Об одной геометрической задаче, связанной с теорией функций

В. Л. Гончаров

Пусть $f(x)$ есть бесконечно-дифференцируемая функция вещественного переменного x: она называется аналитической в точке $x=t$, если в этой точке разлагается в ряд Тэйлора, сходящийся для $|x-t|<\varrho$, где ϱ — положительное число. Верхняя граница R чисел ϱ называется радиусом сходимости функции $f(x)$ в точке $x=t$ и является, очевидно, функцией от t:

$$R\equiv R(t),$$

заданной для всех значений t, где $f(x)$ — аналитическая функция. Ряд Тейлора дает „продолжение“ функции в комплексной области.

Нас интересуют следующие вопросы:

1) Какие свойства характеризуют функцию $R(t)$? иначе: какие условия являются необходимыми и достаточными, чтобы данная функция $R(t)$ могла быть рассматриваема, как радиус сходимости некоторой функции $f(x)$?

2) Если задана функция $R(t)$, удовлетворяющая этим условиям, то что можно сказать о комплексных особенностях функции $f(x)$?

Т. к. совокупность точек, где $f(x)$ — не аналитическая, т. е. совокупность вещественных особенностей $f(x)$, — замкнутая, то достаточно ограничиться рассмотрением промежутка смежности, где $f(x)$ — аналитическая.

Выведем сначала необходимые условия, которым удовлетворяет функция $R(t)$. Прежде всего:

$$R(t)>0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Известно, что радиус сходимости в точке t равен расстоянию этой точки от ближайшей особенности функции. Внутри круга с центром t_1 и радиусом $R(t_1)$ поэтому нет особенностей. Пусть точка t_2 находится внутри этого круга, т. е. $|t_2-t_1|<R(t_1)$; тогда не должно быть особенностей внутри круга с центром t_2 и радиусом $R(t_1)-|t_2-t_1|$, и, следовательно, $R(t_2)\geqslant R(t_1)-|t_2-t_1|$, или $R(t_1)-R(t_2)\leqslant|t_1-t_2|$. Вследствие (I) неравенство это справедливо и для значений t_2 таких, что $|t_2-t_1|\geqslant R(t_1)$, а потому — для всех значений t_1 и t_2. Меняя роли

t_1 и t_2, получим $R(t_2) - R(t_1) \leqslant |t_1 - t_2|$, и наконец, для всех значений t_1 и t_2:

$$|R(t_1) - R(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|. \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Допустим теперь, что $t_1 < t_2 < t_3$, $t_3 - t_1 \leqslant R(t_1) + R(t_3)$. Обозначим через C_i круг с центром t_i и радиусом $R(t_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Круги C_1 и C_3 взаимно пересекаются*) в точках, координаты которых даются уравнениями:

$$(x - t_1)^2 + y^2 = R^2(t_1), \quad (x - t_3)^2 + y^2 = R^2(t_3).$$

Функция $f(x)$ не имеет особенностей внутри кругов C_1 и C_3, т. к. ближайшая к t_2 точка контура, ограничивающего фигуру, составленную из внутренностей этих кругов, есть точка их взаимного пересечения, то $R(t_2)$ не может быть меньше, чем расстояние t_2 до этой точки. Квадрат этого расстояния равен

$$\frac{1}{t_3 - t_1}\left[R^2(t_1)(t_3 - t_2) + R^2(t_3)(t_2 - t_1) - (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)\right],$$

откуда получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ R^2(t_1) - t_1^2 & R^2(t_2) - t_2^2 & R^2(t_3) - t_3^2 \end{vmatrix} \leqslant 0 \quad \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

Неравенство (III) доказано при условии $t_3 - t_1 \leqslant R(t_1) + R(t_3)$. Пусть, теперь: $t_3 - t_1 > R(t_1) + R(t_3)$. В этом случае из (II) вытекает, если допустим $t_2 \leqslant t_1 + R(t_1)$:

$$R^2(t_2) \geqslant [R(t_1) - (t_2 - t_1)]^2,$$

и т. к в наших предположениях

$$[R(t_1) - (t_2 - t_1)]^2 > \frac{1}{t_3 - t_1}\left[R^2(t_1)(t_3 - t_2) + R^2(t_3)(t_2 - t_1) - (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)\right],$$

