О наименьшем уклонении от нуля в данном интервале $(-1, +1)$ монотонного полинома, при заданном значении второй производной в какой-либо точке интервала

В. Ф. Бржечка

Требуется найти монотонный полином, неубывающий, степени m, наименее уклоняющийся от нуля в интервале $(-1, +1)$, если вторая производная этого полинома в какой-либо точке $x=\eta$ интервала $(-1, +1)$ имеет значение равное b^2.

Эта задача аналогична задаче академика С. Н. Бернштейна*).

Очевидно, что все полиномы $P(x)+C$ имеют одно и тоже полное изменение при каком угодно C; определяя произвольную постоянную из условий, что полином с наименьшим полным изменением при $x=-1$ обращается в ноль, имеем

$$P(x)=\int_{-1}^{x}\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ полином степени $2n$ или $2n+1$, неотрицателен для $-1 \leqq x \leqq 1$ и $\varphi'(\eta)=b^2$.

Перед нами такая задача: найти minimum интеграла

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx$$

при условии $\varphi'(\eta)=b^2$.

Займемся определением вида полинома $\varphi(x)$; очевидно, что можем положить

$$\varphi(x)=u^2(x)q(x),$$

где в $u(x)$ включены корни, лежащие в интервале $-1 \leqq x \leqq 1$, а $q(x)$ может иметь простые корни равные -1 и $+1$ и корни вне интервала $(-1, +1)$; очевидно, что $u(\eta) \neq 0$, ибо в этом случае не выполнялось бы условие $\varphi'(\eta)=b^2$.

---

*) См. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle professées á la Sorbonne par Serge Bernstein, стр. 47—50.

Если идет речь о полиноме степени $2n+1$, то $q(x)$ должно быть четной степени; предположим, что $q(x)$, напр., 4-й степени и построим функцию

$$\Psi(x) = u^2(x)q(x) - \alpha u^2(x)(1-x^2)(x-\eta)^2,$$

где $\alpha > 0$ и так подобрано, чтобы $\Psi(x)$ было неотрицательно в интервале $(-1, +1)$; но $\Psi'(\eta) = \varphi'(\eta) = b^2$ и в тоже время

$$\int_{-1}^{1} \Psi(x)dx < \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx\,.$$

Поэтому для $\varphi(x)$ возможны такие виды:

1) $u^2(x)(x+1)(a+x)$; 2) $u^2(x)(x+1)(a-x)$;
3) $u^2(x)(1-x)(a+x)$; 4) $u^2(x)(1-x)(a-x)$;
5) $u^2(x)(1-x^2)$; 6) $u^2(x)$,

где $a > 1$ и степень розыскиваемого полинома $P(x)$ нечетная, т. е. $2n+1$; если же степень $P(x)$ четная $2n+2$, то для $\varphi(x)$ возможны такие виды:

1) $u^2(x)(1+x)$; 2) $u^2(x)(1-x)$;
3) $u^2(x)(a+x)$; 4) $u^2(x)(a-x)$;
5) $u^2(x)(1-x^2)(a+x)$; 6) $u^2(x)(1-x^2)(a-x)$.

Воспользуемся методом С. Н. Бернштейна*) и покажем, что эти виды для $\varphi(x)$, которых мы получили шесть, можно свести к двум видам.

Если наш полином

$$P(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(x+1)(a+x)dx$$

есть наименее отклоняющийся от нуля в интервале $(-1, +1)$, то взяв полином

$$Q(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1+x)dx\,,$$

и полагая $Q''(\eta) > 0$, имеем

$$P''(\eta)\,.\,Q(1) > P(1)\,.\,Q''(\eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Построим полином

$$R(x) = \frac{P(x) - (a-1)\,Q(x)}{P''(\eta) - (a-1)\,Q''(\eta)}\,P''(\eta)$$

имеем

$$R'(x) = \frac{u^2(x)\,(1+x)^2}{2(1+\eta)\,[u(\eta)u'(\eta)(1+\eta) + u^2(\eta)]}\,P''(\eta)\,.$$

Очевидно, что $R'(x)$ неотрицательно в интервале $(-1, +1)$, $R''(\eta) = P''(\eta)$ и вследствие (1) имеем

$$R(1) < P(1).$$

---

*) См. Сообщения Харьковского Математического Общества. Четвертая серия, том I, 1927 год. Sur les polynomes multiplement monotones, par Serge Bernstein, стр. 5.

