_1\, u_2)}{\partial\,(st)} = 0$, все определители матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\bar{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{matrix}$$

а следовательно и определитель

$$\frac{\bar{d}\,(u_1\, u_2)}{d\,(yt)}$$

были бы равны нулю. Поэтому из второго уравнения (II) (стр. 118, 119) следовало бы, что

$$\frac{\bar{d}\,(u_1\, u_2)}{d\,(xs)} = 0.$$

Если же

$$\frac{\bar{d}\,(u_1\, u_2)}{d\,(xs)} = 0, \quad \frac{\bar{d}\,(u_1\, u_2)}{d\,(ys)} = 0 \quad \frac{\partial\,(u_1\, u_2)}{\partial\,(st)}$$

то так как $\frac{\partial u_1}{\partial s}$, $\frac{du_1}{ds}$ не нули одновременно, следовало бы, что все определители матриссы (А) нули, что невозможно. Итак,

$$\frac{\bar{d}\,(u_1\, u_2)}{d\,(ys)} \neq 0.$$

В этом случае полная система дифференциальных уравнений (В) (стр 119), которым удовлетворяют функции u_i $i = 1 \ldots 5$, имеет вид

$$\frac{\bar{d}\,(f,\, u_1,\, u_2)}{d\,(xys)} = 0, \; \frac{\bar{d}\,(f,\, u_1,\, u_2)}{d\,(yst)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Так как они неразрешимы относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, но разрешимы относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, решения их u_i $i = 1 \ldots 5$ зависимы относительно z, p, q, s, t, но независимы относительно y, z, p, q, s. Система пяти полных интегралов $u_i = c_i$ $i = 1..,5$ неразрешима в этом случае относительно $z, p, q, s, t,$ но разрешима относительно y, z, p, q, s. Она не может дать в этом случае полного интеграла данного дифференциального уравнения (I). Однако и в этом случае можно получить интеграл его, но заключающий лишь четыре произвольных постоянных.

Прежде всего решим вопрос, для какого вида дифференциального уравнения (I) возможен этот случай.

Мы предполагаем, что производные $\frac{\partial u_{1,2}}{\partial s}, \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t}$ не все нули. Пусть $\frac{\partial u_1}{\partial s}, \frac{\partial u_1}{\partial t}$ не нули одновременно. Легко видеть, что тогда $\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0$; иначе, из условия $\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(st)} = 0$ и неравенства $\frac{\partial u_2}{\partial s} \neq 0$ следовало бы, что и $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$.

В этом случае все функции u_i $i = 1...5$ удовлетворяют уравнению $\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0$.

Именно, все они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(yst)} = 0$$

т. е. уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(yt)} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(ys)} = 0.$$

Но

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(yt)} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(ys)} = 0.$$

Следовательно, так как $\frac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(ys)} \neq 0$,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_1}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0.$$

Пять независимых функций u_i $i = 1...5$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial(fu_1)}{\partial(st)} = 0$$

и уравнениям системы (II) (стр. 118, 119)

$$\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0,$$

$$\frac{\overline{df}}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\overline{df}}{dy}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(yt)} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\overline{du_1}}{dx} + \frac{\overline{d}(\theta u_1)}{d(ys)}\right) = 0.$$

Так как первые два независимы между собой, третье должно быть их следствием. Поэтому, два независимые определители матриссы

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\dfrac{\partial u_1}{\partial x}, & -\dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)}, & \dfrac{d(\theta u_1)}{d(yt)}, & -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{d(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \end{matrix}$$

составленной из их коэффициэнтов, должны быть равны нулю. Так как

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial s} & -\dfrac{\partial u_1}{\partial y} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 \neq 0,$$

то

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & -\dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)}, & -\left(\dfrac{d(\theta u_1)}{d(ys)}+\dfrac{d(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial s}, & -\dfrac{\partial u_1}{\partial y}, & -\dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & \dfrac{d(\theta u_1)}{d(yt)}, & -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{d(\theta u_1)}{d(ys)}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

т. е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial(\theta u_1)}{\partial(ts)} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 - \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 = 0,$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2\right] = 0.$$

Таким образом получается только одно условие

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, функция u_1 должна в этом случае удовлетворять условию

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial n_1}{\partial s} = 0,$$

или условию

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$$

если λ, μ суть корни квадратного уравнения (a) (стр. 127).

Пусть

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0.$$

Далее, дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial (fu_1)}{\partial (st)} = 0, \quad \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(yt)} = 0$$

или уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \lambda\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(ys)} = 0,$$

как имеющие пять независимых решений, должны составлять полную систему. Отсюда условия

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial(p+\lambda q)}{\partial t} - \lambda\frac{\partial(p+\lambda q)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial t} - \lambda\frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial(s+\lambda t)}{\partial t} - \lambda\frac{\partial(s+\lambda t)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right) - \lambda\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right)$$

$$= \frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy} - \frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\lambda}{\partial s},$$

которые сводятся только к следующим:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial t} - \lambda\frac{\partial(\theta+\lambda s)}{\partial s} = 0, \quad \ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right) - \lambda\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\right) = \frac{\overline{d}\lambda}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy} - \frac{\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial s}}\frac{\partial\lambda}{\partial s}.$$

Таким образом λ и θ должны удовлетворять двум условиям

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial s} = 0, \quad \lambda^2 + \frac{\partial\theta}{\partial s}\lambda - \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$$

— двум линейным дифференциальным уравнениям.

Их интегнирование приводится по методу Jacobi к интегрированию системы обыкновенных уравнений

$$dt = -\frac{ds}{\lambda} = \frac{d\lambda}{o} = \frac{d\theta}{\lambda^2},$$

коих интегралы суть $\lambda = \text{const.}$, $s + \lambda t = \text{const.}$, $\theta + \lambda s = \text{const.}$

Отсюда находим, что

$$\theta + \lambda s = F(x, y, z, p, q, \lambda, s + \lambda t),$$

$$\varphi(x, y, z, p, q, \lambda, s + \lambda t) = 0$$

где F, φ — произвольные функции.

Таким образом функция θ должна иметь вид

$$\theta = -\lambda s + F(x, y, z, p, q, \lambda, s + \lambda t),$$

где λ определяется из условия

$$\varphi(x, y, z, p, q, \lambda, s + \lambda t) = 0 \text{ *)}.$$

Из тождества

$$\lambda^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\lambda - \frac{\partial \theta}{\partial t} \equiv 0$$

следует, что при таком виде функции θ, функция λ есть действительно корень квадратного уравнения (a).

При таком виде функции θ все условия (VII) удовлетворяются. В самом деле, λ и $s + \lambda t$ суть решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

Поэтому и $\theta + \lambda s$, как их функция, есть его решение.

Наконец, что касается последнего условия, то, производя в левой части дифференцирования, переставляя затем их порядок и пользуясь тождествами

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0, \quad \lambda^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\lambda - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0,$$

найдем, что левая часть тождественна второй.

Итак, рассматриваемый случай может представиться только для дифференциального уравнения указанного типа; поэтому, вообще

$$\frac{\partial (u_1 u_2)}{\partial (st)} \neq 0.$$

Возвратимся теперь к уравнениям, которым удовлетворяют в этом случае все функци u_i $i = 1 \ldots 5$.

Все функции u_i $i = 1 \ldots 5$ удовлетворяют системе двух уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad \frac{d(fu_1)}{d(xs)} + \lambda \frac{d(fu_1)}{d(ys)} = 0, \ldots \ldots \ldots \text{(VIII)}$$

полной при условии

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0\right).$$

Обратно, если данное дифференциальное уравнение (I) имеет указанный вид, если $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$, $\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0\right)$, то пять независимых решений полной системы (VIII) u_i $i = 1 \ldots 5$ имеют свойство, что система пяти уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$, разрешимых относительно y, z, p, q, s, есть система пяти полных интегралов Pfaff'овой системы (I^1).

---

*) Дифференциальныя уравнения второго порядка этого типа суть единственные, допускающие характеристики первого порядка. C. Russyan, Mathem. Ann. Bd. 99. 1923.

В самом деле, так как $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$, и λ есть корень квадратного уравнения (a), то

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\,\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Поэтому, первое уравнение системы (II) (стр. 118, 119) есть следствие уравнений (VIII). Далее, среди решений этих последних есть такое u_2, что $\frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)} \neq 0$, иначе уравнение

$$\frac{\overline{d}\,(fu_1)}{d\,(ys)} = 0$$

было бы следствием уравнений (VIII), что невозможно. Таким образом, функции u_1, u_2 удовлетворяют уравнениям (II) и $\frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)} \neq 0$. Далее можно показать, что функции u_i $i = 1 \ldots 5$ удовлетворяют полной системе (B)

$$\frac{\overline{d}\,(f u_1 u_2)}{d\,(yst)} = 0, \quad \frac{\overline{d}\,(f u_1 u_2)}{d\,(xys)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

именно первое уравнение (B) есть следствие второго (VIII), а второе (B)—первого (VIII).

Именно, определитель, составленный из коэффициентов уравнений первого (VIII) и второго (B)

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)}, & -\frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)} \end{vmatrix} = \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \equiv 0.$$

точно также два независимых определителя матриссы, составленной из коэффициентов при $\frac{\overline{d f}}{dx}, \frac{\overline{d f}}{dy}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$ первого уравнения системы (B) и второго системы (VIII), имеющие вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial s} & \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} \\ \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)}, & -\frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(xs)} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial s} & -\left(\frac{\overline{d} u_1}{dx} + \lambda \frac{\overline{d} u_1}{dy}\right) \\ \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)} & \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(xy)} \end{vmatrix}$$

или вид

$$-\frac{\partial u_1}{\partial s}\left[\frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(xs)} + \lambda \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)}\right], \quad \frac{\overline{d} u_1}{dy}\left[\frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(xs)} + \lambda \frac{\overline{d}\,(u_1 u_2)}{d\,(ys)}\right]$$

нули тождественно. Если же функции u_i $i = 1 \ldots 5$ удовлетворяют полной системе (B), то система пяти уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 5$ есть система полных интегралов Pfaff'овой системы (I^1).

Итак, если данное дифференциальное уравнение (I) имеет указанный вид, и только тогда, Pfaff'ова система (I^1) имеет систему полных интегралов $u_i = c_i \quad i = 1 \ldots 5$, неразрешимую относительно $z, \ p, \ q, \ s, \ t$, но разрешимую относительно $y, \ z, \ p, \ q, \ s$. Функции $u_i \ i = 1 \ldots 5$ суть решения полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad \frac{d(fu_1)}{d(xs)} + \lambda \frac{d(fu_1)}{d(ys)} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\text{VIII}),$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0.$$

Можем получить в этом случае интеграл данного уравнения (I), заключающий четыре произвольных постоянных, следующим образом. Примем независимые функции $u_i \ i = 1 \ldots 5$, за новые переменные независимые; тогда Pfaff'ова система (I^1) примет вид:

$$\Omega_1 = dz - pdx - qdy = \sum_1^5{}_i U_i' \ du_i = 0$$

$$\Omega_2 = dp - \theta dx - sdy = \sum_1^5{}_i U_i^2 \, du_i = 0,$$

$$\Omega_3 = dq - sdx - tdy = \sum_1^5{}_i U_i^3 \, du_i = 0.$$

Так как функции $u_i \ i = 1 \ldots 5$ независимы относительно y, z, p, q, s, есть среди них четыре, независимые относительно z, p, q, s. Докажем, что можно определить четыре решения системы (VIII) $u_j \ j = 1 \ldots 4$ такие, что 1) они независимы относительно z, p, q, s и такие что 2) уравнения $U_5^1 = 0, \ U_5^2 = 0, \ U_5^3$ сводятся, в силу уравнений $u_j = c_j \ j = 1 \ldots 4$, только к одному $\omega = 0$, определяющему переменное t. Тогда уравнения

$$u_j = c_j \ j = 1 \ldots 4, \ \omega = 0$$

представляют систему пяти интегралов Pfaff'овой системы (I^1), разрешимую относитеьно $z, \ p, \ q, \ s, \ t$, и поэтому определенная из них функция $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$ есть интеграл данного дифференциального уравнения (I), заключающий четыре произвольных постоянных.

Эти функции должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial (u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial (z, p, q, s)} \neq 0.$$

Найдем вид коэффициентов $U_5^1, U_5^2 \, U_{5.}^3$

Из тождества $dz - pdx - qdy = \sum_i U_i^1 \ du_i$ следует, что

$$-q = \sum_i U_i^1 \frac{du_i}{dy}, \ 1 = \sum_i U_i^1 \frac{du_i}{dz}, \ 0 = \sum_i U_i^1 \frac{du_i}{dp}, \ 0 = \sum_i U_i^1 \frac{du_i}{dq}, \ 0 = \sum_i u_i^1 \frac{du_i}{\partial s}.$$

Откуда, означая чрез $\triangle$ отличный от нуля определитель

$$\triangle = \frac{\partial (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)}{\partial (y z p q s)}$$

имеем, что

$$U_5^1 = -\frac{\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y p q s)} + q\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)}}{\triangle}.$$

Подобным же образом находим из тождеств

$$dp - \theta dx - sdy = \sum_i U_i^2\, du_i,\ dq - sdx - tdy = \sum_i U_i^3\, du_i,$$

что

$$U_5^2 = \frac{\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y z q s)} - s\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)}}{\triangle}$$

$$U_5^3 = \frac{\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y z p s)} + t\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)}}{\triangle}.$$

Таким образом уравнения $U_5^1 = U_5^2 = U_5^3 = 0$ имеют вид:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y p q s)} + q\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y z q s)} - s\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y z p s)} + t\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)} = 0.$$

Второе уравнение можем заменить ему равносильным

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y z q s)} - \lambda\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(y z p s)} - (s + \lambda t)\frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z p q s)} = 0.$$

Функции u_2, u_3, u_4, как удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial(f u_1)}{\partial(s t)} = 0,$$

имеют вид

$$u_i = v_i\,(x, y, z, p, q, u_1)\ \ j = 2.3.4.$$

Поэтому эти уравнения по сокращении на $\frac{\partial u_1}{\partial s}$ имеют вид:

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y p q)} + q\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0,\ \frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z q)} - \lambda\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z p)} - (s + \lambda t)\frac{\partial(v_2. v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z p)} + t\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0,$$

где производные взяты только по переменным входящим явно, и

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z, p, q)} = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(z, p, q, s)} : \frac{\partial u_1}{\partial s} \neq 0.$$

Упростим их. Заменим переменное независимое s новым u_1 по формуле $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = u_1$.

Тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y p q)} + q\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0, \frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z q)} - l\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z p)} - (\overline{s} + lt)\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z p)} + t\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0,$$

где v_2, v_3, v_4 зависят только от x, y, z, p, q, u_1, а l, $\overline{s}$ суть преобразованные выражения λ и $\overline{s}$, при чем l, $\overline{s} + lt$ не зависят также от t, ибо λ, $s + \lambda t$ суть решения уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

т. е. уравнения

$$\frac{\partial(f u_1)}{\partial(st)} = 0.$$

Так как в силу уравнений $u_1 = c_1$, $v_2 = c_2$, $v_3 = c_3$, $v_4 = c_4$, эти уравнения должны сводиться к одному, именно к третьему, единственному, заключающему t, то первые два, как не заключающие ни t, ни c_1, c_2, c_3, c_4, должны быть тождествами при произвольных значениях x, y, z, p, q, u_1.

Итак, v_2, v_3, v_4 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y p q)} + q\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z q)} - l\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(y z p)} - (\overline{s} + lt)\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z p q)} = 0.$$

Означая через $\frac{\overline{d}}{dy}$ операцию $\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \overline{s}\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}$, их можно написать в виде

$$\frac{\overline{d}(v_2, v_3, v_4)}{d(y p q)} = 0, \quad \frac{\overline{d}(v_2, v_3, v_4)}{d(y z q)} - l\frac{\overline{d}(v_2, v_3, v_4)}{d(y z p)} = 0.$$

Эти уравнения можна заменить иными, им эквивалентными.

Рассмотрим три определителя матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\overline{d}v_2}{dy}, & \frac{\partial v_2}{\partial z}, & \frac{\partial v_2}{\partial p}, & \frac{\partial v_2}{\partial q}, & \frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \\ \frac{\overline{d}v_3}{dy}, & \frac{\partial v_3}{\partial z}, & \frac{\partial v_3}{\partial p}, & \frac{\partial v_3}{s_l}, & \frac{\partial v_3}{\partial q} - l\frac{\partial v_3}{\partial p} \\ \frac{\overline{d}v_4}{dy}, & \frac{\partial v_4}{\partial z}, & \frac{\partial v_4}{\partial p}, & \frac{\partial v_4}{\partial q}, & \frac{\partial v_4}{\partial q} - l\frac{\partial v_4}{\partial p} \end{matrix}$$

получаемые вычеркиванием каких-либо двух средних колонн. Они равны ими левым частям этих уравнений, или левой части первого уравнения, умноженного на l. Поэтому рассматриваемые уравнения можно заменить им эквивалентными, приравнивая эти определители нулю. Но каждый из них можно разложить по минорам второй степени первой и последней колонны. Мы получим таким образом три уравнения линейных однородных относительно трех величин

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\bar{d}v_i}{dy}, & \dfrac{\partial v_i}{\partial q} - l\dfrac{\partial v_i}{\partial p} \\ \dfrac{\bar{d}v_k}{dy}, & \dfrac{\partial v_k}{\partial q} - l\dfrac{\partial v_k}{\partial p} \end{vmatrix} \quad i,\ k = 2.3.4$$

определитель которых, равный $\dfrac{\partial(v_2 v_3 v_4)}{\partial(z\,p\,q)}$, отличен от нуля. Поэтому,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\bar{d}v_i}{dy}, & \dfrac{\partial v_i}{\partial q} - l\dfrac{\partial v_i}{\partial p} \\ \dfrac{\bar{d}v_k}{dy}, & \dfrac{\partial v_k}{\partial b} - l\dfrac{\partial v_k}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\bar{d}(v_i, v_k)}{d(y, q - lp)} = 0 \quad i,\ k = 2.2.4.$$

Последняя система уравнений эквивалентна рассматриваемой.

