О минимальном среднем квадратичном отклонении от нуля полинома в данном интервале.

Я. Л. Геронимус

§ 1.

Задача, которую я рассматриваю, формулируется следующим образом: *найти полином, степени не выше n, для которого среднее квадратичное отклонение от нуля в данном интервале было бы минимальным если для $x = \xi$ известно или 1) значение одной производной нашего полинома напр. i-ой; или 2) значение самого полинома и его m первых производных.*

Путем замены переменных можно свести задачу к интервалу $-1, +1$.

Итак, если обозначим наш полином через $y(x)$, то

$$L = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2\, dx$$

должно быть минимальным, при выполнении условий или 1) $y^{(i)}(\xi) = S_i$ или 2) $y^{(j)}(\xi) = S_j$ $(j = 0, 1, 2 \dots m)$.

Разложим наш полином по полиномам Legendre'a

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Тогда

$$L = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k{}^2}{2k+1} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

ибо, по известному свойству полиномов Legendre'a

$$\int_{-1}^{1} P_r(x) P_s(x)\, dx \begin{cases} = \quad 0 & \text{при } r \neq s \\ = \dfrac{2}{2s+1} & \text{при } r = s. \end{cases}$$

Таким образом задача сводится к нахождению минимума выражения (1), при выполнении условий

$$\sum_{k=j}^{n} a_k P_k^{(j)}(\xi) = S_j,$$

где j в первой задаче равно i, а во второй задаче изменяется от 0 до m. (Под $P_k^{(o)}(\xi)$ подразумевается значение самого полинома).

Тогда условия extremum'а для первой задачи напишутся:

$$\frac{2a_k}{2k+1} + \lambda P_k^{(i)}(\xi) = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots m). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Отсюда умножая на a_k и суммируя по всем k, получим:

$$2L + \lambda S_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Если же мы избавимся от знаменателя, помножим на $P_k^{(i)}(\xi)$ и просуммируем по всем k, то

$$2S_i + \lambda \sum_{k=i}^{n} (2k+1)\left[P_k^{(i)}(\xi)\right]^2 = 0,$$

или, обозначая

$$a_{ii}(\xi) = \sum_{k=i}^{n} (2k+1)\left[P_k^{(i)}(\xi)\right]^2 \quad \ldots \quad (4)$$

получим

$$2S_i + \lambda a_{ii} = 0. \text{ Отсюда } L = \frac{S_i^2}{a_{ii}(\xi)} \quad \ldots \quad (5)$$

Во второй задаче условия extremum'а запишутся;

$$\frac{2a_k}{2k+1} + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j P_k^{(j)}(\xi) = 0 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad (6)$$

Умножая на a_k и суммируя, получим

$$2L + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j S_j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Если же избавимся от знаменателя, помножим на $P_k^{(l)}(\xi)$ и просуммируем по k, то получим

$$2S_l + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j a_{jl}(\xi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$(l = 0, 1, 2 \ldots m) \quad \text{где } a_{jl}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\, P_k^{(j)}(\xi)\, P_k^{(l)}(\xi) \quad \ldots \quad (9)$$

Уравнения (7) и (8) представляют систему $m+2$ уравнений с $m+1$ неизвестными λ_j. Условие совместности этих уравнений запишется так:

$$\begin{vmatrix} L & S_0 & S_1 & \ldots & S_m \\ S_0 & a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

§ 2

Из написанных уравнений можно вычислить a_k — коэффициенты разложения нашего полинома по полиномам Legendre'a. Из уравнений (8) мы можем вычислить все λ_j. Обозначая через a определитель, составленный из a_{jl} получим:

$$\lambda_j = -\frac{2}{a} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & \ldots\ldots & a_{j-1,\,0} & S_0 & a_{j+1,\,0} & \ldots\ldots & a_{m0} \\ a_{01} & a_{11} & \ldots\ldots & a_{j-1,\,1} & S_1 & a_{j+1,\,1} & \ldots\ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0m} & a_{1m} & \ldots\ldots & a_{j-1,\,m} & S_m & a_{j+1,\,m} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

На месте j-ой вертикали стоят S.

Переставим эту вертикаль на место нулевой — легко видеть, что для этого понадобится j перестановок и λ_j будут:

$$\lambda_j = (-1)^{j+1}\frac{2}{a} \begin{vmatrix} S_0 & a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{j-1,0} & a_{j+1,0} & \ldots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \ldots & a_{m1} \\ S_2 & a_{02} & a_{12} & \ldots & a_{j-1,2} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & \ldots & a_{j-1,m} & a_{j+1,m} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots m)$$

но из уравнения (6)

$$a_k = -\frac{2k+1}{2}\sum_{j=0}^{m} \lambda_j P_k^{(j)}(\xi)$$

откуда

$$a_k = -\frac{2k+1}{a} \begin{vmatrix} O & P_k^{(0)}(\xi) & P_k^{(1)}(\xi) & P_k''(\xi) & \ldots\ldots & P_k^{(m)}(\xi) \\ S_0 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \ldots\ldots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & \ldots\ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & a_{2m} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

§ 3.

Приступаем к решению уравнения (10).

Раскрывая по элементам нулевой горизонтали, имеем

$$L\,a = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} a_{jl}\, S_j\, S_l\,,$$

где a_{jl} некоторые коэффициенты, которые мы сейчас определим.

При разложении по элементам нулевой горизонтали S_j будет умножаться на

$$(-1)^{j+1}\cdot\begin{vmatrix} S_0 & a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{j-1,0} & a_{j+1,0} & \ldots & a_{m0} \\ S_1 & a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \ldots & a_{m1} \\ S_2 & a_{02} & a_{12} & \ldots & a_{j-1,2} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & a_{0m} & a_{1m} & \ldots & a_{j-1,m} & a_{j+1,m} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

При разложении по элементам нулевой вертикали S_j будет умножаться на S_l и на $(-1)^{0+j+1+l+0}A_{jl}$, где A_{jl} минор определителя a, соответствующий элементу a_{jl}. Окончательно

$$L = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{j+l}S_j\,S_l\,\frac{A_{jl}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

§ 4.

Таким образом, в обоих случаях мы встречаемся с суммами

$$a_{jl}(\xi) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,P_k^{(j)}(\xi)\,P_k^{(l)}(\xi).$$

Перейдем к их вычислению. Пусть для определенности $j > l$. Тогда суммирование по k начинается с $k = j$. Введем обозначение: $f(k) =$

$$= \frac{(k+j+1)(k+l+1)\,P_k^{(j)}\,P_k^{(l)} + (1-\xi^2)\,P_k^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}}{j+l+1}$$

Из рекуррентной формулы

$$P'_{k+1} - \xi\,P'_k = (k+1)\;P_k$$

получим, дифференцируя j раз:

$$P_{k+1}^{(j+1)} - \xi\,P_k^{(j+1)} = (k+j+1)\,P_k^{(j)}.$$

Проделав то же самое для l и подставив в $f(k)$, получим

$$f(k) = \frac{P_{k+1}^{(j+1)}\,P_{k+1}^{(l+1)} - \xi\,P_k^{(j+1)}P_{k+1}^{(l+1)} - \xi\,P_{k+1}^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)} + P_k^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)}}{j+l+1}$$

Найдем теперь

$$f(k-1) = \frac{P_k^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)} - \xi\,P_{k-1}^{(l+1)}\,P_k^{(j+1)} - \xi\,P_{k-1}^{(j+1)}\,P_k^{(l+1)} + P_{k-1}^{(j+1)}\,P_{k-1}^{(l+1)}}{j+l+1}.$$