Если же $Q''(\eta) < 0$, то, так как $Q(1) > 0$, имеем

$$R(1) = \frac{P(1) - (a-1)\,Q(1)}{P''(\eta) - (a-1)Q''(\eta)}\,P''(\eta) < \frac{P(1)\,.\,P''(\eta) - (a-1)P(1)\,.\,Q''(\eta)}{P''(\eta) - (a-1)\,Q''(\eta)} = P(1)\,.$$

При этом доказательстве мы исключаем тот случай, когда вторая производная задана в точке $\eta = -1$, потому что при $\eta = -1$ знаменатель в выражении для $R'(x)$ обращается в ноль; в этом случае поступим так: построим полином

$$\Psi(x) = u^2(x)(1+x)(a+x) - \alpha u^2(x)(x+1)^2$$

где $\alpha > 0$ и так подобрано, чтобы $\Psi(x)$ было неотрицательно в интервале $(-1, +1)$; но

$$\Psi'(-1) = \varphi'(-1) = b^2 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1} \Psi(x)\,dx < \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx\,.$$

Итак если $\varphi(x)$ будет вида $u^2(x)\,(1+x)\,(a+x)$ где $a \geqslant 1$, то отклонение розыскиваемого полинома при всяком $a \neq 1$ допускало бы уменьшение, а этого согласно условию задачи быть не должно, поэтому вид $u^2\,(x)\,(1+x)\,(a+x)$ приводится к виду $u^2(x)$.

Если мы аналогичные рассуждения применим к видам 2), 3), 4), то найдем для $\varphi(x)$ следующие два вида

$$u^2(x) \quad \text{и} \quad u^2(x)\,(1-x^2);$$

при чем вид $u^2(x)\,(1-x^2)$ невозможен, если вторая производная задана в точке $\eta = 1$, ибо невыполнялось бы поставленное условие $\varphi'(1) = b^2$

Повторяя эти рассуждения для случая степени $2n+2$, найдем, для $\varphi(x)$ следующие два вида

$$u^2(x)\,(1+x) \quad \text{и} \quad u^2(x)\,(1-x),$$

второй вид невозможен, если вторая производная задана в точке $\eta = 1$.

Найдем minimum интеграла

$$L = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx$$

при условии $2u(\eta)\,u'(\eta) = b^2$.

Разлагая $u(x)$ по полиномам Лежандра, и пользуясь известными свойствами этих полиномов, имеем

$$u(x) = \sum_0^n a_i\,P_i(x)\,;\ L = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx = \sum_0^n \frac{2a_i^2}{2i+1}\,,$$

ищем extremum

$$\sum_0^n \frac{2a_i^2}{2i+1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

при условии

$$\sum_0^n a_i\,P_i(\eta)\,.\,\sum_0^n a_i\,P_i'(\eta) = \frac{b^2}{2}\ \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Пользуясь известными методами дифференциального исчисления находим

$$\frac{4a_i}{2i+1} = k\,P_i(\eta)\,q + k\,P_i'(\eta)p; \quad \text{. . . . .} \quad (4)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots n$$

где

$$p = \sum_0^n a_i P_i(\eta) \quad \text{и} \quad q = \sum_0^n a_i P_i'(\eta); \quad \text{. . . . . .} \quad (5)$$

умножая обе части (4) на a_i, суммируя по i от 0 до n и принимая во внимание (3) найдем

$$L = \frac{b^2 k}{2}; \quad \text{. . . . .} \quad (6)$$

умножая обе части (4) на $P_i(\eta)$, освобождаясь от знаменателя, суммируя по i от 0 до n и принимая во внимание (5), найдем

$$4p = kq \sum_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1) + kp \sum_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1); \quad \text{. . . .} \quad (7)$$

умножая обе части (4) на $P_i'(\eta)$, освобождаясь от знаменателя, суммируя по i от 0 до n и принимая во внимание (5) найдем

$$4q = kq \sum_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) + kp \sum_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1); \quad \text{. . . .} \quad (8)$$