Преобразуем к переменным x, y, z, p, q, u_1, t и уравнения (VIII). Они примут вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\bar{d}\varphi}{dx} + l\frac{\bar{d}\varphi}{dy} = 0$$

где

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial p} + \bar{s}\frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\bar{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \bar{s}\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}$$

и $\bar{\theta}$ есть функция $\theta(x, y, z, p, q, \bar{s}, t)$.

Коэффициенты $l,\ p + lq,\ \bar{\theta} + l\bar{s},\ \bar{s} + lt$ второго уравнения не зависят от t.

Таким образом функции v_2, v_3, v_4 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0, \quad \frac{\bar{d}\varphi}{dx} + l\frac{\bar{d}\varphi}{dy} = 0$$

$$\frac{\bar{d}(v_i, v_k)}{d(y, q - lp)} = 0 \quad i = 2.3.4. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{VIII}_1)$$

Эту систему мы еще упростим. Среди искомых функций v_2, v_3, v_4 есть хоть одна, например, v_2 такая, что $\dfrac{\partial v_2}{\partial q} - l\dfrac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$. Иначе мы имели бы, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial q} - l\frac{\partial v_i}{\partial p} = 0 \quad i = 2.3.4.$$

и что, следовательно,

$$\frac{\partial(v_2, v_3, v_4)}{\partial(z\,p\,q)} = 0$$

тогда три уравнения

$$\frac{d\,(v_i v_k)}{d\,(y,q-lp)}=0 \quad i,k=2.3.4.$$

можно заменить двумя

$$\frac{\overline{d}\,(v_3,v_2)}{d\,(y,q-lp)}=0,\quad \frac{\overline{d}\,(v_4,v_2)}{d\,(y,q-lp)}=0,$$

им эквивалентными, так как из этих последних, имеющих вид

$$\frac{\overline{d}v_3}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial v_3}{\partial q}-l\frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_2}{dy}=0,$$

$$\frac{\overline{d}v_4}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial v_4}{\partial q}-l\frac{\partial v_4}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_2}{dy}=0$$

следует, что

$$\frac{\overline{d}v_3}{dy}\left(\frac{\partial v_4}{\partial q}-l\frac{\partial v_4}{\partial p}\right)-\left(\frac{\partial v_3}{\partial q}-l\frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_4}{dy}=\frac{\overline{d}\,(v_3 v_4)}{d\,(y,q-lp)}=0.$$

Таким образом, функции v_2, v_3, v_4 должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+l\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,\ \frac{\overline{d}(\varphi\ \ v_2)}{d(y,\,q-lp)}=0,\text{ где }\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\neq 0.$$

Обратно, если v_2, v_3, v_4, удовлетворяют этим уравнениям и $\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\neq 0$, они, удовлетворяя уравнениям (VIII_1), после преобразования от переменного u_1 к переменному s по формуле $u_1(x,y,z,p,q,s,t)=u_1$ дают функции u_2, u_3, u_4, которыя вместе с функцией $u_1(x\ldots t)$, удовлетворяющей уравнению $\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda\frac{\partial f}{\partial s}=0$, и суть искомые решения системы (VIII). Функция $z=f(x,y,c_1,c_2,c_3,c_4)$, определенная из уравнений $u_j=c_j$ $j=1.2.3.4$, разрешимых относительно z,p,q,s, есть искомый интеграл данного дифференциального уравнения (I^1).

Приступим к определению функций v_2, v_3, v_4.

Функция v_2 должна быть решением уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+l\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0$$

таким, что $\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}\neq 0$ и таким, чтобы система трех независимых уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+l\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0\quad \frac{\overline{d}\,(\varphi_1,v_2)}{d\,(y,q-lp)}=0$$

в шести переменных независимых $x, y, z\,p, q, t$, как имеющая три независумых решения, была полной, или чтобы ей соответствующая Pfaff'ова система была сполна интегрируемой.

Эта последняя имеет вид

$$dz - pdx - qdy = 0,\ dp + ldq - (\theta + sl)\,dx - (s + lt)\,dy = 0,\ dv_2 = 0.$$

Условия ее интегрируемости суть:

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(\overline{\theta} + l\overline{s}, & -(\overline{s} + lt) & 0 & 1 & l \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p} & \dfrac{\partial v_2}{\partial q} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(\overline{\theta} + l\overline{s}), & -(\overline{s} + lt), & 0 & 1 & l \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p} & \dfrac{\partial v_2}{\partial q} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ -(\overline{\theta} + l\overline{s}), & -(\overline{s} + lt) & 0 & 1 & l \end{vmatrix} = 0.$$

Первое по разложении дает

$$\frac{\overline{d}v_2}{dx} + l\frac{\overline{d}v_2}{dy} = 0;$$

оно удовлетворяется на основании уравнения

$$\frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0,$$

которому v_2 удовлетворяет.

Второе по разложении и по введении условия $\dfrac{\overline{d}v_2}{dx} + l\dfrac{\overline{d}v_2}{dy} = 0$ дает

$$\frac{\overline{d}v_2}{dy}\left(\frac{\overline{d}l}{dx} + l\frac{\overline{d}l}{dy} + \frac{\overline{\partial}\theta}{\partial q} - l\frac{\overline{\partial}\theta}{\partial p} + 2l\frac{\overline{\partial}s}{\partial q} - 2l^2\frac{\overline{\partial}s}{\partial p}\right) + \\ + \left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right)\left(\frac{\overline{d}\,s}{dx} + l\frac{\overline{d}\,s}{dy} - \frac{\overline{d}\,\theta}{dy}\right) = 0.$$

Таким образом, функция v_2 должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} - l\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)N = 0 \quad \ldots\ldots \text{(X)}$$

где

$$M = \frac{\overline{d}l}{dx} + l\frac{\overline{d}l}{dy} + \frac{\overline{\partial}\theta}{\partial q} - l\frac{\overline{\partial}\theta}{\partial p} + 2l\left(\frac{\overline{\partial}s}{\partial q} - l\frac{\overline{\partial}s}{\partial p}\right),$$

$$N = \frac{\overline{d}s}{dx} - l\frac{\overline{d}s}{dy} - \frac{\overline{d}\theta}{dy}$$

при условии, что $\dfrac{\partial v_2}{\partial q} - l\dfrac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0.$

Вычислением можно убедиться, что $M = -\frac{\partial N}{\partial t}$, $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$.

Если v_2 удовлетворяет этим уравнениям и $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$, система

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0, \frac{\overline{d}(\varphi, v_2)}{d(y, q - lp)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

— полная и три ее решения суть искомые функции v_2, v_3, v_4. При определении функции v_2 могут представиться три случая:

1) $N \neq 0$, но $M = 0$; тогда из уравнений (X) следует, что $\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$. В этом случае нельзя определить функцию v_2, ибо $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} = 0$ и задача невозможна.

2) $N \neq 0$ $M \neq 0$. В этом случае последнее уравнение (IX)

$$\frac{\overline{d}\varphi}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\frac{\overline{d}v_2}{dy} = 0$$

в силу уравнения

$$\frac{\overline{d}v_2}{dy}M + \left(\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p}\right)N = 0$$

может быть заменено уравнением

$$\frac{\overline{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial d}\right)N = 0$$

и система (IX) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - l\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)N = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(X)}$$

Она должна быть полной. Так как она допускает только одну систему решений, есть только одна система функций u_j $j = 1 \ldots 4$, заключающих функцию $u_1(x \ldots t)$, т.-е. есть только один интеграл $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$ данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий дифференциальному уравнению $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$.

3) $N = 0$, а следовательно и $M = -\frac{\partial N}{\partial t} = 0$.

В этом случае при всяком выборе v_2, как решения полной системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \frac{\overline{d}\varphi}{dx} + l\frac{\overline{d}\varphi}{dy} = 0$$

такого, что $\frac{\partial v_2}{\partial q} - l\frac{\partial v_2}{\partial p} \neq 0$, что возможно бесчисленным множеством способов, система (IX) — полная.

В этом случае есть бесчисленное множество различных систем уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \ldots 4$, заключающих уравнение $u_1 = c_1$, т.-е. есть бесчисленное множество интегралов $z = f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$ данного дифференциального уравнения (I), удовлетворяющих дифференциальному уравнению $u_1(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$.

Рассмотрим ближе эти два случая. Если уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \frac{\bar{d}\varphi}{dx} + l\frac{\bar{d}\varphi}{dy} = 0, \frac{\bar{d}\varphi}{dy}M + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} - l\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)N = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (X).$$

должны составлять полную систему, то так как коэффициенты и последнего уравнения: M, qM, $\bar{s}M - lN$, $tM + N$ в силу соотношений $M = -\frac{\partial N}{\partial t}$, $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\bar{s}}{\partial t} = -l$ не заключают переменного t, достаточно выразить, что только два последние уравнения составляют полную систему, т.-е. что им соответствующая Pfaff'ова система сполна интегрируема. Она имеет вид

$$dz - pdy - qdx = 0,\; Mdp - (M\bar{\theta} + l^2N)\,dx - (\bar{s}M - lN)\,dy = 0,$$
$$Mdq + (lN - \bar{s}M)\,dx - (tM + N)\,dy = 0.$$

Условия ее полной интегрируемости суть

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & lN - \bar{s}M & 0 & M & 0 \\ lN - \bar{s}M, & -(tM + N), & 0 & 0 & M \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & tN - \bar{s}M & 0 & M & 0 \\ lN - \bar{s}M, & -(tM + N) & 0 & 0 & M \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & tN - \bar{s}M, & 0 & M & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ -(M\bar{\theta} + l^2N), & lN - \bar{s}M & 0 & M & 0 \\ lN - \bar{s}M, & -(tM + N), & 0 & 0 & M \\ \frac{\partial}{\partial a} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial d} & \frac{\partial}{\partial q} \\ lN - \bar{s}M & -(tM + N) & 0 & 0 & M \end{vmatrix} = 0.$$

Первое есть тождество. Второе имеет вид

$$K = \frac{\delta}{\delta x}(lN) - M\frac{\delta\bar{s}}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y}(l^2N) + M\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta y} - Nl\left(\frac{\bar{d}M}{dx} + l\frac{\bar{d}M}{dy}\right) = 0,$$

где

$$\frac{\delta}{\delta x} = M\frac{\bar{d}}{dx} - Nl\left(\frac{\partial}{\partial p} - l\frac{\partial}{\partial p}\right), \; \frac{\delta}{\delta y} = M\frac{\bar{d}}{dy} + N\left(\frac{\partial}{\partial q} - l\frac{\partial}{\partial p}\right),$$

а третье вид

$$L = -\frac{\delta}{\delta x}N - \frac{\delta}{\delta y}(lN) + M\frac{\delta\bar{s}}{\delta y} + N\left(\frac{\bar{d}M}{dx} + l\frac{\bar{d}M}{dy}\right) = 0.$$

Не трудно убедиться, что $K + lL \equiv 0$. Таким образом, условий полной интегрируемости только одно:

$$\frac{\delta}{\delta x} N + \frac{\delta}{\delta y}(lN - \overline{M}s) + \overline{s}\frac{\delta M}{\delta y} - N\left(\frac{\overline{d}M}{dx} + l\frac{\overline{d}M}{dy}\right) = 0.$$

Система (X) имеет в старых переменных $x, y, z, p, q\, s, t$ вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(xs)} + \lambda\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(ys)} = 0, \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(ys)} M + \frac{\partial(f, u_1)}{\partial(q - \lambda p, s)} N = 0 \quad (X_1)$$

где N, M, выраженные в них, имеют вид:

$$N = -\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \mu\frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d}\theta}{dy}\right) : \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad M = -\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \lambda\frac{\partial N}{\partial s}\right),$$

а условие, что она полная, вид

$$\frac{\overline{d}u_1}{dx}\frac{\partial}{\partial s}(MN) + \frac{\overline{d}u_1}{dy}\left[\frac{\partial}{\partial s}(\lambda MN) - M\left(M + 2s\frac{\partial M}{\partial s}\right)\right] - \left(\frac{\partial u_1}{\partial q} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p}\right)\left[\lambda N\frac{\partial N}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + N\left(M - N\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)\right] - \frac{\partial u_1}{\partial s}\left\{M\frac{\overline{d}N}{dx} + M\frac{\overline{d}}{dy}(\lambda N - sM) - \lambda N\left(\frac{dN}{\partial q} - \lambda\frac{\partial N}{\partial p}\right) + \right.$$

$$+ N\left(\frac{\partial(\lambda N - sM)}{\partial q} - \lambda\frac{\partial(\lambda N - sM)}{\partial p}\right) - s\left[M\frac{\overline{d}M}{dy} + N\left(\frac{\partial M}{\partial q} - \lambda\frac{\partial M}{\partial p}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + N\left(\frac{\overline{d}M}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}M}{dy}\right)\right]\right\} = 0.$$

Таким образом, функция $u_1\,(x \ldots t)$ должна удовлетворять в этом случае, кроме уравнения $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$, еще этому последнему дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, линейному относительно вторых производных; его порядок при решении данной задачи не понижается, так как оно заключает член

$$-M\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Если функция $u_1\,(x \ldots t)$ им удовлетворяет, система (X_1) полная и четыре решения ее, независимые относительно z, p, q, s, суть искомые функции $u_j\,(x \ldots t)$ $j = 1 \ldots 4$, а функция $z = f\,(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4)$, определенная из уравнений $u_j\,(x \ldots t) = c_j$ $j = 1..4$, есть интеграл данного дифференциального уравнения (I), единственный, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $u_1\,(x, y, z, p, q, s, t) = c_1$.

Если во втором случае преобразуем полную систему (IX) к первоначальным переменным независимым x, y, z, p, q, s, t, она получит вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s} = 0, \frac{\overline{d}(fu_1)}{d(xs)} + \lambda\frac{\overline{d}(fu_1)}{d(ys)} = 0, \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, q - \lambda p, s)} = 0 \quad . \; . \; . \; (IX_1)$$

где $u_2\,(x \ldots t)$ есть функция v_2, преобразованная к ним, а условие для нее есть

$$\frac{\partial v_2}{\partial q}-l\frac{\partial v_2}{\partial p}=\frac{\partial(u_2, u_1)}{\partial(q-\lambda p, s)}:\frac{\partial u_1}{\partial s}\neq 0.$$

Так как в этом случае

$$N=-\left(\frac{\overline{du_1}}{dx}+\mu\frac{\overline{du_1}}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d\theta}}{dy}\right):\frac{\partial u_1}{\partial s}=0,$$

функция $u_1(x...t)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda\frac{\partial f}{\partial s}=0,\quad \frac{\overline{df}}{dx}+\mu\frac{\overline{df}}{dy}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\overline{d\theta}}{dy}=0;$$

du_1 есть интегрируемая комбинация дифференциальных уравнений характеристик, соответствующих корню μ квадратного уравнения (a), а дифференциальное уравнение $u_1(x...t)=c_1$ находится в инволюции с данным (I).

Функция $u_2(x...t)$ определяется, как решение полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda\frac{\partial f}{\partial s}=0,\quad \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(xs)}+\lambda\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(ys)}=0$$

такое, что

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(q-\lambda p, s)}\neq 0,$$

что возможно бесчисленным множеством способов. Остальные функции u_3, u_4 определяются, как остальные решения полной системы (IX_1). Функция $z=f(x, y, c_1, c_2 c_3 c_4)$, определенная из уравнений $u_j(x,...t)=c_j$ $j=1..4$, есть интеграл дифференциального уравнения (I), один из бесчисленного множества этого вида удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$u_1(r, y, z, p, q, s, t)=c_1.$$

Если

$$\frac{\overline{du_1}}{dx}+\mu\frac{\overline{du_1}}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\overline{d\theta}}{dy}\neq 0$$

т.-е., если

$$N\neq 0,$$

но

$$\frac{\partial N}{\partial t}-\lambda\frac{\partial N}{\partial s}=0$$

т.-е.

$$M=0$$

предложенная задача не имеет решения.

§ 5.

До сих пор мы рассматривали производные от искомого интеграла порядка не выше второго. Теперь мы будем рассматривать производные высших порядков. Это даст нам возможность найти новые интегралы.

Если мы рассматриваем производные интеграла данного дифференциального уравнения (I) до n-ого порядка $(n>2)$ включительно, и если мы положим $\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = p_{i,k}$ $i+k \leqslant n$, то все его производные $p_{i,k}$ выражаются при помощи данного уравнения (I)

$$p_{20} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, p_{11}, p_{02})$$

через

$$p_{1k-1},\ p_{0k}\ \ k = 1 \ldots n.$$

В частном случае $p_{2,k-2}$ $k = 2 \ldots n$ выражаются через p_{1k-1}, p_{0k} следующим образом. Если функция $v(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-2}, p_{0n-1})$ заключает только p_{1k-1}, p_{0k} где $k \leqslant n-1$, и если

$$\frac{d}{dy} v(x \ldots p_{0n-1}) = \frac{\partial v}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial v}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial v}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial v}{\partial p_{01}} + \ldots$$

$$\ldots + p_{1n-1}\frac{\partial v}{\partial p_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial v}{\partial p_{0n-1}},$$

то, очевидно,

$$p_{20} = \theta(x \ldots p_{02}),\ p_{21} = \frac{d\theta}{dy},\ p_{22} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d\theta}{dy}\right) = \frac{d^2\theta}{dy^2},\ \ldots p_{2n-2} = \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}},$$

причем выражения $\frac{d^{k-2}\theta}{dy^{k-2}}$ $k = 3 \ldots n$ заключают только те p_{1s-1}, p_{0s}, где $s \leqslant k$ и p_{1k-1}, p_{0k} входят линейно в форме

$$\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} p_{1k-1} + \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} p_{0k}.$$

Если $z = f(x, y)$ есть интеграл данного уравнения (I), то $2n+1$ уравнений

$$z = f(x, y),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x},\ p_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots p_{1n-1} = \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}},\ p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

суть $2n+1$ интегралов Pfaff'овой системы $2n-1$ независимых уравнений

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = dz - p\,dx - p\,dy = 0,\\
&\Omega_2 = dp_{10} - \theta dx - p_{11}\,dy = 0,\\
&\Omega_3 = dp_{01} - p_{11}\,dx - p_{02}\,dy = 0.\\
&\Omega_4 = dp_{11} - \frac{d\theta}{dy}dx - p_{12}\,dy = 0,\\
&\Omega_5 = dp_{02} - p_{12}\,dx - p_{03}\,dy = 0,\\
(\mathrm{I}')\quad &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Omega_{2n-2} = dp_{1n-2} - \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}dx - p_{1n-1}\,dy = 0,\\
&\Omega_{2n-1} = dp_{0n-1} - p_{1n-1}\,dx - p_{0n}\,dy = 0.
\end{aligned}$$

Обратно, если $2n+1$ уравнений

$$u_i(x \ldots p_{0n}) = 0\ \ i = 1 \ldots 2n+1$$

есть система $2n+1$ интегралов ее, разрешимых относительно $2n+1$ переменных $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, то определенная из них функция $z=f(x, y)$ есть интеграл данного уравнения (I).

