О некоторых свойствах регулярно монотонных функций

С. Н. Бернштейн

§ 1.

Я называю функцию $f(x)$ *регулярно монотонной в промежутке* (o, b), *если* $f(x)$, *а также ни одна из ее производных не меняет знака в этом промежутке* *.

Частным и весьма важным классом таких функций являются функции абсолютно монотоные, все производные которых имеют одинаковый знак; к этому же классу заменой x на $(b-x)$ приводятся и те функции, которых последовательные производные противоположных знаков**. Я посвятил абсолютно монотонным функциям обширную статью, помещенную в Acta Mathematica, t. 52. Настоящая статья имеет целью установить несколько основных свойств, присущих всем регулярно монотонным функциям.

Каждая регулярно монотонная функция характеризуется рядом целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$, который будем называть *типом* функции и определим следующим образом. В виду возможности замены x через $b-x$ можем допустить, для определенности, что $f(x) \,.\, f'(x) \geqslant 0$; тогда первое типовое число λ_1 обладает свойством, что

$$\begin{aligned} &f^{(i-1)}(x) \,.\, f^{(i)}(x) \geqslant 0, \text{ при } i \leqslant \lambda_1, \\ &f^{(\lambda_1)}(x) \,.\, f^{(\lambda_1+1)}(x) \leqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Мы будем говорить, что $f(x), f'(x), \ldots, f^{(\lambda_1)}(x)$ образуют *перманано* порядка λ_1.

Второе типовое число λ_2 должно обладать свойством, что

$$\begin{aligned} &f^{(i-1)}(x) \,.\, f^{(i)}(x) \leqslant 0, \text{ при } \lambda_1 < i \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 = b_2, \\ &f^{(b_2)}(x) \,.\, f^{(b_2+1)}(x) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Производные $f^{(\lambda_1)}(x), f^{(\lambda_1+1)}(x), \ldots, f^{(b_2)}(x)$ образуют *альтернанс* порядка λ_2.

---

* Leçons sur les propriétés extrémales etc.. стран. 196. В дальнейшем мне прийдется неоднократно ссылаться на эту книгу, которую я буду коротко обозначать буквами P. E.

** Ibidem.

Аналогичным образом определяются последовательные типовые числа $\lambda_3 \ldots, \lambda_n \ldots$, которые не могут, очевидно, быть равны 0. Только для абсолютно монотонных функций и их интегралов конечного порядка, число типовых чисел будет ограничено и последнее из них $\lambda_n = \infty$.

Из выше сказанного следует, что типовым числам $\lambda_1, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2k-1}, \ldots$ соответствуют *пермanансы*, а числам $\lambda_2, \lambda_4, \ldots, \lambda_{2k}, \ldots$ соответствуют *альтернансы* тех же порядков.

Если порядок i производной $f^{(i)}(x)$ удовлетворяет неравенству

$$b_{2k-1} < i < b_{2k},$$

где $b_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, то $f^{(i)}(x)$ является *внутренним членом альтернанса порядка* λ_{2k-1}; если

$$b_{2k} < i < b_{2k+1},$$

то $f^{(i)}(x)$ является *внутренним членом пермананса порядка* λ_{2k+1}.

Если $i = b_{2k-1}$, то $f^{(i)}(x)$ *является последним членом пермананса и в то же время первым членом альтернанса; если же* $i = b_{2k}$, *то* $f^{(i)}(x)$ *будет первым членом пермананса и последним членом альтернанса.*

1-я Лемма. *Все члены пермананса, за исключением последнего, возрастают по абсолютному значению, а все члены альтернанса, за исключением последнего, убывают в промежутке* (o, b).

Принимая во внимание, что замена переменной x на $b-x$ превращает перманaнс в альтернанс и обратно, достаточно заметить, что в случае пермананса, каждая из производных к нему принадлежащая, за исключением последней, имеет тот же знак, что и следующая за ней, а потому должна возрастать по абсолютному значению.