Отсюда $\Delta f = f(k) - f(k-1) =$

$$= \frac{P_{k+1}^{(j+1)} P_{k+1}^{(l+1)} - P_{k-1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)} - \xi P_k^{(j+1)} [P_{k+1}^{(l+1)} - P_{k-1}^{(l+1)}] - \xi P_k^{(l+1)} [P_{k+1}^{(j+1)} - P_{k-1}^{(j+1)}]}{j+l+1} =$$

$$= \frac{-(2k+1)\,\xi\,[P_k^{(j+1)} P_k^{(l)} + P_k^{(j)} P_k^{(l+1)}] + P_{k+1}^{(j+1)} P_{k+1}^{(l+1)} - P_{k+1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)}}{j+l+1} +$$

$$+ \frac{P_{k+1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)} - P_{k-1}^{(j+1)} P_{k-1}^{(l+1)}}{j+l+1} =$$

$$= \frac{(2k+1)\,[-\xi P_k^{(j+1)} P_k^{(l)} - \xi P_k^{(l+1)} P_k^{(j)} + P_{k+1}^{(j+1)} P_k^{(l)} + P_{k-1}^{(l+1)} P_k^{(j)}]}{j+l+1} =$$

$$= \frac{(2k+1)\left\{P_k^{(l)}\,[P_{k+1}^{(j+1)} - \xi P_k^{(j+1)}] + P_k^{(j)}\,[P_{k-1}^{(l+1)} - \xi P_k^{(l+1)}]\right\}}{j+l+1}.$$

или, при помощи рекуррентных формул

$$\Delta f = \frac{(2k+1)\,[(k+j+1)\,P_k^{(t)} P_k^{(j)} - (k-l)\,P_k^{(l)} P_k^{(j)}]}{j+l+1} = (2k+1)\,P_k^{(l)} P_k^{(j)}.$$

Таким образом

$$a_{jl} = \sum_{k=j}^{n} [f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(j-1)\,.$$

Но $f(j-1) = 0$ и окончательно

$$a_{jl}(\xi) = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\,P_n^{(j)}(\xi)\,P_n^{(l)}(\xi) + (1-\xi^2)\,P_n^{(j+1)}(\xi)\,P_n^{(l+1)}(\xi)}{j+l+1}\,. \quad (12)$$

§ 5.

Займемся теперь подробнее первой задачей, когда дана одна производная.

По формуле (5) $L = \dfrac{S_i^2}{a_{ii}(\xi)}$, а коэффициенты a_k по (2):

$$a_k = \frac{-\lambda(2k+1)}{2}\,P_k^{(i)}(\xi) = \frac{L(2k+1)}{S_i}\,P_k^{(i)}(\xi) \quad \ldots \; (13)$$

Из последней формулы видно, что при $i = n$ искомый полином будет отличаться лишь постоянным множителем от n-го полинома Legendre'а. Если $P_n^{(i)}(\xi) = 0$, то полином наш будет степени $n-1$, ибо старший коэффициент обращается в нуль. В частности при $\xi = 0$, если $n - i$ нечетное число, то полином будет степени $n-1$; кроме того полином будет разложен только по четным, или только по нечетным полиномам Legendre'а, в зависимости от того, будет ли i четным или нечетным числом.

Прежде чем приступить к исследованию получившейся формулы (5) для отклонения L, сделаем несколько замечаний относительно нашего получившегося полинома

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Прежде всего ясно, что площадь, ограниченная кривой $y = y(x)$, равна нулю, ибо площадь

$$S = \int_{-1}^{1} y dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} P_k(x) dx = 2a_0 = 0, \text{ ибо при } i \geqslant 1 \ a_0 = 0.$$

Выясним теперь число корней нашего полинома в интервале — $-1, +1$.

Воспроизводя классическое доказательство Чебышева, можно показать, что *при* $|\xi| > 1$ *по крайней мере* $n - i$ *корней нашего полинома лежат в данном интервале.* Обозначая через α_p корни, для которых $|\alpha_p| \leqslant 1$, а через β_p соответствующие кратности, докажем, что $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_r \geqslant n - i$. Допустим противное. Пусть $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_r < n - i$. Рассмотрим отношение

$$\frac{y(x)}{(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}}.$$

Для всех значений $-1 \leqslant x \leqslant 1$ это отношение сохраняет знак. Если $|\xi| > 1$, то наше отношение будет заключаться между двумя конечными, отличными от нуля величинами. Обозначая меньшую по абсолютной величине из них через l, видим, что

$$\left|\frac{y(x)}{(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}} - l\right| < \left|\frac{y(x)}{(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}}\right|$$

т. е. полином $y - l(x-\xi)^{i+1}(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\beta_r}$ дает среднее квадратическое отклонение от нуля меньшее, чем L. Этот полином, по допущенному, степени не выше $n - i - 1 + i + 1 = n$, и i-ая производная его в точке ξ равна тому же, чему для нашего полинома. Таким образом, при $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_r \leqslant n - i - 1$, отклонение можно было бы еще уменьшить. Если i число нечетное, то ξ может быть каким угодно, ибо $(x-\xi)^{i+1}$ не меняет знака.

Если же i число четное, то, не налагая никаких ограничений на ξ, можно доказать, что по крайней мере $n - i - 1$ корней нашего полинома лежат в интервале $-1, +1$. Наконец воспользуемся одной теоремой Laguerre'а для выяснения положения корней нашего полинома. В заметке*): „Sur une propriété des polynomes de Legendre“ Laguerre доказывает следующую теорему: если полином разложен по полиномам Legendre'а $y = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$, то число корней уравнения $y(x) = 0$,

*) Laguerre Oeuvres v. I p. 144—146.

больших или равных единице, не больше числа перемен знака в ряде $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$. Если $\xi \geqslant 1$, то $P_k^{(i)}(\xi) > 0$ и все a_k одного знака. Таким образом, ***если $\xi \geqslant 1$, то наш полином не может иметь корней равных единице или больших единицы.***

§ 6.

Приступим теперь к исследованию получившейся величины отклонения:

$$L = \frac{S_i^2}{a_{ii}(\xi)} = \frac{S_i^2}{\sum\limits_{k=i}^{n} (2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2} = \frac{S_i^2(2i+1)}{(n+i+1)^2[P_n^{(i)}]+(1-\xi^2)[P_n^{(i+1)}]^2} \quad (5')$$

В знаменателе стоит полином относительно ξ степени $2n-2i$, содержащий, как не трудно видеть, лишь четные степени ξ.

Чтобы выяснить, где будут extrema L, возьмем производную знаменателя:

$$a'_{ii}(\xi) = 2 \sum_{k=i+1}^{n} (2k+1)\, P_k^{(i)}(\xi)\, P_k^{(i+1)}(\xi)\,.$$

Воспользуемся формулой

$$(2k+1)\, P_k = P'_{k+1} - P'_{k-1}\,.$$

Тогда

$$a'_{ii}(\xi) = 2 \sum_{k=i+1}^{n} P_k^{(i+1)}\,[P_{k+1}^{(i+1)} - P_{k-1}^{(i+1)}] = 2P_n^{(i+1)}\, P_{n+1}^{(i+1)}\,.$$

Таким образом extrema L будут в точках, где $P_n^{(i+1)} = 0$ или $P_{n+1}^{(i+1)} = 0$. Каждый из этих полиномов имеет все вещественные корни, и все они лежат внутри интервала $-1, +1$. Кроме того, так как корни $(n+1)$-ого и n-ого полиномов Legendre'а перемежаются, то на основании теоремы В. Маркова, перемежаются и корни их производных.

