Sur la détermination des fonctions par les zéros de leurs dérivées

par W. Gontcharoff.

§ 1.

Soit (D) un domaine (complexe on réel) et (F) une classe de fonctions définies dans (D). Je désigne par $E(f)$ l'ensemble des zéros de la fonction $f(x)$ qui se trouvent dans (D), en tenant compte de leurs ordres de multiplicité. On peut étudier les conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'il existe une fonction $f(x)$ de la classe considerée (F) telle que l'on ait $E(f^{(n)}) \equiv E_n$ pour un certain nombre (fini ou infini) d'indices de dérivation n *), où les E_n sont des ensembles donnés; on pourrait aussi chercher à construire des fonctions de cette espèce. Dans ce qui suit, ce n'est pas la question *d'existence* mais la question *d'unicité* que j'essaierai de résoudre dans quelques cas particuliers: *les relations* $E(f^{(n)}) \equiv E(\varphi^{(n)})$ (où $f(x)$ et $\varphi(x)$ appartiennent à (F)) *entrainent-t-elles* $\varphi(x) \equiv Cf(x)$?

On sait bien que la réponse est affirmative, par exemple, si l'on prend comme (D) le plan de la variable x tout entier, et pour (F), la classe des polynomes ou des fonctions entières de genre zéro, et que l'on se borne à s'imposer une seule relation: $E(f) \equiv E(\varphi)$.

Je vais généraliser ce résultat en étudiant *le cas où* (D) *est, comme précédemment, le plan de* x, (F) *la classe des fonctions méromorphes d'ordre fini et à multiplicité bornée, ayant leurs pôles fixes* **) (le cas des fonctions entières n'étant pas exclu). Je dis qu'une fonction méromorphe est *à multiplicité bornée* s'il existe un nombre positif $K \equiv K(f)$ tel que tous les zéros et tous les pôles de $f(x)$ sont d'ordres de multiplicité non supérieurs à K. Dans ces hypothèses, *deux relations* $E(f) \equiv E(\varphi)$ *et* $E(f') \equiv E(\varphi')$ *suffisent pour qu'il s'en suive* $\varphi(x) \equiv Cf(x)$. Il ne se présente que deux cas exceptionnels:

(I) $f(x) = Ae^{\alpha P(x)}, \quad \varphi(x) = Be^{\beta P(x)}$ ($P(x)$ polynome)

(II) $f(x) = A\,[1 + e^{P(x)}]^m, \quad \varphi(x) = B\,[1 + e^{-P(x)}]^m$ ($P(x)$ polynome, m entier).

---

*) On considère la fonction $f(x)$ elle-même comme la dérivée d'ordre $n = 0$.

**) On tient compte des multiplicités des pôles.

En voici la démonstration. En vertu de

$$E(f) \equiv E(f) \ldots\ldots\ldots (1) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{f}\right) \equiv E\left(\frac{1}{\varphi}\right) \ldots\ldots\ldots (1^1)$$

on a

$$\varphi(x) \equiv f(x)\, e^{P(x)}, \ldots\ldots\ldots (2)$$

où $P(x)$ est un polynome. Ensuite, les relations

$$E(f') \equiv E(\varphi') \ldots\ldots\ldots (3) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{f'}\right) \equiv E\left(\frac{1}{\varphi'}\right) \ldots\ldots\ldots (3^1)$$

nous donnent:

$$\varphi'(x) \equiv f'(x)\, e^{P(x)+Q(x)}, \ldots\ldots\ldots (4)$$

où $Q(x)$ est aussi un polynome. En prenant la dérivée de (2) et en éliminant $\varphi'(x)$ à l'aide de (4), on obtient l'équation différentielle:

$$f'(x)\left[e^{Q(x)} - 1\right] = P'(x)\, f(x) \ldots\ldots\ldots (5)$$

En admettant que $Q(x)$ est identiquement égal à une constante (que l'on peut évidemment supposer différente de $2n\pi i$), on est ramené au cas exceptionnel (I).

