НАРОДНІЙ КОМІСАРІЯТ ОСВІТИ УСРР
УПРАВЛІННЯ НАУКОВИМИ УСТАНОВАМИ (УПРНАУКА)

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬК. МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА
И УКРАИНСКОГО ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
СЕРІЯ 4, т. III

COMMUNICATIONS
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE KHARKOW
ET DE L'INSTITUT DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES DE L'UKRAINE
SÉRIE 4, t. III

ЗАПИСКИ
ХАРКІВСЬКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА
ТА
УКРАЇНСЬКОГО ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

СЕРІЯ 4, т. III

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ

1929

НАРОДНІЙ КОМІСАРІЯТ ОСВІТИ УСРР
УПРАВЛІННЯ НАУКОВИМИ УСТАНОВАМИ (УПРНАУКА)

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬК. МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА
И УКРАИНСКОГО ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
СЕРИЯ 4, т. III

COMMUNICATIONS
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE KHARKOW
ET DE L'INSTITUT DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES DE L'UKRAINE
SERIE 4, t. III

ЗАПИСКИ
ХАРКІВСЬКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА ТА УКРАЇНСЬКОГО ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

СЕРІЯ 4, т. III

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
ХАРКІВ 1929

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Укр. Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

Перша Друкарня Державного Видавництва України імени Г. І. Петровського Харків

Укрголовліт № 2809. 12/VII 1929.
Зам. № 12. Тираж 500.
$Б_5$ — $11^3/_4$ арк.

ГРИГОРІЙ ОЛЕКСІЙОВИЧ ГРУЗИНЦЕВ

(Некролог)

22-го серпня 1929 року після довгої й тяжкої хвороби помер проф. Дніпропетровського Інст. Нар. Освіти Григорій Олексійович Грузинцев.

Його воля до життя й творчости, дарма що здоров'я давно безнадійно підупало, так уперто боролася з незагойною хворобою, що вістка про його смерть все ж вразила несподіванкою всіх його численних друзів та колеґ.

Григорій Олексійович народився в грудні 1880 року. Батько його Олексій Петрович Грузинцев був приват-доцент, а згодом професор фізики Харківського Університету й під його керівництвом Григорій Олексійович дуже рано зацікавився математикою та фізикою й дістав значний загальний науковий розвиток. 1898 року, після закінчення 1-ої харківської гімназії Григорій Олексійович вступив на математичний відділ фізично-математичного факультету Харківського університету, де його блискуча індивідуальність відразу пригорнула до себе увагу професорів і, зокрема, проф. В. А. Стеклова, так що наукове майбутнє його, здавалось, забезпечене. Але заняття наукою не помішали Григорію Олексійовичу захопитися революційним рухом, що буйно прокидався в ті часи, і взяти найдіяльнішу участь в студентських заколотах та страйках. У наслідок його звільнили 1901 року з університету без права вступу. 1902 року йому вдалося поїхати за кордон в Ґеттінґен і там вперше я зустрівся з ним. Сумісне відвідування лекцій Klein'a, Hilbert'a, Minkowski'ого та спільність наукових інтересів зблизили нас першими ж днями. І в подальші роки, особливо протягом 10 років після мого переїзду до Харкова 1908 року і до від'їзду його в Дніпропетровське 1918 року, ми були з Григорієм Олексійовичем в постійному зв'язку, значіння якого для нас обох обумовлювалося тим, що ріжниця наших поглядів не була остільки великою, щоб ми не могли розуміти один одного, але достатня, щоб викликати змістовні й цінні наслідками наукові суперечки.

Різноманітність знаннів і широчінь інтересів Григорія Олексійовича завжди дивували мене, але найдивнішою була специфічна особливість його таланту, що виявлялася в надзвичайно влучних порівняннях, гострих дотепністю зауваженнях, завдяки яким бесіда з ним набувала виключної привабливости й чарування.

На жаль, перебування Григорія Олексійовича в Німеччині було дуже недовгочасне, бо ще на весні 1903 року він став хворіти на легені, і це примусило Григорія Олексійовича виїхати раніш, ніж він успів закласти міцний фундамент для своїх математичних плянів та мрій.