Предположим теперь, что $f^{(i)}(x) > 0$ есть внутренний или первый член пермананса порядка λ_{2k+1}, так что

$$i = b_{2k+1} - \varrho,$$

где $0 < \varrho \leqslant \lambda_{2k+1}$. В таком случае, по доказанной лемме, $f^{(b_{2k+1})}(x)$ убывает с возрастанием x. Поэтому,

$$f^{(i)}(x) \geqslant \frac{1}{(\varrho-1)!}\int_0^x (x-z)^{\varrho-1} f^{(b_{2k+1})}(z)\,dz \geqslant \frac{f^{(b_{2k+1})}(x)}{(\varrho-1)!}\int_0^x (x-z)^{\varrho-1}\,dz =$$

$$= \frac{x^\varrho}{\varrho!} f^{(b_{2k+1})}(x) \tag{3}$$

Очевидно, такое же рассуждение применимо к $f(x)$, если члены пермананса $f^{(i)}(x)$ отрицательны; следовательно, во всяком случае

$$\left| f^{(i)}(x) \right| \geqslant \frac{x^\varrho}{\varrho!} \left| f^{(b_{2k+1})}(x) \right| \tag{4}$$

для всех членов рассматриваемого пермананса, и в частности

$$\left| f^{(b_{2k})}(x) \right| \geqslant \frac{x^{\lambda_{2k+1}}}{\lambda_{2k+1}!} \left| f^{(b_{2k+1})}(x) \right| \tag{5}$$

Принимая во внимание, что замена x через $b-x$ превращает альтернанс в пермананс, заключаем, что, при $i=b_{2k}-\varrho$,

$$\left|f^{(i)}(x)\right| \geqslant \frac{(b-x)^{\varrho}}{\varrho\,!}\left|f^{(b_{2k})}(x)\right| \tag{4 bis}$$

для всех членов альтернанса порядка λ_{2k}, и в частности,

$$\left|f^{(b_{2k}-1)}(x)\right| \geqslant \frac{(b-x)^{\lambda_{2k}}}{\lambda_{2k}\,!}\left|f^{(b_{2k})}(x)\right| \tag{6}$$

Полагая

$$P_{2k-1}=P_{2k}=\lambda_1+\lambda_3+\ldots+\lambda_{2k-1}$$
$$Q_{2k+1}=Q_{2k}=\lambda_2+\lambda_4+\ldots+\lambda_{2k},$$

так что

$$b_n=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=P_n+Q_n,$$

получаем из неравенств (5) и (6), что

$$\left|f(x)\right| > \frac{x^{P_n}(b-x)^{Q_n}}{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\ldots\lambda_n\,!}\left|f^{(b_n)}(x)\right|, \tag{7}$$

отбрасывая знак равенства, т. к. в (3) знак равенства имеет место лишь тогда, когда правые части постоянны.

Неравенство (7) может быть написано и в таком виде

$$\left|f^{(b_n)}(x)\right| < \frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\ldots\lambda_n\,!}{x^{P_n}(b-x)^{Q_n}}\left|f(x)\right| \tag{8}$$

Полагая, в частности, $x=\frac{b}{2}$, находим

$$\left|f^{(b_n)}\left(\frac{b}{2}\right)\right| < \lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\ldots\lambda_n\,!\left(\frac{2}{b}\right)^{b_n} f\left(\frac{b}{2}\right). \tag{9}$$

Неравенство (9) дает верхнюю границу для модулей тех лишь производных, которые являются *пограничными* членами, связывающими соседние между собой альтернанс и пермананс. Единственный случай, когда производные всех порядков обладают этим свойством, представляется, когда все $\lambda_i=1$. Этим функциям, которые я называю *циклически монотонными*, замечательным во многих отношениях и представляющим в некотором смысле противоположность классу абсолютно монотонных функций, я посвящу особую статью. Пока обратим внимание лишь на то, что в рассматриваемом случае верхняя граница для производной порядка b_n, даваемая правой частью неравенства (9), получает наименьшее значение, а именно, для любого значения m,

$$\left|f^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)\right| < \left(\frac{2}{b}\right)^{m} f\left(\frac{b}{2}\right) \tag{10}$$

Отсюда следует, что *циклически монотонная функция $f(x)$ должна быть целой, не выше 1-го рода и конечной степени* не выше $\frac{2e}{b}$.*

---

* См. Р. Е., стр. 80.

В общем же случае, когда имеются $\lambda_n > 1$, необходимо еще вывести неравенство аналогичное (8) для производных, являющихся *внутренними* членами пермананса или альтернанса.