Soit $Q(x)$ un polynome qui ne se réduit pas à une constante. Ecrivons (5) sous la forme:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{P'(x)}{e^{Q(x)} - 1} \ldots\ldots\ldots (5^1)$$

Le premier membre étant une fonction méromorphe qui n'a que des pôles simples dont les résidus sont des nombres entiers bornés, il doit en être de même pour le second membre. L'équation $e^{Q(x)} - 1 = 0$ possède une infinité de racines avec un seul point-limite à l'infini; il est possible d'en extraire une suite infinie $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ($\lim a_n = \infty$) telle que: (1) a_n est une racine simple de $e^{Q(x)} - 1$ (car $(e^{Q(x)} - 1)' \equiv Q'(x) e^{Q(x)}$ n'a qu'un nombre fini de zéros), (2) $P'(a_n) \neq 0$ (car $P'(x)$ n'a qu'un nombre fini de zéros). Les résidus

$$A_n = \left.\frac{P'(x)}{(e^{Q(x)} - 1)'}\right|_{x=a_n} = \left.\frac{P'(x)}{Q'(x)}\right|_{x=a_n}$$

doivent avoir une limite déterminée pour $n \to \infty$, puisque $\dfrac{P'(x)}{Q'(x)}$ est une fonction rationnelle; or, les A_n étant bornés, cette limite est finie. D'autre part, les A_n étant entiers, on doit avoir nécessairement, pour des valeurs de n assez grandes:

$$A_n = m,$$

où m est un nombre entier. Il s'ensuit, identiquement:

$$\frac{P'(x)}{Q'(x)} = m.$$

Alors, l'équation (5^1) nous fournit:

$$f(x) = C\left(1 - e^{-Q(x)}\right)^m, \ldots\ldots\ldots (6)$$

et d'après (2):

$$\varphi(x) = C'\,(e^{\varrho(x)} - 1)^m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6^1)$$

et nous sommes ramenés, à notations près, au cas exceptionnel (II).

Il importe de remarquer que la restriction qui concerne la multiplicité bornée est très essentielle. Soit, par exemple, $F(t)$ la fonction génératrice des nombres de Bernoulli:

$$F(t) = \frac{t}{2}\,\frac{e^t + 1}{e^t - 1},$$

et posons:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^x F(t)dt + \frac{x^2}{8\pi i}}, \quad \varphi(x) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^x F(t)dt - \frac{x^2}{8\pi i}}.$$

Les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont holomorphes dans tout le plan sauf les points $x = 2n\pi i$ (n entier) qui sont des pôles simples avec les résidus n de la fonction $\frac{1}{2\pi i} F(x)$; donc, le point $x = 2n\pi i$ est un zéro d'ordre n (si $n > 0$) ou un pôle d'ordre $|n|$ (si $n < 0$) des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$. Par conséquent (d'ailleurs, on le voit immédiatement): $E(f) \equiv E(\varphi)$. D'un autre côté:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi i} F(x) + \frac{x}{4\pi i}, \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2\pi i} F(x) - \frac{x}{4\pi i};$$

donc:

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} : \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2F(x) - x}{2F(x) + x} = e^{-x},$$

d'où l'on obtient, $E(f') \equiv E(\varphi')$. D'ailleurs il est facile d'établir que la fonction $\psi(x) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^x F(t)dt}$ (et par conséquent $f(x)$ et $\varphi(x)$) est d'ordre 2*).

---

*) Je m'appuie sur la théorie de M. R. Nevanlinna (Zur Théorie der meromorphen Funktionen, Acta Mathematica, 46 (1925)). L'ordre ρ de $\psi(x)$ est égal à

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{lg\,T(r)}{lg\,r},$$

où

$$T(r) = m(r) + N(r), \quad m(r) = \frac{1}{r\pi} \int\limits_0^{2\pi} \overset{+}{lg} \left| \psi(re^{i\theta}) \right| d\,, \quad N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$