Григорій Олексійович Грузинцев (1880 — 1929)

Лише 1907 року здоров'я й обставини дозволили Григорію Олексійовичу здати екстерном державні іспити, після чого проф. Пшеборський та Синцов залишили його при університеті готуватися на професора. 1910 року він витримав усний маґістерський іспит і його зарахували приват-доцентом з математики при Харківському університеті. Тоді ж Григорія Олексійовича обрали на професора вищих жіночих курсів, але більшу частину свого часу він був змушений віддавати лекціям в середній школі, де ім'я його було дуже популярним. Отже сталося так, що більшість уваги Григорія Олексійовича повернулася на викладання елементарної математики і цим, почасти, доводиться з'ясовувати його повільний перехід з галузі математики в бік методології та логіки, проти якого я часто протестував, висловлюючи жаль на те, що він не доводив до кінця своїх цікавих дослідів з теорії функцій комплексної змінної. Першими роками приватдоцентури, поруч з декількома роботами з теорії функцій і доповідями з методики математики та основ геометрії, з яких частина була надрукована в „Сообщениях Харьковского Математического О-ва", а інші в „Трудах 2-го с'езда преподавателей Математики" 1912 року в Москві, він почав велику роботу „Введение в теорию однозначных аналитических функций, имеющих особенные линии". Щоб закінчити цю роботу, Григорій Олексійович дістав, нарешті, 1914 року довготермінову командировку за кордон. Але, ледве він виїхав, почалася світова війна і замість Німеччини йому довелося їхати до Італії. Це було на користь його здоров'ю, але умови для роботи уп'ять, як виявилося, були несприятливі. Через властиве йому поривання широко охопити, Григорій Олексійович не вдовольнявся окремими частинними результатами, які він міг би тоді ж опублікувати; але загальної синтези й систематичної побудови теорії функцій комплексної змінної на основі визначень єдиного типу, що цілком обумовлюються множиною особливостей тієї функції, яку вивчають, про які він мріяв, він не довів до кінця. З часом, коли почалася революція, незадовго до якої Григорій Олексійович повернувся, в математичній роботі його, як і всіх нас, стався деякий розрив, і вона поновилася пізніше в Дніпропетровському, куди він переїхав 1918 року. Разом з тим значно складніше стало для нього діставати закордонну літературу, тому його роботи з теорії функцій комплексної змінної, з галузі, що має щоденні успіхи на Заході, відходять на останню чергу, і ті фраґменти дослідів Григорія Олексійовича в цьому напрямі, що осталися після його смерти і які ще цілком я не розібрав, мають, за рідкими винятками, більш ніж 10-літню давність. Григорій Олексійович мав дужчий нахил до загальної синтези, ніж до розв'язання частинних математичних задач, хоч він і мав здатність на це й умів цінити й почувати чарівність ізящних формул; в шуканнях достатньо загального фундаменту для своїх дослідів, про які я вище згадував, він все глибше поринав у теорію множин (ансамблів).

Питанням теорії множин, почасти основ геометрії і особливо формальної логіки й теорії науки, тобто методології, присвятив він останні роки свого життя, віддаючи також багато часу і решту своїх сил викладанню та громадській роботі.

Далі перераховано всі друковані праці Григорія Олексійовича. Але багато залишилось після нього, з них деякі цілком готові до друку, і я сподіваюсь, що їх пощастить надрукувати ближчим часом. Порівнюючи рання смерть і тяжка фізична хвороба перешкодили таланту Григорія Олексійовича розгорнутися повною мірою, але для всіх, хто знав його особисто, образ Григорія Олексійовича останеться назавжди як незабутній зразок гострої і невтомної мислі й живої, чутливої душі.

С. Бернштейн

ГРИГОРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ГРУЗИНЦЕВ

(Некролог)

22-го августа 1929 года после долгой и мучительной болезни скончался проф. Днепропетровского Инст. Нар. Образ. Григорий Алексеевич Грузинцев.

Его воля к жизни и творчеству, несмотря на давно безнадежно разрушенное здоровье, так упорно боролась с неизлечимой болезнью, что весть о его смерти все таки поразила неожиданностью всех его многочисленных друзей и коллег.