так как $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то из (7) и (8) имеем

$$\begin{vmatrix} k \sum\limits_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1), & k \sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'\,(2i+1) - 4 \\ k \sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) - 4, & k \sum P_i'^2(\eta)\,(2i+1) \end{vmatrix} = 0; \quad \text{. .} \quad (9)$$

Решая последнее уравнение, найдем два значения k, одно положительное, другое отрицательное; мы должны взять положительный корень

$$k = \frac{4}{\sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) + \sqrt{\sum\limits_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1) \,.\, \sum\limits_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1)}}$$

и для L на основании (6) имеем

$$L = \frac{2 \,.\, b^2}{\sum\limits_0^n P_i(\eta)\,P_i'(\eta)\,(2i+1) + \sqrt{\sum\limits_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1) \,.\, \sum\limits_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1)}} \,; \quad (10)$$

так как и полином Лежандра *) и его производная **) достигают наибольшего значения при $\eta = 1$, то очевидно, что отклонение будет

*) См. E. T. Whittaker A course of modern Analysis изд. 1927, стр. 303.

**) Что производная достигает наибольшего значения при $x = 1$, это следует из формулы Christoffel'я см. Encyclopédie des sciences mathématiques II_5, fasc 2, стр. 163.

наименьшим, если 2-я производная будет задана в точке $\eta=1$; имеем

$$P_i(1)=1); \quad P_i'(1)=\frac{i\,(i+1)}{2}\,; \;{}^{*)}$$

вычисляя суммы, входящие в знаменатель выражения (10), найдем

$$\sum_0^n P_i(1)\,P_i'(1)\,(2i+1)=\frac{n\,(n+1)^2\,(n+2)}{4}\,; \quad \sum_0^n P_i^2(1)\,(2i+1)=n+1)^2\,;$$

$$\sum_0^n P_i'^2(1)\,(2i+4)=\frac{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2}{12}\,;$$

подставляя последние значения в (10), для L получим

$$L=8b^2\,\frac{\sqrt{12}-3}{n\,(n+1)^2\,(n+2)}\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

найдем теперь асимптотическое выражение для L, имея в виду внутренние точки, т. е. для $-1<\eta<1$.

С этой целью воспользуемся такой формулой

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)\,P_k^{(i)}(x)\,P_k^{(j)}(x)=$$

$$=\frac{(n+i+1)\,(n+j+1)\,P_n^{(i)}(x)\,P_n^{(j)}(x)+(1-x^2)P_n^{(i+1)}(x)\,P_n^{(j+1)}(x)}{i+j+1}\,; \;{}^{**)} \quad (12)$$

и формулой такой

$$P_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\varphi}}\cdot\,\mathrm{Sin}\left[(n+{}^1\!/_2)\varphi+\frac{\pi}{4}\right]; \;{}^{***)} \quad \ldots \quad (13)$$

где $P_n(x)$, $P_k(x)$ полиномы Лежандра и $x=\cos\varphi$. Имеем

$$\sum_0^n P_i(\eta)P_i'(\eta)(2i+1)=\frac{(n+1)(n+2)\,P_n(\eta)P_n'(\eta)+(1-\eta^2)\,P_n'(\eta)\,P_n''(\eta)}{2}\,.$$

Пользуясь формулой (13), найдем, что

$$\sum_0^n P_i(\eta)P_i'(\eta)(2i+1)$$

будет порядка n; при помощи тех же формул (12) и (13) найдем

$$\sum_0^n P_i^2(\eta)\,(2i+1)\cong\frac{2n}{\pi\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$\sum_0^n P_i'^2(\eta)\,(2i+1)\cong\frac{2n^3}{3\pi(1-\eta^2)^{3/2}}.$$

---

*) См. P'olya и Szegö Aufgaben aus der Analysis II стр. 292 и 297.

**) См. статья Я. Л. Геронимуса. О квадратичном отклонении и т. д. в этом же журнале.

***) См. Yahnke — F. Emde Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, стр. 81.

Подставляя последние значения в выражение для L, найдем

$$L \sim \frac{\pi\sqrt{3}\,\sin^2\varphi}{n^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

где $\cos\varphi = \eta$.