$\overset{+}{lg}\,A$ désignant $lg\,A$ ou 0 suivant que $A > 1$ ou $A \leqslant 1$, $n(t)$ le nombre des pôles de $\psi(x)$ dont les modules ne dépassent par t. Dans notre cas, on vérifie immédiatement que

$$m(r) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| lg \left| \psi(re^{i\theta}) \right| \right| d\theta \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r \left| F(re^{i\theta}) \right| dr\,d\theta = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{|z| < r} \left| \frac{F(z)}{z} \right| dx\,dy < k_1 r^2,$$

$$n(t) = 1 + 2 + \ldots + \left[\frac{t}{2\pi}\right] \sim \frac{t^2}{8\pi^2}, \quad N(r) \sim \frac{r^2}{16\pi^2} < k_2 r^2;$$

donc, $T(r) < (k_1 + k_2) r^2 = kr^2$, ce qui nous donne: $\rho = 2$.

En ajoutant la troisième relation $E(f'') \equiv E(\varphi'')$, *même sans exclure les fonctions à multiplicité non bornée,* on obtient les cas exceptionnels plus restreints:

$$\text{(I')}\ f(x) = Ae^{ax}, \quad \varphi(x) = Be^{bx},$$

$$\text{(II')}\ f(x) = A\,(1 + e^{ax+b}), \quad \varphi(x) = B\,(1 + e^{-ax-b}),$$

$$\text{(III')}\ f(x) = A\,\frac{e^{P(x)}}{e^{P(x)} - 1}, \quad \varphi(x) = B\,\frac{1}{e^{P(x)} - 1}$$

($P(x)$ étant un polynome quelconque).

En effet, en multipliant (5^1) par $f(x)$ et en prenant les dérivées on obtient:

$$f''(x) = \frac{f(x)}{(e^{Q(x)} - 1)^2}\,[P'^2(x) + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)\,e^{Q(x)}] \;.\;.\;. \;(7)$$

D'une manière analogue, en se servant de (2) et (4), on a:

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x)\,e^{Q(x)}}{(e^{Q(x)} - 1)^2}\,[P'^2(x)\,e^{Q(x)} + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)] \;.\;.\;. \;(8)$$

Grâce à $E(f'') = E(\varphi'')$, on obtient l'identité:

$$\frac{P'^2(x)\,e^{Q(x)} + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)}{P'^2(x) + P''(x)\,(e^{Q(x)} - 1) - P'(x)\,Q'(x)\,e^{Q(x)}} = e^{R(x)}$$

(où $R(x)$ est un polynome) ou bien:

$$(P'(x)\,Q'(x) - P''(x))\,e^{Q(x)+R(x)} + (P''(x) - P'^2(x))\,e^{R(x)} + (P''(x) + P'^2(x))\,e^{Q(x)} +$$
$$+ (-P''(x) - P'(x)\,Q'(x)) = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(9)$$

Dans ce qui suit, je me sers du résultat classique suivant: l'identité $\sum\limits_{1}^{n} A_i(x)\,e^{G_i(x)} \equiv 0$, où des $A_i(x)$ et $G_i(x)$ sont des polynomes tels que $G_i(x) - G_k(x) \not\equiv \text{const.}$ $(i \neq k)$, entraîne $A_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Faisons d'abord l'hypothèse que $Q(x)$ est une constante, et posons $e^{Q(x)} = \lambda$; d'ailleurs on peut admettre $\lambda \neq 1$. L'identité (9) se réduit à la suivante:

$$[\lambda P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x)] - [P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x)]\,e^{R(x)} \equiv 0 \;\;.\;.\;(10)$$

Si $R(x) \not\equiv \text{const.}$, on doit avoir séparément:

$$\lambda P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x) = 0$$

$$P'^2(x) + (\lambda - 1)\,P''(x) = 0,$$

d'où il s'ensuit $P'(x) = 0$, donc $f(x) \equiv \text{const.}$

Soit $R(x)$ égal à une constante, et posons $e^{R(x)} = \mu$; alors, on tire de (10):

$$(1 - \mu)(1 - \lambda)\;P''(x) = (\lambda - \mu)\,P'^2(x) \;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

Si μ était égal á 1, on aurait $P'(x) = 0$, $P(x) = \text{const.}$ (car $\lambda \neq 1$); en écartant cette dernière hypothèse, on obtient

$$\left(\frac{1}{P'(x)}\right)' = -\frac{\lambda - \mu}{(1-\mu)(1-\lambda)},$$

où l'on doit avoir nécessairement $\lambda = \mu$, ce qui nous ramène an cas (I').