Григ. Алекс. родился в декабре 1880 года. Отец его, Алекс. Петр. Грузинцев, был прив.-доцентом, а впоследствии проф. физики в Харьковском университете, и под его руководством Григ. Алекс. очень рано заинтересовался математикой и физикой и получил значительное общее научное развитие. В 1898 году, по окончании 1-ой харьковской гимназии, Григ. Алекс. поступил на математическое отделение физико-математ. факультета Харьковского университета, где его блестящая индивидуальность сразу обратила не себя внимание профессоров и, в частности, проф. В. А. Стеклова, так что научная будущность его, казалась, обеспечена. Однако занятия наукой не помешали Григ. Алекс. увлечься бурно пробуждавшимся в то время революционным движением и принимать самое деятельное участие в студенческих волнениях и забастовках. В результате, он был уволен из университета в 1901 г. без права поступления. В 1902-м году ему удалось поехать за границу, в Геттинген, и здесь я впервые встретился с ним. Совместное посещение лекций Klein'a, Hilbert'a, Minkowski'ого и общность научных интересов сблизили нас с первых же дней. В дальнейшие годы, особенно в течение 10 лет после моего переезда в Харьков в 1908-м году и до его от'езда в Днепропетровск в 1918-м году, мы были с Григ. Алекс. в постоянном общении, значение которого для нас обоих вытекало из того, что различие наших воззрений было не настолько велико, чтобы мы не могли понять друг друга, но достаточно, чтобы вызывать содержательные и плодотворные научные споры.

Разнообразие знаний и широта интересов Григ. Алекс. всегда поражали меня, но удивительнее всего была специфическая особенность его таланта, проявлявшаяся в необычайно метких сравнениях и остроумных замечаниях, благодаря которым беседа с ним приобретала исключительную прелесть и очарование.

К сожалению, пребывание Григ. Алекс. в Германии было кратковременно, так как еще весной 1903 года у него начался процесс в легких, который заставил Григ. Алекс. уехать, прежде чем он успел заложить прочный фундамент своим математическим планам и мечтам.

Лишь в 1907-м году здоровье и обстоятельства позволили Григ. Алекс. сдать в качестве экстерна государственные экзамены, после чего проф. Пшеборский и Синцов оставили его при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1910 году он выдержал устный магистерский экзамен и был принят в число приват-доцентов по математике в Харьковском университете. В то же время Григ. Алекс. был избран проф. высш. женск. курсов, однако большую часть своего времени он вынужден был уделять урокам в средней школе, где имя его пользовалось большой популярностью. Таким образом, главное внимание Григ. Алекс. оказалось обращено на преподавание элементарной математики, и этим отчасти следует об'яснить его постепенный переход из области математики в сторону методологии и логики, против которого я часто протестовал, высказывая сожаление по поводу того, что он не доводил до конца своих интересных исследований по теории функций комплексной переменной. В первые годы приват-доцентуры, наряду с несколькими работами по теории функций и докладами по методике математики и основам геометрии, из которых часть была напечатана в „Сообщ. Харьк. Мат. О-ва“, а другие в „Трудах 2-го с'езда преподавателей математики“ 1912 года в Москве, он начал большую работу „Введение в теорию однозначных аналитических функций, имеющих особенные линии“. Для окончания этого сочинения Григ. Алекс. получил, наконец, в 1914-м году длительную заграничную командировку. Но едва он выехал, как началась мировая война, и вместо Германии ему пришлось направиться в Италию. Это было полезно для его здоровья, но условия для работы опять оказались неблагоприятными. В виду свойственного ему стремления к широкому охвату, Григ. Алекс. не удовлетворялся отдельными частными результатами, которые он мог бы тогда же опубликовать, но общего синтеза и систематического построения теории функций комплексной переменной на основе выражений единого типа всецело определенных совокупностью особенностей рассматриваемой функции, о которых он мечтал, он не довел до конца. В дальнейшем, с наступлением революции, незадолго до которой Григ. Алекс. возвратился, математическая работа его, как и всех нас, претерпела некоторый разрыв и возобновилась позднее в Днепропетровске, куда он переехал в 1918-м году. Вместе с тем значительно усложнилось для него получение иностранной литературы, поэтому работа по теории функций комплексной переменной, области, которая делает ежедневные успехи на Западе, отходит у него на задний план, и оставшиеся после его смерти еще не вполне просмотренные мною фрагменты исследований Григ. Алекс. в этом направлении обладают, за редкими исключениями, более чем 10-летнею давностью.