Выясним, где именно будут maxima и где minima. Возьмем вторую производную:

$$a''_{ii}(\xi) = 2P_n^{(i+2)}\, P_{n+1}^{(i+1)} + 2P_{n+1}^{(i+2)}\, P_n^{(i+1)}\,.$$

Рассмотрим сначала те точки ξ_k, где $P_n^{(i+1)}(\xi_k) = 0$.

В этих точках

$$a''_{ii}(\bar{\xi}_k) = 2P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)\, P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)\,.$$

Применим формулу

$$P'_{n+1} - \xi P'_n = (n+1) P_n.$$

Дифференцируя i раз получим:

$$P_{n+1}^{(i+1)} - \xi\, P_n^{(i+1)} = (n+i+1)\, P_n^{(i)}.$$

Таким образом

$$a''_{ii}(\bar{\xi}_k) = 2(n+i+1)\, P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k)\, P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)\,.$$

Для выяснения знака продифференцируем i раз дифференциальное уравнение n-го полинома Legendre'а

$$(\xi^2-1)\,P_n''+2\xi P_n'=n(n+1)\,P_n\,.$$

В точках $\bar{\xi}_k$

$$P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)=-\frac{(n-i)\,(n+i+1)\,P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k)}{1-\bar{\xi}_k^2}\,,$$

т. е.

$$P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)\,P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k)<0\,,$$

ибо $|\bar{\xi}_k|<1$. (Если $i=n$, то вторая производная равна нулю, но при $i=n$ знаменатель будет постоянной величиной).

Итак, в тех точках, где $P_n^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)=0$, $a_{ii}''(\bar{\xi}_k)<0$, т. е. L достигает минимума.

Точно также докажем, что *в точках, в которых обращается в нуль* $P_{n+1}^{(i+1)}$, *отклонение достигает максимума.*

Таким образом, внутри интервала -1, $+1$ отклонение имеет $n-i$ maxima и $(n-i-1)$ minima. Исследуем, что будет при нуле. В нуль обращается та производная, которая нечетной степени, т. е. при нуле будет максимум, если $n-i$ нечетное число и минимум, если $n-i$ четное. Последний extremum — для наибольшего значения ξ — всегда максимум.

Таким образом, при $P_n^{(i+1)}=0$

$$L_{\min}=\frac{S_i^2(2i+1)}{(n+i+1)^2[P_n^{(i)}]^2}=\frac{S_i^2(2i+1)}{[P_{n+1}^{(i+1)}]^2}\,,\quad\ldots\ldots\ldots (14)$$

а при $P_{n+1}^{(i+1)}=0$

$$L_{\max}=\frac{S_i^2(2i+1)}{[P_n^{(i+1)}]^2}=\frac{S_i^2(2i+1)}{(n-i+1)^2[P_{n+1}^{(i)}]^2}\,.\quad\ldots\ldots (15)$$

§ 7.

Докажем теперь, что $L(1)<L(\xi)$, если $|\xi|<1$.

Если взять полином Legendre'а в форме:

$$P_n(\cos\varphi)=2\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!}\Big[\cos n\varphi+\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\varphi+$$
$$+\frac{1.3}{1.2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\varphi+\ldots\Big]$$

то ясно, что $P_n(1)>|P_n(\cos\varphi)|$, ибо каждый член достигает своего наибольшего значения при значении косинуса равном единице, т. е. при $\varphi=0$.

Докажем также, что $P_k^{(i)}(1)>|P_k^{(i)}(\xi)|$, если $|\xi|<1$.

Применим метод математической индукции: докажем, что, если для полинома Legendre'а степени n любая производная при единице больше, чем в любой точке внутри интервала, то тем же свойством будет обладать полином Legendre'а степени $n+1$.

Из формулы $P'_{n+1} = \xi P'_n + (n+1) P_n$ получим, дифференцируя i раз:

$$P_{n+1}^{(i+1)}(\xi) = \xi P_n^{(i+1)}(\xi) + (n+i+1) P_n^{(i)}(\xi).$$

Возводя в квадрат и вычитая получившееся равенство из аналогичного равенства для $\xi = 1$, получим

$$[P_{n+1}^{(i+1)}(1)]^2 - [P_{n+1}^{(i+1)}(\xi)]^2 = \left\{[P_n^{(i+1)}(1)]^2 - \xi^2 [P_n^{(i+1)}(\xi)]^2\right\} +$$

$$+ (n+i+1)^2 \left\{[P_n^{(i)}(1)]^2 - [P_n^{(i)}(\xi)]^2\right\} + 2(n+i+1)\,[P_n^{(i+1)}(1)\, P_n^{(i)}(1) -$$

$$- \xi P_n^{(i+1)}(\xi) P_n^{(i)}(\xi)] \geqslant 0.$$

Знак равенства будет только при $i = n$.

Из доказанного вытекает, что

$$a_{ii}(1) = \sum_{k=i}^{n} (2k+1)\,[P_k^{(i)}(1)]^2 > a_{ii}(\xi), \text{ а } L(1) < L(\xi).$$

Таким образом ***при единице отклонение меньше, чем в любой точке внутри интервала.*** При возрастании ξ, если $\xi > 1$, отклонение все время убывает.

§ 8.

Докажем теперь, что ***в интервале*** 0, 1 ***каждый максимум*** L ***больше последующего.***

Maxima будут там, где $P_{n+1}^{(i+1)}(\xi) = 0$.

Пусть

$$\frac{P_n^{(i)}(\xi)}{P_{n+1}^{(i+1)}(\xi)} = C + \sum_{k=1}^{n-i} \frac{\mu_k}{\xi - \xi_k} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Здесь через ξ_k обозначены корни $P_{n+1}^{(i+1)}(\xi) = 0$. Я хочу доказать, что

$$J = 2 \int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}} P_n^{(i+1)} P_{n+1}^{(i+1)} d\xi > 0,$$

ибо тогда

$$J = a_{ii}(\xi_{r+1}) - a_{ii}(\xi_r) > 0,$$

т. е.

$$a_{ii}(\xi_{r+1}) > a_{ii}(\xi_r) \quad \text{а} \quad L(\xi_{r+1}) < L(\xi_r).$$

Как известно

$$\mu_k = \frac{P_n^{(i)}(\xi_k)}{P_{n+1}^{(i+2)}(\xi_k)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Продифференцируем (16) — тогда получим:

$$P_{n+1}^{(i+1)}P_n^{(i+1)}-P_n^{(i)}P_{n+1}^{(i+2)}=-[P_{n+1}^{(i+1)}]^2\sum_{k=1}^{n-i}\frac{\mu_k}{(\xi-\xi_k)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Тогда

$$J=2\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}}P_n^{(i+1)}P_{n+1}^{(i+1)}\,d\xi=2\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}}P_n^{(i)}P_{n+1}^{(i+2)}\,d\xi-2\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}}[P_{n+1}^{(i+1)}]^2\sum_{k=1}^{n-i}\frac{\mu_k}{(\xi-\xi_k)^2},$$

или, после интегрирования по частям,

$$J=-\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}}[P_{n+1}^{(i+1)}]^2\sum_{k=1}^{n-i}\frac{\mu_k}{(\xi-\xi_k)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Дифференцируя i раз формулу $P'_{n+1}=\xi P'_n+(n+1)P_n$, найдем:

$$P_{n+1}^{(i+1)}=\xi P_n^{(i+1)}+(n+i+1)\,P_n^{(i)},$$

а отсюда

$$P_n^{(i)}(\xi_k)=-\frac{\xi_k P_n^{(i+1)}(\xi_k)}{n+i+1} \quad \text{и} \quad \mu_k=-\frac{\xi_k P_n^{(i+1)}(\xi_k)}{(n+i+1)P_{n+1}^{(i+2)}(\xi_k)}. \quad . \quad (20)$$

Из этой формулы видно, что μ_k нечетная функция ξ_k и что при $\xi_k>0$ $\mu_k<0$, ибо $P_n^{(i+1)}(\xi_k)\,.\,P_{n+1}^{(i+2)}(\xi_k)>0$, так как в точке ξ_k a_{ii} достигает минимума.

