Sur quelques polynomes aux propriétés extrémales

Par V. I. Smirnoff.

§ 1.

Le but de cette note est d'indiquer une methode nouvelle pour résoudre quelques problèmes d'extrémum concernant les polynomes. Le moment intrinsèque de cette méthode est présenté par la manière de poser le problème, le polynome en question devant jouir de certaines propriétés extremales sur une circonférence du plan de la variable complexe. Remarquons, que nous supposons dans ce qui suit, que les coefficients des polynomes sont des nombres complexes.

On sait, que les polynomes trigonométriques jouissent de la propriété suivante *):

Si pour les valeurs réeles de ϑ, un polynome trigonometrique impair:

$$S(\vartheta) = \mu_1 \sin\vartheta + \mu_2 \sin 2\vartheta + \ldots + \mu_n \sin n\vartheta$$

satistait à l'inégalité

$$|S(\vartheta)| \leqq 1, \text{ on a } \left|\frac{S(\vartheta)}{\sin\vartheta}\right| \leqq n,$$

l'égalité n'ayant lieu d'ailleurs, que dans le cas où $S(\vartheta) = \pm\,\varepsilon \sin n\vartheta$; $|\varepsilon| = 1$. De lá suit immédiatement, comme il est bien counu, le théorème de M. S. N. Bernstein **): Si pour toutes les valeurs réeles de ϑ, un polynome trigonométrique $g(\vartheta)$ d'ordre n satistait à le condition: $|g(\vartheta)| \leqq 1$, on a $|g'(\vartheta)| \leqq n$, l'égalité n'ayant lieu que pour les polynomes de la forme: $a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta$. Nous appliquerons notre méthode avant tout pour étendre la propriété indiquée de polynomes trigonométriques impairs à tous les polynomes se réduisant à zéro pour $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$.

Enonçons le probléme extrémal (A):

Parmi tous les polynomes $\psi_{2n}(z)$ du dégré $2n$ satisfaisant aux conditions:

$$(1)\ \ldots\ \psi_{2n}(\pm 1) = 0; \qquad (2)\ \ldots\ |\psi_{2n}(z)| \leqq 1 \text{ pour } (z) = 1$$

trouver celui qui admet le plus grand maximum du module $\dfrac{\psi_{2n}(z)}{z^2-1}$ sur la circonférence C ($|z| = 1$).

---

*) G. Polga und G. Szegö. Aufgaben und Leursätze aus der Analysis. A notre regret il nous à été impossible de lire l'article de M. Riesz, inséré dans les Iahresber. der Deutsch. Math. Verein., Bd. 35, S. 354 (1914), ce numéro du journal manquant á nos bibliothèques.

**) S. Bernstein: „Leçons sur les propriétés extremales etc."; Paris 1926, p.p. 38—44.

Introduisons les racines de l'équation $z^{2n}+1=0$:

$$\varepsilon_s = e^{\theta_s i}\left(\theta_s = \frac{2s+1}{2n}\pi;\ s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 2n-1\right).$$

En prenant les valeurs $z=\pm 1$ et $\varepsilon_s (s=1,\ 2,\ldots,\ 2n-1)$ pour les points de l'interpolation, en vertu de la condition (1), la formule de Lagrange pour le polynome $\psi_{2n}(z)$ sera

$$\frac{\psi_{2n}(z)}{z^2-1} = \frac{1}{2n}\sum_{s=1}^{2n-1}\psi_{2n}(\varepsilon_s)\ \frac{\varepsilon_s(\varepsilon_s-\varepsilon_0)}{(1-\varepsilon_s^2)(z-\varepsilon_s)}\ \frac{z^{2n}+1}{z-\varepsilon_0}$$

Il est aisé de voir, que si z se trouve á l'intérieur de l'arc de la circonférence C, limité par les points ε_{n-1} et ε_n, les arguments des facteurs de $\psi_{2n}(s_s)$ sont les mêmes, et, par conséquent, en vertu de la condition (2), nous recevrons la valeur maximale du module de la somme, en posant $\psi_{2n}(\varepsilon_s)=\varepsilon$, avec $|\varepsilon|=1$. Cela nous donne evidement le polynome

(3) . . . . $W_{2n}(z)=\varepsilon\dfrac{z^{2n}-1}{2}\quad (|\varepsilon|=1)$,

satisfaisant à la condition (2) sur toute la circonférence C. Pour ce polynomele maximum du module $\dfrac{\psi^{2n}(z)}{z^2-1}$ est atteint sur l'arc mentionné au point $z=-1$, et ce maximum est égal à $\dfrac{n}{2}$. En remplaçant z par $(-z)$ on voit aisément, que sur l'arc, limité par les points ε_{2n-1} et ε_0, le maximum mentionnè est égal aussi á $\dfrac{n}{2}$ et n'est atteint que par le polynome (3) pour $z=1$: Si z ne se trouve pas à l'intérieur des arcs $(\varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon_{2n-1},\ \varepsilon_0)$, on a $|z^2-1|\geqslant 2\sin\dfrac{\pi}{2n}$, et la condition (2) donne $\left|\dfrac{\psi_{2n}(z)}{z^2-1}\right|<\dfrac{n}{2}$.