Supposons maintenant que $Q(x)$ n'est pas une constante. Alors, $R(x)$ est une constante. En effet, plaçons-nous dans le cas contraire. Si $R(x) \equiv -Q(x) + C$, on dèduira de (9)

$$P''(x) - P'^2(x) = 0, \; P''(x) + P'^2(x) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

et ensuite $P'(x) = 0$. Si $R(x) \equiv Q(x) + C$, on trouvera d'une manière analogue

$$P'(x)Q'(x) - P''(x) = 0, \; P'(x)\,Q'(x) + P''(x) = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

d'où il s'ensuivra toujours $P'(x) = 0$ (car $Q'(x) \neq 0$). Enfin si ni $R(x) + Q(x)$ ni $R(x) - Q(x)$ ne sont des constantes, on aura simultanément (12) et (13), avec la même conséquence $P'(x) = 0$.

Posons: $e^{R(x)} = \mu$. Alors, (9) se réduit à

$$[\mu\,(P'(x)\,Q'(x) - P''(x)) + (P''(x) + P'^2(x))]\,e^{Q(x)} + [\mu\,(P''(x) - P'^2(x)) +$$
$$+ (-P''(x) - P'(x)\,Q'(x))] \equiv 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

ce qui entraîne deux identités:

$$\mu\,(-P'(x)\,Q'(x) - P''(x)) + (P''(x) + P'^2(x)) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$$\mu\,(P''(x) - P'^2(x)) + (-P''(x) - P'(x)\,Q'(x)) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Ajoutons (15) et (16):

$$(\mu - 1)\,P'(x)\,(P'(x) - Q'(x)) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Si $\mu \neq 1$, $P'(x) \neq 0$, on a $P'(x) - Q'(x) = 0$, et (15) et (16) deviennent:

$$(1-\mu)\,P''(x) + (1+\mu)\,P'^2(x) = 0: \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

donc, $\left(\frac{1}{P'(x)}\right)' = \frac{\mu+1}{\mu-1}$. On a nécessairement $\mu = -1$, puis $\frac{1}{P'(x)} = \text{const}$, $P'(x) = Q'(x) = a$, ce qui nous donne le cas (II').

Enfin, en admettant $\mu = 1$, on écrit (15) et (16) sous la forme:

$$P'(x)\,(P'(x) + Q(x)) = 0;$$

on pose $P'(x) = -Q'(x)$ dans (5'), et l'intégration de (5') ainsi que la formule (2) nous ramènent au cas (III').

Je tiens à remarquer que dans les cas (I' — III') on a même les relations:

$$E(f^{(n)}) \equiv E(\varphi^{(n)})$$

pour toutes les valeurs de n.

Au sujet des fonctions d'ordre infini, je me bornerai à signaler ceci: quelle que soit la fonction méromorphe $f(x)$, on peut en indiquer une autre $\varphi(x)$ $(\varphi(x) \not\equiv Cf(x))$, possédant les mêmes pôles et vérifiant les conditions $E(f) \equiv E(\varphi)$, $E(f') \equiv E(\varphi')$. Telle est, par exemple:

$$\varphi(x) = f(x)\, e^{\int \frac{f'(x)}{f(x)} (e^{F(x)} - 1)\, dx}$$

où l'on choisira $F(x)$ parmi les fonctions entieres qui possèdent comme zéros tous les zéros et tous les pôles de $f(x)$.

§ 2.

Passons maintenant dans le domaine réel. Soit (D) l'axe réel et (F) la classe des fonctions réelles indéfiniment dérivables et périodiques, de période 2π. Je vais démontrer le théorème suivant.