то неравенство (III) доказано для $t_2 \leqslant t_1 + R(t_1)$. Подобным же образом оно распространяется на случай $t_2 \geqslant t_3 - R(t_3)$, принимая во внимание, что, вследствие (II):

$$R_2(t_2) \geqslant [R(t_3) - (t_3 - t_2)]^2.$$

Выражение

$$R_2(t_1)(t_3 - t_2) + R^2(t_3)(t_2 - t_1) - (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)$$

не больше нуля при $t_2 = t_1 + R(t_1)$ и $t_2 = t_3 - R(t_3)$, и т. к. оно представляет собою трехчлен 2-й степени с положительным старшим коэффициентом относительно t_2, то оно отрицательно для $t_1 + R(t_1) < t_2 < t_3 - R(t_3)$, и неравенство (III) опять-таки соблюдено. Итак, (III) имеет место при единственном условии $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$.

(Заметим, что (II) не следует из (III): так, для $R(t) \equiv \sqrt{t}$, $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$, (III) удовлетворяется, тогда как (II) — нет).

*) В самом деле, с одной стороны $t_3 - t_1 \leqslant R(t_1) + R(t_3)$, и, с другой, вследствие (II), $t_3 - t_1 \geqslant |R(t_3) - R(t_1)|$.

Выведем некоторые следствия из (I-III).

Вследствие (II) функция $R(t)$, очевидно, непрерывна.

Условие (III) означает, что функция $R^2(t) - t^2$ конвексная.

Этого достаточно, чтоб утверждать, что функция эта (а, следовательно, и функция $R(t)$) имеет всюду правую и левую производные, которые могут быть различными только в исчислимом ансамбле точек x. Мы будем обозначать через $R'_d(t)$ и $R'_g(t)$ правую и левую производную от $R(t)$.

Производные $R'_d(t)$ и $R'_g(t)$ удовлетворяют некоторым неравенствам, которые вытекают из (III). Именно, заменяя t_1, t_2, t_3 через t_1, t_1+h, t_2 $(h>0)$ и переходя к пределу при $h \to 0$, получим:

$$S'_d(t_1) \geqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} - (t_2-t_1) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Так же точно, заменяя t_1, t_2, t_3 через t_1-h, t_1, t_2:

$$S'_g(t_1) \geqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} - (t_2-t_1) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

И еще:

$$S'_d(t_2) \leqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} + (t_2-t_1) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$$S'_g(t_2) \leqslant \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1} + (t_2-t_1) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Все четыре неравенства предполагают $t_1 \leqslant t_2$. Но из них вытекает для всех t_1 и t_2:

$$(t_1-t_2)^2 - (t_1-t_2)\, S_{g,d}(t_1) + [S(t_1)-S(t_2)] \geqslant 0\,^{*)} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Заменим в (2) t_1 и t_2 через t и $t+h$, и пусть $h \to 0$:

$$S'_g(t) \geqslant S'_d(t) \quad \ldots \quad (6)$$

Отсюда следует:

$$R'_g(t) \geqslant R'_d(t) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Вычтем (1) из (4):

$$S'_g(t_2) - S'_d(t_1) \leqslant 2\,(t_2-t_1) \quad (\text{при } t_1 < t_2) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Поэтому:

$$t_1 - R(t_1)\, R'_d(t_1) \leqslant t_2 - R(t_2)\, R'_g(t_2) \quad (\text{при } t_1 < t_2) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Общеприняты обозначения: $\lim\limits_{\substack{h>0 \\ h\to 0}} \varphi(t+h) = \varphi(t+0), \lim\limits_{\substack{h<0 \\ h\to 0}} \varphi(t+h) = \varphi(t-0)$.

Покажем, что пределы $R'_d(t+0)$ и $R'_g(t+0)$ существуют и равны $R'_d(t)$. Положим временно:

$$F_d(t) \equiv t - R(t)\, R'_d(t)\,, \quad F_g(t) \equiv t - R(t)\, R'_g(t)\,.$$

(7) и (9) дают:

$$F_g(t) \leqslant F_d(t)\,,$$

при $t_1 < t_2$:

$$F_d(t_1) \leqslant F_g(t_2)\,.$$

---

*) $S'_{g,d}(t)$ означает, что неравенство справедливо, как для $S'_d(t)$, так и для $S'_g(t)$.

