Про монотонний поліном, що найменше відхиляється від нуля

Я. Геронимус

Розгляньмо таку задачу: знайти монотонний ростучий поліном (в інтервалі $-1, +1$) непарного ступеня не вище від $n = 2m + 1$, коли відомо значіння похідної в кінцях інтервалу.

Маємо

$$y = \int_{-1}^{x} \varphi(x)dx \quad y'(-1) = a^2 \quad y'(+1) = b^2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

(припускаючи що $y(-1) = 0$)

Функція $\varphi(x)$ не від'ємна в інтервалі $-1, +1$. Ясно, що вона не має коренів ± 1, бо тоді було б $y'(\pm 1) = 0$. Хай $u^2(x)$ буде сукупність коренів, що лежать унутри інтервалу – кожний з них матиме парну кратність.

Хай $g(x)$ буде поліном, що має корені по-за інтервалом.

Тоді $\varphi(x) = u^2(x)g(x)$. Доведемо, що $g(x)$ буде постійна величина.

Розгляньмо

$$\varphi_1(x) = u^2(x)g(x) - \lambda^2 u^2(x)(1 - x^2).$$

Завжди можна знайти таке число λ, щоб $\varphi_1(x)$ була більша від нуля та менша проти $\varphi(x)$. Крім того $\varphi_1(\pm 1) = \varphi(\pm 1)$. Тоді, як що ступінь g більший від двох або рівний двом. то поліном

$$y_1 = \int_{-1}^{x} \varphi_1(x)dx$$

ступеня не вище від n, задовольняє умовам (1) та дає відхил від нуля менший від полінома $y(x)$. Звідси ясно, що наш поліном матиме форму:

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Отже треба знайти minimum інтегралу

$$L = \int_{-1}^{1} u^2(x)dx \quad \text{при} \quad u(1) = \pm b = \beta \quad u(-1) = \pm a = \alpha \; . \; . \; . \quad (3)$$

Розкладемо $u(x)$ за поліномами Legendre'a. Тоді

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x).$$

Наш інтеграл рівняється

$$L = \sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Треба знайти minimum його при

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = \beta \quad \sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k = \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

бо

$$P_k(1) = 1, \; P_k(-1) = (-1)^k$$

Умови extremum'a напишуться

$$\frac{4a_k}{2k+1} + \lambda_1 + (-1)^k \lambda_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Помножаючи (6) на a_k та сумуючи по всіх k, одержимо

$$2L + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Помножаючи (6) на $(2k+1)$ та сумуючи по k, знайдемо

$$4\beta + \lambda_1 (m+1)^2 + \lambda_2 (-1)^m (m+1) = 0 \quad \ldots\ldots (8)$$

Помножаючи (6) на $(2k+1)(-1)^k$ та сумуючи по k, знайдемо

$$4\alpha + \lambda_1 (-1)^m (m+1) + \lambda_2 (m+1)^2 = 0 \quad \ldots (9)$$

З рівнань (7), (8), (9) легко виключити λ_1 та λ_2 та знайти L.

Пригадуючи значіння α та β знайдемо відшукуваний найменший відхил

$$L = \frac{2(a^2 + b^2)}{m(m+2)} - \frac{4ab}{m(m+1)(m+2)} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Цікаво порівняти вислід що ми одержали з розвязкою задачі академіка С. Н. Бернштейна: *) знайти монотонний ростучий поліном непарного ступеня, що найменше відхиляється від нуля, коли його похідна при $x = 1$ рівняється b^2.

Розвязка цієї задачі буде

$$L = \frac{2b^2}{(m+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Вислід що ми знайшли звичайно більший від (11). Коли в нашій задачі знайти a так, щоб (10) було minimum, то легко знайдемо, що

$$a = \frac{b}{m+1}$$

та формула (10) зливається з (11).

---

*) „Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle" professées á la Sorbonne par S. Bernstein p. p. 47 — 50.

RÉSUMÉ

Parmi tous les polynomes de degré impaire $n = 2m + 1$ non décroissants sur le segment $-1, +1$, pour lesquels la valeur de la première dérivée aux bords est connue, celui qui s'écarte le moins possible de zéro est représenté par l'expression

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)dx$$

(en admettant, comme nous le pouvons, que $y(-1) = 0$).

L'écart minimum cherché

$$L = \frac{2(a^2 + b^2)}{m(m+2)} - \frac{4ab}{m(m+1)(m+2)}$$

où

$$y'(-1) = a^2 \quad \text{et} \quad b^2 = y'(+1)$$