Итак, пусть $m = b_n + k$, где $0 < k < \lambda_{n+1}$. В силу сделанных выше замечаний, можем ограничиться предположением, что $f^{(m)}x > 0$ принадлежит пермanансу. В таком случае для всякого $y > x$, имеем

$$f^{(b_n)}(y) \geqslant \frac{1}{(k-1!)}\int_x^y (y-z)^{k-1} f^{(m)}(z)\,dz > \frac{f^{(m)}(x)}{k-1\,!}\int_x^y (y-z)^{k-1} dz = \frac{f^{(m)}(x)(y-x)^k}{k\,!},$$

откуда

$$f^{(m)}(x) = f^{(b_n+k)}(x) < \frac{k\,!\,f^{(b_n)}(y)}{(y-x)^k}, \tag{11}$$

и принимая во внимание неравенство (8), получаем

$$f^{(b_n+k)}(x) < \frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!}{y^{P_n}(b-y)^{Q_n}(y-x)^k}\left|\,f(y)\right|.$$

Таким образом, вообще,

$$\left|f^{(b_n+k)}(x)\right| < \lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,.\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!\left|\frac{f(y)}{y^{P_n}(b-y)^{Q_n}(y-x)^k}\right| \tag{12}$$

где y можно придавать любое значение $> x$ или $< x$ в промежутке $(0, b)$ в зависимости от того, принадлежит ли $f^{(b_n+k)}(x)$ пермanансу или альтернансу.

Из неравенства (12) заключаем, что

$$\sqrt[m]{\left|\frac{f^m(x)}{m\,!}\right|} < \sqrt[m]{\frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,\,.\,\lambda_n\,!\,k\,!}{m\,!}}\left|\frac{1}{y^\alpha(b-y)^\beta(y-x)^\gamma}\right| \tag{13}$$

для больших значений m, где $\alpha = \frac{P_n}{m}$, $\beta = \frac{Q_n}{m}$, $\gamma = \frac{k}{m}$, так что $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Из (13), благодаря замечанию, что, при $x = \frac{b}{2}$, можем положить $y = x \pm \frac{b}{4}$, получаем для *любого* m,

$$\sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}\left(\frac{b}{2}\right)}{m\,!}\right|} < \sqrt[m]{\frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,.\,\,\lambda_n\,!\,k\,!}{m\,!}}\,\frac{4}{b},$$

откуда вытекает

1-я Теорема. *Если типовые числа удовлетворяют условию, что*

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[b_n]{\frac{\lambda_1\,!\,\lambda_2\,!\,.\,.\,\lambda_n\,!}{b_n\,!}} = 0, \tag{14}$$

то функция $f(x)$ есть функция целая.

Можно показать напротив, что, если это условие для некоторого типа регулярно монотонных функций не соблюдено, то к нему принадлежат также и не целые функции.

Следствие. *Если*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{b_n} = 0\,, \tag{15}$$

то функция $f(x)$ *целая.*

Действительно, из (13) выводим, что существует число N такое, что

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right|} \leqslant \sqrt[m]{\frac{\lambda_1^{\lambda_1}\lambda_2^{\lambda_2}\ldots\lambda_n^{\lambda_n}\,k^k}{m^m}}\,N\,. \tag{16}$$

В силу (15), можем взять m достаточно большим, чтобы, при заданном произвольно малом ε, иметь

$$\frac{\lambda_i}{m} = \theta_i < \varepsilon,\ \frac{k}{m} = \varphi < \varepsilon\,;$$

поэтому

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\right|} \leqslant N\,\theta_1^{\theta_1}\,\theta_2^{\theta_2}\ldots\theta_n^{\theta_n}\,\varphi^{\varphi} < N\varepsilon^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n+\varphi} = N\varepsilon\,.$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что функция $f(x)$ должна быть *конечного рода*, если при возрастании n,

$$\lim \frac{\lambda_n^p}{b_n} = 0\,,$$

где $p > 1$ данное независимое от n число.

Если $p > 2$, то функция $f(x)$ должна быть *первого* рода.

В частности, из (16) видно сразу, что $f(x)$ будет кроме того и *конечной степени*, если *числа* λ_n *ограничены.*

Таким образом, по доказанной теореме, регулярно монотонная функция лишь в том случае может оказаться не целой, т. е. иметь особенности на конечном расстоянии, если *тип* ее таков, что

$$\overline{\lim}\, \frac{\lambda_n}{b_n} = T > 0.$$

§ 2.