Отсюда:

$$F_g(t_1) \leqslant F_d(t_1) \leqslant F_g(t_2) \leqslant F_d(t_2),$$

т. е. $F_g(t)$ и $F_d(t)$ — не убывающие функции, так что существуют пределы $F_d(t+0)$ и $F_g(t+0)$.

Неравенства

$$F_g(t+h) \leqslant F_d(t+h) \leqslant F_g(t+2h)$$

в пределе при $h \to 0$ дают:

$$F_d(t+0) = F_g(t+0).$$

Поэтому

$$R_d'(t+0) = R_g'(t+0), = L.$$

Это означает, что для h положительных и достаточно малых $(h < h_\varepsilon)$:

$$L - \varepsilon < R_d'(t+h) \leqslant R_g'(t+h) < L + \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что для $0 < h_1,\ h_2 < h_\varepsilon$:

$$L - \varepsilon < \frac{R(t+h_1) - R(t+h_2)}{h_1 - h_2} < L + \varepsilon.^{*)}$$

Заставляя стремиться к нулю сначала h_2, потом h^1, получим:

$$L - \varepsilon \leqslant R_d'(t) \leqslant L + \varepsilon,$$

откуда, окончательно, вытекает:

$$R_d'(t+0) = R_g'(t+0) = R_d'(t). \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Совершенно так же:

$$R_d'(t-0) = R_g'(t-0) = R_g'(t). \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Мы займемся теперь вторым из поставленных вопросов — о разыскании комплексных особенностей функции $f(x)$, если $R(t)$ предполагается заданной. Предполагается, что $R(t)$ удовлетворяет необходимым условиям (I-III), а, следовательно, имеют место все вытекающие из них следствия. Т. к. комплексные особенности попарно сопряжены, то достаточно ограничиться исследованием полуплоскости $y > 0$.

Будем обозначать через $C(t)$ круг сходимости

$$(x-t)^2 + y^2 = R^2(t) \equiv S(t). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

при $|h|$ достаточно малом круг $C(t+h)$ пересекается с кругом $C(t)$ (II). Внутри $C(t)$ нет особенностей, но на самом круге — есть, впрочем, не на той дуге, которая находится внутри круга $C(t+h)$. Точки пересечения кругов имеют абсциссу

$$t + \frac{1}{2}\left[h - \frac{S(t+h) - S(t)}{h}\right].$$

*) Теорема о конечном приращении: если функция $f(x)$ в промежутке $(a \leqslant x \leqslant b)$ имеет производные $f_d'(x)$ и $f_g'(x)$, и если в этом промежутке $m \leqslant f_{d,g}'(x) \leqslant M$, то $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

При $h > 0$ абсциссы особенностей не должны превышать этого числа. Выражение, стоящее в квадратных скобках, вследствие (III) убывает вместе с h. Поэтому, переходя к пределу, видим, что абсциссы особенностей удовлетворяют условию:

$$x \leqslant t - \frac{1}{2} S_d'(t).$$

Точно так же с помощью круга $C(t+h)$, $h<0$, получим:

$$x \geqslant t - \frac{1}{2} S_g'(t).$$

Значит:

$$1 - R(t) R_g'(t) \leqslant x \leqslant t - R(t) R_d'(t) \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Если $R_g'(t) = R_d'(t) = R'(t)$, то на круге $C(t)$ имеется одна единственная (в полуплоскости $y>0$) особенность, координаты которой —

$$\begin{aligned} x &= t - R(t) R'(t) \\ y &= R(t) \sqrt{1 - R'^2(t)} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14) \end{aligned}$$

Если же $R_g'(t) \neq R_d'(t)$, то на круге $C(t)$ может быть несколько особенностей, которые все лежат на дуге, определяемой (12) и (13). Эту дугу — или, в случае вырождения, точку — будем обозначать $L(t)$.

Обратим внимание на неравенство (9). Оно позволяет утверждать, что при $t_1 < t_2$ абсцисса всякой точки дуги $L(t_1)$ не превышает абсциссы любой точки дуги $L(t_2)$. В частности, если дуги $L(t_1)$ и $L(t_2)$ вырождаются в точки, то эти точки могут и совпадать, и в этом случае совпадают все точки $L(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$. Тогда дифференциальные уравнения (14) дают:

$$R(t) = \sqrt{(t+x)^2 + y^2} \, .$$

Это происходит, напр., если особенности — изолированные точки.

