Связь между Гауссовой кривизной и линиями кривизны 2-го рода системы интегральных кривых уравнений Пфаффа

Я. П. Бланк

Проф. Д. М. Синцов в статье: „О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$" (*) устанавливает два различных выражения для кривизны системы. Первое представляет произведение мер кривизны главных направлений и называется полной кривизной системы, второе представляет отношение б. малых элементов системы и ее сферического изображения и называется Гауссовой кривизной. Точно так же два определения линий кривизны дают начало двум системам линий кривизны. Кривые 1-ой системы огибаются направлениями экстремальных радиусов кривизны, а линии кривизны 2-й системы обладают тем свойством, что вдоль них нормали к плоскостям системы пересекаются.

Цель настоящей заметки установить связь между линиями кривизны 2-го определения и Гауссовой кривизны системы.

Пусть ξ, η, ζ координаты точки пересечения нормалей к плоскостям системы в двух б. близких точках линии кривизны 2-го определения:

$$\xi = x + tP, \ \eta = y + tQ, \ \zeta = z + tR \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Вдоль линии кривизны;

$$\begin{aligned} d\xi &= dx + Pdt + tdP = \lambda P \\ d\eta &= dy + Qdt + tdQ = \lambda Q \\ d\zeta &= dz + Rdt + tdR = \lambda R \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

отсюда получается условие

$$\begin{vmatrix} dx & P & dP \\ dy & Q & dQ \\ dz & R & dR \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

которое вместе с исходным ур.

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

и определяет линии кривизны в форме приведенной в вышеуказан статье.

(*) Записки н.-иссл. кафедр. Украины, в. 3.

Если уравнения (2) написать в такой форме:

$$
\begin{aligned}
&(1+tP_x)\,dx + tP_y\,dy + tP_z\,dz + (dt-\lambda)\,P = 0\\
&tQ_x\,dx + (1+tQ_y)\,dy + tQ_z\,dz + (dt-\lambda)\,Q = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2'')\\
&tR_x\,dx + tR_y\,dy + (1+tR_z)\,dz + (dt-\lambda)\,R = 0
\end{aligned}
$$

и присоединить уравнение (4), то для определения t получаем квадратное ур—ние:

$$
\begin{vmatrix}
1+tP_x & tP_y & tP_z & P\\
tQ_x & 1+tQ_y & tQ_z & Q\\
tR_x & tR_y & 1+tR_z & R\\
P & Q & R & O
\end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)
$$

Ур—ние (5) можно написать в виде:

$$at^2 + bt + c = 0,$$

где

$$
a = \begin{vmatrix}
P_x & P_y & P_z & P\\
Q_x & Q_y & Q_z & Q\\
R_x & R_y & R_z & R\\
P & Q & R & O
\end{vmatrix} = \triangle \qquad c = -(P^2+Q^2+R^2)^2
$$

$$
b = \begin{vmatrix}
P_x & O & P\\
Q_x & -R & Q\\
R_x & Q & R
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
Q_y & O & Q\\
R_y & -P & R\\
P_y & R & P
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
R_z & O & R\\
P_z & -Q & P\\
Q_z & P & Q
\end{vmatrix}
$$

Положив

$$r_i = t_i\sqrt{P^2+Q^2+R^2} \quad (i=1,2),$$

имеем:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{\triangle}{(P^2+Q^2+R^2)^2},$$

где правая часть представляет выражение для Гауссовой кривизны системы, и

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

где ϱ_1 и ϱ_2—значения экстремальных радиусов кривизны.