Корни нашего полинома $P_{n+1}^{(i+1)}$ расположены симметрично относительно нуля; каждому ξ_k соответствует $-\xi_k$ и $\mu_k(-\xi_k)=-\mu_k(\xi_k)$.

Поэтому

$$J=-\sum\mu_k\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}}[P_{n+1}^{(i+1)}]^2\left\{\frac{1}{(\xi-\xi_k)^2}-\frac{1}{(\xi+\xi_k)^2}\right\}d\xi=-4\sum\mu_k\xi_k\int_{\xi_r}^{\xi_{r+1}}\frac{\xi\,[P_{n+1}^{(i+1)}]^2\,d\xi}{(\xi^2-\xi_k^2)^2},$$

где суммирование производится лишь по положительным корням. Ясно, что $J>0$.

Докажем теперь, для $0\leqslant\xi<1$, *что и каждый минимум больше последующего.*

Minima будут там, где $P_n^{(i+1)}=0$. Обозначим эти точки через $\bar{\xi}_k$.

Тогда

$$\frac{P_{n+1}^{(i)}(\xi)}{P_n^{(i+1)}(\xi)}=a\xi^2+b+\sum_{k=1}^{n-i-1}\frac{v_k}{\xi-\bar{\xi}_k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

где

$$v_k=\frac{P_{n+1}^{(i)}(\bar{\xi}_k)}{P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

и $a>0$.

Дифференцируя (21), получим:

$$P_n^{(i+1)}\,P_{n+1}^{(i+1)}-P_{n+1}^{(i)}\,P_n^{(i+2)}=[P_n^{(i+1)}]^2\left\{2a\xi-\sum_{k=1}^{n-i-1}\frac{v_k}{(\xi-\bar{\xi}_k)^2}\right\}.$$

Обозначим

$$\bar{J}=2\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} P_n^{(i+1)} P_{n+1}^{(i+1)}\, d\xi = 2\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} P_{n+1}^{(i)} P_n^{(i+2)}\, d\xi + 4a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\, [P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi -$$

$$-2\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} [P_n^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{v_k}{(\xi-\bar{\xi}_k)^2}\, d\xi\,,$$

или, после интегрирования по частям

$$\bar{J}=2a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\, [P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi - \int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} [P_n^{(i+1)}]^2 \sum_{k=1}^{n-i-1} \frac{v_k}{[\xi-\bar{\xi}_k]^2}\, d\xi.$$

Опять надо доказать, что $\bar{J}>0$. Тогда $a_{ii}(\bar{\xi}_{r+1})>a_{ii}(\bar{\xi}_r)$, а $L(\bar{\xi}_{r+1})<L(\bar{\xi}_r)$. Из формулы (22) видно, что v_k нечетная функция $\bar{\xi}_k$ Дифференцируя i раз формулу

$$\xi\, P'_{n+1} = P'_n + (n+1)\, P_{n+1}\,,$$

получим

$$\xi\, P_{n+1}^{(i+1)} = P_n^{(i+1)} + (n-i+1)\, P_{n+1}^{(i)}.$$

Отсюда

$$P_{n+1}^{(i)}(\bar{\xi}_k) = \frac{\bar{\xi}_k\, P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)}{n-i+1}\,, \quad \text{а} \quad v_k = \frac{\bar{\xi}_k\, P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)}{(n-i+1)\, P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)} \quad . \quad . \quad (23)$$

Но $P_{n+1}^{(i+1)}(\bar{\xi}_k)\, P_n^{(i+2)}(\bar{\xi}_k)<0$, ибо при $\xi=\bar{\xi}_k$ a_{ii} достигает максимума. Поэтому, при $\bar{\xi}_k>0$ $v_k<0$. Отсюда так же, как и в предыдущем случае

$$\bar{J}=2a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\, [P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi - \sum v_k \int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} [P_n^{(i+1)}]^2 \left\{\frac{1}{(\xi-\bar{\xi}_k)^2} - \frac{1}{(\xi+\bar{\xi}_k)^2}\right\} d\xi =$$

$$=2a\int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \xi\, [P_n^{(i+1)}]^2\, d\xi - 4\sum v_k\, \bar{\xi}_k \int\limits_{\bar{\xi}_r}^{\bar{\xi}_{r+1}} \frac{\xi\, [P_n^{(i+1)}]^2}{(\xi^2-\bar{\xi}_k^2)^2}\, d\xi > 0\,.$$

Из доказанных теорем вытекает интересное свойство полиномов Legendre'a. Так как extrema L идут убывая, то, как видно из (15)

$$\left| P_{n+1}^{(i)}(\xi_{k+1}) \right| > \left| P_{n+1}^{(i)}(\xi_k) \right|$$

и точно также в точках, где

$$P_n^{(i+1)}=0 \qquad \left| P_n^{(i)}(\bar{\xi}_{k+1}) \right| > \left| P_n^{(i)}(\bar{\xi}_k) \right|,$$

т. е. *при изменении ξ от нуля до единицы экстремальные значения любой производной любого полинома Legendre'a возрастают по абсолютной величине.*

§ 9.

Если сравнить между собой $L_n(\xi)$ и $L_{n-1}(\xi)$, то так как

$$\sum_{k=i}^{n}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2=\sum_{k=i}^{n-1}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2+(2n+1)\,[P_n^{(i)}(\xi)]^2$$

ясно, что $L_n(\xi)\leqslant L_{n-1}(\xi)$. Знак равенства будет в точках, в которых $P_n^{(i)}(\xi)=0$. Таким образом $L_{n+1}\leqslant L_n\leqslant L_{n-1}$. Кривая L_n целиком лежит между кривыми L_{n+1} и L_{n-1}, касаясь их в тех точках, где $P_{n+1}^{(i)}=0$ или $P_n^{(i)}=0$. Действительно

$$L_n'=-\frac{2\,(2i+1)\,S_i^2\,P_n^{(i+1)}\,P_{n+1}^{(i+1)}}{\left\{\sum\limits_{k=i}^{n}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2\right\}^2}\ \text{ а }\ L_{n+1}'=-\frac{2\,(2i+1)\,S_i^2\,P_{n+1}^{(i+1)}\,P_{n+2}^{(i+1)}}{\left\{\sum\limits_{k=i}^{n+i}(2k+1)\,[P_k^{(i)}(\xi)]^2\right\}^2}.$$

Но из формулы $P_{n+2}^{(i+1)}-P_n^{(i+1)}=(2n+3)P_{n+1}^{(i)}$ видно, что там, где $P_{n+1}^{(i)}=0$ $L_n'=L_{n+1}'$ и кривые касаются.

Из предыдущих исследований ясно, что в тех случаях, когда $n-i$ число нечетное, при нуле будет maximum maximorum. Обозначим его $L_{n,0}$. Ясно, что $L_{n,0}=L_{n-1,0}$.

Если же $n-i$ четное, то при нуле будет минимум, а следующий за ним максимум будет наибольшим.

§ 10.