Займемся теперь исследованием случая, когда рассматриваемая нами функция $f(x)$ не целая. Как известно, в таком случае радиус сходимости $R(x)$ в какой-нибудь точке x отрезка $(0, b)$ определяется равенством

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|} = \frac{1}{R(x)} \tag{17}$$

Будем называть *характеристической* последовательностью производных функции $f(x)$ в точке x всякую последовательность производных порядков $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, обладающую свойством, что

$$lim \sqrt[k_n]{\left|\frac{f^{(k_n)}(x)}{k_n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Докажем следующее предложение:

2-я Лемма. ***На отрезке монотонности (o, b) не может быть более одной точки, для которой к характеристической последовательности принадлежало бы, как безконечное множество производных, входящих в альтернансы, так и безконечное множество производных, входящих в перманансы.***

Точку, обладающую указанным свойством, мы назовем *нейтральной*.

Пусть x точка, обладающая свойством, что к ее характеристической последовательности принадлежит безконечное множество производных, являющихся либо первыми, либо внутренними членами пермананса: $f^{(k_1^0)}(x)$, $f^{(k_2^0)}(x), \ldots$ $f^{(k_n^0)}(x), \ldots$; пусть $y > x$; тогда, вследствие 1-й Леммы имеем

$$\left|\frac{f^{(k_n^0)}(y)}{k_n^0!}\right| > \left|\frac{f^{(k_n^0)}(x)}{k_n^0!}\right|,$$

поэтому

$$\overline{lim} \sqrt[m]{\left|\frac{f^{(m)}(y)}{m!}\right|} \geqslant \frac{1}{R(x)},$$

откуда

$$\frac{1}{R(y)} \geqslant \frac{1}{R(x)},$$

т. е.

$$R(x) \geqslant R(y) \tag{18}$$

Аналогичным образом убеждаемся, что, если в точке y к характеристической последовательности принадлежит безконечное множество внутренних или первых членов альтернансов, то должно иметь место неравенство

$$R(x) \leqslant R(y) \tag{18 bis}$$

Таким образом, необходимо, чтобы

$$R(x) = R(y) = R.$$

Кроме того, так как (18) остается в силе, если вместо $R(y)$ взять $R(\xi)$, где $\xi > x$, а (18 bis) остается в силе, если заменить x, через $\xi < y$, то мы должны иметь также

$$R(\xi) = R, \tag{19}$$

при всяком ξ в промежутке (x, y).

Покажем, что соблюдение равенства (19) в целом промежутке (x, y), длина которого $2h > 0$, невозможно.

Действительно, известно*, что наилучшее приближение $E_n f(x)$ при помощи многочленов степени n на отрезке длины $2h$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n f(x) < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1},$$

если на этом отрезке

$$0 < N < f^{(n+1)}(\xi) < M,$$

поэтому

$$\frac{h}{2}\sqrt[n+1]{\frac{2N}{(n+1)!}} < \sqrt[n+1]{E_n f(x)} < \frac{h}{2}\sqrt[n+1]{\frac{2M}{(n+1)!}} \tag{20}$$

Из правого неравенства (20), принимая во внимание (17) и (19), находим

$$\overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)} \leqslant \frac{h}{2R}.$$

Но, кроме того, если $f^{(n+1)}(x)$ есть производная характеристической последовательности в точке x, являющаяся внутренним или первым членом пермананса, то

$$lim\sqrt[n+1]{\frac{N}{(n+1)!}} = \frac{1}{R},$$

т. к. для этих значений n имеем $N = f^{(n+1)}(x)$.

Следовательно, также

$$\frac{h}{2R} \leqslant \overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)},$$

а потому

$$\overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)} = \frac{h}{2R}. \tag{21}$$

Но, с другой стороны, известно**, что

$$\overline{lim}\sqrt[n+1]{E_n f(x)} = \frac{h}{\varrho}, \tag{22}$$

где ϱ есть полусумма осей эллипса, имеющего фокусами концы отрезка (x, y), внутри которого функция $f(x)$ голоморфна и на котором она имеет по крайней мере одну особенную точку. Поэтому нетрудно видеть, что в данном случае мы должны были бы иметь $\varrho = R + \sqrt{R^2 + h^2}$. Действительно, функция $f(x)$, у которой радиус

* Р. Е. стр. 10.

** Р. Е. стр 113.

сходимости на всем отрезке равен R, имеет особыми значениями все точки $z=\xi \pm iR$, где $x \leqslant \xi \leqslant y$; кроме того, если замкнуть составленные таким образом два особенных отрезка полукругами радиуса R с соответственными центрами в точках x и y, то внутри полученного замкнутого контура функция $f(x)$ не имеет особенности; отсюда ясно, что рассматриваемый нами эллипс проходит через точки $\frac{x+y}{2} \pm Ri$, так что малая полуось равна R, а большая полуось равна $\sqrt{R^2+h^2}$.