Формула (11) для больших n имеет вид

$$L \sim 8\,.\,\frac{\sqrt{12}-3}{n^4}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Найдем теперь minimum интеграла

$$L = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,(1-x^2)dx$$

при условии

$$2u(\eta)u'(\eta)\,(1-\eta^2) - 2\eta u^2(\eta) = b^2;$$

разлагая $u(x)$ по полиномам Якоби

$$u(x) = a_0P_0^{(1,1)}(x) + a_1P_1^{(1,1)}(x) + \ldots + a_{n-1}P_{n-1}^{(1,1)}(x)$$

и пользуясь известными свойствами этих полиномов*), имеем

$$\int_{-1}^{1} u^2(x)(1-x^2)dx = \sum_0^{n-1} \frac{8a_i^2}{2i+3}\cdot\frac{i+1}{i+2};$$

ищем extremum

$$L = \sum_0^{n-1} \frac{8a_i^2}{2i+3}\cdot\frac{i+1}{i+2}$$

при условии

$$\sum_0^{n-1} a_iP_i^{(1,1)}(\eta)\,.\left[\sum_0^{n-1} a_iP_i'^{(1,1)}(\eta)\,(1-\eta^2) - \eta\sum_0^{n-1} a_iP_i^{(1,1)}(\eta)\right] = \frac{b^2}{2}; \quad \ldots \quad (16)$$

имеем

$$\frac{16a_i}{2i+3}, \frac{i+1}{i+2} = kqP_i^{(1,1)}(\eta) + kp\left[(1-\eta^2)P_i'^{(1,1)}(\eta) - \eta P_i^{(1,1)}(\eta)\right]; \quad \ldots \quad (17)$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

где

$$p = \sum_0^{n-1} a_iP_i^{(1,1)}(\eta)\,; \quad q = \sum_0^{n-1}\left\{(1-\eta^2)a_iP_i'^{(1,1)}(\eta) - \eta a_iP_i^{(1,1)}(\eta)\right\}; \quad \ldots \quad (18)$$

умножая (17) на a_i, суммируя по i от 0 до $n-1$ и принимая во внимание (16), найдем

$$L = \frac{kb^2}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

умножая (17) на $P_i^{(1,1)}(\eta)$, освобождаясь от знаменателя, деля обе части на $i+1$, суммируя по i от 0 до $n-1$ и принимая во внимание (18), получим

$$16p = kq\sum_0^{n-1} P_i^{2(1,1)}(\eta)\,\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1} +$$

$$+\,kp\sum_0^{n-1}\left[(1-\eta^2)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)\,P_i^{(1,1)}(\eta) - \eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right].\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}; \quad . \quad (20)$$

*) См. Pólya - Szegö Aufgaben aus der Analysis. II, стр. 93, 292 и 297.

умножая (17) на

$$\left[(1-\eta^2)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}$$

суммируя получим

$$16q=kq\sum_0^{n-1}\left[(1-\eta^2)\,P_i^{(1,1)}(\eta)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}+$$

$$+kp\sum_0^{n-1}\left[(1-\eta^2)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{(1,1)}(\eta)\right]^2\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\,;\quad\ldots(21)$$

так как $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то из уравнений (20) и (21) следует, что

$$\begin{vmatrix} k\,A_1-16, & k\,A_0 \\ k\,A_2, & k\,A_1-16 \end{vmatrix}=0\;\ldots\ldots\ldots(22)$$

где

$$A_0=\sum_0^{n-1}P_i^{2(1,1)}(\eta)\,\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\,;$$

$$A_1=\sum_0^{n-1}\left\{\left[(1-\eta^2)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)\,P_i^{(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right]\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\right\};$$

$$A_2=\sum_0^{n-1}\left\{\left[(1-\eta^2)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)-\eta\,P_i^{(1,1)}(\eta)\right]^2\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\right\};$$