Выведем теперь асимптотическую формулу для отклонения. Как известно, для достаточно больших n мы имеем в интервале

$$-1+\varepsilon<\xi<1-\varepsilon$$

$$P_n(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\varphi}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{*)}$$

Дифференцируем i раз. Получим:

$$P_n^{(i)}=\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\varphi}}\cdot\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-\sin\varphi)^i}\,n^i\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

и таким образом

$$L=\frac{(2i+1)\,S_i^2}{\left\{\frac{2\cos^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{\pi(\sin\varphi)^{2i+1}}+\frac{2\sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{\pi(\sin\varphi)^{2i+1}}\right\}n^{2i+1}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}}$$

т. е.

$$L\simeq\frac{\pi\,(2i+1)\,S_i^2(\sin\varphi)^{2i+1}}{2n^{2i+1}},\quad\dots\dots\dots\ (24)$$

---

*) Через $0\left(\frac{1}{n}\right)$ обозначена совокупность членов имеющих n в знаменателе.

или

$$L = L_{n,o}(\sin\varphi)^{2i+1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

где

$$L_{n,o} = \frac{\pi(2i+1)\,S_i^2}{2n^{2i+1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

асимптотическое выражение отклонения при $\xi = 0$, т. е. maximum maximorum.

При $\xi = 1$, $\varphi = 0$ и формуле не применима. Но при приближении φ к нулю L тоже стремится к нулю, т. е. очевидно, при единице L содержит в знаменателе n в более высокой степени, чем $2i+1$.

§ 11.

Выведем формулу для $\xi = 1$.

Вычислим $P_n^{(i)}(1)$.

Как известно

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k(x).$$

Взяв от левой части i раз производную по x, получим

$$\frac{1.3.5\ldots.(2i-3)(2i-1)(2r)^i}{2^i}\left(1-2rx+r^2\right)^{-\frac{2i+1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k^{(i)}(x).$$

Подставляя $x = 1$ получим:

$$1.3.5\ldots.(2i-1)(1-r)^{-(2i+1)}r^i = \sum_{k=0}^{\infty} r^k P_k^{(i)}(1).$$

Разлагаем $(1-r)^{-(2i+1)}$ по биному Newton'а и берем коэффициент при r^{n-i}. Он равен

$$\frac{(2i+1)(2i+2)\ldots.(i+n)}{(n-i)\,!}.$$

Тогда

$$P_n^{(i)}(1) = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)(2i+1)(2i+2)\ldots(n+i)}{(n-i)\,!} = \frac{(n+i)\,!}{2^i i\,!\,(n-i)\,!} =$$

$$= \frac{(n-i+1)(n-i+2)\ldots(n+i-1)(n+i)}{2^i.\,i\,!} \qquad \ldots\ldots (27)$$

Тогда, по (5')

$$L(1) = \frac{2^{2i}\,i\,!^2\,S_i^2(2i+1)}{(n-i+1)^2(n-i+2)^2\ldots(n+i)^2(n+i+1)^2},$$

т. е. $L(1)$ порядка $n^{-2(2i+1)}$. Асимптотически

$$L(1) \simeq \frac{2^{2i}\,i\,!^2\,S_i^2(2i+1)}{n^{4i+2}} \qquad \ldots\ldots (28)$$

Если сравнить $L(1)$ и $L(0)$, то, для достаточно больших значений n

$$\frac{L(1)}{L(0)} \simeq \frac{i\,!^2}{\pi}\left(\frac{2}{n}\right)^{2i+1}.$$

§ 12.

Перейдем теперь к исследованию второй задачи, когда задан целый ряд производных. Мы получили формулу (11):

$$L = \sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} (-1)^{j+l} S_j S_l \frac{A_{jl}}{a}.$$

Таким образом задача сводится к нахождению отношения миноров определителя, составленного из a_{jl} к самому определителю. Мы нашли уже, что

$$a_{jl}(\xi) = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\,P_n^{(j)} P_n^{(l)} + (1-\xi^2)\,P_n^{(j+1)} P_n^{(l+1)}}{j+l+1}.$$

Мы видим, что формула значительно упрощается при $\xi = \pm 1$. При $\xi = 0$, если j и l различной четности, то $a_{jl} = 0$.

Если j и l одной четности с n, то

$$a_{jl}(0) = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\;P_n^{(j)}(0)\,P_n^{(l)}(0)}{j+l+1} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Если же $n-j$ и $n-l$ числа нечетные, то

$$a_{jl} = \frac{P_n^{(j+1)}(0) P_n^{(l+1)}(0)}{j+l+1} = \frac{(n+j)\,(n+l)\;P_{n-1}^{(j)} P_{n-1}^{(l)}}{j+l+1}$$

что следует из формулы $P_n' = \xi\, P_{n-1}' + n\, P_{n-1}$. Таким образом, если $n-j$ и $n-l$ нечетные числа, то в формуле (29) надо n заменить $n-1$. Это ясно из самого вывода формул для a_{jl}. Итак, для $\xi = \pm 1$ и $\xi = 0$ формула для a_{jl} значительно упрощается. Для этих значений ξ, т.-е. для середины и концов интервала мы дадим точное решение задачи до конца.

Для всех остальных значений ξ мы получим асимптотическую формулу.

§ 13.

При $\xi = 1$

$$a_{jl} = \frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\;P_n^{(j)}(1)\,P_n^{(l)}(1)}{j+l+1}$$

Мы видим, что в определителе a можно вынести за знак определителя из всех элементов j-ой вертикали $(n+j+1)\,P_n^{(j)}(1)$ и из всех элементов l-ой горизонтали $(n+l+1)\,P_n^{(l)}(1)$. Таким образом определитель a приводится к определителю b, где $b_{ik} = \frac{1}{i+k+1}$. Легко видеть, что $\dfrac{a}{A_{ik}} = (n+i+1)\,(n+k+1)\,P_n^{(i)}(1)\,P_n^{(k)}(1).\,\dfrac{b}{B_{ik}}$, где B_{ik} минор определителя b, соответствующий элементу b_{ik}. Вычислим $\dfrac{B_{ik}}{b}$

$$
b = \begin{vmatrix}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{i} & \frac{1}{i+1} & \frac{1}{i+2} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{i+1} & \frac{1}{i+2} & \frac{1}{i+3} & \cdots & \frac{1}{m+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \cdots & \frac{1}{i+k-1} & \frac{1}{i+k} & \frac{1}{i+k+1} & \cdots & \frac{1}{m+k} \\
\frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \cdots & \frac{1}{i+k} & \frac{1}{i+k+1} & \frac{1}{i+k+2} & \cdots & \frac{1}{m+k+1} \\
\frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \frac{1}{k+4} & \cdots & \frac{1}{i+k+1} & \frac{1}{i+k+2} & \frac{1}{i+k+3} & \cdots & \frac{1}{m+k+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \frac{1}{m+3} & \cdots & \frac{1}{m+i} & \frac{1}{m+i+1} & \frac{1}{m+i+2} & \cdots & \frac{1}{2m+1}
\end{vmatrix}
$$