Таким образом формула (22) противоречит формуле (21), которая требует, чтобы $\varrho = 2R$.

Следовательно, если в точке x к характеристической последователь ности принадлежат производные, являющиеся внутренними членами перманансов, то в точке $y > x$ к характеристической последовательности не принадлежат ни внутренние, ни первые члены альтернансов. Остается показать, что и последние члены альтернанса также не могут входить в характеристическую последовательность производных в точке y.

Действительно, из

$$\left| f^{(b_{2k}-1)}(y) \right| \geqslant (b-y) \left| f^{(b_{2k})}(y) \right|$$

получаем

$$\sqrt[b_{2k}]{\frac{|f^{(b_{2k})}(y)|}{b_{2k}!}} \leqslant \sqrt[b_{2k}]{\frac{1}{(b-y)b_{2k}}} \sqrt[b_{2k}]{\frac{|f^{(b_{2k}-1)}(y)|}{(b_{2k}-1)!}};$$

следовательно,

$$lim \sqrt[b_{2k}]{\frac{|f^{(b_{2k})}(y)|}{b_{2k}!}} \leqslant lim \sqrt[b_{2k}-1]{\frac{|f^{(b_{2k}-1)}(y)|}{(b_{2k}-1)!}},$$

а потому, раз $f^{(b_{2k}-1)}(y)$ не принадлежит к характеристической последовательности, то $f^{(b_{2k})}(y)$ также не входит в нее.

3-я Лемма. *Если в характеристическую последовательность точки x входит лишь безконечное множество членов перманансов $f^{(n)}(x)$, которые можем считать положительными*, где $n = b_{2k} + h$ $(0 < h < \lambda_{2k+1})$, то

$$\frac{n}{h} \leqslant \frac{R(x)}{(b-x)} (1 + \alpha_n), \tag{23}$$

при чем α_n стремится к нулю с возрастанием n.

Действительно, допущение, что $f^{(n)}(x)$ входит в характеристическую последовательность, означает, что

$$\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}} = \frac{1}{R(1+\varepsilon_n)}, \tag{24}$$

где $R = R(x)$ радиус сходимости в точке x, а ε_n стремятся к 0 с возрастанием n.

Пусть $y = x + \delta < b$ и $f^{(n-h)}(y)$ член того же пермананса, что и $f^{(n)}(y)$.

В таком случае,

$$f^{n-h}(x+\delta) > \frac{\delta^h}{h!} f^{(n)}(x) \tag{25}$$

В частности, пусть $n - h = b_{2k}$. Тогда, по только что доказанному, $f^{n-h}(y)$ не войдет, при b_{2k} достаточном большом, в характеристическую последовательность, а потому можем положить

$$f^{(b_{2k})}(y) < \frac{b_{2k}!}{(P-\delta)^{b_{2k}}}, \tag{26}$$

при чем

$$P - \delta \geqslant R(y) + \varrho R,$$

где $\varrho > 0$ определенное достаточно малое число. С другой стороны,

$$R(y) \geqslant R - \delta, \tag{27}$$

поэтому

$$P \geqslant R(1+\varrho). \tag{28}$$

Из (26) и (25) получаем, благодаря (24),

$$\frac{(n-h)!}{(P-\delta)^{n-h}} > \frac{n!\ \delta^h}{h!} \frac{1}{[R(1+\varepsilon_n)]^n},$$

т. е.

$$\frac{(n-h)!\ h!}{n!\left(\dfrac{\delta}{P}\right)^h \left(1-\dfrac{\delta}{P}\right)^{n-h}} > \left[\frac{P}{R(1+\varepsilon_n)}\right]^n.$$

Отсюда, беря δ достаточно малым, видим (благодаря (28)), что h не может оставаться конечным, при возрастании $b_{2k} = n - h$. Поэтому, применяя формулу Стирлинга, получаем при n достаточно большом

$$\frac{\left(\dfrac{h}{n}\right)^{\frac{h}{n}} \left(1-\dfrac{h}{n}\right)^{1-\frac{h}{n}}}{\left(\dfrac{\delta}{P}\right)^{\frac{h}{n}} \left(1-\dfrac{\delta}{P}\right)^{1-\frac{h}{n}}} > \frac{P}{R(1+\varepsilon)}, \tag{29}$$

как бы мало ни было заданное число $\varepsilon > 0$. Неравенство (29) должно иметь место при всяком $\delta < b - x$; поэтому, необходимо иметь

$$\frac{b-x}{P} < \frac{h}{n}, \tag{30}$$

чтобы не прийти в противоречие с неравенством (28), т. к., при $\dfrac{\delta}{P} = \dfrac{h}{n}$ неравенство (29) обращается в $R(1+\varepsilon) > P$.