Я утверждаю, что в случае, если $R_g'(t) \neq R_d'(t)$, т. е. дуга $L(t)$ не вырождается в точку, обе крайние ее точки, имеющие абсциссы $t - R(t) R_g'(t)$ и $t - R(t) R_d'(t)$, являются особенностями. Чтоб убедиться в этом, достаточно принять во внимание, что совокупность особенностей — замкнутая, и что в любой окрестности рассматриваемой точки имеются особенности. В самом деле, мы знаем, что на дуге $L(t+h)$ имеется особенность P_h с координатами

$$(P_h) \quad \begin{aligned} x &= (t+h) - R(t+h)\varrho_h \\ y &= R(t+h)\sqrt{1 - \varrho_h^2} \, , \end{aligned}$$

при чем

$$R_d'(t+h) \leqslant \varrho_h \leqslant R_g'(t+h) \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Квадрат расстояния точки P с координатами

$$(P) \quad \begin{aligned} x &= t - R(t) R_d'(t) \\ y &= R(t)\sqrt{1 - R_d'^2(t)} \end{aligned}$$

от точки P_h $(h > 0)$ равен

$$[(R(t+h)\varrho_h - R(t)R'_d(t)) - h]^2 + [R(t+h)\sqrt{1-\varrho_h^2} - R(t)\sqrt{1-R'^2_d(t)}]^2 \,.$$

Так как при $h \to 0$ ϱ_h стремится к $R'_d(t)$ (вследствие неравенств (10) и (15)), то и расстояние $\overline{PP_h}$ стремится к нулю.

Из предшествующего ясно, что все дуги (или точки) $L(t)$ образуют кривую Жордана, которую всякая прямая, параллельная мнимой оси, пересекает не более, чем в одной точке. Пусть M и N — точки пересечения такой прямой соотв. с вещественной осью и этой кривой. Тогда на всем отрезке MN, кроме, может-быть, точки N, функция $f(x)$ — аналитическая; точка же N в том только случае может не быть особенностью $f(x)$, если она — внутренняя точка одной из дуг $L(t)$. В частности, если функция $R(t)$ дифференцируема во всем рассматриваемом промежутке, то наша кривая — в этом случае обертка кругов сходимости $C(t)$ — является естественной границей функции $f(x)$.

Теперь мы можем видеть, что условия (I - III) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы $R(t)$ была равна радиусу сходимости некоторой функции $f(x)$. Раз условия (I - III) выполнены, то можно построить дуги (или точки) $L(t)$ указанным выше способом. Пусть E — совокупность точек, составленных из крайних точек дуг $L(t)$:

$$x = t - R(t)\, R'_{g,d}(t)$$

$$y = R(t)\sqrt{1 - R'^2_{g,d}(t)}\,.$$

Т. к. эта совокупность, как вытекает непосредственно из предыдущего, — замкнутая, то можно указать функцию $f(x)$, для которой совокупность особенностей есть E. Мы убедимся теперь, что такая функция $f(x)$ в точке $x = t'$ имеет радиус сходимости $R(t')$. В самом деле, радиус сходимости $f(x)$ в точке $M(t, 0)$ равен minimum'у расстояний $\overline{MP}$, когда P пробегает всю совокупность E. Но

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= [(t-t') - R(t)\, R'_{g,d}(t)]^2 + R^2(t)\,[1 - R'^2_{g,d}(t)] \\ &= (t-t')^2 - (t-t')\, S'_{g,d}(t) + S(t), \\ &= \Psi_{g,d}(t).\end{aligned}$$

Для $t = t'$

$$\Psi_{g,d}(t') = S(t') = R^2(t').$$

Для всех других значений t, вследствие первенства (5),

$$\Psi_{g,d}(t) - R^2(t') = (t-t')^2 - (t-t')\, S'_{g,d}(t) + S(t) - S(t') \geqslant 0,$$

$$\Psi_{g,d}(t) \geqslant R^2(t').$$

Поэтому min. $\overline{MP}^2 = R(t')$, что и требовалось проверить.