Решению частных математических задач Григ. Алекс., хотя и способен был на это и умел ценить и чувствовать прелесть изящных формул, все же предпочитал общий синтез, и в поисках за достаточно общим фундаментом для своих вышеупомянутых изысканий он все глубже погружался в теорию множеств.

Вопросам теории множеств, отчасти основам геометрии и, в особенности, формальной логике и теории науки, т. е. методологии, посвятил он последние годы своей жизни, отдавая также много времени и остаток своих сил преподаванию и общественной работе.

Дальше перечислены все печатные труды Григ. Алекс. Но много рукописей осталось после него, из которых некоторые вполне готовы к печати, и я надеюсь, что их удастся напечатать в ближайшее время. Сравнительно ранняя смерть и тяжелый физический недуг помешали таланту Григ. Алекс. развернуться в полной мере, но для всех, знавших его лично, образ Григория Алексеевича останется навсегда незабываемым воплощением острой и неутомимой мысли и живой, чуткой души.

С. Бернштейн

ПЕЧАТНЫЕ ТРУДЫ Г. А. ГРУЗИНЦЕВА

1) Un théorème sur les fonctions continues 4 стр. (Сообщения Харьковского Мат. О-ва 1910 г.).

2) Об одном линейном функциональном уравнении. (Сообщения Харьковского Мат. О-ва 1913 г.). 17 стр.

3) Об одном типе свойств точечных ансаблей (Уч. Зап. Научн.-Исслед. Каф. Отд. Мат. 1924, вып. I 50 — 63).

4) О различных мерах точечных ансаблей. (Наук. Зап. Наук Досл. Каф. Укр., вып. II, 1926 г., стр. 11 — 21).

5) Понятие отношения и аксиоматическое определение числа (Зап. Днепр. ИНО, т. I, 1926, стр. 25 — 43).

6) Аксиомы и теоремы. 5 стр. (Нар. Энциклопед. Харьк. О-ва Грамотности).

7) О преподавании тригонометрии. 9 стр. (Сообщ. Харьков. Матем. О-ва. 1911 г.).

8) Вращение и понятие угла. 23 стр. (Труды комиссии по Мат. образов. при Екатер. Отд. ВУКАИ. Вып. I).

9. Элементы теории множеств. 1924. Днепропетровск. (Монография).

10. О последовательном изменении переменных. 1927.

11. Очерки по теории науки. 1927.

С. БЕРНШТЕЙН

Про монотонні функції

1. З боку практичного найбільш важливою якісною властивістю функції дійсної змінної навколо завданої точки є характер її змін, що відповідає досить малій зміні незалежної змінної.

Відомо, що сучасна аналіза легко будує функції $\varphi(x)$, що вони не є ні ростучі, ні спадні в усякому інтервалі, який би малий він не був.

Але взагалі ми спостерігаємо не самі значіння функції — припустімо, для визначености, що вони є додатні — а пересічні цих значінь, що відповідають дуже великій кількості значінь навколо x. Отже, наприклад, якщо прийняти закон похибок Гавса з параметром точности σ, функція $f(x)$, що ми її спостерігаємо, замість $\varphi(x)$ матиме вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+\frac{xy}{2\sigma^2}}dy;$$

отже ця функція $f(x)$ є аналітична, визначена добутком експоненціяльної функції Гавса на функцію абсолютно конвексну, тобто таку, що всі її похідні парних порядів будуть додатні.

З другого боку, числені часто вживані функції, зокрема поліноми, що правлять за основу теорії функцій, мають ту властивість, що дійсну вісь можна розкласти на певні інтервали, в яких всі похідні є монотонні.

Ось головні міркування, що вказують на значіння систематичного вивчення тих функцій реальної змінної, послідовні конечні ріжниці яких до $h+1$ включно зберігають незмінним свій знак в даному інтервалі.

Легко показати, що така функція має неперервні похідні включно до $h-1$ порядку та праві та ліві похідні порядку h, при чому всі ці похідні монотонні. В моїй книжці „Sur les propriétés extrémales etc...“ я довожу, що при безконечному h така функція повинна бути аналітичною у відповідному інтервалі; функції такого роду я називаю реґулярно-монотонними Я нагадаю, що, як це встановлено в тій же книжці, коли функція має безліч монотонних похідних, що їх порядки збільшуються не швидше од членів деякої аритметичної проґресії,— то функція буде аналітичною та, крім того, при будь-якому зростанні порядків похідних,— функція належить до кляси quasi-аналітичних функцій P, що вони, як відомо, мають значні аналогії з аналітичними функціями.