$f(x)$ étant un polynome trigonométrique réel (de période 2π, $f(x) \not\equiv const.$) et $\varphi(x)$ une fonction quelconque de la classe (F), si, pour toutes les valeurs de la variable réelle x et pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de n, on a

$$f^{(n)}(x)\, \varphi^{(n)}(x) \geqslant 0,$$

il existe entre $f(x)$ et $\varphi(x)$ une relation linéaire:

$$\varphi(x) \equiv Cf(x) + C'.$$

La constante C' peut effectivement être différente de zéro, comme le montre l'exemple

$$f(x) = 1 + \cos x, \quad \varphi(x) = 3 + 2\cos x.$$

Cependant, si l'on sait que $f(x)\,\varphi(x) \geqslant 0$ et que $f(x)$ s'annule en changeant de signe pour une valeur de x, on obtient immédiatement $C' = 0$.

Il faut établir préalablement certaines inégalités que doivent vérifier les coefficients du développement de Fourier d'une fonction supposée non négative. Soit

$$F(x) \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

la série étant uniformément convergente. Les coefficients A_n et B_n sont donnés par les formules

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx\, dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nous admettons: $F(x) \geqslant 0$. Par conséquent:

$$\left| A_n \cos nt + B_n \sin nt \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r) \cos n(x-t)\, dx \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\, dx = A_0 \;. \quad (3)$$

Donc:

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \leqslant A_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Remarquons, maintenant, que, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions périodiques qui se laissent développer en une série trigonométrique uniformément convergente:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x), \\ \varphi(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum (\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

leur produit $f(x)\,\varphi(x)$ est susceptible d'un développement de la même nature:

$$f(x)\,\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum (A_\nu \cos\nu x + B_\nu \sin\nu x), \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

où les coefficients sont donnés par les formules:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum (a_\nu\alpha_\nu + b_\nu\beta_\nu) \\ 2A_\nu &= (a_0\alpha_\nu + \alpha_0 a_\nu) + \sum_{p+q=\nu}(a_p\alpha_q - b_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu}(a_p\alpha_q + b_p\beta_q) + \sum_{p-q=-\nu}(a_p\alpha_q + b_p\beta_q) \\ 2B_\nu &= (a_0\beta_\nu + \alpha_0 b_\nu) + \sum_{p+q=\nu}(b_p\alpha_q + a_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu}(b_p\alpha_q - a_p\beta_q) - \sum_{p-q=-\nu}(b_p\alpha_q - a_p\beta_q), \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

les sommations étant toujours étendues à toutes les valeurs entières et positives des indices p et q qui vérifient les égalités placées sons les signes $\sum$.

Supposons ainsi qu'il est exigé dans l'énoncé de notre théorème que $f(x)$ est un polynome trigonométrique dont le degré soit désigné par $N(\geqslant 1)$ de manière que, dans la formule (8), on pourra poser:

$$a_{N+1} = b_{N+1} = a_{N+2} = b_{N+2} = \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

par contre, on a:

$$a_N^2 + b_N^2 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11')$$

L'inégalité $f^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$ est satisfaite pour une infinité d'indices n. Admettons, pour fixer les idées, qu'il est possible d'en extraire une suite d'indices croissant indéfiniment et qui sont tous multiples de 4. Pour ces valeurs de n, nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum \nu^n (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x) \\ \varphi^{(n)}(x) &= \sum \nu^n (\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (12)$$

En vertu des formules (9), on a

$$f^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) = \frac{A_0^{(n)}}{2} + \sum (A_\nu^{(n)} \cos\nu x + B_\nu^{(n)} \sin\nu x), \quad \ldots\ldots (13)$$

où

$$\left.\begin{aligned} A_0^{(n)} &= \sum \nu^{2n} (a_\nu\alpha_\nu + b_\nu\beta_\nu) \\ 2A_\nu^{(n)} &= \sum_{p+q=\nu} p^n q^n (a_p\alpha_q - b_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu} p^n q^n (a_p\alpha_q + b_p\beta_q) + \sum_{p-q=-\nu} p^n q^n (a_p\alpha_q + b_p\beta_q) \\ 2B_\nu^{(n)} &= \sum_{p+q=\nu} p^n q^n (b_p\alpha_q + a_p\beta_q) + \sum_{p-q=\nu} p^n q^n (b_p\alpha_q - a_p\beta_q) - \sum_{p-q=-\nu} p^n q^n (b_p\alpha_q - a_p\beta_q) \end{aligned}\right\} \ldots (14)$$

Nous allons voir que $\varphi(x)$ est aussi un polynome trigonométrique de degré N.