Замечая, что неравенство (30) должно быть соблюдено при всяком определенном значении P, удовлетворяющем (28), где $\varrho > \varepsilon$, мы приходим к неравенству (23).

1-е Следствие. *Радиус сходимости R в точке x, в которой характеристическая последовательность не содержит членов альтернансов, не может быть менее $b - x$; радиус сходимости R в точке, в которой характеристическая последовательность не содержит членов перманансов, не менее x.*

Действительно, левая часть неравенства (23) не может быть менее 1.

2-е Следствие. *Всякая регулярно монотонная на отрезке $(0, b)$ функция $f(x)$ голоморфна внутри круга построенного на $(0, b)$ как на диаметре. Если $x = \frac{b}{2}$ не является нейтральной точкой, то $f(x)$ голоморфна по крайней мере в одном конце отрезка монотонности, а именно в том конце, к которому нейтральная точка a ближе; радиус сходимости в точке a не менее ее расстояния до наиболее удаленного от нее конца.*

3-е Следствие. *Точка b не может быть особенной, если*

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_{2k+1}}{b_{2k+1}} = \theta < 1; \qquad (31)$$

точка 0 не может быть особенной, если

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_{2k}}{b_{2k}} = \theta' < 1. \qquad (31 \text{ bis})$$

Радиус сходимости в нейтральной точке a не меньше наибольшего из чисел $\frac{b-a}{\theta}$ и $\frac{a}{\theta'}$.

4-е Следствие. *Если $\theta = 0$ и $\theta' > 0$, то функция $f(x)$ не имеет нейтральной точки внутри отрезка.*

2-я теорема. *Если характеристическая последовательность в точке x содержит члены перманансов, то круг сходимости этой точки проходит через действительную особенную точку $z \geqslant b$ функции $f(x)$; если характеристическая последовательность содержит члены альтернансов, то круг сходимости проходит через действительную особенную точку $z' \leqslant 0$.*

В самом деле, пусть $R(y)$ радиус сходимости в точке $y = x + \delta$. По прежнему, не нарушая общности, можем ограничиться случаем, когда в точке x характеристическая последовательность состоит из членов перманансов. В таком случае для доказательства теоремы, достаточно показать, что

$$R(y) = R - \delta. \qquad (32)$$

Полагая $n - \mu$ достаточно большим, имеем, при $\varepsilon > 0$ произвольно малом,

$$f^{(n-\mu)}(x + \delta) < \frac{(n-\mu)!}{(P-\delta)^{n-\mu}},$$

где $P - \delta = (1 - \varepsilon) R(y)$.

Поэтому, если $f^{(n-\mu)}(x)$ входит в тот же пермананс, что и $f^{(n)}$, то находим, подобно предыдущему,

$$\frac{\left(\frac{\mu}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{1-\frac{\mu}{n}}}{\left(\frac{\delta}{P}\right)^{\frac{\mu}{n}}\left(1-\frac{\delta}{P}\right)^{1-\frac{\mu}{n}}} > \frac{P}{R(1+\varepsilon)} \tag{29 bis}$$

Но благодаря (23), можем удовлетворить равенству

$$\frac{\mu}{n}=\frac{\delta}{P},$$

взявши, например, $\delta=\frac{b-x}{2}$. В таком случае, из (29^{bis}) заключаем, что

$$P<R(1+\varepsilon),$$

откуда

$$R(y)<\frac{R(1+\varepsilon)-\delta}{1-\varepsilon},$$

но, т. к. ε может быть взято произвольно малым, то

$$R(y)\leqslant R-\delta,$$

и, вследствие (27), получаем (32). Ч. и т. д.

1-е следствие. *Регулярно монотонная на отрезке (o, b) функция есть целая функция, если у нее нет действительных особенностей.*

2-е следствие. *Если ряд Тейлора $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$, имеющий радиус сходимости R, не имеет особенностей ни в одной из точек $\pm R$, то совокупность нулей его последовательных производных везде густа на отрезке $(-R, +R)$.*