2. Але зараз я не маю на меті зупинятись на цих, більш загальних функціях, і обмежуюся лише коротеньким оглядом найбільш істотних моментів теорії реґулярно-монотонних функцій.

Альґебрична база цієї теорії полягає в вивчанні екстремальних властивостей поліномів, кількість послідовних похідних яких зберігає певні знаки в заданому інтервалі. Аналітична частина теорії трактує проблеми збіжности, аналітичного визначення, природу особливостей тощо. Крім того, як на важливе застосування теорії я вкажу ще на задачі сумовання Тейлорових рядів з радіюсом нуль за умови, що функція є реґулярно-монотонна навколо заданої точки.

Реґулярно-монотонні функції, що мають багато загальних властивостей, істотно розрізняються типами, до яких вони належать.

3. З реґулярно-монотонних функцій важливіші в багатьох відношеннях є функції абсолютно-монотонні, що всі їх похідні одного знака; зміною x на $-x$ до цих функцій приводяться також функції з чергуванням знаків послідовних похідних.

Саме цей тип є єдиний, що для нього може зберігатись реґулярна монотонність аж до безконечности. Майже очевидно, що правий кінець b відтинку абсолютної монотонности ab функції $f(x)$ є особлива точка для $f(x)$, між тим як радіюс збіжности в точці a дорівнюється довжині всього відтинку ab. Отже, коли відтинок абсолютної монотонности доходить до $+\infty$, функція буде ціла; якщо ж, навпаки, лівий кінець цього відтинку доходить до $-\infty$, то $f(x)$ буде голоморфна в півплощині, що міститься зліва від перпендикуляра до дійсної осі в точці b. Не зупиняючись на деталях, — зацікавлені знайдуть їх в моєму мемуарі в Acta Mathematica, t. 52, — я зазначу, що тут відограють основну ролю експоненціяльні поліноми з додатніми покажчиками та коефіцієнтами, тому що всі задачі на екстремум, щодо функцій абсолютно-монотонних на від'ємній півосі, розв'язуються за допомогою таких поліномів.

Ось, наприклад, якщо задано будь-яку парну (для визначености) кількість $2h$ додатніх констант $f(0), f'(0), \dots f^{(2h-1)}(0)$, то доконечна й достатня умова існування функції, абсолютно-монотонної до $-\infty$, полягає в тому, щоб 1) детермінанти Вронського

$$A_{2k}(0)=\begin{vmatrix} f(0), & f'(0) \dots & f^{(k)}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)}(0), & f^{(k+1)}(0) \dots & f^{(2k)}(0) \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad A_{2k+1}(0)=\begin{vmatrix} f'(0) \dots & f^{(k+1)}(0) \\ \dots & \dots \\ f^{(k+1)}(0) \dots & f^{(2k+1)}(0) \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad (1)$$

були б не від'ємні для будь-якого $k < h$ та 2) коли $A_n = 0$, то було б також $A_{n'} = 0$ для всіх $n' > n$.

Саме за цих умов диференціяльне рівнання $A_{2h}(x) = 0$, загальний інтеґрал якого є експоненціяльний поліном, має за частинний розв'язок такий експоненціяльний поліном $\varphi_{2h}(x)$ з додатніми коефіцієнтами та покажчиками, який набирає заданих початкових значінь. Цей поліном $\varphi_{2h}(x)$ для $x \leqq 0$ є найменший серед всіх абсолютно-монотонних до $-\infty$ функцій, що відповідають тим саме початковим значінням. Крім того, якщо $A_{2h-1} = 0$, тобто, коли підстанова $f(0) - \varepsilon$ замість $f(0)$ порушує рівності (1) за будь-якого малого $\varepsilon > 0$, тоді $\varphi_{2h}(x)$ є єдина абсолютно-монотонна функція, що відповідає заданим початковим значінням. Ці властивості зберігаються, коли h необмежно зростає. І легко пересвідчитись, що які б не задати константи, аби вони вдовольняли безліч нерівностей (1), завжди існує абсолютно-монотонна функція з заданими похідними. Крім того, вибираючи такі $f(0)$, щоб $f(0)-\varepsilon$ вже не задовольняли б ці нерівності за довільно малого $\varepsilon > 0$, ця сукупність умов визначає єдину абсолютно-монотонну функцію, як би швидко не зростали послідовні похідні $f^{(n)}(0)$.