On voit de là que *le polynome* (3) *présente la solution unique du probléme* (*A*), *et le maximum de* $\left|\dfrac{W_{2n}(z)}{z^2-1}\right|$, *étant égal à* $\dfrac{n}{2}$, *n'est atteint que pour* $z=\pm 1$. En posant $z=e^{\vartheta i}$ et en remarquant, que tout polynome trigonométrique de l'ordre n est de la forme $\psi_{2n}(e^{\vartheta i}) . e^{-n\vartheta i}$ et que $|e^{2\vartheta i}-1| = 2|\sin\vartheta|$, nous pouvons énoncer le résultat obtenu de la manière suivante: *si un polynome trigonométrique* $g^n(\vartheta)$ *de l'ordre* n *se réduit à zéro pour* $\vartheta=0$ *et* $\vartheta=\pi$ *et satisfait à la condition:* $|g_n(\vartheta)|\leqq 1$ *pour toute valeur réele de* ϑ, *on a*

(4) . . . . $\left|\dfrac{g_n(\vartheta)}{\sin\vartheta}\right|\leqslant n$,

l'égalité n'ayant lieu que pour le polynome de la forme $g_n^*(\vartheta)=\varepsilon\sin n\vartheta$ $(|\varepsilon|=1)$ *et* $\vartheta=0$ *ou* π.

En introduisant au lieu de z une variable nouvelle x conformément à la formule:

(5) . . . . $x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}$; $\quad z=x\pm\sqrt{x^2-1}$,

nous faisons correspondre le segment double $-1 \leqq x \leqslant 1$ à la circonference C, et la fonction $\frac{\psi_{2n}(z)}{z^n}$ sera équivalente à la fonction de la forme:

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad f(x) = P_n(x) + \sqrt{x^2-1}\, Q_{n-1}(x)$$

où $P_n(x)$ et $Q_{n-1}(x)$ sont des polynomes du dégré n et $n-1$, et où on attribue à ia raçine $\sqrt{x^2-1}$ les deux signes. Donc, le résultat obtenu peut être enoncé ainsi: *si une fonction $f(x)$ de la forme* (6) *satsfait aux conditions*:

$$P_n(\pm 1) = 0; \; |f(x)| \leqslant 1 \text{ pour } -1 \leqq x \leqq +1$$

on a

$$\left| \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}} \right| \leqq n$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où

$$P_n(x) \equiv 0; \; Q_{n-1}(x) = U_{n-1}(x) = \varepsilon \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} (x = \cos\theta \text{ et } |\varepsilon| = 1)$$

et pour $x = \pm 1$.

En particulier, *si*

$$\sqrt{1-x^2}\, |Q_{n-1}(x)| \leqq 1; \; (-1 \leqq x \leqq 1),$$

on a:

$$|Q_{n-1}(x)| \leqq n$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $Q_{n-1}(x) = \varepsilon\, U_{n-1}(x)$ *et* $x = \pm 1$ *).

En se servant de la solution du problème (A) où reçoit aisement la solution du problème suivant: (B) *parmi tous les polynomes* $\psi_n(z)$ *du dégré* n, *satisfaisant aux conditions*:

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \psi_n(+1) = 0 \text{ et } |\psi_n(z)| \leqq 1 \text{ pour } |z| = 1$$

trouver celui, qui admet le plus grand maximum du module $\frac{\psi_n(z)}{z-1}$ *pour* $|z| = 1$.

En remplaçant z par z^2 et en se servant de la résolution du problème (A), on voit aisement, que *le polynome*

$$w_n(z) = \varepsilon \frac{z^n - 1}{2} \quad (|\varepsilon| = 1)$$

fournit le solution unique du problème (B), *d'ailleurs le maximum de* $\left|\frac{w_n(x)}{z-1}\right|$ *étant égal à* $\frac{n}{2}$, *n'est atteint que pour* $z = 1$.

Considérons un polynome arbitraire $\varphi_n(z) = \sum_{s=0}^{n} a_s z^{n-s}$ satisfaisant à la condition $|\varphi_n(z)| \leqslant 1$ pour $|z| = 1$.