В заключение — несколько общих замечаний об обертках кругов с центрами на вещественной оси. Обозначая, как прежде, через $R(t)$

радиус круга, центр которого есть t, получаем уравнения обертки в параметрической форме (14). Отсюда следует:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{R'(t)}{\sqrt{1-R'^2(t)}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{R''(t)}{(1-R(t)R''(t)-R'^2(t))\,(1-R'^2(t))^{3/2}}.$$

Интересно, что $\frac{dy}{dx}$ не зависит от $R''(t)$, а $\frac{d^2y}{dx^2}$ — от $R'''(t)$; знак $\frac{dy}{dx}$ — всегда тот же, что и знак $R'(t)$, так что в соответствующих точках обертка $y=y(x)$ относительно возрастания и убывания ведет себя так, же, как данная кривая $R=R(t)$. То же самое справедливо относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $R''(t)$, если

$$1-R(t)\,R''(t)-R'^2(t)=1-(R^2(t))''>0\,.$$

Это последнее неравенство, между прочим, есть следствие (III).

Любопытны итеративные свойства оберток „высшего порядка".

Пусть $y=y(x)$ есть начальная кривая (L). Пусть кривая (L_1) определяется параметрическими уравнениями:

$$(L_1)\begin{cases} x_1=x-yy' \\ y_1=y\sqrt{1-y'^2}\end{cases},\ \text{где}\ y'=\frac{dy}{dx},$$

и, дальше, (L_{n+1}) $(n=1,2,\ldots)$ определяются уравнениями:

$$(L_{n+1})\begin{cases} x_{n+1}=x_n-y_ny_n' \\ y_{n+1}=y_n\sqrt{1-y_n'^2}\end{cases},\ \text{где}\ y_n'=\frac{dy_n}{dx_n}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_n=x-nyy' \\ y_n=y\sqrt{1-ny'^2}\end{cases},\ y_n'=\frac{y'}{\sqrt{1-ny'^2}},\ y_n''=\frac{d^2y_n}{dx_n^2}=\frac{y''}{(1-n\,(y^2)'')\,(1-ny'^2)^{3/2}}.$$

Но более подробное исследование оберток кругов не входит в нашу задачу.

W. Gontcharoff. Sur un problème géometrique fourni par la théorie des fonctions.

Résumé. Soit $f(x)$ une fonction analytique d'une variable réclle x, définie dans un intervalle quelconque fini ou infini; soit $R\equiv R(t)$ le rayon de convergence du développement Taylorien au point $x=t$. La fonction $R(t)$ satisfait nécessairement aux inégalités suivantes:

$$R(t)>0\quad (\mathrm{I})\qquad |R(t_1)-R(t_2)|\leqslant|t_1-t_2|\quad(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ t_1 & t_2 & t_3\\ R^2(t_1)-t_1^2 & R^2(t_2)-t_2^2 & R^2(t_3)-t_3^2\end{vmatrix}\leqslant 0\quad(\mathrm{III})\ ^{*)}.$$

Inversement, une fonction $R(t)$ ètant donnée qui satisfait à (I-III), il est possible de construire une fonction analytique $f(x)$ dont le rayon de convergence au point $x=t$ soit égal à $R(t)$.

---

*) La condition (III) nous apprend que la fonction $R^2(t)-t^2$ est convexe. Cette remarque est due à M. P. Montel.

La connaissance de la fonction $R(t)$ permet de faire certaines conclusions relatives à des singularités de $f(x)$. On forme l'ensemble des points de coordonnées $(t - R(t)\,R'(t), + R(t)\sqrt{1 - R'^2(t)})$ pour les valeurs de t où $R(t)$ est dérivable et des points des arcs de cercles

$$(L(t))\begin{cases} (x-t)^2 + y^2 = R^2(t) \\ t - R(t)\,R'_g(t) \leqslant x \leqslant t - R'_d(t) \end{cases}$$

pour les valeurs de t où $R(t)$ n'est pas dérivable, l'existence des dérivées droite et gauche $R_d'(t)$ et $R_g'(t)$ étant une conséquence de la condition (III). Cet ensemble est une courbe de Jordan que chaque droite parallèle à l'axe imaginaire ne rencontre qu'en un seul point, La fonction $f(x)$ est holomorphe dans la région située entre cette courbe et l'axe réel; d'autre part, la courbe elle-même consiste des points singuliers de $f(x)$, excepté les points intérieurs aux arcs $L(t)$ au sujet desquels on ne sait rien. En particulier, si la fonction $R(t)$ est dérivable dans l'intervalle entier, la courbe de Jordan considérée est une coupure pour la fonction $f(x)$.