4. Якщо $f(0), f'(0) \ldots f^{(n)}(0)$ не вдовольняють зазначеним нерівностям, завжди можна, й притому безліччю способів, добрати такі числа $F_1^{(n)}(0)$ та $F_2^{(n)}(0)$, що вони, задовольняючи умови абсолютної монотонности до $-\infty$, задовольняють також і рівності $F_1^{(n)}(0) - F_2^{(n)}(0) = f^{n}(0)$ (для $n = 1,2 \ldots$).

Таким чином, оскільки експоненціяльні поліноми, що ми їх розглядали вище, мають за границю інтеґрали Stieltjes'а

$$\int_0^\infty e^{zx} d\varphi(z),$$

де $\psi(z)$ є монотонна функція, то будь-який Тейльорів ряд з конечним або нулевим радіюсом можна визначити в формі такого інтеґрала, де $\psi(t)$ повинна бути функцією обмеженої варіяції. Щоб зробити задачу визначеною, можна дбати про мінімалізацію суми $\sum_{k=0}^{n} a_k F_1^{(k)}(0)$, де додатні константи a_k будуть, наприклад, більші за $\frac{1}{k^{2k}}$; якщо цей мінімум одночасно з $\sum a_k f^{(k)}(x)$ наближається до певної границі, коли $n \to \infty$, то таким способом дістанемо цілком певну функцію $F_1(x) - F_2(x)$, незалежну від констант a_k.

5. Не зупиняючись на зв'язку проблем, що ми їх розглядали, з проблемою моментів та іншими питаннями аналізи, я б хтів дещо зауважити про абсолютно-монотонні функції на деякому обмеженому відтинку. Підставляючи $\log(x_1 + c)$ замісць x з (1), можна безпосередньо дістати умови доконечні та достатні для того, щоб задані для $x = 0$ значіння похідних могли б правити за початкові значіння похідних від поліномів виду $\sum A_i(x+c)^{a_i}$, де $A_i \geqslant 0$, $a_i \geqslant 0$. Але для того, щоб функція була абсолютно-монотонна на відтинку $(-c, 0)$, треба й досить, щоб до того a_i були б ще й цілі.

В цьому виявляється аритметична природа задачі. Я не знайшов ще остаточної форми тих доконечнихт а достатніх за будь-якого n_i нерівностей, яким повинні вдовольняти послідовні похідні для того, щоб існували функції абсолютно-монотонні на відтинку $(-c, 0)$. В вищезазначеному мемуарі в Acta Mathematica я даю лише алгоритм, для якого треба тільки аритметичні операції, і який дозволяє в кожному окремому випадку поступово вирішити, чи припустимо введення подальшої похідної, а також визначити поліном, який розв'язує відповідну екстремальну задачу. Крім того, я даю також методу визначення найбільшого відтинку, що на ньому функція може бути абсолютно-монотонною. Цікаво зауважити, що тимчасом як при $c = \infty$ нові визначення коефіцієнтів та покажчиків зазначених вище експоненціяльних поліномів приводять нас до альґебричних рівнань все вищого та вищого степеня,— для c конечного треба розв'язати деяку систему лінійних рівнань, з яких можна було б скористатися для наближеного розв'язання алґебричних рівнань вищого степеня відповідних $c = \infty$.

В тому напрямі ідей я ще зазначу низку альґебричних проблем про екстремальні властивості многократно-монотонних поліномів порядку $h + 1$, тобто з першими $h+1$ додатніми похідними. Цікаво, наприклад, побудувати поліном виду

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$

многократно-монотонний порядку $h+1$, що найбільш відхиляється від нуля. Розв'язавши цю задачу та дослідивши її (для випадку $h=0$ цю задачу дослідив ще Чебишов), я знайшов співвідношення між максимумом (M) полінома та мінімумом (N) його похідної, а саме я знайшов, що

$$\frac{N}{M} = o\left(\frac{n^2}{h}\right).$$

При розв'язанні цих питань виразно визначається роля Якобієвих поліномів, і мої учні Бржечка та Геронімус з успіхом застосували мої методи до розв'язання інших питань з цієї галузі.