Пусть $z=f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$ будет полный интеграл ранга $(n-2)$[1], т. е. заключающий $2n+1$ произвольных постоянных $c_1 \ldots c_{2n+1}$ и такой, что $2n+1$ уравнений $z=f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$, $p_{10}=\frac{\partial f}{\partial x}$, $p_{01}=\frac{\partial f}{\partial y}$, $\ldots$ $\ldots p_{1n-1}=\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}$, $p_{0n}=\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ разрешимы относительно $c_1 \ldots c_{2n+1}$, то полученные уравнения

$$u_i(x \ldots p_{0n})=c_i \quad i=1 \ldots 2n+1$$

представляют систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I′) Обратно, если $2n+1$ уравнений

$$u_i(x \ldots p_{0n})=c_i \quad i=1 \ldots 2n+1$$

есть система ее полных интегралов и разрешимы относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, полученная из них функция $z=f(x, y. c_1 \ldots c_{2n+1})$ есть полный интеграл ранга $(n-2)$ данного уравнения (I).

Отыскания полного интеграла ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I) приводится к отысканию системы $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I′), разрешимых относительно $z, p_{10}, \ldots p_{0n}$

Ищем полный интеграл ранга $(n-2)$ данного дифференциального уравнения (I). Ищем для этого систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I′).

Свойства ее. Она интегрируется не менее, чем $2n+1$ интегралами. Из ее формы следует, что переменные $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-2}, p_{0n-1}$ суть функции переменных x, y.

Подставляя в последнее уравнение выражение

$$p_{0n-1}=p_{0n-1}(x, y)$$

получим уравнение

$$\left(p_{1n-1}-\frac{\partial p_{0n-1}}{\partial x}\right) dx+\left(p_{0n}-\frac{\partial p_{0n-1}}{\partial y}\right) dy=0$$

в четырех переменных x, y, p_{1n-1}, p_{0n}, которое интегрируется наименьшим числом два интегралов, откуда и следует утверждение.

Она не допускает интегрируемой комбинации.

Пусть

$$\lambda_1 \Omega_1+\ldots+\lambda_{2n-2} \Omega_{2n-2}+\lambda_{2n-1} \Omega_{2n-1}=du(x \ldots p_{0n}),$$

где не все коэффициенты λ нули. Так как левая часть не заключает dp_{1n-1}, dp_{0n}, функция u не заключает переменных p_{1n-1}, p_{0n}.

Так как

$$\lambda_1=\frac{\partial u}{\partial z}, \; \lambda_2=\frac{\partial u}{\partial p_{10}}, \; \lambda_3=\frac{\partial u}{\partial p_{01}} \ldots \lambda_{2n-2}=\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}, \; \lambda_{2n-1}=\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}},$$

[1]) Терминология по Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II, A 5.

то из тождества

$$-\frac{\partial u}{\partial z}p_{01}-\frac{\partial u}{\partial p_{10}}p_{11}-\frac{\partial u}{\partial p_{01}}p_{02}-\ldots-\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}p_{1n-1}-\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}}p_{0n}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}=\lambda_{2n-2}=0,\ \frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}}=\lambda_{2n-1}=0$$

и функция u не заключает $p_{1n-2},\ p_{0n-1}$.

Из тождества

$$-\frac{\partial u}{\partial z}p_{01}-\frac{\partial u}{\partial p_{10}}p_{11}-\frac{\partial u}{\partial p_{01}}p_{02}-\ldots-\frac{\partial u}{\partial p_{1n-3}}p_{1n-2}-\frac{\partial u}{\partial p_{0n-2}}p_{0n-1}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1n-3}}=\lambda_{2n-4}=0,\ \frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}}=\lambda_{2n-3}=0$$

и что функция u не заключает $p_{1n-3},\ p_{0n-2}$ и т. д.

Наконец, из тождества

$$-\frac{\partial u}{\partial z}p_{01}=\frac{\partial u\,(x,y,z)}{\partial y}$$

следует, что, наконец, $\frac{\partial u}{\partial z}=\lambda_1=0$. Итак,

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_{2n-1}=0,$$

что невозможно.

Пусть теперь $u_i(x\ldots p_{0n})=c_i\ \ i=1\ldots 2n+1$ будет система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (Γ'). Пусть $u_1(x\ldots p_{0n})$ будет одна из функций $u_i\ \ i=1\ldots 2n+1$ так, что уравнения

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_{2n-1}=0,\ du_1=0$$

линейно независимы. Среди остальных функций $u_2\ldots u_{2n+1}$ есть хоть одна такая, напр., u_2, что уравнения

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_{2n-1}=0,\ du_1=0,\ du_2=0$$

также линейно независимы.

Это следует из общей, уже доказанной, теоремы (стр. 116):

Если какая-либо Pfaff'ова система k независимых уравнений

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_k=0$$

интегрируется не менее, чем $m>k$ полными интегралами, и если, с другой стороны, существует ряд не менее, чем $m-1$ независимых функций $u_1\ldots u_{m-1},\ldots$заключающих $m-k-1$ функций $u_1\ldots u_{m-k-1}$, таких, что уравнения

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_k=0,\ du_1=0\ldots du_{m-k-1}=0$$

линейно независимы, то среди остальных функций u

$$u_{m-k}\ldots u_{m-1}\ldots$$

есть хоть одна функция u такая, что уравнения

$$\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_k = 0,\ du_1 = 0 \ldots du_{m-k-1} = 0,\ du = 0$$

также линейно независимы.

Полагая $k = 2n - 1$, $m = 2n + 1$ и что функции $u_1 \ldots u_{2n+1}$ нами рассматриваемые, имеем наше утверждение.

Найдем необходимое и достаточное условие, чтобы $2n + 1$ уравнений этой последней системы были линейно независимы. Это условие состоит в том, чтобы не все определители $2n + 1$-ой степени матриссы, состоящей из $2n + 3$ колонн и $2n + 1$ строк,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\dfrac{d\theta}{dy} & -p_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{12} & -p_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} & -p_{1n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\dfrac{du_1}{dx} & \dfrac{du_1}{dy} & \dfrac{du_1}{dz} & \dfrac{du_1}{dp_{10}} & \dfrac{du_1}{dp_{01}} & \dfrac{du_1}{dp_{11}} & \dfrac{du_1}{dp_{02}}\ldots & \dfrac{du_1}{dp_{1n-2}} & \dfrac{du_1}{dp_{0n-1}} & \dfrac{du_1}{dp_{1n-1}} & \dfrac{du_1}{dp_{0n}} \\
\dfrac{du_2}{dx} & \dfrac{du_2}{dy} & \dfrac{du_2}{dz} & \dfrac{du_2}{dp_{10}} & \dfrac{du_2}{dp_{01}} & \dfrac{du_2}{dp_{11}} & \dfrac{du_2}{dp_{02}}\ldots & \dfrac{du_2}{dp_{1n-2}} & \dfrac{du_2}{dp_{0n-1}} & \dfrac{du_2}{dp_{1n-1}} & \dfrac{du_2}{dp_{0n}}
\end{array}$$

были тождественно равны нулю.

Эту матриссу преобразуем в эквивалентную ей.

Умножим 3-ю, 4-ю $\ldots 2n + 1$-ю колонны соответственно на $p_{10}, \theta, p_{11}, \dfrac{d\theta}{dy} \ldots p_{1n-1}$ и прибавим произведения к соответствующим элементам первой колонны; затем умножим те же колонны соответственно на $p_{01}, p_{11}, p_{02} \ldots p_{0n}$ и прибавим к элементам второй.

Обозначая

$$\frac{\overline{du}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial u}{\partial z} + \theta\frac{\partial u}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial u}{\partial p_{01}} + \frac{d\theta}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{11}} + p_{12}\frac{\partial u}{\partial p_{02}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^{n-2}\theta}{\partial y^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}} + p_{1n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\overline{du}}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial u}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial u}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial u}{\partial p_{01}} + p_{12}\frac{\partial u}{\partial p_{11}} + p_{03}\frac{\partial u}{\partial p_{02}} + \ldots$$

$$\ldots + p_{1n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial u}{\partial p_{0n-1}}$$

эквивалентную матриссу представим в виде

$$\begin{matrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial n_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{10}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}
\end{matrix}$$

Могут быть неравными нулю только определители, заключающие 3-ю, 4-ю ... $2n+1$-ю колонны. Поэтому, искомое условие состоит в том, чтобы не все определители матриссы

$$\begin{matrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}
\end{matrix} \quad \dots\dots\dots \quad (A')$$

были тождественно равны нулю. Этим условиям должны удовлетворять функции u_1, u_2. Будем их называть условиями (A').

Далее, эта система $2n+1$ независимых уравнений, как интегрирующаяся системой $2n+1$ полных интегралов, должна быть сполна интегрируемой.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы были тождественно равны нулю определители

$$\begin{vmatrix}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{d\theta}{dy} & -p_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{12} & -p_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, & -p_{1n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{11}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{01}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{11}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \frac{\partial}{\partial p_{11}} & \frac{\partial}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\
a & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c & d
\end{vmatrix}$$

где $a, b, \ldots c, d$ — коэффициенты при $dx, dy, \ldots dp_{1n-1}, dp_{0n}$ уравнений системы. Если $a, b, \ldots c, d$ коэффициенты $\frac{du_{1,2}}{dx} \ldots \frac{du_{1,2}}{dp_{0n}}$ двух последних уравнений $du_1 = 0$, $du_2 = 0$, условные уравнения суть, очевидно, тождества. Преобразовывая в остальных случаях определители способом, употребленным выше при выводе условий (A'), получим условия интегрируемости в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ a_i & b_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad i = 1 \ldots 2n-1$$

где a_i, b_i, 0 0 суть коэффициенты при $dx, dy, dp_{1n-1}, dp_{0n}$ в уравнениях $\Omega_i = 0$ $i = 1 \ldots 2n-1$. Не трудно убедиться вычислением, что при $i = 1 \ldots 2n-3$ эти уравнения суть тождества. Таким образом, получаются только два условия интегрируемости:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, p_{1n-1} & & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ p_{1n-1} & p_{0n} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Они в развернутой форме имеют вид:

$$\frac{du_2}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} + \frac{du_2}{dy}\frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})} + \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}\frac{d\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})} - \left[\frac{du_1}{dx} - \frac{du_1}{dy}\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{d(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{d(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})} = 0,$$

Этим уравнениям должны удовлетворять функции u_1 u_2, где du_2 линейно независимо от Ω_1, Ω_{2n-1}, du_1. Но легко видеть из формы этих условий в виде приравненных нулю определителей, что и все функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$, подставленные вместо u_2, удовлетворяют этим условиям. Итак, все функции u_i $i=1\ldots 2n+1$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\overline{d}f}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}+\frac{\overline{d}f}{dy}\frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy_{n-2}},u_1\right)}{\partial(p_{0n1},p_{1n-1})}+\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}},u_1\right)}{d(y,p_{0n})}-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}},u_1\right)}{d(y,p_{1n-1})}\right)=0,$$

$$\frac{\overline{d}(f,u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(f,u_1)}{d(y,\ p_{0n})}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}').$$

Выведем теперь условия для функции u_1.

Могут быть два случая: два уравнения системы (II') независимы между собой или же одно есть следствие другого. В первом случае система (II') в $2n+3$ переменных независимых x, y, z, p_{10} $p_{01},\ldots p_{1n-1}$, p_{0n}, как имеющая $2n+1$ независимых решений u_i $i=1\ldots 2n+1$, должна быть полной; это дает условия для функции u_1.

Во втором случае определители второй степени матриссы, составленной из коэффициентов уравнений (II'), должны быть равны нулю. Это дает снова условия для функции u_1. Выводом этих условий мы займемся ниже в связи с интегрированием дифференциального уравнения (I).

Теперь займемся решением поставленной выше задачи об определении системы $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I').

Пусть функция u_1 определена из упомянутых только что условий. Тогда система (II') имеет не менее $2n+1$ решений, среди которых есть функция u_1, Тогда, согласно вышеупомянутой общей теореме (стр. 116), есть среди остальных такое решение, напр., u_2, что уравнения $\Omega_1=0,\ldots\ \Omega_{2n-1}=0,\ du_1=0,\ du_2=0$ линейно независимы. Так как функции u_1, u_2 удовлетворяют уравнениям (II'), система

$$\Omega_1=0\ldots\quad \Omega_{2n-1}=0,\quad du_1=0\quad du_2=0$$

сполна интегрируемая. Остальные функции u_i $i=3\ldots 2n+1$ получаются интегрированием полной системы двух линейных дифференциональных уравнений, соответствующих этой Pfaff'овой системе, и имеющей, как легко видеть, вид приравненных нулю двух независимых определителей матриссы:

$$\begin{matrix}\frac{\overline{d}f}{dx} & \frac{\overline{d}f}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\\[2mm] \frac{\overline{d}u_1}{dx} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\\[2mm] \frac{\overline{d}u_2}{dx} & \frac{\overline{d}u_2}{dy} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}\end{matrix} \qquad \ldots\ldots\ldots (B')$$

Эту систему уравнений будем называть системой (B').

Полученная система $2n+1$ уравнений $u_i=c_i$ $i=1\ldots 2n+1$ есть искомая система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'). Причем в первом случае, когда два уравнения системы (II') независимы, эта последняя эквивалентна полной системе двух уравнений (B'), как имеющая те же независимые решения u_i $i=1\ldots 2n+1$. В этом случае система $2n+1$ функций u_i определяется по определении функции u_1 интегрированием полной системы (II'). Поэтому, система $2n+1$ полных интегралов $u_i=c_i$ $i=1\ldots 2n+1$, заключающих уравнение $u_1=c_1$, — единственная.

Во втором случае, когда одно уравнение системы (II') есть следствие другого, систем $2n+1$ полных интегралов, заключающих уравнение $u_1=c_1$, есть бесчисленное множество. В самом деле, пусть определена, как указано выше, одна такая система $u_i=c_i$ $i=1\ldots 2n+1$. Пусть u_{2n+2} будет последнее решение единственного уравнения системы (II'), независимое от $u_1\ldots u_{2n+1}$.

Пусть $v_2=\varphi(u_1\ldots u_{2n+1};u_{2n+2})$ будет произвольная функция от них, подчиненная только одному условию заключать u_{2n+2}. Если не все определители матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{du_1}}{dx} & \dfrac{\overline{du_1}}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\[2ex] \dfrac{\overline{dv_2}}{dx} & \dfrac{\overline{dv_2}}{dy} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{0n}} \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A')$$

нули, можем принять v_2 за функцию, аналогичную u_2, и, поступая по предыдущему, найдем систему $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'')

$$u_1=c_1,\quad v_j=\Gamma_j\quad j=2\ldots 2n+1.$$

Эта система отлична от предыдущей, так как в силу уравнений $u_i=c_i$ $i=1\ldots 2n+1$ не следует, чтобы

$$v_2=\varphi(c_1\ldots c_{2n+1};u_{2n+2})$$

было равно постоянному.

Если же все определители матриссы (A') нули тождественно, то функция

$$u_2+\varphi(u_1\ldots u_{2n+1};u_{2n+2})$$

может быть взята за функцию, аналогичную u_2, и будет получена система $2n+1$ полных интегралов, отличная от системы $u_i=c_i$ $i=1\ldots 2n+1$.

Так как вид функции φ произвольный, имеем бесчисленное множество системы $2n+1$ полных интегралов, заключающих уравнение $u_1=c_1$:

$$u_1=c_1,\ u_2=c_2,\ u_3=c_3,\ldots u_{2n+1}=c_{2n+1};$$
$$u_1=c_1,\ \Phi(u_1\ldots u_{2n+1};u_{2n+2})=\Gamma_2,\ v_3=\Gamma_3,\ldots v_{2n+1}=\Gamma_{2n+1}$$
$$u_1=c_1,\ \Psi(u_1\ldots u_{2n+1};u_{2n+2})=K_2,\ w_3=K_3,\ldots w_{2n+1}=K_{2n+1}.$$

Если функции Φ, $\Psi \ldots$ заключают все решения $u_1 \ldots u_{2n+2}$, эти системы интегралов различны между собой, так как, напр., $\Psi(u_1 \ldots \ldots u_{2n+1};\, u_{2n+2})$ не есть функция от u_1, Φ, $v_3 \ldots v_{2n+1}$ только.

Таким образом, различие между этими двумя случаями определяется свойством матриссы, составленной из коэффициентов при $\frac{df}{dx}\ \frac{df}{dy}\ \frac{\partial f}{\partial p_{1-n1}}\ \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}$ уравнений (II′).

Она имеет вид:

$$(C)\qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial n_1}{\partial p_{0n}}, & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1}}, & \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\, p_{0n})}, & -\left(\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d)y, p_{1n-1}}\right) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} & -\dfrac{du_1}{dy}. \end{matrix}$$

Если $\triangle$, A, B, B_1, C означают определители ее

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2,$$

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})}, & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}\, p_{1n-1})} \\ -\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} -\left[\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{1n-1})}\right], & \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}\, p_{1n-1})} \\ -\dfrac{\bar{d}u_1}{dy} & \dfrac{du_1}{dp_{0n}} \end{vmatrix},$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{du_1}{dp_{0n}}, & \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-1}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})} \\ \dfrac{du_1}{dp_{1n-1}}, & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \dfrac{du_1}{dp_{0n}}, & -\left[\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \dfrac{\bar{d}\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(yp_{1n-1})}\right] \\ \dfrac{du_1}{dp_{1n-1}}, & -\dfrac{\bar{d}u_1}{dy} \end{vmatrix}$$

то не трудно убедиться, что

$$A = \triangle \frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) + B\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} + C\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}},$$

$$B = B_1.$$

§ 6.