Le polynome:

$$\psi_n(z) = \frac{z^n \varphi_n\left(\frac{1}{z} e^{\theta i}\right) - \varphi_n(z e^{\theta i})}{2}$$

*) G. Polya und G. Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis; Bd. II; s. 90.

satisfait à deux conditions (7), et, en vertu de la résolution du problème (B), on a:

$$\left|\frac{\psi_n)z)}{z-1}\right| \leqq \frac{n}{2} \text{ pour } z=1\,,$$

c'est-à-dire:

$$\left|\sum_{s=0}^{n}(n-2s)\,a_{n-s}e^{s\theta i}\right| \leqq n$$

ou

(8) . . . . $|\, n\varphi_n(z) - 2z\varphi_n'(z)\,| \leqq n$ pour $|\,z\,| = 1$.

Cettr inégalité peut être ecrite sous forme:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi_n(z)}{z^{\frac{n}{2}}}\right] \leqq \frac{n}{2} \text{ pour } |\,z|| = 1,$$

ce qui donne pour n pair le théorème ci-dessus mentionné de M. S. N. Bernstein.

L'inégalite (8) avec les conditions $|\,\varphi_n(z)\,| \leqq 1$ pour $|\,z\,| = 1$ donne également la solution du problème de A. A. Markoff pour la circonférence C: précisément

$$|\,\varphi_n'(z)\,| \leqq n.$$

Il est aisé d'enoncer et de résoudre le problème (A) dans le cas d'une circonférence C_R $(|\,z\,| = R)$, le rayon R étant arbitraire. En passant sur le plan de le variable

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

nous récevons la résolution du problème, pour le cas d'un ellipse E_R aux foyers ± 1 sur l'axe réel et avec le grand axe $\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$, ce dernier problème étant analogue au précédent pour le segment $(-1, +1.)$

Les résultats des problèmes (A) et (B) donnent immédiatement la résolution du problème de A. A. Markoff pour le segment $(-1, +1)$. On doit seulement utiliser ce fait que en vertu de (5) le polynome $p_n(x)$ est équivalent à l'expression $\psi_{2n}(z) . z^{-n}$, où $\psi_{2n}(z)$ est le polynome réciproque.

§ 2.

Indiquons encore une application de la méthode d'une variable complexe à la resolution du probléme extrémal. Enonçons le problème suivant: (C) *parmi tous les polynomes du dégré n*

$$\alpha_n(z) = Az^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}z + B$$

à coefficients donnés A et B trouver celui, dout le maximum du module sur le circonférence C_R est le plus petit. L'existence d'une solution du problème est évidente. Soit $\beta_n(z)$ le polynome, qui fournit cette solution et soit $g_n = \max|\,\beta_n(r)\,|$ sur C_R. Considérons un polynome transformé:

(9) . . . . $\beta_{n,k}(z) = \dfrac{\beta_n(z) + \beta_n(e^{k\frac{2\pi}{n}i}z)}{2}$,

k étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$.

Il est clair, que le polynome $\beta_{n,k}(z)$ du dégré n jouit des propriétés suivantes: 1) les coefficients extremes du polynome $\beta_{n,k}(z)$ sont A et B; 2) sur la circonférence C_R on a: $|\beta_{n,k}(z)| \leqq g_n$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où

$$\beta_n(z) = \beta_n(e^{k\frac{2\pi i}{n}} z) \quad \text{et} \quad |\beta_n(z)| = |\beta_n(e^{k\frac{2\pi i}{n}} z)| = g_n.$$

Il suit de là immediatement, que le module du polynome $\beta_n(z)$ atteint le maximum en points de la forme:

$$(10) \; . \; . \; . \; . \; . \quad z_0;\; z_0 e^{\frac{2\pi}{n}i};\; z_0 e^{\frac{4\pi}{n}i};\ldots\; z_0 e^{(n-1)\frac{2\pi}{n}i};\quad (|z_0| = R)$$

et que les valeurs du polynome $\beta_n(z)$ dans tous ces points sont les mêmes. En effet, si un tel systéme de points n' existait pas, en faisant plusieures fois sur le polynome $\beta_n(z)$ le trausformation (9), le nombre k étant choisi couvenablement, nous aurions pu recevoir un polynome du dégré n aux coefficients extrémes A et B, dont le maximum du module sur C_R serait plus petit que g_n, ce qui est en contradiction avec la condition, que le polynome $\beta_n(2)$ fournit la résolution du problème (C).

Mais si la valeur du polynome $\beta_n(z)$ aux points (10) est ia même, ce polynome ne contient que le terme en z^n et le terme constant; donc,

$$(11) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \beta_n(z) = Az^n + B,$$

et *ce polynome donne la solution unique du problème* (C).