Решив последнее уравнение, мы найдем два значения для k; взяв положительное значение и принимая во внимание (19), для L получим

$$L=\frac{8b^2}{\sum\limits_0^{n-1}\left[P_i^{(1,1)}(\eta)\,P_i'^{(1,1)}(\eta)\,(1-\eta^2)-\eta\,P_i^{2(1,1)}(\eta)\right]\,\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}+}$$

$$\frac{8b^2}{+\sqrt{\sum\limits_0^{n-1}P_i^{2(1,1)}(\eta)\cdot\frac{(2i+3)\,(i+2)}{i+1}\cdot\sum\limits_0^{n-1}\left[P_i'^{(1,1)}(\eta)(1-\eta^2)-\eta P_i^{(1,1)}(\eta)\right]^2\frac{(2i+3)(i+2)}{i+1}}};\;(23)$$

Исследуем теперь при каком значении η L будет наименьшим; для удобства исследования перейдем к полиномам Лежандра. Между полиномами Якоби и полиномами Лежандра можно установить следующее соотношение

$$P_i^{(1,1)}(\eta)=\frac{2}{i+2}\,P_{i+1}'(\eta)\,;\;{}^{*)}\quad\ldots\ldots\ldots(24)$$

где $P_{i+1}(\eta)$ есть полином Лежандра.

Рассмотрим выражение

$$A_i=P_i(\eta)P_i''(\eta)(1-\eta^2)-\eta P_i'^2\,;$$

*) См. Encyclopedie des sciences mathematiques II$_5$, fesc. 2, стр. 195 и 198.

имеем

$$A_i = P_i'(\eta)P_i''(\eta)(1-\eta^2) - \eta P_i'^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\Big[P_i'^2(\eta)(1-\eta^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\Big[\underset{\eta=\cos\varphi}{P_i'^2(\cos\varphi)}\,.\,\sin^2\varphi\Big] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\Big[\Big(\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}\Big)^2\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\Big[\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}\Big]^2 = -\frac{\dfrac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}\cdot\dfrac{d^2P_i(\cos\varphi)}{d\varphi^2}}{\sin\varphi};$$

но $P_i(\eta)$ можно представить в таком виде

$$\underset{\eta=\cos\varphi}{P_i(\eta)} = \sum c_k\cos(i-2_k)\varphi\ ;\ ^{*)}$$

где $c_k > 0$ и сумирование производится по k от 0 до $\frac{i}{2}$ если i — четное и от 0 до $\frac{i-1}{2}$, если i — нечетное. Имеем

$$P_i' = -\sum c_k(i-2_k)\sin(i-2_k)\varphi;\quad P_i'' = -\sum (i-2_k)^2 c_k\cos(i-2_k)\varphi\ ;$$

для A_i получим

$$A_i = -\frac{\sum c_k(i-2_k)\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi}\,.\,\sum(i-2_k)^2c_k\cos(i-2_k)\varphi\ ;$$

рассмотрим выражение

$$\frac{\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi}$$

можно показать, что

$$\left|\frac{\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi}\right| \leqq i-2_k\ ^{**)}$$

Знак равенства имеет место только для $\eta = 1, -1$; полагая $\varphi = \pi$ т. е. $\eta = -1$ получим наибольшее значевие для A_i, так как при $\eta = \pi$ выражения

$$\frac{\sum c_k(i-2_k)\sin(i-2_k)\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad \sum(i-2_k)^2c_k\cos(i-2_k)\varphi$$

достигают наибольших значений по абсолютной величине и будут противоположных знаков; следовательно и выражение

$$\sum_0^{n-1}\Big[P_i^{(1,1)}(\eta)P_i'^{(1,1)}(\eta)(1-\eta^2) - \eta P^{2(1,1)}(\eta)\Big]\cdot\frac{(2_i+3)(i+2)}{i+1}$$

достигает наибольшего значения при $\eta = -1$;

рассмотрим выражение

$$B_i = P_i''(\eta)(1-\eta^2) - \eta P_i'(\eta)$$

---

*) См. Iahnke — Emde Funktionentafeln mit Formeln und kurven стр. 80.