Рассмотрим вопрос об интегрировании Pfaff'овой системы (I') в связи с поставленной выше задачей определения полного интеграла ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I).

Могут быть три случая:

$$1)\quad \frac{\partial(u_1 . u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0,$$

$$2)\quad \frac{\partial(u_1\ u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0,$$

но не все элементы $\frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{1n-1}}$, $\frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{0n}}$ равны нулю.

$$3)\quad \frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{1n-1}} = \frac{\partial u_{1,\,2}}{\partial p_{0n}} = 0.$$

Пусть

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0.$$

В этом случае полная система линейных уравнений (B') имеет вид

$$\frac{\bar{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad \frac{\bar{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B').$$

Так как она разрешима относительно $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, то ее независимые решения $u_i\ i = 1 \dots 2n+1$ независимы относительно $z, p_{10}, p_{01} \dots p_{1n-1}, p_{0n}$; так как уравнения $u_i = c_i\ i = 1 \dots 2n+1$ разрешимы относительно $z, p_{10}, p_{01} \dots p_{1n-1}, p_{0n}$, определенная из них функция $z = f(x, y, c_1 \dots c_{2n+1})$ есть полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I).

Этот случай распадается в свою очередь на два, в зависимости от того, будут ли два уравнения системы (II') независимы, или же одно уравнение есть следствие другого. Рассмотрим первый случай.

В этом случае есть только одна система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (II'), заключающая уравнения $u_1 = c_1$, и, следовательно, есть только один полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x, y, z, p_{10}, p_{01} \dots p_{1n-1}, p_{0n}) = c_1.$$

Найдем условия для функции u_1.

В этом случае все функции u_i $i=1\dots 2n+1$ суть решения системы (II′), Она, как эквивалентная системе (B'), должна быть разрешимой относительно $\frac{\partial f}{dx}$ и $\frac{\partial f}{dy}$. Поэтому, определитель

$$\triangle=\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\,\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2\neq 0.$$

Далее, она должна быть полной. Найдем условия для этого. Если систему (II′) разрешить относительно $\frac{\overline{df}}{dx}$, $\frac{\overline{df}}{dy}$, она получит вид:

$$\triangle\frac{\overline{df}}{dx}+A\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}+B\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0.$$

$$\triangle\frac{\overline{df}}{dy}+B\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0.$$

Чтобы она была полной, необходимо и достаточно, чтобы ей соответствующая Pfaff'ова система была сполна интегрируемой. Эта система имеет вид

$$\Omega_1=0\dots\Omega_{2n-1}=0,\ \triangle\, dp_{1n-1}-Adx-Bdy=0,\ \triangle\, dp_{0n}-Bdx-Cdy=0,$$

а условия ее полной интегрируемости суть

$$\begin{vmatrix}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{d\theta}{dy} & -p_{12} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_{12} & -p_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} & -p_{1n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0\\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0\\
-A & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \triangle & 0\\
-B & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \triangle\\
\frac{\partial}{dx} & \frac{\partial}{dy} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \frac{\partial}{\partial p_{11}} & \frac{\partial}{\partial p_{02}} & \dots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n}}\\
a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & d
\end{vmatrix}=0$$

где $a, b,\dots c, d$ суть коэффициенты при $dx, dy\dots dp_{1n-1}\ dp_{0n}$ этих уравнений.

Преобразовывая эти определители, как при выводе условий (A'), получим их в форме

$$\begin{vmatrix}
-A & -B & \triangle & 0\\
-B & -C & 0 & \triangle\\
\frac{\overline{d}}{dx} & \frac{\overline{d}}{d} & \frac{\partial}{dp_{1n-1}} & \frac{\partial}{dp_{0n}}\\
a & b & c & d
\end{vmatrix}=0.$$

Если a, b, c, d суть коэффициенты уравнений $\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_{2n-1} = 0$, условные уравнения суть тождества. Остаются только два условия:

$$\alpha = \begin{vmatrix} -A & -B & \triangle & 0 \\ -B & -C & 0 & \triangle \\ \dfrac{\bar{d}}{dx} & \dfrac{\bar{d}}{dy} & \dfrac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ -A & -B & \triangle & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad \beta = \begin{vmatrix} -A & -B & \triangle & 0 \\ -B & -C & 0 & \triangle \\ \dfrac{\bar{d}}{dx} & \dfrac{\bar{d}}{dy} & \dfrac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ -B & -C & \triangle & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем, что они сводятся к одному, и найдем его вид. Для этого выведем свойство определителей α, β, заключающееся в том, что

$$-\alpha \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \beta \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}$$

при произвольном виде входящей функции u_1.

Имеем, что

$$\triangle \frac{\bar{d}u_1}{dx} + A \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0,\quad \triangle \frac{\bar{d}u_1}{dy} + B \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0,$$

каков бы ни был вид функции n_1. Пользуясь этими тождествами, легко убедиться, что

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \triangle\Bigg[\triangle\left(\frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0n})}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(y, p_{0n})}\right) \\ - \frac{\bar{d}u_1}{dx}\left(\triangle \frac{\bar{d}\triangle}{dy} + B \frac{\partial \triangle}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial \triangle}{\partial p_{0n}}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1u-1}}\left(\triangle \frac{\bar{d}A}{dy} + B \frac{\partial A}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial A}{\partial p_{0n}}\right) \\ - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\left(\triangle \frac{\bar{d}B}{dy} + B \frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial B}{\partial p_{0n}}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \triangle\Bigg[\triangle\left(\frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0n})}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(r, p_{1n-1})} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{d}(\triangle, n_1)}{d(y, p_{0n})}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{dy}\left(\triangle \frac{\bar{d}\triangle}{dx} + A \frac{\partial \triangle}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial \triangle}{\partial p_{0n}}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left(\triangle \frac{\bar{d}B}{dx} + \right. \\ \left. + A \frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial B}{\partial p_{0u}}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\left(\triangle \frac{\bar{d}C}{dx} + A \frac{\partial C}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial C}{\partial p_{0n}}\right)\Bigg], \end{aligned}$$

или, проще, означая через $\dfrac{\delta}{\delta x}, \dfrac{\delta}{\delta y}$ операции соответственно

$$\triangle \frac{\bar{d}}{dx} + A \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} + B \frac{\partial}{\partial p_{0n}},\quad \triangle \frac{\bar{d}}{dy} + B \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial}{\partial p_{0n}},$$

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \triangle\Bigg[\triangle\left(\frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0u})}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(y, p_{0n})}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{dx}\frac{\delta \triangle}{\delta y} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta A}{\delta y} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta B}{\delta y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \triangle\Bigg[\triangle\left(\frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(B, u_1)}{d(y, p_{0n})}\right) - B\left(\frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{d}(\triangle, u_1)}{d(y, p_{0n})}\right) - \frac{\bar{d}u_1}{dy}\frac{\delta \triangle}{\delta x} - \frac{\partial n_1}{\partial p_{1n-1}}\delta B - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta C}{\delta x}. \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}\frac{\delta\triangle}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta A}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta B}{\delta y}=\frac{\bar{d}u_1}{dy}\frac{\delta\triangle}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta B}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta C}{\delta x}.$$

Так как

$$\frac{\delta u_1}{\delta y}=0,\quad \frac{\delta u_1}{\delta x}=0$$

при произвольном виде функции u_1, то

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u_1}{\delta y}\right)=0,\quad \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x}\right)=0.$$

Подставляя в первое тождество вместо $\frac{\delta u_1}{\delta y}$ его действительное выражение и производя действие символом $\frac{\delta}{\delta x}$, получим

$$\frac{\delta}{\delta x}\triangle\frac{\bar{d}u_1}{dy}+\frac{\delta B}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}+\frac{\delta C}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=-\triangle\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)-B\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)-$$
$$-C\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right).$$

Заменяя во второй части символ $\frac{\delta}{\delta x}$ его действительным выражением, переставляя порядок дифференцирования и помня, что

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)=\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-\frac{\bar{d}}{dy}\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}}-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)=\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dy}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

и что

$$A=\triangle\frac{\bar{d}}{dy}\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}+B\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}+C\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}},$$

получим, что

$$\frac{\delta\triangle}{\delta x}\frac{\bar{d}u_1}{dy}+\frac{\delta B}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}+\frac{\delta C}{\delta x}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=-\triangle\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)-B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right).$$

Из второго же тождества имеем, заменяя символ $\frac{\delta}{\delta x}$ его действительным выражением, что

$$\frac{\delta\triangle}{\delta y}\frac{\bar{d}u_1}{dx}+\frac{\delta A}{\delta y}\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}+\frac{\delta B}{\delta y}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=-\triangle\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\bar{d}u_1}{dx}\right)-A\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)-B\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right).$$

Поэтому, сравнивая оба тождества, имеем, что

$$\frac{\overline{du_1}}{dx}\frac{\delta\triangle}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta A}{\delta y}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta B}{\delta y}=\frac{\overline{du_1}}{dy}\frac{\delta\triangle}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\delta B}{\delta x}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\frac{\delta C}{\delta x}.$$

Поэтому

$$-\alpha\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=\beta\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}},\text{ ч и т. д.}$$

Так как α, β суть полиномы относительно производных от u_1, из последнего тождества следует, что α, β имеют вид

$$\alpha=-\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}},\ \beta=\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}.$$

Поэтому из условий

$$\alpha=-\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}=0,\ \beta=\omega\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0$$

в виду того, что $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}$ не нули одновременно, иначе было бы, что $\triangle=0$, следует, что $\omega=0$, и мы имеем только одно условие интегрируемости.

Оно имеет вид:

$$\triangle\left(\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-B\left(\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-$$

$$-\frac{\overline{du_1}}{dy}\left(\triangle\frac{\overline{d}\triangle}{dy}+B\frac{\partial\triangle}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial\triangle}{\partial p_0}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left(\triangle\frac{\overline{dA}}{dy}+B\frac{\partial A}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial A}{\partial p_{0n}}\right)-$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\left(\triangle\frac{\overline{dB}}{dy}+B\frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}}+C\frac{\partial B}{\partial p_{0n}}\right)=0,$$

или вид

$$\triangle\left(\frac{d(B,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(B,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-B\left(\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(x,p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(\triangle,u_1)}{d(y,p_{0n})}\right)-$$

$$-\frac{\overline{du_1}}{dy}\left(\triangle\frac{\overline{d}\triangle}{dx}+A\frac{\partial\triangle}{\partial p_{1n-1}}+B\frac{\partial\triangle}{\partial p_{0n}}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left(\triangle\frac{\overline{dB}}{dx}+A\frac{\partial B}{\partial p_{1n-1}}+\right.$$

$$\left.+B\frac{\partial B}{\partial p_{0n}}\right)-\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\left(\triangle\frac{\overline{dC}}{dx}+A\frac{\partial C}{\partial p_{1n-1}}+B\frac{\partial C}{\partial p_{0n}}\right)=0$$

по сокращении на $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}$.

Это есть дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка от функции u_1, линейное относительно вторых производных. Его порядок при определении искомой функции u_1 не понижается, так как оно заключает член $\triangle\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$[1]).

Если функция u_1 определена из него так, что $\triangle\neq 0$, система (II')— полная и разрешимая относительно $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Если u_i $i=1\ldots 2n+1$

---

[1]) Это дифференциальное уравнение найдено иным путем J. König'ом (l. c.).

суть ее $2n+1$ независимых решений, функция $z=f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$, определенная из системы $2n+1$ уравнений

$$u_i = c_i \quad i = 1 \ldots 2n+1$$

есть полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I), единственный, удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = c_1.$$

Рассмотрим второй случай, когда система (II′) сводится только к одному уравнению. В этом случае все определители матриссы (C), следовательно, и определитель $\triangle$, равны нулю тождественно. Итак,

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$, иначе было бы и $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0$, а следовательно,

$$\frac{\partial (u_1, u_2)}{\partial (p_{1n-1} p_{0n})} = 0.$$

Если же $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$, то независимыми определителями матриссы (C) могут быть $\triangle$, B, C. Но так как

$$\triangle \frac{\overline{d} u_1}{dy} + B \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} + C \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0$$

то независимые суть только $\triangle$, C. Таким образом, необходимо и достаточно, чтобы функция u_1 удовлетворяла в рассматриваемом случае условиям

$$\triangle = \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 = 0, \quad . \ . \ . \ (\mathrm{IV}')$$

$$C = \frac{\overline{d} u_1}{dx} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} - \frac{\overline{d} u_1}{dy} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 \frac{\overline{d}}{dy} \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Эти уравнения можно представить в ином виде: если λ, μ суть корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} \xi - \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (a);$$

функция u_1 должна удовлетворять одной из двух систем уравнений [1]):

[1]) В этом случае du_1 есть интегрируемая комбинация одной из двух систем дифференциальных уравнений характеристик n-ого порядка дифференциального уравнения (I) : $dy = \mu dz$, $dz = (p_{10} + \mu p_{01})\, dx, \ldots . dp_{0n-1} = (p_{1n-1} + \mu p_{0n})\, dx$,

$$dp_{1n-1} = \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Theta\right) dx - \lambda dp_{0n};\ dy = \lambda dx,\ dz = (p_{10} + \lambda p_{01})\, dx \ldots dp_{0n-1} =$$

$$= (p_{1n-1} + \lambda p_{0n})\, dx,\ dp_{1n-1} = \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\Theta}{dy^{n-2}}\right) dx - \mu dp_{0n},$$

соответствующих корням μ, λ.

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \mu \frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \cdot \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = 0, \quad . \quad . \text{ (IV}_1^1\text{)}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \frac{\overline{d}u_1}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \cdot \frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) = 0 \quad . \quad . \text{ (IV}_2^1\text{)},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Если функция u_1 удовлетворяет одной из двух систем (IV$_i^1$) (IV$_i^1$) и $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$, система (II^1) сводится только к одному уравнению

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II')}.$$

Функция u_2 определяется, как его решение, такое, что

$$\frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} \neq 0,$$

что всегда возможно, иначе уравнение $\frac{\partial(f, u_1)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$ было бы следствием (II'), что невозможно. Остальные функции $u_3 \dots u_{2n+1}$ определяются, как остальные независимые решения полной системы

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_1)}{d(z, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_1)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B').$$

Функция $z = f(x, y, c_1 \dots c_{2n+1})$, определенная из системы $2n+1$ уравнений $u_i = c_i \;\; i = 1 \dots 2n+1$ есть полный интеграл ранга $(n-2)$ дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x, y, z, p_{10}, p_{01} \dots p_{1n-1}, p_{0n}) = c_1.$$

В рассматриваемом случае есть бесчисленное множество таких полных интегралов, так как в этом случае есть бесчисленное множество различных систем полных интегралов Pfaff'овой системы (I'') $u_i = c_i \;\; i = 1 \dots 2n+1$, заключающих уравнение $u_1 = c_1$, и таких, что

$$\frac{\partial(u_1, u_1)}{\partial(p_{1n-1} p_{0n})} \neq 0.$$

Доказательство то же, что и в общем случае.

Дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$u_1(x, y, z, \dots p_{0n}) = c_1$$

находится в инволюции с данным (I).

Если v_1, v_2 два независимых решения какой-либо системы (IV$_1'$), (IV$_2'$), можно положить $u_1 = \varphi(v_1, v_2)$, где функция φ произвольна, лишь бы

$$\frac{\partial \varphi(v_1, v_2)}{\partial p_{1n-1}} \neq 0 \;\; ^{1)}.$$

[1]) В этом случае всякий интеграл данного уравнения (I) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi(v_1 v_2) = 0$$

при соответствующем виде функции φ. Goursat (l. c.).

Если $u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right)$ есть решение одной из систем (IV_1'), (IV_2'), а v_1 есть решение другой из них, то можно положить $u_2 = v_1$, лишь бы

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$$

и $\lambda \neq \mu$.

Если v_1, v_2 решения одной системы (IV), и w_1, w_2 решения другой, можно положить $u_1 = v_1 - \varphi(v_2)$, $u_2 = w_1 - \psi(w_2)$ (метод Darboux).

Если припомним роль решений систем (IV_1), (IV_2) при $n = 2$, можем следующим образом продолжить способ отыскания полного интеграла ранга $1 \ldots (n-2)$, заключающего $7 \ldots 2n+1$ произвольных постоянных:

Если ни одна система (IV) не имет при $n = 2$ решения, пробуем, не имеет ли она его при $n = 3$ [1]).

Если она имеет, и оно есть $u_1(x, y, z, p_{10} \ldots p_{12}, p_{03})$, при чем $\frac{\partial u_1}{\partial p_{12}} \neq 0$, ищем какое-либо решение u_2 уравнения

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{12})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{03})} = 0,$$

где

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{12}, p_{03})} \neq 0,$$

а интегрированием полной системы

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, p_{12}, p_{03})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{12}, p_{03})} = 0$$

остальные функции u_i $i = 3 \ldots 7$. Функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_7)$, определенная из уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 7$ есть полный интеграл ранга 1 с семью произвольными постоянными дифференциального уравнения (I) — один из бесчисленного множества их, удовлетворяющих дифференциальному уравнению третьего порядка

$$u_1(x, y, z \ldots p_{03}) = c_1,$$

находящемуся в инволюции с данным (I).

Если же ни одна система (IV'), (IV_2) не имеет решения при $n = 3$, пробуем, не имеет ли его какая-либо из них при $n = 4$ и т. д.

Между последовательными системами (IV) есть связь, выражающаяся двумя теоремами [2]).

Если $u_1(x, y, z \ldots p_{1m-1}, p_{0m})$ есть решение одной из систем (IV) при $n = m$, она есть решение всякой системы (IV) при $n > m$ и соответствующей тому же корню квадратного уравнения (a).

---

[1]) От значений n зависит вид символов $\frac{\overline{d}}{dx}$, $\frac{\overline{d}}{dy}$.

[2]) Goursat (l. c.).

Ни одна из систем (IV) при $n > 2$ и $\lambda \neq \mu$ не имеет больше одного решения n-ого порядка[1]), так как всякое иное решение этого порядка есть функция первого и решений низшего порядка[2]).