Из элементов каждой вертикали вычтем элементы i-ой вертикали. Получим:

$$
b = \begin{vmatrix}
\frac{i}{i+1} & \frac{i-1}{2(i+1)} & \cdots & \frac{1}{i(i+1)} & \frac{1}{i+1} & \frac{-1}{(i+1)(i+2)} & \cdots & \frac{-(m-i)}{(i+1)(m+1)} \\
\frac{i}{2(i+2)} & \frac{i-1}{3(i+2)} & \cdots & \frac{1}{(i+1)(i+2)} & \frac{1}{i+2} & \frac{-1}{(i+2)(i+3)} & \cdots & \frac{-(m-i)}{(i+2)(m+2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{i}{k(i+k)} & \frac{i-1}{(k+1)(i+k)} & \cdots & \frac{1}{(k+i-1)(i+k)} & \frac{1}{i+k} & \frac{-1}{(k+i+1)(i+k)} & \cdots & \frac{-(m-i)}{(k+m)(i+k)} \\
\frac{i}{(k+1)(i+k+1)} & \frac{i-1}{(k+2)(i+k+1)} & \cdots & \frac{1}{(k+i)(i+k+1)} & \frac{1}{i+k+1} & \frac{-1}{(k+i+2)(i+k+1)} & \cdots & \frac{-(m-i)}{(k+m+1)(i+k+1)} \\
\frac{i}{(k+2)(i+k+2)} & \frac{i-1}{(k+3)(i+k+2)} & \cdots & \frac{1}{(k+i+1)(i+k+2)} & \frac{1}{i+k+2} & \frac{-1}{(k+i+3)(i+k+2)} & \cdots & \frac{-(m-i)}{(k+m+2)(i+k+2)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{i}{(m+1)(m+i+1)} & \frac{i-1}{(m+2)(m+i+2)} & \cdots & \frac{1}{(m+i)(m+i+1)} & \frac{1}{i+m+1} & \frac{-1}{(m+i+2)(m+i+1)} & \cdots & \frac{-(m-i)}{(2m+1)(m+i+1)}
\end{vmatrix}
$$

Выноса множителей по вертикалям и по горизонталям, получим:

$$b=\frac{i\,!\,(m-i)\,!\,(-1)^{m-i}}{(i+1)\,(i+2)\ldots(i+m+1)}\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{i} & 1 & \frac{1}{i+2} & \ldots & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{i+1} & 1 & \frac{1}{i+3} & \ldots & \frac{1}{m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \ldots & \frac{1}{i+k-1} & 1 & \frac{1}{i+k+1} & \ldots & \frac{1}{m+k} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \ldots & \frac{1}{i+k} & 1 & \frac{1}{i+k+2} & \ldots & \frac{1}{m+k+1} \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \ldots & \frac{1}{i+k+1} & 1 & \frac{1}{i+k+3} & \ldots & \frac{1}{m+k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \ldots & \frac{1}{m+i} & 1 & \frac{1}{m+i+2} & \ldots & \frac{1}{2m+1} \end{vmatrix}$$

Теперь из элементов каждой горизонтали вычтем элементы k-ой. Получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{k}{2(k+2)} & \ldots & \frac{k}{i(k+i)} & 0 & \frac{k}{(i+2)(k+i+2)} & \ldots & \frac{k}{(m+1)(m+k+1)} \\ \frac{k-1}{2(k+1)} & \frac{k-1}{3(k+2)} & \ldots & \frac{k-1}{(i+1)(k+i)} & 0 & \frac{k-1}{(i+3)(k+i+2)} & \ldots & \frac{k-1}{(m+2)(k+m+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k(k+1)} & \frac{1}{(k+1)(k+2)} & \ldots & \frac{1}{(i+k-1)(k+i)} & 0 & \frac{1}{(i+k+1)(k+i+2)} & \ldots & \frac{1}{(m+k)(k+m+1)} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \ldots & \frac{1}{k+i} & 1 & \frac{1}{k+i+2} & \ldots & \frac{1}{k+m+1} \\ \frac{-1}{(k+1)(k+2)} & \frac{-1}{(k+2)(k+3)} & \ldots & \frac{-1}{(k+i)(k+i+1)} & 0 & \frac{-1}{(k+i+2)(i+k+3)} & \ldots & \frac{-1}{(k+m+1)(m+k+2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-(m-k)}{(k+1)(m+1)} & \frac{-(m-k)}{(k+2)(m+2)} & \ldots & \frac{-(m-k)}{(m+i)(k+i)} & 0 & \frac{-(m-k)}{(m+i+2)(i+k+2)} & \ldots & \frac{-(m-k)}{(2m+1)(m+k+1)} \end{vmatrix}$$

Выноса общих множителей по всем горизонталям и вертикалям, получим

$$b=\frac{(-1)^{i+k}(i+k+1)B_{ik}\,i\,!\,(m-i)\,!\,(-1)^{m-i}}{(i+1)(i+2)\ldots.(i+m)(i+m+1)}\cdot\frac{k\,!\,(m-k)\,!\,(-1)^{m-k}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)(k+m+1)}.$$

А так как

$$P_m^{(s)}(1)=\frac{(m-s+1)(m-s+2)\ldots.(m+s-1)(m+s)}{2^s.\,s\,!},$$

то

$$\frac{B_{ik}}{b}=\frac{2^{i+k}}{i\,!\;k\,!\;(i+k+1)}(i+m+1)(k+m+1)P_m^{(i)}(1)P_m^{(k)}(1)\;\ldots\;(30)$$

и

$$L=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^{i+k}S_iS_k}{i\,!\;k\,!\;(i+k+1)}\cdot\frac{(i+m+1)(k+m+1)P_m^{(i)}(1)P_m^{(k)}(1)}{(i+n+1)(k+n+1)P_n^{(i)}(1)P_n^{(k)}(1)}.\;.\;(31)$$

Преобразуем формулу (30) еще несколько иначе:

$$\frac{B_{ik}}{b}=\frac{(m-i+1)(m-i+2)\ldots.(m+i+1)\;(m-k+1)(m-k+2)\ldots.(m+k+1)}{i\,!\;k\,!\;i\,!\;k\,!\;(i+k+1)}$$

$$L=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-2)^{i+k}S_iS_k}{i\,!\;k\,!\;(i+k+1)}\cdot\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\prod_{r=1}^{r=i}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\prod_{r=1}^{r=k}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}.\;(32)$$

Из этой формулы мы видим, что член с S_iS_k будет порядка $n^{-2(i+k+1)}$. Член с S_0^2 имеет в знаменателе n^2. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(n^2L)=S_0^2(m+1)^2\quad\text{и}\quad L(1)\simeq\frac{(m+1)^2S_0^2}{n^2}.\;\;.\;.\;.\;(33)$$

§ 14.

Общий случай, — когда интервал какой угодно — легко свести к этому.

Пусть требуется найти полином, для которого при $x=\beta$ задано значение его самого и его m первых производных

$$z^{(i)}(\beta)=\overline{S}_i\;(i=0,\;1,\;2\ldots\;m)$$

так, чтобы

$$\overline{L}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta z^2dx$$

было минимальным. Введем

$$x=\frac{\beta-\alpha}{2}\;u\;+\frac{\beta+\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\overline{L}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}z^2du$$

должно быть минимально, при выполнении условий:

$$\frac{d^{(i)}z}{dx^i}=\frac{d^{(i)}z}{du^i}\left(\frac{2}{\beta-\alpha}\right)^i=\overline{S}_i\,.$$

Отсюда

$$\frac{d^{(i)}z}{du^i}=S_i=\overline{S}_i\,.\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^i$$

$$L=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\alpha-\beta)^{i+k}\,\overline{S}_i\,\overline{S}_k}{i!\;k!\;(i+k+1)}\cdot\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\prod_{r=1}^{r=i}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\prod_{r=1}^{r=k}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\,. \quad (34)$$

Асимптотическая формула будет по прежнему

$$L\simeq\frac{(m+1)^2\,S_0^2}{n^2}\,.$$

Если $\alpha=1$ $\beta=-1$, то

$$L(-1)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{2^{i+k}S_i\,S_k}{i!k!(i+k+1)}\cdot\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\prod_{r=1}^{r=i}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\prod_{r=1}^{r=k}\frac{(m+1)^2-r^2}{(n+1)^2-r^2}\,. \quad (35)$$

§ 15.