Appliquons la résolution du problème (C) à un polynome du dégré pair. Si on fait le changement des variables (5), la fonction $\alpha_{2n}(z)z^{-n}$ sur C_R est équivalente à une fonction de la forme (6) sur l'ellipse E_R, la fixation des coefficients extrèmes du polynome $\alpha_{2n}(z)$ étant equivalente à la fixation des coefficients des polynomes $P_n(x)$ et $Q_{n-1}(x)$ d'aprés les puissances les plus elevées de x. Si $R=1$, l'ellipse E_R se transforme en segment double $(-1, +1)$. La résolution definitive du probléme (C) nous conduit au résultat suivant sur le plan x: *Parmi toutes les fonctions de la forme* (6) *aux coefficients donnés*: a_0 *et* b_0 *des polynomes* $P_n(x)$ *et* $Q_{n-1}(x)$ *des puissances les plus élevées de* x, *la fonction*:

$$\frac{a_0+b_0}{2^n}z^n + \frac{a_0-b_0}{2^n}z^{-n} =$$

$$= \frac{a_0}{2^n}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right] + \frac{b_0}{2^n}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x^2-\sqrt{x^2-1})^n\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2^{n-1}}T_n(x) + \frac{b_0}{2^{n-1}}\sqrt{x^2-1}\,.\,U_{n-1}(x)$$

où

$$T_n(x) = \cos n\theta;\quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{T_n'(x)}{n};\quad (x = \cos\theta)$$

admet le maximum du module le plus petit sur le segment double $(-1, +1)$ *ou sur l'ellipse* E_R.

Pour $b_0 = 0$ on reçoit la resolution bien connue du probléme de Tchebycheff concernant le polynome de la forme $x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$ à l'écart minimal de zéro sur le segment $(-1, +1)$ ou sur l'ellipse E_R. En posant $a_0 = 0$, la résolution du problème sera fournie par la fonction de la forme

$$\frac{b_0}{2^{n-1}} \sqrt{x^2-1}\ \ U_{n-1}(x).$$

On peut, au contraire, fixer le maximum du module de la fonction et chercher la valeur maximale du coefficient de la puissance de x la plus élevée. De nos considérations concérnant le cas où $a_0 = 0$, on reçoit immédiatement par exemple le résultat suivant: *pour toutes les fonctions de la forme*:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \sqrt{x^2-1}\,.\ \ Q_{n-1}(x)\,,$$

telles que: $|f(x)| \leq 1$ *sur le segment* $(-1, +1)$, *le coefficient de* $Q_{n-1}(x)$ *de le puissance la plus élevée satisfait à la condition* $|b_0| \leqslant 2^{n-1}$ *l'égalité n'ayant lieu que pour* $\varepsilon\sqrt{x^2-1}\ \ U_{n-1}(x)\,(|\varepsilon| = 1)$ *).

Remarquons que dans tous les problèmes concérnant le segment il faut prendre le signe double d'aprés $\sqrt{x^2-1}$, tandis que dans les problèmes concernant l'ellipse E_R on prend la détermination fixée de $\sqrt{x^2-1}$ sur cet ellipse.

En appliquant de nouveau la résolution du problème (C) au polynome du degré pair et en posant $z = e^{\vartheta i}$ dans l'expression $a_{2n}(z).\ z^{-n}$, nous recevons le resultat suivant: *parmi tous les polynomes trigonométriques d'ordre n*

$$\lambda_0 + \sum_{s=1}^{n} (\lambda_s \cos s\vartheta + \mu_s \sin s\vartheta)$$

à coefficients donnés λ_n et μ_n, *le polynome*

$$\lambda_n \cos n\vartheta + \mu_n \sin n\vartheta$$

est celui, dont l'écart de zéro est minimal.

Si nous fixons dans ce probléme un seul coefficient λ_n, nous devons fixer dans le problème (C) seulement la somme $A + B = \lambda_n$. Il est aisé de voir que dans ce cas la solution du problème sera aussi $a_{2n} A z^{2n} + B$, où $A + B = \lambda_n$. D'ailleurs, le maximum du $|Az^{2n} + B|$ pour $|z| = 1$ est evidemment égal à $|A| + |B|$. Donc il nous reste à choisir les nombres complexes A et B d'une telle façon, que $A + B = \lambda_n$ et que la somme $|A| + |B|$ soit la plus petite possible. Il est evident que la solution est fournit par $A = B = \dfrac{\lambda_n}{2}$, et par suite le polynome trigonométrique cherché à l'écart minimal de zéro pour le coefficient λ_n fixé est présenté par $\lambda_n \cos n\vartheta$. D'une manière analogue, en fixant μ_n, nous recevons $\mu_n \sin n\vartheta$.

---

*) Pour un cas particulier de ce résultat voir G. Polya und G. Szegö op. cit. Bd. II; S. 90; № 77.

**) I. Privaloff. Sur les sommes trigonométriques à l'écart minimal de zéro (en russe); Math. Sbornik. t. XXX: 3 p.p. 474—478 (1916).