Изложенный способ заключается в том, чтобы зная функцию $u_1(x, y \dots p_{0n})$, найти решение u_2 уравнения

$$\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(y, p_{0n})} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (\mathrm{II}')$$

где

$$\frac{\partial\, u_1,\ u_2)}{\partial\,(p_{,1n-1}, p_{0n})} \neq 0,$$

и затем интегрированием полной системы

$$\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1,\ u_2)}{d\,(x, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0, \quad \frac{\overline{d}\,(f,\ u_1,\ u_2)}{d\,(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$$

найти остальные функции u_i $i = 3 \dots 2n + 1$ [3]). Система уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \dots 2n + 1$ есть полный интеграл Pfaff'овой системы (I''), заключающий уравнение $u_1 = c_1$ и разрешимый относительно z, p_{10}, $p_{01} \dots p_{1n-1}$, p_{0n}. Но функции $u_3 \dots u_{2n+1}$ суть также решения уравнения (II'). Мы, поэтому, по определении функции u_1 искали еще $2n$ решений урсвнения (II') $u_2 \dots u_{2n+1}$ так, чтобы система уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \dots 2n + 1$ была системой $2n + 1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I''), заключающей уравнение $u_1 = c_1$ и разрешимой относительно z, p_{10}, $p_{01} \dots p_{1n-1}$, p_{0n}.

Мы займемся решением более общей задачи и найдем и иные интегралы уравнения (I): зная функцию u_1 и зная все $2n + 2$ решений дифференциального уравнения (II') или, что то же, зная систему $2n + 2$ полных интегралов соответствующей Pfaff'овой системы, найти систему $2n + 1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I''), заключающую уравнение $u_1 = c_1$ и разрешимую относительно z, p_{10}, $p_{01} \dots p_{1n-1}$, p_{0n}. Pfaff'ова система, соответствующая уравнению (II'), имеет вид, если предположим, что функция u_1 удовлетворяет, напр., системе (IV'$_1$):

$$dy = \lambda dx,\ dz = (p_{10} + \lambda p_{01})\,dx,\ dp_{10} = (\theta + \lambda p_{11})\,dx,\ dp_{01} = (p_{11} + \lambda p_{02})\,dx \dots$$

$$\dots dp_{1n-2} = \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1}\right) dx,\ dp_{0n-1} = (p_{1n-1} + \lambda p_{0n})\,dx,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\, dp_{1n-1} = -\frac{\overline{d}u_1}{dx}\, dx,\quad \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\, dp_{0n} = -\frac{\overline{d}u_1}{dy} dx.$$

Пусть $y = y\,(x,\ x_0 \dots \overset{0}{p}_{0n})$, $z = z\,(x,\ x_0 \dots \overset{0}{p}_{0n}) \dots p_{0n} = p_{0n}\,(x, x_0 \dots \overset{0}{p}_{0n})$ будет система $2n + 2$ полных интегралов ее, главная относительно

---

1) Т. е. заключающего p_{1k-1}, p_{0k}, где k наиболее равно n.

2) К этим теоремам можно добавить еще одну, обратную первой, приведенной в тексте: если функция $u_7\,(x, y, z \dots p_{0m})$ есть решение какой-либо системы (IV) при $n > m$, она есть решение той же системы при $n = m$.

3) Этот путь указан J. König'ом (l. c.).

$x = x_0$. Рассмотрим формулы преобразования переменных $x, y, z \ldots p_{0n}$ к новым $x_0, y_0, z_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}$

$$x = \alpha - \alpha_0 + x_0,\ y = y(x, x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}), \ldots p_{0n} = p_{0n}(x, x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n})$$

где α — параметр. Так как $u_1(x \ldots p_{0n}) = c_1$ есть интеграл вышенаписанной системы, то в силу этих формул

$$u_1(x, y, z \ldots p_{0n}) = u_1(x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}).$$

Если, поэтому, переменные $x, y, z \ldots p_{0n}$ связаны условием $u_1(x, y, z \ldots p_{0n}) = c_1$, то новые переменные $x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}$ связаны условием $u_1(x_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}) = c_1$. Преобразуем этими формулами Pfaff'ову систему (I'')

$$\Omega_1 = 0 \ldots \Omega_{2n-1} = 0,$$

в которую уже полагаем внесенной зависимость $u_1 = c_1$. Найдем ее вид после преобразования. Найдем для этого

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha}, \ldots \frac{\partial \Omega_{2n-1}}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dz - p_{10}\,dx - p_{01}\,dy) = d\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_{10}}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial p_{01}}{\partial \alpha}dy - p_{01}\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} =$$
$$= d(p_{10} + \lambda p_{01}) - (\theta + \lambda p_{11})\,dx - (p_{11} + \lambda p_{02})\,dy - p_{01}\,d\lambda = \Omega_2 + \lambda \Omega_3.$$

Будем искать

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k},\ \frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k+1}$$

где $2k < 2n - 2$.

$$\frac{\partial \Omega_{2k}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(dp_{1k-1} - \frac{d^{k-1}\theta}{py^{k-1}}\,dx - p_{1k}\,dy\right) = d\frac{\partial p_{1k-1}}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)dx$$
$$- \frac{\partial p_{1k}}{\partial \alpha}dy - p_{1k}\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} = d\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}} + \lambda p_{1k}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \right.$$
$$+ (p_{10} + \lambda p_{01})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \ldots + \left(\frac{d^k\theta}{dy^k} + \lambda p_{1k-1}\right)\frac{\partial}{\partial p_{1k}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) +$$
$$\left. + (p_{1k+1} + \lambda p_{0k+2})\frac{\partial}{\partial p_{0k+1}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)\right]dx - \left(\frac{d^k\theta}{dy^k} + \lambda p_{1k+1}\right)dy - p_{1k}\,d\lambda;$$

или после простых преобразований

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)\Omega_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial p_{0k}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy_{k-1}}\right)\Omega_{2k+1} + \left(\frac{\partial}{\partial p_{1k}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right) + \lambda\right)\Omega_{2k+2} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial p_{0k+1}}\left(\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}}\right)\Omega_{2k+3}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2k+1} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dp_{0k} - p_{1k}\,dx - p_{0k+1}\,dy) = d\frac{\partial p_{0k}}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_{1k}}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial p_{0k+1}}{\partial \alpha}dy -$$
$$- p_{0k+1}\,d\frac{\partial y}{\partial \alpha} = d(p_{1k} + \lambda p_{0k+1}) - \left(\frac{d^k\theta}{dy^k} + \lambda p_{1k+1}\right)dx -$$
$$- (p_{1k+1} + \lambda p_{0k+2})\,dy - p_{0k+1}\,d\lambda = \Omega_{2k+2} + \lambda \Omega_{2k+3}.$$

Найдем, наконец,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(dp_{1n-2}-\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}dx-p_{1n-1}dy\right)=d\frac{\partial p_{1n-2}}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy_{n-2}}\right)dx-$$

$$-\frac{\partial p_{1n-1}}{\partial\alpha}dy-p_{1n-1}d\frac{\partial y}{\partial\alpha}=d\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}+\lambda p_{1n-1}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\right.$$

$$+\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+(p_{10}+\lambda p_{01})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\ldots+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}+\lambda p_{1n-1}\right)\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+$$

$$\left.+(p_{1n-1}+\lambda p_{0n})\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}-\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right]dx+$$

$$+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy-p_{1n-1}d\lambda,$$

или после простых преобразований

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2}=\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)(dy-\lambda dx)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_1+\ldots+$$

$$+\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_{2n-1}+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}dp_{1n-1}+\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}dp_{0n}+\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx+$$

$$+\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy+\lambda dp_{1n-1}.$$

Заменяя $\frac{\partial\theta}{\partial p_{11}}$, $\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}}$ через соответственно $-(\lambda+\mu)$, $-\lambda\mu$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Omega_{2n-2}=\left[\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}+\mu\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}+\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right](dy-\lambda dx)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_1+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\Omega_{2n-1}-\mu\left[\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx+\frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy+dp_{1n-1}+\lambda dp_{0n}\right].$$

Но

$$\frac{\overline{du_1}}{dx}+\mu\frac{\overline{du_1}}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)=0$$

так как функция u_1 удовлетворяет системе (IV_1').

Далее

$$du_1 = \frac{\overline{du_1}}{dx}dx + \frac{\overline{du_1}}{dy}dy + \frac{\partial u_1}{\partial z}\Omega_1 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}\Omega_{2n-1} +$$

$$+ \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}dp_{1n-1} + \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}dp_{0n} = 0,$$

или, так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}},$$

$$\frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy + dp_{1n-1} + \lambda dp_{0n} = -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\Omega_1 - \ldots - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\Omega_{2n-1}$$

Поэтому, окончательно,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2n-2} = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) + \mu \frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right]\Omega_1 + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \mu \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right)\right]\Omega_{2n-1}.$$

Найдем $\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2n-1}$.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Omega_{2n-1} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dp_{0n-1} - p_{1n-1}dx - p_{0n}dy) = d\frac{\partial p_{0n-1}}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_{1n-1}}{\partial \alpha}dx - \frac{\partial p_{0n}}{\partial \alpha}dy -$$

$$- p_{0n}d\frac{\partial y}{\partial \alpha} = d(p_{1n-1} + \lambda p_{0n}) + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy - p_{0n}d\lambda =$$

$$= dp_{1n-1} + \lambda dp_{0n} + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dx}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dx + \frac{\frac{\overline{du_1}}{dy}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}dy = -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial z}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\Omega_1 - \ldots - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\Omega_{2n-1}.$$

Итак, дифференциальные выражения $\Omega_1 \ldots \Omega_{2n-1}$, выраженные в новых переменых $z_0 \ldots \overset{0}{p}_{0n}$ и зависящие от параметра a, удолетворяют дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \alpha_i, \Omega, + \ldots + \alpha_{i2n-1}\Omega_{2n-1}$$

$$i = 1 \ldots 2_n - 1,$$

линейным относительно $\Omega, \ldots \Omega_{2n-1}$. Поэтому, они имеют вид

$$\Omega_i = \beta_i, \Omega^0, + \ldots + \beta_{i2n-1}\Omega^0{}_{2n-1}, \quad i = 1 \ldots 2n - 1,$$

где Ω^0_i $i = 1 \dots 2n - 1$ суть их начальные значения при $\alpha = \alpha_0$ и имеют вид

$$\Omega^0_1 = dz_0 - p^0_{10}\, dx_0 - p^0_{01}\, dy_0, \quad \Omega^0_2 = dp^0_{10} - \theta_0 dx_0 - p^0_{11}\, dy_0 \dots$$

$$\Omega^0_{2n-2} = dp^0_{1n-2} - \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)_0 dx_0 - p^0_{1n-1}\, dy_0,$$

$$\Omega^0_{2n-1} = dp^0_{0n-1} - p^0_{1n-1}\, dx_0 - p^0_{0n}\, dy_0,$$

где $\theta_0, \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0, \dots \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)_0$ есть результат подстановки $x_0 \dots p^0_{0n}$ вместо $x, \dots p_{0n}$ в $\theta, \frac{d\theta}{dy} \dots \frac{d^{n-2}\theta}{dy_{n-2}}$.

Отсюда вытекает следующий способ определения системы $2n + 1$ интегралов Pfaff'вой системы (I^1), заключающей уравнение $u_1 = c_1$. Достаточно проинтегрировать Pfaff'ову систему $\Omega^0_1 = 0 \dots \Omega^0_{2n-1} = 0$ $2n - 1$ уравнений помощью $2n + 2$ интегралов

$$u_1(z_0 \dots p^0_{0n}) = c_1, \quad v_j(x_0, \dots p^0_{0n}) = 0 \quad {}_j = 2, \dots 2n + 2$$

что всегда возможно и при том бесчисленным множеством способов, и исключить $x_0 \dots p^0_{0n}$ из этих уравнений и уравнений $y = y(x, z_0 \dots p^0_{0n})$ $\dots p_{n0} = p_{n0}(x, x_0 \dots p^0_{0n})$.

Если полученная система $2n + 1$ интегралов разрешается относительно $z, p_{10}, p_{01} \dots p_{1n-1}, p_{0n}$, она есть искомая. Функция $z = f(x, y)$, определенная из нее, есть интеграл дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий уравнению $u_1(x, y, z \dots p_{0n}) = c_1$. Удобнее всего поступить следующим образом: ищем $2n + 3$ функций $x_0(\omega), \dots p^0_{0n}(\omega)$ параметра ω, удовлетворяющих уравнениям

$$u_1(x_0 \dots p^0_n) = c_1, \quad \frac{dz_0}{d\omega} - p^0_{01}\frac{dx_0}{d\omega} - p^0_{01}\frac{dy_0}{d\omega} = 0 \dots$$

$$\frac{dp^0_{0n-1}}{d\omega} - p^0_{1n-1}\frac{dx_0}{d\omega} - p_{0n}\frac{dy_0}{d\omega} = 0$$

и исключаем параметр ω из $2n + 2$ уравнений

$$y = y(x, x_0(\omega), \dots p^0_{0n}(\omega)\,], \dots p_{0n} = p_{0n}\,[x, x_0(\omega), \dots p^0_{0n}(\omega)].$$

Если какая-либо из систем (IV'_1), (IV'_2) допускает два независимых решения, можно найти интегрированием двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений интеграл Cauchy, представляющий поверхность, проходящую через данный интегральный пояс N-го порядка

$$x = x(\omega) \dots p_{0n} = p_{0n}(\omega).$$

Про этот метод отыскания интеграла можно сказать то же, что и о методе определения полного интеграла ранга $n - 2$. Если ни одна система (IV) при $n = 2$ не имеет решения, ищем, не имеет ли его какая-либо система (IV) при $n=3$; если есть решение $u_1(x\dots p_{03})$, находим изложенным способом интеграл, удовлетворяющий и уравнению $u_1(x\dots p_{03})=c_1$ и т. д. [1]).

§ 8

До сих пор мы получали результаты по большей части известные, по одним и тем же методам. Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})}=0$$

но не все элементы $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{0n}}$ нули.

В этом случае полная система (B') не разрешается относительно $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Поэтому, система $2n+1$ полных интегралов $u_i=c_i$ $i=1\dots 2n+1$ Pfaff'овой системы (I″) неразрешима относительно $z, p_{01}, p_{01}, \dots p_{1n-1}, p_{0n}$ и, следовательно, она не дает интеграла данного дифференциального уравнения (I). Но из нее можно, за исключением одного случая, получить интеграл $z=f(x,y,c_1\dots c_{2n})$, заключающий $2n$ произвольных постоянных $c_1,\dots c_{2n}$ и такой, что по крайней мере одна из систем:

$$z=f(x,y,c_1..c_{2n}), p_{10}=\frac{\partial f}{\partial x}, p_{01}=\frac{\partial f}{\partial y}\dots p_{0n-1}=\frac{\partial^{n-1}f}{\partial y^{n-1}}, p_{1n-1}=\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}};$$

$$z=f(x,y,c_1..c_{2n}), p_{10}=\frac{\partial f}{\partial x}, p_{01}=\frac{\partial f}{\partial y}\dots p_{0n-1}=\frac{\partial^{n-1}f}{\partial y^{n-1}}, p_{0n}=\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

разрешима относительно произвольных постоянных $c_1\dots c_{2n}$, занимающий промежуточное место между полными интегралами ранга $n-3$ и $n-2$.

Докажем, что в этом случае $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}$ не нули одновременно и что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_3)}{d(y, p_{1n-1})}\neq 0.$$

Пусть $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=\dfrac{\partial u_2}{\partial u_{1n-1}}=0$. Тогда из системы (II'), которой удовлетворяют функции u_1, u_2 следовало бы, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{0n})}=\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})}=0$$

---

[1]) Общие указания на способ интегрирования дифференциального уравнения (I путем отыскания общего решения u_1 одной из систем $(IV_1')(IV_2')$ при $n>2$ даны впервые G. Darboux (Comptes Rendus, t. LXX, 1870).

и так как $\dfrac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$, при чем $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{0n}}$ уже не нули одновременно, следовало бы, что все определители матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{d} u_1}{dx} & \dfrac{\overline{d} u_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \dfrac{\overline{d} u_2}{dx} & \dfrac{\overline{d} u_2}{dy} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A')$$

равны нулю, что невозможно. Итак, $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{0n}}$ не нули одновременно. Теперь докажем, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0.$$

Если бы

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0,$$

то так как

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0,$$

при чем $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}$ не нули одновременно, следовало бы, что все определители матриссы

$$\begin{matrix} \dfrac{\overline{d} u_1}{dy} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \dfrac{\overline{d} u_2}{dy} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{0n}} \end{matrix}$$

были бы равны нулю и мы имели бы, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d\,y, p_{0n})} = 0,$$

а потому из второго уравнения системы (II')

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})} = 0$$

следовало бы, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} = 0.$$

Если же

$$\frac{\overline{d}(u_1\ u_2)}{d(x, p_{1n-1})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n-1})} = 0, \quad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(p_{1n-1} \cdot p_{0n})} = 0$$

где $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}, \dfrac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}}$ не нули одновременно, все определители матриссы (A') были бы равны нулю, что невозможно.

Итак,

$$\frac{\overline{d}(u_1\, u_2)}{d(y,\, p_{1n-1})} \neq 0,$$

и полная система (B') имеет вид

$$\frac{\overline{d}(f,\, u_1,\, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0,\ \frac{\overline{d}(f,\, u_1,\, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0. \quad \dots\dots \quad (B')$$

Так как она разрешима относительно $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}$, функции $u_i\ i = 1\dots 2n+1$ независимы относительно $y,\ z,\ p_{10},\ p_{01}\dots p_{1n-1}$, и система уравнений $u_i = c_i\quad i = 1\dots 2n+1$ разрешима относительно тех же переменных.

Чтобы решить поставленную выше задачу, найдем дифференциальные уравнения, зависящие только от функции u_1, которым удовлетворяют в этом случае все функции $u_i\ i = 1\dots 2n+1$.