Рассмотрим теперь случай $\xi=0$.

Мы видели, что

$$a_{jl}=\frac{(n+j+1)\,(n+l+1)\,P_n^{(j)}(0)\,P_n^{(l)}(0)}{j+l+1}\,,$$

для j и l одной четности с n. Если j и l различной четности с n, то вместо n берется $n-1$.

Легко видеть, что в определителе a можно вынести ряд множителей по горизонталям и по вертикалям. Определитель a приведется к определителю c, общий член которого

$$c_{ik}=\frac{1+(-1)^{i+k}}{2\,(i+k+1)}.$$

Тогда

$$\frac{a}{A_{ik}}=(n+i+1)\,(n+k+1)\,P_n^{(i)}(0)\,P_n^{(k)}(0)\,\frac{c}{C_{ik}}\,,$$

где C_{ik} минор определителя c, соответствующий элементу c_{ik}. Тогда

$$\frac{A_{ik}}{a}=\frac{1}{(n+i+1)\,(n+k+1)\,P_n^{(i)}(0)\,P_n^{(k)}(0)}\cdot\frac{C_{ik}}{c}\,.\;.\;.\;.\;.\quad (36)$$

для i и k одной четности с n. Если i и k различной четности друг с другом, то $A_{ik}=0$. Действительно, если проделать вычисление с самого начала без полиномов Legendre'а, то легко убедиться в том, что в выражение для L входят только произведения S с одними четными или с одними нечетными индексами.

Таким образом задача снова свелась к нахождению отношения минора некоторого числового определителя к самому определителю,

Положим для определенности, что i, k, m четные числа. Тогда

$$c=\begin{vmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \ldots & 0 & \frac{1}{i+1} & 0 & \frac{1}{i+3} \ldots & 0 & \frac{1}{m+1} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \ldots & \frac{1}{i+1} & 0 & \frac{1}{i+3} & 0 \ldots & \frac{1}{m+1} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \ldots & 0 & \frac{1}{i+3} & 0 & \frac{1}{i+5} \ldots & 0 & \frac{1}{m+3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+3} & \frac{1}{i+k-1} & 0 & \frac{1}{i+k+1} & 0 \ldots & \frac{1}{m+k-1} & 0 \\
\frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+3} & 0 \ldots & 0 & \frac{1}{i+k+1} & 0 & \frac{1}{i+k+3} \ldots & 0 & \frac{1}{m+k+1} \\
0 & \frac{1}{k+3} & 0 & \frac{1}{k+5} \ldots & \frac{1}{i+k+1} & 0 & \frac{1}{i+k+3} & 0 \ldots & \frac{1}{m+k+1} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{m+1} & 0 & \frac{1}{m+3} & 0 \ldots & \frac{1}{m+i+1} & 0 & \frac{1}{m+i+3} & 0 \ldots & 0 & \frac{1}{2m+1}
\end{vmatrix}$$

Из всех элементов четных горизонталей вычтем элементы k-ой.

$$c=\begin{vmatrix}
\frac{k}{k+1} & 0 & \frac{k}{3(k+3)} \cdots & 0 & \frac{k}{(i+1)(i+k+1)} & 0 \cdots & 0 & \frac{k}{(m+1)(m+k+1)} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 \cdots & \frac{1}{i+1} & 0 & \frac{1}{i+3} \cdots & \frac{1}{m+1} & 0 \\
\frac{k-2}{3(k+1)} & 0 & \frac{k-2}{5(k+3)} \cdots & 0 & \frac{k-2}{(i+3)(i+k+1)} & 0 \cdots & 0 & \frac{k-2}{(m+3)(m+k+1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \frac{1}{k+1} & 0 \cdots & \frac{1}{i+k-1} & 0 & \frac{1}{i+k+1} \cdots & \frac{1}{m+k-1} & 0 \\
\frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+3} \cdots & 0 & \frac{1}{i+k+1} & 0 \cdots & 0 & \frac{1}{m+k+1} \\
0 & \frac{1}{k+3} & 0 \cdots & \frac{1}{i+k+1} & 0 & \frac{1}{i+k+3} \cdots & \frac{1}{m+k+1} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{-(m-k)}{(m+1)(k+1)} & 0 & \frac{-(m-k)}{(m+3)(k+3)} \cdots & 0 & \frac{-(m-k)}{(m+i+1)(i+k+1)} & 0 \cdots & 0 & \frac{-(m-k)}{(2m+1)(m+k+1)}
\end{vmatrix}$$

За знак определителя вынесем:

$$\frac{k(k-2)(k-4)\,.\;.\;.\;2.(-2)(-4)\,.\;.\;.\;[-(m-k)]}{(k+1)(k+3)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(k+m+1)}=$$

$$=\frac{2^{\frac{k}{2}}\,2^{\frac{m-k}{2}}\left(\frac{k}{2}\right)!\left(\frac{m-k}{2}\right)!(-1)^{\frac{m-k}{2}}}{(k+1)(k+3)\,.\;.\;.\;(k+m-1\,(k+m+1)}=$$

$$=\frac{k\,!\,(-1)^{\frac{m-k}{2}}\,.\,2^m\,.\left(\frac{m-k}{2}\right)!\left(\frac{m+k}{2}\right)!}{(m+k+1)\,!}=\frac{k\,!}{(m+k+1)\,P_m^{(k)}(0)}.$$

После этого получим прежний определитель — только в k-ой горизонтали будут чередоваться единицы и нули. Если теперь из элементов всех четных вертикалей вычесть элементы i-ой вертикали, то за знак определителя можно будет вынести еще

$$\frac{i\,!}{(m+i+1)\,P_m^{(i)}(0)}\cdot(i+k+1) \quad \text{и} \quad \frac{C_{ik}}{c}=\frac{(m+i+1)\,(m+k+1)\,P_m^{(i)}(0)\,P_m^{(k)}(0)}{i\,!\,k\,!\,(i+k+1)}. \tag{37}$$

Легко видеть, что для m нечетного пришлось бы подставить $m-1$. Совершенно аналогично выводим формулу для i и k нечетных. Получится та же формула (37) для m одной четности с i и k.

Окончательно:

$$L(0)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{S_i\,S_k\quad(i+m+1)\,(k+m+1)\,P_m^{(i)}(0)\,P_m^{(k)}(0)}{i\,!\,k\,!\,(i+k+1)\,(i+n+1)\,(k+n+1)\,P_n^{(i)}(0)\,P_n^{(k)}(0)}. \tag{38}$$

§ 16.

Рассматривая формулы (32), (35) и (38) мы видим, что все три случая $\xi=+1,\,-1,\,0$ можно об'единить в одной общей формуле: Пусть

$$S_r'=S_r\,\frac{(m+r+1)\,P_m^{(r)}(\xi)}{(n+r+1)\,P_n^{(r)}(\xi)}$$

и введем полином

$$z=\sum_{r=0}^{m}\frac{(x-\xi)^r\,S_r'}{r\,!}.$$

Тогда

$$L=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}z^2\,dx.$$

§ 17.