**) См. Polya u Szegö, II, стр. 76, задача 7.

имеем

$$B_i = \frac{d}{d\eta}\Big[P_i'(\eta)(1-\eta^2)\Big] + \eta P_i'(\eta) = \frac{d}{d\eta}\Big\{P_i'(\cos\varphi).\sin^2\varphi\Big\}_{\eta=\cos\varphi} +$$

$$+\cos\varphi . P_i'(\cos\varphi) = -\frac{d}{d\eta}\Big\{\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}.\sin\varphi\Big\} + \cos\varphi . P'_i(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi}.\frac{d}{d\varphi}\Big\{\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi}.\sin\varphi\Big\} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.\frac{dP_i(\cos\varphi)}{d\varphi} = \frac{d^2P_i(\cos\varphi)}{d\varphi^2};$$

последнее выражение достигает наибольшего значения по абсолютной величине при $\eta = 1, -1$, следовательно знаменатель выражения (23) достигает наибольшего значения при $\eta = -1$, а само L при $\eta = -1$ будет наименьшим. Заменяя полиномы Якоби полиномами Лежандра, в выражении (23), подставляя $\eta = -1$ и так как $P_i'^2(-1) = P_i'^2(1)$ то имеем

$$L = \frac{b^2}{\sum\limits_0^{n-1} P_i'^2(1).\frac{(2i+3)}{(i+1)(i+2)}}$$

но

$$P_{i+1}'^2(1) = \frac{(i+1)^2(i+2)^2}{4},$$

а поэтому имеем:

$$L = \frac{4b^2}{\sum\limits^{n-1}(i+1)(i+2)(2i+3)}$$

вычисляя сумму, стоящую в знаменателе, для L найдем:

$$L = \frac{8b^2}{n(n+1)^2(n+2)} \quad \text{. . . . .} \quad (25)$$

сравнивая последнее выражение с выражением (11) видим, что отклонение будет наименшим тогда, когда вторая производная имеет данное значение b^2 в точке $\eta = 1$ и что наименьшее отклонение будет,

$$L_{2m+1} = 8b^2\frac{\sqrt{12}-3}{n(n+1)^2(n+2)};$$

$$L \sim 8b^2\frac{\sqrt{12}-3}{n^4}.$$

Если искать асимптотическое выражение для L из формулы (23), имея в виду точки $-1 \angle \eta \angle 1$, то получим прежний результат,

$$L \sim \frac{\pi b^2\sqrt{3}\sin^2\varphi}{n^2}. \; *)$$

Если повторить те же вычисления и те же рассуждения для полинома степени $2_n + 2$, то мы найдем, что отклонение будет наи-

---

*) Ср. с результатом Академика С. Н. Бернштейна см. Leçons sur les propriétés extrémales l. s. c. см. стр. 50 и 46.

меньшим тогда, когда вторая производная имеет данное значение b^2 в точке $\eta = 1$, при виде производной,

$$\varphi(x) = u^2(x)(1 + x)$$

и это наименьшее отклонение будет

$$L_{2n+2} = \frac{24b^2}{(n+1)(n+2)\{3(n^2+3n+1) + \sqrt{3(2n^2+6n+1)(2n^2+6n+3)}\}}$$

для больших значений n имеем

$$L \sim 8b^2 \frac{\sqrt{12} - 3}{n^4}.$$

Асимптотическая формула для L, имея в виду внутренние точки, будет, как при виде $u^2(x)(1 + x)$ так и при виде $u^2(x)(1 - x)$, прежняя т. е.

$$L \sim \frac{\pi b^2 \sqrt{3} \sin^2\varphi}{n^2}$$

RÉSUMÉ

L'auteur se propose de trouver la solution du problème suivant:

Déterminer le minimum de l'écart de zéro dans l'intervalle $(-1, +1)$ d'un polynome non décroissant de degré $m = 2n + 1$, $2n + 2$, si sa dérivée seconde reçoit dans un point $x = \eta$ de cet intervalle la valeur b^2.

L'auteur trouve que l'écart L sera minimum quand le point $x = \eta$ se trouve a l'une des extrémités du segment $(-1, +1)$, et pour l'écart L il donne

$$L_{2n+1} = 8b^2 \frac{\sqrt{12} - 3}{n(n+1)^2(n+2)}$$

et

$$L_{2n+2} = \frac{24b^2}{(n+1)(n+2)[3(n^2+3n+1) + \sqrt{3(2n^2+6n+1)(2n^2+6n+3)}]};$$

pour les points $-1 \angle \eta \angle 1$ il trouve, pour L, la formule asymptotique

$$L \sim \frac{\pi b^2 \sqrt{3} \sin^2\varphi}{n^2}.$$