Именно, уравнение

$$\frac{\overline{d}(f,\, u_1,\, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0$$

имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\ \frac{\overline{d}(u_1,\, u_2)}{d(y,\, p_{0n})} - \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\ \frac{\overline{d}(u_1,\, u_2)}{d(y,\, p_{1n-1})} = 0.$$

Из двух функций u_1, u_2 хоть одна такова, что ее производные по p_{1n-1}, p_{0n} одновременно не нули. Пусть она будет u_1. Из вышенаписанного уравнения и тождества

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\ \frac{\overline{d}(u_1,\, u_2)}{d(y,\, p_{0n})} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\ \frac{\overline{d}(u_1,\, u_2)}{d(y,\, p_{1n-1})} = 0$$

следует, так как

$$\frac{\overline{d}(u_1,\, u_2)}{d(y,\, p_{1n-1})} \neq 0,$$

что

$$\frac{\partial(f,\, u_1)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют все функции u_i. Из этого уравнения следует, что $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0$.

Иначе, это уравнение имело бы вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = 0$$

или, так как уже $\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

а, следовательно, и $\frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} = 0$ Таким образом, мы имели бы, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = \frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

что невозможно.

Далее, все функции u_i $i = 1 \ldots 2n + 1$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y,\ p_{0n})} = 0$$

— второму системы (II'). Таким образом все функции u_i $i = 1 \ldots 2n + 1$ удовлетворяют двум независимым уравнениям

$$\frac{\partial(f, u_1)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} = 0,\ \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{0n})} = 0,\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right) \quad . (V^1)$$

Выведем уравнение, которому в этом случае удовлетворяет функция u_1. Так как эти два дифференциальных уравнения в $2n + 3$ переменных независимых имеют $2n + 1$ независимых решений, первое уравнение системы (II¹)

$$\frac{\overline{d}f}{dx}\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} + \frac{\overline{d}f}{dy}\frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-1}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})} + \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})} -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{1n-1})}\right) = 0,$$

которому также удовлетворяют функции u_i, должно быть их следствием. Поэтому, два независимых определителя матриссы

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & -\frac{\overline{d}u_1}{dx} & -\frac{\overline{d}u_1}{dy} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & -\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})}, & \frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{0n})}, & -\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{1n-1})}\right) \end{matrix}$$

должны быть равны нулю. Имеем, поэтому, условия:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & \frac{\overline{d}u_1}{dy} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \frac{\partial\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{\partial(p_{0n}, p_{1n-1})}, & \frac{\overline{d}u_1}{dx} + \frac{\overline{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y, p_{1n-1})} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} & -\frac{\bar{d} u_1}{dx} & \frac{\bar{d} u_1}{dy} \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}, & \frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\, p_{0n})}, & \frac{\bar{d} u_1}{dx} + \frac{\bar{d}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}, u_1\right)}{d(y,\, p_{1n-1})} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\bar{d} u_1}{dy}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2\right] = 0.$$

Таким образом функция u_1 удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial n_1}{\partial p_{0n}}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right)^2 = 0.$$

Поэтому, если λ, μ суть корни квадратного уравнения

$$\xi^2 + \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} \xi - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} = 0 \quad (a)$$

систему (V′), которой удовлетворяют все функции u_i, можно представить в одном из двух видов

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\bar{d}(f,\, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda \frac{\bar{d}(f,\, u_1)}{d(y, p_{1n-1})} = 0,$$

где

$$\frac{\partial n_1}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{V}'_1),$$

или в виде

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \mu \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\bar{d}(f,\, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \mu \frac{\bar{d}(f,\, u_1)}{d(y, p_{1n-1})} = 0,$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \mu \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{V}'_2).$$

Каждая из них полная. Докажем это для системы (V'_1).

Если разделить второе уравнение на $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$, то коэффициенты его при

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \ldots \frac{\partial f}{\partial p_{1n-3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{0n-2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$$

суть

$$1,\ \lambda, \ldots \frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} + \lambda p_{1n-2},\ p_{1n-2} + \lambda p_{0n-1},\ \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1},\ p_{1n-1} + \lambda p_{0n},$$

$$-\frac{\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \dfrac{\overline{d}u_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}.$$

Мы видим, что только три последних коэффициента при $\frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$ зависят от p_{1n-1}, p_{0n}. Поэтому, комбинируя известным способом первое уравнение со вторым, разделенным на $\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$, найдем, что во вновь полученном уравнении коэффициенты при $\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\ldots \frac{\partial f}{\partial p_{0n-2}}$ — нули. Остается рассмотреть коэффициенты при $\frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}}$, $\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}$. Они суть

$$\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1}\right) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}} + \lambda p_{1n-1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{0n}}(p_{1n-1} + \lambda p_{0n}) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}(p_{1n-1} + \lambda p_{0n}),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \dfrac{\overline{d}u_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda \dfrac{\overline{d}u_1}{dy}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}}\right) - \frac{\overline{d}\lambda}{dx} - \lambda \frac{\overline{d}\lambda}{dy}.$$

Первые два после легкого вычисления дают:

$$\frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} - \lambda \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} - \lambda^2 = 0,\ \lambda - \lambda = 0.$$

Что касается третьего, то переставляя порядок дифференцирования, и помня что

$$\frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}} - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},\ \frac{\overline{d}}{dx}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{0n}}\left(\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right) - \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}},\ \frac{\partial\theta}{\partial p_{11}} = -(\lambda + \mu),\ \frac{\partial\theta}{\partial p_{02}} = -\lambda\mu,$$

найдем, что и он равен нулю. Итак, системы (V'_1) и (V'_2) — полные.

Обратно, если функция u_1 определена из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

или уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \mu \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right),$$

а функции u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ суть $2n+1$ независимых решений полной системы соответственно (V_1'), или (V_2'), то $2n+1$ уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ есть система полных интегралов Pfaff'овой системы (I''), неразрешимая относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}$, но разрешимая относительно $y, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}$.

Пусть u_i $i = 1 \ldots 2n+1$ независимые решения полной системы (V_1')

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda \frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{1n-1})} = 0 \quad . \ . \ . \quad (V_1').$$

Среди них есть такое решение, напр., u_2, что

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0,$$

иначе уравнение

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{1u-1})} = 0$$

было бы следствием уравнений (V_1'), что невозможно, так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Можно показать, что система двух уравнений

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (B')$$

эквивалентна системе (V_1').

Именно, из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

и тождества

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0$$

следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} + \frac{\partial f}{d p_{1n-1}} \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \frac{\overline{d}f}{dy} \frac{\partial(u_1, u_1)}{\partial(p_{1u-1}, p_{0u})} = 0$$

или, так как

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1},)} = -\lambda \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = -\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})},$$

$$\frac{\overline{d}f}{dy}\,\frac{\partial(u_1, n_2)}{\partial(p_{1n-1}, p_{0n})} - \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\,\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{0n})} + \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\,\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0$$

или, наконец,

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0.$$

Далее докажем, что уравнение

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0$$

есть следствие уравнения

$$\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda\,\frac{\overline{d}(f, u_1)}{d(y, p_{1n-1})} = 0.$$

Именно, независимые определители матриссы их коэффициентов

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}},\ \lambda\frac{\partial u_1}{\sigma p_{1n-1}},\ -\left(\frac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\frac{\overline{d}u_1}{dy}\right)$$

$$\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})},\ -\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(r, p_{1n-1})},\ \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, y)}$$

суть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial n_1}{\partial p_{1n-1}} & \lambda\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \\ \dfrac{\overline{d}(u_1 u_2)}{d(y, p_{1n-1})} & -\dfrac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} \end{vmatrix} = -\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\left[\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-1})} + \lambda\,\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})}\right] = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial n_1}{\sigma p_{1n-1}} & -\left(\dfrac{\overline{d}u_1}{dx} + \lambda\dfrac{\overline{d}u_1}{dy}\right) \\ \dfrac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, u_{1n-1})}, & \dfrac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, y)} \end{vmatrix} = \frac{\overline{d}u_1}{dy}\left[\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(x, p_{1n-})} + \lambda\,\frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})}\right] = 0.$$

Итак, система

$$\frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1}, p_{0n})} = 0\quad \frac{\overline{d}(f, u_1, u_2)}{d(x, y, p_{1n-1})} = 0\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (B')$$

эквивалентна системе (V_1'), или системе (V_2'), так как

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\quad \frac{\overline{d}(u_1, u_2)}{d(y, p_{1n-1})} \neq 0.$$

Следовательно, она—полная. Поэтому Pfaff'ова система

$$\Omega_1 = 0\ .\ .\ .\ \Omega_{2n-1} = 0,\ du_1 = 0,\ du_2 = 0$$

—сполна интегрируемая, и так как функции n_i $i = 1 \ldots 2n+1$ суть независимые решения системы (B'), система $2n+1$ уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n+1$ есть система $2n+1$ полных интегралов Pfaff'овой системы (I'')

$$\Omega_1 = 0\ .\ .\ .\ \Omega_{2n-1} = 0,$$

неразрешимая относительно z, p_{10}, $p_{01}, \dots p_{1n-1}$, p_{0n}, но разрешимая относительно y, z, p_{10}, $p_{01}, \dots p_{1n-1}$. Таким образом, рассматриваемый случай при $n > 2$ всегда существует и даже для каждого из корней λ, μ квадратного уравнения (a), между тем как аналогичный случай при $n = 2$ возможен только для дифференциального уравнения (I) специального типа.

В этом случае из системы уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \dots 2n+1$ нельзя найти полного интеграла ранга $(n-2)$ с $2n+1$ произвольными постоянными дифференциального уравнения (I), но можно, как замечено выше, найти, за исключением одного случая, его интеграл с $2n$ произвольными постоянными, промежуточный между полным интегралом ранга $n-2$ и $n-3$.

Если $u_i(x \dots p_{0n})$ $i = 1 \dots 2n+1$ есть какая-либо система $2n+1$ независимых решений какой-либо системы уравнений (V_1') или (V_2'), положим, системы (V_1'), то Pfaff'ова система (1″) может быть представлена в виде

$$\Omega_\alpha = \sum_1^{2n+1} i \; U_i^\alpha \; du_i = 0 \qquad \alpha = 1 \dots 2n-1.$$

Так как функции u_i независимы оеносительно y, z, $p_{10}, \dots p_{1n-1}$, то $2n$ из них, напр., $u_1 \dots u_{2n}$ $\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right)$ независимы относительно z, $p_{10}, \dots p_{1n-1}$.

Можно выбрать систему решений u_i $i = 1 \dots 2n+1$ так, что в силу уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \dots 2n$ уравнения $U_{2n+1}^\alpha = 0$ $\alpha = 1 \dots 2n+1$ сводятся к одному $U = 0$ и так, что уравнения $u_j = c_j$ $j = 1 \dots 2n$, $U = 0$ определяют переменные z, $p_{10}, \dots p_{0n}$. Тогда эти последние представляют систему $2n+1$ интегралов Pfaff'овой системы (I″), разрешимую относительно z, $p_{10} \dots p_{0n}$, и функция $z = f(x, y, c_1 \dots c_{2n})$, определенная из них, будет интеграл дифференциального уравнения (I). Он имеет следующее свойство. Так как функция u_j $j = 1 \dots 2n$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{df}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

они имеют вид

$$u_j = v_j(x, \dots p_{0n-1};\; u) \qquad j = 1 \dots 2n,$$

где $u = p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$.

Откуда

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{2n},\, U)}{\partial(z \dots p_{0n})} = \left(\frac{\partial U}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial U}{\partial p_{1n-1}}\right) \frac{\partial(u_1 \dots u_{2n})}{\partial(z \dots p_{1n-1})}.$$

Но

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{2n},\, U)}{\partial(z \dots p_{0n})} \neq 0,$$

поэтому $\dfrac{\partial U}{\partial p_{1u-1}}$, $\dfrac{\partial U}{\partial p_{0z}}$ не нули одновременно и, следовательно, если разрешим уравнения $u_j = c_j$ $j = 1 \ldots 2n$, $U = 0$ в форме

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

хоть одна из систем

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots p_{0n-1} = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}},\ p_{1n-1} = \frac{\partial^n f}{\partial x\, \partial y^{n-1}}$$

и

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots p_{0n-1} = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}},\ p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

будет разрешима относительно $2n$ произвольных постояных $c_1 \ldots c_{2n}$. Кроме того функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n})$, определится разрешением только уравнений $u_j = c_j$ $i = 1 \ldots 2n$ относительно $z, p_{10} \ldots p_{0n-1}$, и без помощи уравнения $U = 0$. Этот интеграл можно рассматривать, как промежуточный между полными интегралами ранга $n - 3$ и $n - 2$. Остается только доказать, что указанный выше выбор решений u_i $i = 1 \ldots 2n + 1$ системы ($\mathrm{V}_1{}'$) возможен.

Найдем вид коэффициентов U^{α}_{2n+1} $\alpha = 1 \ldots 2n - 1$. Приравнивая в тождестве

$$\Omega_1 = \sum_1^{2n+1} i\, U'_i\, du_i$$

коэффициенты при $dy, \ldots dp_{1n-1}$, получим $2n + 1$ уравнений

$$-p_{01} = \sum_1^{2n+1} i\, U'_i \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

$$1 = \sum_1^{2n+1} i\, U'_i \frac{\partial u_i}{\partial z}$$

$$0 = \sum_1^{2n+1} i\, U'_i \frac{\partial u_i}{\partial p_{10}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \sum_1^{2n+1} i\, U'_i \frac{\partial u_i}{\partial p_{1n-1}},$$

из которых имеем

$$U^1_{2n+1} = -\frac{\dfrac{\partial (u_1 \ldots u_{2n})}{\partial (z, p_{10} \ldots p_{1n-1})} p_{01} + \dfrac{\partial (u_1 \ldots u_{2n})}{\partial (y, p_{10} \ldots p_{1n-1})}}{\triangle}$$

где

$$\triangle = \frac{\partial (\partial_1 \ldots u_{2n+1})}{\partial (y, z, p_{10} \ldots p_{1n-1})}.$$

Подобным же образом найдем, что

$$U^{2k}_{2n+1} = \frac{\dfrac{\partial (u_1 \ldots u_{2n})}{\partial (y, z, \ldots p_{0k-1}, p_{0k}, \ldots p_{1n-1})} - p_{1k} \dfrac{\partial (u_1 \ldots u_{2n})}{\partial (z, p_{10}, \ldots p_{1n-1})},}{\triangle}$$

$$U_{2n+1}^{2k+1} = -\frac{\dfrac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{1k-1}, p_{1k}, \ldots p_{1n-1})} + p_{0k+1}\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})}}{\Delta}.$$

$$k = 1 \ldots n-1.$$

Таким образом, уравнения $U_{2n+1}^{\alpha} = 0$ $\alpha = 1 \ldots 2n-1$ имеют вид

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, p_{10} \ldots p_{1n-1})} + p_{01}\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{0k-1}, p_{0k} \ldots p_{1n-1})} - p_{1k}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})} = 0$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{1k-1}, p_{1k} \ldots p_{1n-1})} + p_{0k+1}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0$$

$$k = 1 \ldots n-2$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, \ldots p_{0n-2}, p_{0n-1}, p_{1n-1})} - p_{1n-1}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z, p_{10} \ldots p_{1n-2}, p_{1n-1})} + p_{0n}\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z, \ldots p_{1n-1})} = 0.$$

Первое уравнение последней пары может быть заменено уравнением

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{0n-2}, p_{0n-1}, p_{1n-1})} - \lambda\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{1n-2}, p_{1n-1})} -$$

$$-(p_{1n-1} + \lambda p_{0n})\frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})} = 0.$$

В виду того, что функции u_j $j = 1 \ldots 2n$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

они имеют вид

$$u_1 = v_1(x, y, z \ldots p_{0n-1}, u)$$
$$u_j = v_j(x, y, z \ldots p_{0n-1}, u_1) \quad j = 2 \ldots 2n$$

где $u = p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$. Откуда

$$u = p_{1n-1} + \lambda p_{0n} = \psi(x, y, z \ldots p_{0n-1}, u_1).$$

Подставляя вместо u_j $j = 2 \ldots 2n$ и вместо $p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$ их выражения через $x \ldots p_{0n-1}$, u_1, напишем эти уравнения по сокращении на $\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}$ в форме

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, p_{10} \ldots p_{0n-1})} + p_{01}\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{0k-1}, p_{0k} \ldots p_{0n-1})} - p_{1k}\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{1k-1}, p_{1k}, \ldots p_{0n-1})} + p_{0k+1}\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$k = 1 \ldots n-2$$

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{0n-2}, p_{0n-1})} - \lambda\frac{\partial(v_2 \ldots v_2)}{\partial(y, z \ldots p_{1n-2})} - \psi\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(y, z \ldots p_{1n-2})} + p_{0n}\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

где

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z \ldots p_{0n-1})} = \frac{\partial(u_1 \ldots u_{2n})}{\partial(z \ldots p_{1n-1})} : \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0.$$

Если вместо переменной независимой p_{1n-1} введем новое u_1 по формуле $u_1(x, y, z \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = u_1$, уравнения (VI) сохраняют свой вид с той разницей, что вместо функции $u_1(x, y \ldots p_{0n})$ станет новое переменное u_1. Мы видим, что только последнее уравнение заключает переменное p_{0n}, так как

$$\frac{\partial(v_2 \ldots v_{2n})}{\partial(z, p_{10} \ldots p_{0n-1})} \neq 0.$$

Если в силу уравнений $u_1 = c_1$, $v_2 = c_2 \ldots v_{2n} = c_{2n}$ они должны сводиться к одному, определяющему с уравнениями $u_1 = c_1$, $v_2 = c_2, \ldots$ $\ldots v_{2n} = c_{2n}$ переменные z, $p_{10} \ldots p_{0n-2}$, u_1, p_{0n}, то этим последним может быть только последнее уравнение. Необходимое и достаточное условие для этого состоит в том, чтобы все уравнения (VI), кроме последнего, были тождествами, так как они не заключают ни p_{0n}, ни $c_1 \ldots c_{2n}$. Заменяя функцию ψ снова через $p_{1n-1} + \lambda p_{0n}$, искомые функции $v_2 \ldots v_{2n}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\overline{d}(v_2 \ldots v_{2n})}{d(y, p_{10}, \ldots p_{0n-1})} = 0, \quad \frac{\overline{d}(v_2 \ldots v_{2n})}{d(y, z \ldots (p_{1k-1}) \ldots p_{0n-1})} = 0,$$

$$\frac{\overline{d}(v_2 \ldots v_{0n})}{d(y, z \ldots (p_{0k}) \ldots p_{0n-1})} = 0$$

$$k = 1 \ldots n-2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(VI}_1\text{)}$$

$$\frac{\overline{d}(v_2 \ldots v_{2n})}{d(y, z, p_{10} \ldots p_{0n-2}, p_{0n-1})} - \lambda\frac{\overline{d}(v_2 \ldots v_{2n})}{d(y, z, p_{10} \ldots p_{1n-2})} = 0,$$

где символ $(p_{\alpha\beta})$ указывает пропуск переменной $p_{\alpha\beta}$ и

$$\frac{\overline{d}(v_2 \ldots v_{2n})}{d(y, r \ldots s)} = \begin{vmatrix} \frac{\overline{d}v_2}{dy}, & \frac{\partial v_2}{\partial r} \ldots & \frac{\partial v_2}{\partial s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\overline{d}v_{2n}}{dy}, & \frac{\partial v_{2n}}{\partial r} \ldots & \frac{\partial v_{2n}}{\partial s} \end{vmatrix};$$

$$\frac{\overline{d}v}{dy}=\frac{\partial v}{\partial y}+p_{01}\frac{\partial v}{\partial z}+p_{11}\frac{\partial v}{\partial p_{10}}+0\frac{\partial v}{\partial p_{01}}+\ldots+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial v}{\partial p_{1n-2}}+p_{0n}\frac{\partial v}{\partial p_{0n-1}}$$

и $\overline{p}_{1n-1}$ есть выражение переменного p_{1n-1} из уравнения

$$u_1(x,\ y\ldots p_{1n-1},\ p_{0n})=u_1.$$

Эти уравнения можем заменить им эквивалентными.