Выведем теперь асимптотическую формулу для всех

$$-1+\varepsilon<\xi<1-\varepsilon.$$

Воспользуемся опять формулой

$$P_n(\cos\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\varphi}}\cdot\operatorname{Cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Тогда

$$P_n^{(i)}=\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\varphi}}\cdot\frac{\operatorname{Cos}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-\sin\varphi)^i}\cdot n^i\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Тогда

$$a_{ik}=\left\{\frac{2\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-1)^{i+k}\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}(i+k+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+i\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]}{(-1)^{i+k}\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}(i+k+1)}\right\}n^{i+k+1}\cdot\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Отсюда

$$a_{ik}=\frac{2(-1)^{i+k}\cos\left[(i-k)\frac{\pi}{2}\right]}{\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}(i+k+1)}n^{i+k+1}\cdot\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Тогда

$$\frac{a}{A_{ik}}=\frac{2(-1)^{i+k}}{\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}}\cdot\frac{d}{D_{ik}}\cdot n^{i+k+1}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

где d определитель, общий член которого

$$d_{ik}=\frac{\cos\left[(i-k)\frac{\pi}{2}\right]}{i+k+1}.$$

Ясно, что для i и k одной четности

$$d_{ik}=\frac{(-1)^{\frac{i+k}{2}}}{i+k+1};$$

если же i и k различной четности, то $d_{ik}=0$. Таким образом

$$\frac{A_{ik}}{a}=\frac{(-1)^{i+k}\pi(\sin\varphi)^{i+k+1}}{2}\cdot\frac{D_{ik}}{d}\cdot\frac{1}{n^{i+k+1}}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Таким образом коэффициент в L при $S_i\,S_k$ будет порядка $n^{-(i+k+1)}$.

Асимптотически

$$L \simeq S_0^2 \frac{\pi \sin\varphi}{2n} \cdot \frac{D_{00}}{d} = L_0 \sin\varphi \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

где $L_0 = \dfrac{\pi S_0^2}{2n} \cdot \dfrac{D_{00}}{d}$ — асимптотическая величина отклонения при $\xi = 0$.

Из формулы (38) видим, что

$$L_0 = \frac{(m+1)^2 [P_m(0)]^2 S_0^2}{(n+1)^2 [P_n(0)]^2} \left\{1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{S_0^2 \left\{\dfrac{(m+1)!}{2^m \left(\dfrac{m}{2}\right)!^2}\right\}^2}{\left\{\dfrac{(n+1)!}{2^n \left(\dfrac{n}{2}\right)!^2}\right\}^2} \left[1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Отсюда

$$L_0 \simeq \frac{\pi S_0^2}{2n} \left\{\frac{(m+1)!}{2^m \left(\dfrac{m}{2}\right)!^2}\right\} \text{ для четного } m\,.$$

Для m нечетного его нужно заменить $m - 1$.

Тот же результат дает, конечно, и непосредственное вычисление

$$\frac{D_{00}}{d}.$$

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность академику С. Н. Бернштейну за интерес, проявленный им к моей работе и за ценные указания, которые он мне делал.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de résoudre deux problèmes suivants : construire un polynome, dont le degré ne dépasse pas n qui rende minimal l'écart moyen quadratique de zéro dans l'intervalle $-1, +1$ à condition qu'en un certain point $x = \xi$ est donné :

I) la derivée de notre polynome d'ordre i

$$y^{(i)}(\xi) = S_i \qquad \text{ou}$$

II) la valeur du polynome et de ses m derivées premières

$$y^{(j)}(\xi) = S_j \;\; (j = 0, 1, 2 \ldots m).$$

L'analyse du premier problème nous offre des résultats suivants : l'écart minimal cherché

$$L = \frac{(2i+1) S_i^2}{(n+i+1)^2 \, [P_n^{(i)}(\xi)]^2 + (1 - \xi^2) \, [P_n^{(i+1)}(\xi)]^2}$$

où P_n est le polynome de Legendre de degré n.

Notre polynome cherché est developpé en série de polynomes de Legendre:

$$y(x) = \frac{L}{S_i} \sum_{k=i}^{n} (2k+1) P_k^{(i)}(\xi) P_k(x).$$

En les points où $P_n^{(i)}$ s'annule le degré de notre polynome s'abaisse à $n-1$.

L'ecart L est une fonction paire de ξ.

L'ecart atteint dans l'intervalle $-1, +1$ $n-i-1$ minima (en les points où $P_n^{(i+1)}$ s'annule) et $n-i$ maxima (en les points où $P_{n+1}^{(i+1)}$ s'annule).

Les valeurs minimales sont:

$$L_{\min} = \frac{S_i^2(2i+1)}{(n+i+1)^2 [P_n^{(i)}]^2} = \frac{S_i^2(2i+1)}{[P_{n+1}^{(i+1)}]^2}.$$

Les valeurs maximales sont:

$$L_{\max} = \frac{S_i^2(2i+1)}{(n-i+1)^2 [P_{n+1}^{(i)}]^2} = \frac{S_i^2(2i+1)}{[P_n^{(i+1)}]^2}.$$

Quand ξ croît de zéro à un toutes les valeurs maximales et toutes les valeurs minimales diminuent. Quand ξ croît d'un à l'infini L diminue constamment.

La valeur de L pour $\xi = 1$ est plus petite qu'en tous les points de l'intervalle.

Zéro sera le point où le maximum maximorum est atteint si $n-i$ est un nombre impair. Dans le cas contraire le zéro de $P_{n+1}^{(i+1)}$ dont le module est le moindre sera le point où le maximum maximorum est atteint.

Pour $-1+\varepsilon < \xi < 1-\varepsilon$ nous avons pour les grandes valeurs de n:

$$L(\xi) = L\ (\cos\varphi) \simeq \frac{\pi(2i+1)S_i^2}{2n^{2i+1}} (\sin\varphi)^{2i+1}$$

ou $L = L_{n,0}(\sin\varphi)^{2i+1}$ où $L_{n,0}$ est la valeur asymptotique du maximum maximorum.

Pour $\xi = \pm 1$

$$L \simeq \frac{S_i^2 \, 2^{2i} \, i!^2 (2i+1)}{n^{4i+2}}$$

pour les grandes valeurs de n.

En comparant les écarts au même point mais pour les valeurs differentes de n nous aurons $L_{n+1} \leqslant L_n \leqslant L_{n-1}$ c'est-à-dire la courbe de L_n se trouve tout entière entre les courbes de L_{n+1} et L_{n-1} touchant la courbe première aux points où $P_{n+1}^{(i)}$ s'annule et la seconde où $P_n^{(i)} = 0$.

L'analyse du second problème donne: pour $\xi = 1$

$$L = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-2)^{i+k} S_i S_k}{i!\,k!\,(i+k+1)} \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=i} \frac{(m+1)^2 - r^2}{(n+1)^2 - r^2} \prod_{r=1}^{r=k} \frac{(m+1)^2 - r^2}{(n+1)^2 - r^2}.$$

Pour les grandes valeurs de n

$$L(1) \simeq \frac{(m+1)^2}{n^2} S_0^2.$$

Ou peut réunir les trois cas $\xi = +1, -1, 0$ sous la formule générale: si nous designons

$$S'_r = S_r \frac{(r+m+1)\, P_m^{(r)}(\xi)}{(r+n+1) P_n^{(r)}(\xi)}$$

et construisons un polynome de degré m

$$z = \sum_{r=0}^{m} \frac{(x-\xi)^r S'_r}{r\,!},$$

nous aurons

$$L = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} z^2\, dx,$$

c'est-à-dire l'ecart quadratique de zéro de ce polynome z est égal à celui de notre polynome cherché. Enfin pour $-1+\varepsilon < \xi < 1-\varepsilon$ nous aurons pour les grandes valeurs de n

$$L \simeq \frac{\pi S_0^2}{2n} \cdot \left\{ \frac{(m+1)!}{2^m \left(\frac{m}{2}\right)!^2} \right\}^2 \sin\varphi\,, \text{ où } \xi = \cos\varphi.$$

Si m est impair il faut le remplacer par $m-1$.

Autrement dit $L = L_0 \sin\varphi$, où L_0 est la valeur asymptotique de L pour $\xi = 0$.