Sur un théoreme de M. Gontcharoff

Serge Bernstein

Dans une Note recemment parue (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 27 Decembre 1997) M. Gontcharoff a établi entre autres le théoreme suivant:

La fonction

$$\varphi(x) = \sin x$$

est entièrement déterminée sur tout l'axe reel par les propriétés suivantes: 1) elle est infiniment dérivable, 2) toutes ses dérivées successives $\varphi^{(n)}(x)$ *admettent pour racines* $h\pi$ *et* $\left(h+\frac{1}{2}\right)\pi$ *suivant que n est pair ou impair, quels que soient les nombres entiers h et n'en admettent pas d'autres,* 3) $\varphi'(0) = 1$.

Certaines des propriétés indiquées étant des consequences des autres, je veux donner à cette proposition importante une forme telle qu'aucune des conditions ne soit superflue.

Théorème. *La fonction*

$$\varphi(x) = \sin x$$

est entiérement déterminée sur tout l'axe reel par les propriétés suivantes: 1) $\varphi(x)$ *est infiniment dérivable,* 2) *chaque point de l'axe reel peut être entouré d'un segment suffisamment petit pour qu'il existe une infinité de dérivées* $\varphi^{(n)}(x)$ *qui ne s'y annulent pas,* 3) *sur le segment* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *les dérivées paires* $\varphi^{(2n)}(x)$ *ne s'annullent qu'au point* 0 *et les dérivées impaires ne s'annullent qu'au point* $\frac{\pi}{2}$, 4) $\varphi'(0) = 1$.

Occupons nous d'abord uniquement du segment $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et définissons provisoirement une fonction $f(x)$ infiniment dérivable de periode 2π, telle que

$$f(0) = f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x) = f(\pi - x).$$

Cela entraine que la fonction $f(x)$ aura ses dérivées continues de tous les ordres; elle sera, par conséquent, développable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{p=1,3,} A_p \sin px$$

infiniment dérivable.

D'autre part, on a, pour $0 < x < \pi$,

$$\sin x \pm \frac{\sin hx}{h} > 0,$$

quel que soit $h > 1$.

On voit donc que

$$(-1)^{\pi} \int_0^{\pi} f^{(2k)}(x) \left(\sin x \pm \frac{\sin hx}{h} \right) dx = \frac{\pi}{2} \left[A_1 \pm h^{2k-1} A_h \right]$$

pour toute valeur de h doit garder le même signe. Il en resulte que $A_h = 0$ pour toute valeur de $h > 1$, puisque h^{2k-1} croit indéfiniment avec k. Par conséquent,

$$f(x) = A_1 \sin x = \sin x,$$

en tenant compte de la condition 4).

Ainsi, les conditions 1), 3) et 4) définissent complètement $\varphi(x) = \sin x$ sur le segment $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Or, la condition 2) entraine que $\varphi(x)$ est quasi analytique P sur tout l'axe reel *) et, puisque le prolongement **) quasi analytique P se confond avec le prolongement analytique dans le domaine reel, lorsque celui-ci est possible, nous en concluons que $\varphi(x) = \sin x$ sur tout l'axe reel.

Corollaire. *Si une fonction quasi analytique P infiniment dérivable jouit de la propriété qu'il existe un point a, où toutes ses dérivées paires s'annulent, et un point b, où toutes ses dérivées impaires s'annulent, elle est périodique de période* $4(b-a)$.

On démontre d'une façon analogue que dans l'énoncé du théorème donné plus haut, la condition 3) peut être remplacée par la suivante relative seulement aux dérivées *de même parité*: que l'on ait, par exemple,

$$\varphi(0) = \varphi^{(2k)}(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = \varphi^{(2k)}(\pi) = 0,$$

ces dérivées n'ayant pas d'autres racines dans l'intervalle $(0, \pi)$.

---

*) Page 197 du livre „Leçons sur les propriétés extrémales etc."

**) Loc. cit. p.p. 165—170.