Рассмотрим матриссу

$$\begin{array}{l}\frac{\overline{d}v_2}{dy},\ \frac{\partial v_2}{\partial z},\ \frac{\partial v_2}{\partial p_{10}},\ldots\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}},\ \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}},\ \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\\ \cdot\\ \frac{\overline{d}v_{2n}}{dy},\ \frac{\partial v_{2n}}{\partial z},\ \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{10}},\ldots\frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{1n-2}},\ \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{0n-1}},\ \frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_{2n}}{\partial p_{1n-2}},\end{array}$$

имеющую $2n-1$ строк и $2n+1$ колонн, и определители $2n-1$-ой степени, получающиеся из нее вычеркиванием двух каких-либо средних колонн, кроме первой и последней. Эти определители или нули тождественны, или первые части уравнений (VI_1), или они же, умноженные на λ. Поэтому, мы можем заменить систему (VI_1) ей эквивалентной, приравнивая нулю эти определители. Мы получим

$$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}=(2n-1)(n-1)$$

равенств. Разлагая эти определители по минорам второй степени первой и последней колонны, мы получим $(2n-1)(n-1)$ равенств линейных, однородных относительно $(2n-1)(n-1)$ величин вида

$$\frac{\overline{d}(v_i,\ v_k)}{d(y,p_{0n-1}-\lambda p_{0n-2})}=\begin{vmatrix}\frac{\overline{d}v_i}{dy}, & \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_i}{\partial p_{1n-2}}\\ \frac{\overline{d}v_k}{dy}, & \frac{\partial v_k}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_k}{\partial p_{1n-2}}\end{vmatrix}\quad i,\ k=2\ldots 2n.$$

Определитель этой системы есть производный неравного нулю определителя

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}$$

и, следовательно, также отличен от нуля. А потому, эта последняя система имеет вид

$$\frac{\overline{d}(v_i,\ v_k)}{d(y,p_{0n-1},-\lambda p_{0n-2})}=0\quad i,\ k=2\ldots 2n.$$

Эту систему можно снова заменить ей эквивалентной. Среди функций $v_2\ldots v_{2n}$ есть хоть одна такая, напр., v_2, что

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0,$$

иначе было бы

$$\frac{\partial(v_2\ldots v_{2n})}{\partial(z,p_{10}\ldots p_{0n-1})}=0.$$

Последнюю систему можно заменить системой

$$\frac{\overline{d}\,(v_i,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1} - \lambda\, p_{0n-2})} = 0 \quad i = 3\ldots 2n.$$

В самом деле, если v_i, v_k суть две функции из ряда $v_2\ldots v_{2n}$, то из уравнений

$$\frac{\overline{d}\,(v_i,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1} - \lambda\, p_{1n-2})} = 0,\quad \frac{\overline{d}\,(v_k,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1} - p_{1u-2})} = 0,$$

которые имеют вид

$$\frac{\overline{dv_i}}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\frac{\partial v_i}{\partial p_{1n-2}}\right)\frac{\overline{dv_k}}{dy} = 0,$$

$$\frac{\overline{dv_k}}{dy}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right) - \left(\frac{\partial v_k}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\frac{\partial v_k}{\partial p_{1n-2}}\right)\frac{\overline{dv_2}}{dy} = 0$$

следует, так как

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}} \neq 0,$$

что

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\overline{dv_i}}{dy}, & \dfrac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\dfrac{\partial v_i}{\partial p_{1n-2}} \\ \dfrac{\overline{dv_k}}{dy}, & \dfrac{\partial v_k}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\,\dfrac{\partial v_k}{\partial p_{1n-2}} \end{vmatrix} = \frac{\overline{d}\,(v_i,\ v_k)}{d\,(y, p_{0n-1} - \lambda\, p_{1u-1})} = 0, \text{ ч. и т. д.}$$

Таким образом все функции $v_3\ldots v_{2n}$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y, p_{0n-1} - \lambda p_{1n-2})} = \frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{1n-1})} - \lambda\,\frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{1n-2})} = 0.$$

Если мы преобразуем переменное независимое p_{1n-1} к новому u_1 формулой $u_1\,(x, y, z\ldots p_{0n}) = u_1$ и в уравнениях ($\mathrm{V}_1{}'$), получим их в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}} = 0,\ \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + \lambda\,\frac{\overline{d\varphi}}{dy} = 0,$$

где

$$\frac{\overline{d\varphi}}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p_{10}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \theta\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_{10}} + p_{11}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_{01}} + \ldots + \left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-1}} + \overline{p}_{1n-1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}$$

и $\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)$ есть преобразованное выражение $\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}$.

Таким образом, искомые функции $v_2, \ldots v_{2n}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}} = 0,\ \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + \lambda\,\frac{\overline{d\varphi}}{dy} = 0,\ \frac{\overline{d}\,(\varphi\ v_2)}{d(y, p_{0n-1})} - \lambda\,\frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d(y, p_{1n-1})} = 0,\ \ .\ (\mathrm{VII}').$$

где

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} \neq 0 \text{ [1]}).$$

Обратно, если $2n-1$ независимым функций $v_2 \ldots v_{2n}$ удовлетворяют системе (VII′), они независимы относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}$ и преобразованные к начальным переменным $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$ по формуле $u_1(x, y, z \ldots p_{1n-1}, p_{0n}) = u_1$, где

$$\frac{\partial u_1(x \ldots p_{0n})}{\partial p_{0n}} - \lambda \frac{\partial u_1(x \ldots p_{0n})}{\partial p_{1n-1}} = 0 \ \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right),$$

они дают функции $u_2(x \ldots p_{0n}) \ldots u_{2n}(x \ldots p_{0n})$ такие, что $u_i(x \ldots p_{0n})$ $i = 1 \ldots 2n$ суть решения системы уравнений (V_1') независимые относительно $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{1n-1}$; а система уравнений $U^{\alpha}_{2n+1} = 0$ $\alpha = 1 \ldots$ $\ldots 2n-1$ сводится к одному $U^{2n-1}_{2n+1} = 0$, определяющему совместно с уравнениями $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n$ переменные $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$. Функция $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots 2n$ есть интеграл дифференциального уравнения (I), заключающий $2n$ произвольных постоянных $c_1 \ldots c_{2n}$, промежуточный между полным интегралом ранга $n-3$ и $n-2$. Вопрос сводится таким образом к определению $2n-1$ независимых решений $v_2, \ldots v_{2n}$ системы трех уравнений (VII′) в $2n+2$ переменных независимых $x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}, p_{0n}$, в коэффициентах которых u_1 входит, как параметр, а p_{0n} совершенно не заключается. В самом деле, p_{0n} может входить только в коэффициенты при $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1n-2}}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n-1}}$ двух последних уравнений Они суть соответственно:

$$\left(\frac{\overline{d}^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right) + \lambda \overline{p}_{1n-1}, \quad \overline{p}_{1n-1} + \lambda p_{0n},$$

$$\overline{p}_{1n-1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_3}{\partial p_{1n-2}}\right) + \lambda \frac{\overline{d}v_2}{dy}, \ p_{0n}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right) - \frac{\overline{d}v_2}{dy}.$$

Дифференцируя их по p_{0n} и пользуясь тем, что

$$\frac{\partial \overline{p}_{1n-1}}{\partial p_{0n}} = -\lambda, \ \frac{\partial \theta}{\partial p_{11}} = -(\lambda + \mu), \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_{02}} = -\lambda \mu$$

и формой выражения $\frac{\overline{d}v_2}{dy}$, находим, что производные равны нулю.

---

[1]) Легко видеть, что если

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} \neq 0,$$

то и $\frac{\overline{d}v_2}{dy} \neq 0$, и обратно. Это следует из формы $\frac{\overline{d}v_2}{dy}$, именно

$$\frac{\overline{d}v_2}{dy} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial v_2}{\partial z} + \ldots + \overline{p}_{1n-1}\frac{\partial u_2}{\partial p_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial v_2}{\partial z} + \ldots$$

$$\ldots + p_{0n}\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}} - \lambda \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right) + \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\psi.$$

Начнем с функции v_2. Она должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0$$

с условием

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0.$$

Кроме того система двух последних уравнений (VII′) в $2n+1$ переменных независимых $x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n-1}$, как имеющая $2n-1$ независимых решений $v_2 \ldots v_{2n}$, должна быть полной. Это дает новое условие для функции v_2, которое состоит в том, чтобы Pfaff'ова система $2n-1$ независимых уравнений, соответствующая ей, была сполна интегрируемой. Эта система есть

$$\Omega_1=dz-p_{10}\,dx-p_{01}\,dy=0, \ldots\ \Omega_{2n-3}=dp_{0n-2}-p_{1n-2}\,dx-p_{0n-1}\,dy=0,$$

$$dp_{1n-2}+\lambda\,dp_{0n-1}-\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right]dx-[\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}]\,dy=0.$$

$$dv_2=0.$$

Условия ее полной интегрируемости суть:

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0\ \ldots & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0\ \ldots & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1\ \ldots & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\
-\dfrac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} & -p_{1n-2} & 0 & 0 & 0\ \ldots & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1n-2} & -p_{0n-1} & 0 & 0 & 0\ \ldots & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\left[\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & -[\overline{p}_{1n-1}+\lambda p_{0n} & 0 & 0 & 0\ \ldots & & 0 & 0 & 1 & \lambda \\
\dfrac{\partial v_2}{\partial x} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y} & \dfrac{\partial v_2}{\partial z} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{01}} & \ldots & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-3}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{0n-2}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{9n-1}} \\
\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{01}} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial p_{1n-3}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n-2}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{1n-1}} \\
\alpha & \beta\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \gamma & \delta
\end{array}\right|=0$$

где $\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$ суть коэффициенты этих уравнений при $dx, dy, \ldots$ $\ldots dp_{1n-2}, dp_{0n-1}$. Очевидно, что если $\alpha=\frac{\partial v_2}{\partial x}\ldots\delta=\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}$ определитель равен нулю тождественно. Преобразовывая в остальных случаях определители способом, аналогичным употребленному при выводе условий (A'), получим условия

$$\left|\begin{array}{cccc}
-\left[\left(\dfrac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & -[\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}] & 1 & \lambda \\
\dfrac{\widehat{dv_2}}{dx} & \dfrac{\widehat{dv_2}}{d\hat{h}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} & \dfrac{\partial v_2}{\partial p_{1n-1}} \\
\dfrac{\widehat{d}}{dx} & \dfrac{\widehat{d}}{dy} & \dfrac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\
\alpha & \beta & \gamma & \delta
\end{array}\right|=0$$

где

$$\frac{\widehat{d}}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+p_{10}\frac{\partial}{\partial z}+\theta\frac{\partial}{\partial p_{10}}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{01}}+\ldots+\frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}}+p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}$$

$$\frac{\widehat{d}}{dy}=\frac{\partial}{\partial y}+p_{01}\frac{\partial}{\partial z}+p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{10}}+p_{02}\frac{\partial}{\partial p_{01}}+\ldots+p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}}+p_{0n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-2}}.$$

Если α, β, γ. δ суть коэффициенты при dx, dy, dp_{1n-2}, dp_{0n-1} всех уравнений, кроме предпоследнего, определители обращаются тождественно в нуль на основании того, что

$$\frac{\overline{d}v_2}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}v_2}{dy}=\frac{\widehat{d}v_2}{dx}+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-3}}\right)\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}+$$

$$+\lambda\left[\frac{\widehat{d}v_2}{dy}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}+p_{0n}\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}\right]=0.$$

Таким образом, остается только одно условие

$$\begin{vmatrix} -\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & [\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}], & -1 & \lambda \\ \frac{\widehat{d}v_2}{dx} & \frac{\widehat{d}v_2}{dy} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}} \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ -\left[\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)+\lambda\,\overline{p}_{1n-1}\right], & [\overline{p}_{1n-1}+\lambda\,p_{0n}], & 1, & \lambda \end{vmatrix}=0.$$

Так как

$$\frac{\overline{d}}{dx}=\frac{\widehat{d}}{dx}+\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\overline{d}}{dy}=\frac{\widehat{d}}{dy}+\overline{p}_{1n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}+p_{0n}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}$$

и так как

$$\frac{\overline{d}v_2}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}v_2}{dy}=0,$$

это условие обращается в

$$M\frac{\overline{d}v_2}{dy}+N\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right)=0,$$

где

$$M=-\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial p_{1n-1}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)-\right.$$

$$\left.-2\lambda\frac{\partial\,\overline{p}_{1n-1}}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\,\overline{p}_{1n-1}}{\partial p_{1n-2}}\right].$$

$$N=-\frac{\overline{d}\,\overline{p}_{1n-1}}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\,\overline{p}_{1n-1}}{dy}+\frac{\overline{d}}{dy}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right).$$

Легко убедиться вычислением, что

$$\frac{\partial M}{\partial p_{0n}}=0, \quad \frac{\partial N}{\partial p_{0n}}=-M.$$

Таким образом функция $v_2(x, \ldots p_{0n-1}, u_1)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n}}=0, \quad \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0, \quad M\frac{\overline{d}\varphi}{dy}+N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1n-2}}\right)=0, \quad (\mathrm{VII}_1').$$

где коэффициенты третьего уравнения не зависят от p_{0n} вследствие указанных свойств M и N, с условием, что

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0.$$

Могут быть только три случая:

1) $M\neq 0$, а, следовательно, и $N\neq 0$;

2) $N=0$, а, следовательно, и $M=0$;

3) $N\neq 0$, но $M=0$.

В последнем случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1n-2}}=0,$$

поэтому

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}=0,$$

и задача об определении функции v_2, а, следовательно, и об определении искомого интеграла невозможна.

Рассмотрим первый случай. Если $M\neq 0$ и $\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0$, то из уравнения

$$M\frac{\overline{d}v_2}{dy}+N\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right)=\begin{vmatrix} M, & N \\ -\left(\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\right), & \frac{\overline{d}v_2}{dy}\end{vmatrix}=0$$

следует, что уравнения

$$\frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y, p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(\varphi,\ v_2)}{d(y,\ p_{1n-2})}=0, \quad M\frac{\overline{d}\varphi}{dy}+N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1n-2}}\right)=0$$

эквивалентны, т. е. что и все функции $v_2, \ldots v_{2n}$ должны удовлетворять системе (VII_1'). Она должна быть полной. Если она полная, то $2n-1$ независимых решений ее суть искомые функции $v_2 \ldots v_{2n}$, так как среди них найдется хоть одна, напр., v_2 такая, что

$$\frac{\partial v_2}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial v_2}{\partial p_{1n-2}}\neq 0,$$

иначе уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-2}}=0$$

было бы следствием системы (VII_1') что невозможно, так как оно не заключает ни $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, ни $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Остальные решения удовлетворяют поэтому вместе с v_2 системе (VII') и суть искомые функции. Преобразовывая их к переменному p_{1n-1} по формуле

$$u_1(x\ldots p_{0n})=u_1,$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0\quad\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\neq 0\right),$$

получим систему $2n$ функций u_j $j=1\ldots 2n$, единственную, которая заключает функцию $u_1(x\ldots p_{0n})$ и обладает требуемыми свойствами. Интеграл $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n})$, определенный из уравнений $u_j=c_j$ $j=1\ldots 2n$, единственный, удовлетворяющий дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x,\ y,\ z\ldots p_{0n})=c_1.$$

Рассмотрим, когда этот случай возможен.

Система дифференциальных уравнений (VII_1') должна быть полной. Соответствующая ей Pfaff'ова система $2n-1$ уравнений должна быть сполна интегрируемой. Она имеет вид:

$$\Omega_1=dz-p_{10}\ dx-p_{01}\ dy=0,\ldots\ \Omega_{2n-4}=dp_{1n-3}-\frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}}dx-$$

$$-p_{1n-2}\ dy=0,\ \Omega_{2n-3}=dp_{0n-2}-p_{1n-2}\ dx-p_{0n-1}\ dy=0,$$

$$M\,dp_{1n-2}-\left[N\lambda^2+M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right]dx-[M\,\overline{p}_{1n-1}-N\lambda]\,dy=0,$$

$$M\,dp_{0n-1}-[N\lambda-M\,\overline{p}_{1n-1}]\,dx-[M p_{0n}+N]\,dy=0.$$

Условия ее полной интегрируемости суть:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\theta & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-\frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}} & -p_{1n-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0\\
-p_{1n-2} & -p_{0n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0\\
-\left[N\lambda^2+M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\,\overline{p}_{1n-1}-N\lambda], & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & M & 0\\
-[M\,\overline{p}_{1n-1}-N\lambda], & -[Mp_{0n}+N], & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & M\\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}\\
\alpha & \beta\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \gamma & \delta
\end{array}\right|=0$$

где $\alpha, \beta \ldots \gamma, \partial$ суть коэффициенты этих уравнений при

$$dx,\ dy \ldots dp_{1n-2},\ dp_{0n-1};$$

или вид

$$\begin{vmatrix} -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\bar{p}_{1n-1} - N\lambda], & M & 0 \\ -[M\bar{p}_{1n-1} - N\bar{\lambda}], & -[Mp_{0n} + N] & 0 & M \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\frac{\widehat{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial}{\partial z} + \theta\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \ldots + \frac{d^{n-3}\theta}{dy^{n-3}}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} + p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{0n-2}},$$

$$\frac{\widehat{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \ldots + p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{1n-3}} + p_{0n-0}\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}.$$

Легко видеть, что если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, означают коэффициенты при $dx, dy, dp_{1n-2}, dp_{0n-1}$ 1-го $\ldots$ $2n-3$-го уравнений, определители обращаются в нуль тождественно.