En tenant compte de (11), il est facile de déterminer l'ordre de croissance et les parties principales de $A_\nu^{(n)}$ et $B_\nu^{(n)}$, lorsque $n \to \infty$:

$$\left.\begin{aligned} A_0^{(n)} &= (a_N\alpha_N + b_N\beta_N)\, N^{2n} + o\,(N^{2n}) \\ 2A_\nu^{(n)} &= (a_N\alpha_{N+\nu} + b_N\beta_{N+\nu})\,[N(N+\nu)]^n + o\,([N(N+\nu)]^n) \\ 2A_\nu^{(n)} &= (-\,b_N\alpha_{N+\nu} + a_N\beta_{N+\nu})\,[N(N+\nu)]^n + o\,([N(N+\nu])^n \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (16)$$

Soit p un nombre entier positif quelconque.

L'inégalité $f^{(n)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$ ayant lieu, on doit avoir, grâce à (7):

$$\sqrt{A_p{}^{(n)2} + B_p{}^{(n)2}} \leqslant A_0^{(n)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17)$$

or, en s'appuyant sur (16), on s'aperçoit que le second membre de cette inégalité est d'ordre $O(N^{2n})$, tandisque la partie principale du premier membre est égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a_N\alpha_{N+p} + b_N\beta_{N+p})^2 + (-\,b_N\alpha_{N+p} + a_N\beta_{N+p})^2}\;[N(N+p)]^n.$$

Par conséquent, il est nécessaire que l'on ait:

$$\left.\begin{aligned} a_N\alpha_{N+p} + b_N\beta_{N+p} &= 0 \\ -\,b_N\alpha_{N+p} + a_N\beta_{N+p} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (18)$$

Le déterminant $a_N^2 + b_N^2$ ne s'annulant pas (11′), on en conclut: $\alpha_{N+p} = \beta_{N+p} = 0$. Donc, $\varphi(x)$ est un polynome trigonométrique de degré N.

Si $f(x)$ possède $2N$ zéros distincts (qui sont alors forcément simples) dans la période $(0, 2\pi)$, on voit immédiatement que

$$\varphi(x) \equiv Cf(x).$$

Dans le cas général, la dérivée n'ième $f^{(n)}(x)$, pour des valeurs de n suffisamment grandes, aura nécessairement $2N$ zéros distinets; il s'en suivra que

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv Cf^{(n)}(x);$$

on remonte à

$$\varphi(x) \equiv Cf(x) + C',$$

par des intégrations répetées (en tenant compte de la périodicité).

Je ferai une application de la proposition qui précède en faisant voir qu'une fonction $\varphi(x)$, donnée sur tont l'axe réel est définie par les conditions suivantes:

(1) $\varphi(x)$ est indéfiniment dérivable;
(2) $E\,(\varphi^{(n)}) \equiv E\,(\sin^{(n)} x)$ pour $n = 0, 1.\ 2 \ldots.$
(3) $\varphi'(0) = 1.$

En effet, d'abord, en vertu d'un théorème de M. S. Bernstein *) la fonction $\varphi(x)$ est analytique pour toutes les valeurs réelles de x; ensuite, on voit que

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \qquad \varphi\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{2} + x\right),$$

donc $\varphi(x)$ est périodique de période 2π; on s'appuie alors, sur la proposition précédente, en posant $f(x) = sinx$, et l'on en conclut $\varphi(x) \equiv Csinx$; enfin, de (3), on tire $C = 1$.

*) Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, p. 196 — 7, Paris, G. — V. 1926,