Остаются, таким образом, два условия:

$$\begin{vmatrix} -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{u-2}}\right)\right], & -[M\bar{p}_{1n-1} - N\lambda] & M & 0 \\ N\lambda - M\bar{p}_{1n-1}, & -[Mp_{0n} + N], & 0 & M \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\bar{p}_{1n-1} - N\lambda] & M & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\left[N\lambda^2 + M\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right], & -[M\bar{p}_{1n-1} - N\lambda], & M & 0 \\ N\lambda - M\bar{p}_{1n-1}, & -[Mp_{0n} + N] & 0 & M \\ \frac{\widehat{d}}{dx} & \frac{\widehat{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{1n-2}} & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} \\ N\lambda - M\bar{p}_{1n-1} & -[Mp_{0n} + N] & 0 & M \end{vmatrix} = 0.$$

По разложении определителей они имеют вид:

$$U = -\frac{\delta N}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y}[M\bar{p}_{1n-1} - N\lambda] - \bar{p}_{1n-1}\frac{\delta M}{\delta y} + N\left(\frac{\bar{d}M}{dx} + \lambda\frac{\bar{d}M}{dy}\right) = 0,$$

$$V = -M\frac{\delta\bar{p}_{1n-1}}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x}(N\lambda) + \frac{\delta}{\delta y}(N\lambda^2) + M\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-3}}\right) - N\lambda\left(\frac{dM}{dx} + \lambda\frac{dM}{dy}\right),$$

где

$$\frac{\delta}{\delta x}=M\frac{\overline{d}}{dx}-N\lambda\left(\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\right),\ \frac{\delta}{\delta y}=M\frac{\overline{d}}{dy}+N\left(\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial}{\partial p_{1n-2}}\right).$$

Эти два условия сводятся к одному $U=0$, так как можно показать, что $V+\lambda U=0$ тождественно. Именно,

$$V+\lambda U=-M\left[\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta x}-\lambda\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta y}\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)\right]+N\left(\frac{\delta\lambda}{\delta x}+\lambda\frac{\delta\lambda}{\delta y}\right).$$

Но принимая во внимание вид операций $\frac{\delta}{\delta x}$ и $\frac{\delta}{\delta y}$ и вид выражений M, N, находим, что

$$\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta x}-\lambda\frac{\delta\,\overline{p}_{1n-1}}{\delta y}-\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\right)=N\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right).$$

Таким образом,

$$U+\lambda U=-MN\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right)+N\left(\frac{\delta\lambda}{\delta x}+\lambda\frac{\delta\lambda}{\delta y}\right);$$

но

$$\frac{\delta\lambda}{\delta x}+\lambda\frac{\delta\lambda}{\delta y}=M\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right).$$

Подставляя получим

$$V+\lambda U=-MN\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right)+MN\left(\frac{\overline{d}\lambda}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\lambda}{dy}\right)=0.$$

Итак, чтобы система (VII$_1'$) была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta}{\delta y}[M\,\overline{p}_{1n-1}-N\lambda]+\overline{p}_{1n-1}\frac{\delta M}{\delta y}-N\left(\frac{\overline{d}M}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}M}{dy}\right)=0.$$

Если возвратимся к старым переменным $x, y, z \ldots p_{1n-1}, p_{0n}$, дифференциальные уравнения (VII$_1'$) примут вид

$$\frac{\partial f}{\delta p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\delta p_{1n-1}}=0\quad \frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(y,\ p_{1n-1})}=0\quad \ldots \text{(VIII}')$$

$$M\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(y,\ p_{1n-1})}+N\frac{\partial\,(f,\ u_1)}{\partial\,(p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2},\ p_{1n-1})}=0,$$

где

$$\frac{\partial\,(f,\ u_1)}{\partial\,(p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2},\ p_{1n-1})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\\ \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}}, & \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\end{vmatrix}$$

M и N, выражены в старых переменных:

$$N = \frac{\dfrac{\bar{d}u_1}{dx} + \mu \dfrac{\bar{d}u_1}{dy} + \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \dfrac{\bar{d}}{dy} \dfrac{\bar{d}^{u-2}\theta}{dy^{u-2}}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}},$$

$$M = -\frac{\partial (N,\ u_1)}{\partial (p_{0n},\ p_{1n-1})},$$

а условие, что уравнения (VIII′) представляют полную систему есть:

$$\frac{\bar{d}u_1}{dx}\left(N\frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}} - M\frac{\partial N}{\partial p_{1n-1}}\right) + \frac{\bar{d}u_1}{dy}\Big[N\lambda\frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}} - M\frac{\partial (N\lambda - Mp_{1n-1})}{\partial p_{1n-1}} -$$

$$- p_{1n-1} M \frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}}\Big] + \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-2}}\right)\Big[N\lambda\frac{\partial N}{\partial p_{1n-1}} + M\frac{\partial (N\lambda - Mp_{1n-1})}{\partial p_{1n-1}} -$$

$$- p_{1n-1} N \frac{\partial M}{\partial p_{1n-1}}\Big] + \frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\Big\{M\Big[\frac{\bar{d}N}{dx} + \frac{\bar{d}(N\lambda - Mp_{1n-1})}{dy} + p_{1n-1}\frac{\bar{d}M}{dy}\Big] +$$

$$+ N\Big[\frac{\partial (N\lambda - Mp_{1n-1})}{\partial p_{0n-1}}\Big\} - \lambda\frac{\partial (N\lambda - Mp_{1n-1})}{\partial p_{1n-2}} + p_{1n-1}\Big(\frac{\partial M}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial M}{\partial p_{1n-2}} -$$

$$- \lambda\left(\frac{N}{\partial p_{0n-1}} - \lambda\frac{\partial N}{\partial p_{1n-2}}\right)\left(\frac{\bar{d}M}{dx} + \lambda\frac{\bar{d}M}{dy}\right)\Big]\Big\} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IX}'\text{)}$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0 \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} \neq 0\right).$$

Таким образом, в этом случае функция $u_1(x \ldots p_{0n})$ должна удовлетворять не только уравнению

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}} = 0,$$

но и уравнению (IX′). Это последнее есть дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка, линейное относительно вторых производных. Порядок его при решении данной задачи не понижается, так как оно заключает член $M\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$.

Если функция $u_1(x \ldots p_{0n})$ им удовлетворяет, система (VIII′) полная. Система $2n$ решений ее u_j $j = 1 \ldots 2n$, независимых относительно z, p_{10}, $p_{01} \ldots p_{1n-1}$ есть искомая, единственная, заключающая функцию $u_1(x_1 \ldots p_{0n})$.

Функция $z = f(x,\ y,\ c_1 \ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_j = c_j$ $j = 1 \ldots 2n$, есть интеграл дифференциального уравнения (I), промежуточный между полным интегралом ранга $n-3$ и ранга $n-2$, единственный, удовлетворяющий и дифференциальному уравнению n-ого порядка $u_1(x \ldots p_{0n}) = c_1$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $M = N = 0$.

В этом случае всякое решение уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,$$

для которого

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n-1}}-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1n-2}}\neq 0,$$

может быть взято за функцию v_2 и система (VII')

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0,\ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0,\ \frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{1n-2})}=0$$

полная и $2n-1$ ее решений $v_2\ldots v_{2n}$, независимых относительно $z,\ p_{10},\ p_{01}\ldots p_{0n-1}$ и суть искомые функции $v_2\ldots v_{2n}$. Так как в этом случае функция v_2 может быть подобрана бесчисленным множеством способов, в данном случае есть бесчисленное множество различных между собой систем функций $v_2\ldots v_{2n}$.

Если вернемся к старым переменным $x\ldots p_{1n-1},\ p_{0n}$, дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}}=0\ \ \frac{\overline{d}\varphi}{dx}+\lambda\frac{\overline{d}\varphi}{dy}=0\ \ \frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}\,(\varphi,\ v_2)}{d\,(y,\ p_{1n-2})}=0 \quad . \text{(VII')}$$

примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{d\,(f,\ u_1)}{d\,(y,\ p_{1n-1})}=0$$

$$\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1,\ u_2)}{d\,(y,\ p_{0n-1},\ p_{1n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1,\ u_2)}{d\,(y,\ p_{1n-2},\ p_{1n-1})}=0 \quad .\ .\ .\ .\ .\ \text{(X')},$$

где

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0,$$

а $u_2(x,\ldots p_{0n})$ есть какое-либо решение уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0\ \ \frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{\overline{d}\,(f,\ u_1)}{d\,(y,\ p_{1n-1})}=0$$

такое, что

$$\frac{\overline{\partial}\,(u_2,\ u_1)}{\overline{\partial}\,(p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2},\ p_{1n-1})}\neq 0 \text{ [1]}.$$

Система (X') полная. Если $u_i\ i=1\ldots 2n$ суть ее независимые относительно $z,\ p_{10},\ p_{01}\ldots p_{1n-1}$ решения, функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_i=c_i\ i=1\ldots 2n$ есть интеграл дифференциального уравнения (I), промежуточный между интегралом ранга $n-3$ и ранга $n-2$, один из бесчисленного множества их, удовлетворяющих дифференциальному уравнению n-ого порядка

$$u_1(x,\ y,\ z\ldots p_{1n-1},\ p_{0n})=c_1.$$

---

[1]) В этом случае $\dfrac{d\,(u_2,\ u_4)}{d\,(y,\ p_{1n-1})}\neq 0$, и обратно.

Условие $N=0$, а, следовательно, $M=0$ имеет вид

$$\frac{\overline{d}u_1}{dx}+\mu\frac{\overline{d}u_1}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\;\frac{\overline{d}}{dy}\;\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}=0.$$

В этом случае функция u_1 удовлетворяет уравнениям § 5

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\overline{d}u_1}{dx}+\mu\frac{\overline{d}u_1}{dy}+\frac{\partial u_1}{\partial p_{1n-1}}\;\frac{\overline{d}}{dy}\;\frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}=0\quad..(\mathrm{IV}_1')$$

и дифференциальное уравнение $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$ находится в инволюции с данным (I).

Этот случай может быть соединен с аналогичным ему случаем § 5 следующим образом: если по определении функции $u_1(x\ldots p_{0n})$ из системы (IV_1'), решение u_2 уравнения

$$\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{0n})}=0$$

таково, что

$$\frac{\partial(u_2,\ u_2)}{\partial(p_{1n-1},\ p_{0n})}\neq 0$$

определяем функции $u_3\ldots n_{2n+1}$, как остальные независимые решения полной системы

$$\frac{\overline{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(x,\ p_{1n-1},\ p_{0n})}=0,\ \frac{\overline{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,\ p_{1n-1},\ p_{0n})}=0\quad.\ .\ .\ .\ .\ (B')$$

и функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n+1})$, определенная из уравнений $u_i=c$ $i=1\ldots 2n+1$ есть один из бесчисленного множеетва полных интегралов ранга $(n-2)$ данного уравнения (I), удовлетворяющих дифференциальному уравнению n-ого порядка $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$

Если же

$$\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(p_{1n-1},\ p_{0n})}=0,$$

но

$$\frac{\overline{d}(u_1,u_2)}{d(y,\ p_{1n-1})}\neq 0\ ^{1)},$$

тогда определяем функции $u_3\ldots u_{2n}$, как остальные независимые решения полной системы

$$\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0,\ \frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(x,\ p_{1n-1})}+\lambda\frac{\overline{d}(f,\ u_1)}{d(y,\ p_{1n-1})}=0$$

$$\frac{\overline{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,p_{0n-1},\ p_{1n-1})}-\lambda\frac{\overline{d}(f,\ u_1,\ u_2)}{d(y,\ p_{1n-2},\ p_{0n-1})}=0$$

функция $z=f(x,\ y,\ c_1\ldots c_{2n})$, определенная из уравнений $u_j=c_j$ $j=1\ldots 2n$ есть один из бесчисленного множества интегралов промежуточного типа уравнения (I), удовлетворяющих и дифференциальному уравнению n-ого порядка $u_1(x\ldots p_{0n})=c_1$.

---

[1]) А, следовательно, и $\dfrac{\partial(u_1\ u_2)}{\partial(p_{0n-1}-\lambda p_{1n-2}\ \ p_{1n-1})}\neq 0$.

Рассмотрим, наконец, последний случай, когда

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{1n-1}}=\frac{\partial u_{1,2}}{\partial p_{0n}}=0.$$

Из условий (A') вытекает, что в этом случае

$$\frac{d(u_1, u_2)}{d(x, y)}\neq 0,$$

и дифференциальные уравнения (B') имеют вид

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \\ \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & 0 \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & 0 \end{vmatrix}=\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}\frac{d(u_1, u_2)}{d(x, y)}=0, \quad \begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \\ \frac{du_1}{dx} & \frac{du_1}{dy} & 0 \\ \frac{du_2}{dx} & \frac{du_2}{dy} & 0 \end{vmatrix}=\frac{\partial f}{\partial p_{0n}}\frac{d(u_1\ u_2)}{d(x, y)}=0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}=0.$$

Таким образом все функции u_i $i=1\ldots 2n+1$ не зависят от p_{1n-1}, p_{0n}. Система $2n+1$ полных интегралов $u_i=c_i$ $i=1\ldots 2n+1$ или $x=\Gamma_1$, $y=\Gamma_2$, $z=\Gamma_3\ldots p_{0n}=\Gamma_{2n+1}$ Pfaff'овой системы (I') не дает интеграла дифференциального уравнения (I). В этом случае мы можем поступить, как в предыдущем, вводя функции u_i $i=1\ldots 2n+1$, как новые переменные независимые, и, получив Pfaff'ову систему (I') в форме

$$\Omega_\alpha=\sum_1^{2n+1} i\, U_i^\alpha\, du_1=0 \quad \alpha=1\ldots 2n-1,$$

определяем функции u_i $i=1\ldots 2n+1$ так, чтобы в силу уравнений $u_j=c_j$ $j=1\ldots 2n-1$, полагая что

$$\frac{\partial(u_1\ldots u_{2n-1})}{\partial(z\ldots p_{0n-1})}\neq 0,$$

уравнения $U_{2n}^\alpha=U_{2n+1}^\alpha=0$ $\alpha=1\ldots 2n-1$ сводились к двум, определяющим с предыдущими переменные $z, p_{10}\ldots p_{1n-1}$, p_{0n}. Тогда функция $z=f(x, y, c_1\ldots c_{2n-1})$, определенная из уравнений $u_j=c_j$ $j=1\ldots 2n-1$ будет полным интегралом ранга $(n-3)$ дифференциального уравнения (I). Полагая в рассуждении § 4 указатель n на единицу меньшим, найдем, что необходимое и достаточное для этого условие состоит в том, чтобы уравнения

$$u_j(x\ldots p_{0n-1})=c_j \quad j=1\ldots 2n-1$$

были системой $2n-1$ полных интегралов Pfaffo'вой системы $2n-1$ уравнений

$$\Omega_1=0\ldots\Omega_{2n-3}=0,$$

независимой относительно $z, p_{10},\ldots p_{0n-1}$.

… приходим к уже рассмотренному случаю, но для указателя n …ицу меньшого.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \theta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

C. Russyan.

Première partie.

L'auteur éxpose la méthode de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \theta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

qui est la généralisation de la méthode de Lagrange de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre en reduisant cette intégration à celle du système d'équations aux différentielles totales.

Le point de départ est la recherche de l'intégrale complète du rang $(n-2)$ $(n \geqslant 2)$ c. à d. de l'intégrale $z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1})$ de l'équation (I) qui contient les $2n+1$ constantes arbitraires $c_1 \ldots c_{2n+1}$ et teile que les $2n+1$ équations

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_{2n+1}),\ p_{10} = \frac{\partial f}{\partial x},\ p_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots\ p_{1n-1} = \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y_{n-1}}\ p_{0n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

sont résolubles par rapport aux $c_1 \ldots c_{2n+1}$ sous la forme

$$u_i\,(x, y, z, p_{10}\, p_{01} \ldots p_{0n}) = c_i \quad i = 1 \ldots 2n+1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

les équations (II) étant le système d'intégrales complètes du système aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dz &= p_{10}\, dx + p_{01}\, dy, \\ dp_{10} &= \theta\, dx + p_{11}\, dy, \\ dp_{01} &= p_{11}\, dx + p_{02}\, dy, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ dp_{1n-2} &= \frac{d^{n-2}\theta}{dy^{n-2}}\, dx + p_{1n-1}\, dy, \\ dp_{0n-1} &= p_{1n-1} dx + p_{0n}\, dy, \end{aligned}$$

où

$$\frac{d\,\vartheta\,(x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{1n-2}, p_{0n-1})}{dy} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial \vartheta}{dp_{10}} + p_{02}\frac{\partial \vartheta}{dp_{01}} + \ldots + p_{1n-1}\frac{\partial \vartheta}{dp_{1n-2}} + p_{0n}\frac{\partial \vartheta}{\partial p_{0n-1}},$$

et

$$\frac{d^k\theta}{\partial y^k} = \frac{d}{\partial y}\frac{d^{k-1}\theta}{dy^{k-1}} \quad k = 1 \ldots n-2.$$

Cette méthode donne les résultats obtenus par la méthode des caractéristiques[1]) et par la méthode de J. König[2]) et les résultats nouveanx, qui ne s'obtiennent pas par ces dernières.

L'auteur traite d'abord le cas $n = 2$ et puis celui $n > 2$.

---

[1]) E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 1898.

[2]) Mathem. Ann., Bd. XXIV.