7. В загальному випадку, функція реґулярно-монотонна на (a, b) характеризується безліччю типових чисел $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$, що мають властивість:

$$f^{(i-1)}(x) \cdot f^{(i)}(x) \geqslant 0, \text{ коли } i \leqslant \lambda_1,$$
$$f^{(i-1)}(x) \cdot f^{(i)}(x) \leqslant 0, \text{ коли } \lambda_1 < i \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_2$$

і т. д. Послідовність похідних зі спільним знаком зватимемо permanence, а послідовність з чергуванням знаків похідних зватимемо alternance. Отже походні permanance'у зростають на абсолютне значіння зліва направо, тимчасом як абсолютні значіння похідних alternance'у спадають. Поклавши

$$P_{2k-1} = P_{2k} = \lambda_1 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{2k-1},$$
$$Q_{2k} = Q_{2k+1} = \lambda_2 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_{2k},$$

так що

$$P_m + Q_m = \sigma_m = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$$

за будь-якого m, легко довести, що

$$|f^{(\sigma_m)}(x)| < \frac{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_m!}{(x-a)^{P_m}(b-x)^{Q_m}} |f(x)|. \tag{2}$$

Ці нерівності стосуються тільки до похідних порядку σ_m, що вони стоять з початку permanence'у або alternance'у. Для похідних інших порядків є правильні аналогічні нерівності

$$|f^{(m)}(x)| < \frac{\lambda_1! \lambda_2 \ldots \lambda_m! k!}{(y-a)^{P_m}(b-y)^{Q_m}(y-x)} |f(y)|, \tag{2 bis}$$

де $0 < k < \lambda_{m+1}$, а y береться довільно з інтервалу (a, x) або (b, x) залежно від того, чи належить $f^{(m)}(x)$ до alternance'у, чи до permanence'у. Відсіль виходить, що функція реґулярно-монотонна на відтинку (a, b) буде не тільки аналітичною на ньому, але й цілою, якщо тільки зростання чисел λ_m не буде дуже швидким, і, зокрема, досить щоб $\frac{\lambda_n}{\sigma_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

8. Розгляд нерівности (2) наводить на думку, що тип монотонности, який найдужче обмежує зростання послідовних похідних, відповідає випадку, коли всі $\lambda_i = 1$. Тоді при періодичності знаків послідовних похід-

них такій саме, як у $\sin x$ на відтинку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — решта нерівностей (2 bis) вже буде зайва. Далі ми ще повернемось до точнішого дослідження цієї кляси функцій (я називаю їх циклічно-монотонними); ця кляса функцій, що є до певної міри антиподом до кляси абсолютно-монотонних функцій,— містить в собі тільки цілі функції роду не вище першого; в цій клясі розв'язок найважливіших екстремальних задач здійснюють тригонометричні функції. Але раніш я хочу вказати на деякі загальні результати щодо розташування особливостей будь-якої реґулярно-монотонної функції. Перш за все функція реґулярно-монотонна на (ab), до якого б типу вона не належала, буде голоморфна внутрі кола, для якого (ab) править за діяметр.

Це твердження постає у наслідок більш загальної теореми, в формулювання якої входить одне ґрунтовне поняття з загальної теорії Тейльорових рядів, що його я повинен поперва нагадати.

За клясичною теоремою Hadamard'а радіюс збіжности $R(x)$ в точці x для функції $f(x)$ визначається формулою

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Кажуть, що похідні утворюють характеристичну послідовність, коли

$$\lim \sqrt[P_n]{\left|\frac{f^{P_n}(x)}{P_n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Після цього, використовуючи, з одного боку, формулу[1]) з теорії найкращих наближень, аналогічну до зазначеної вище формули Hadamard'а, а з другого боку, з нерівности[2]) щодо найкращих наближень функції зі сталим знаком її похідної $n+1$-го порядку поліномами n-го степеня — легко дістаємо таку теорему:

Теорема. Якщо можна утворити в точці x характеристичний ряд з похідних таких, що вони всі належать до pertanance'ів, то коло збіжности в цій точці проходить через одну дійсну особливу точку $z \geqslant b$ функції $f(x)$; якщо ж можна утворити характеристичну послідовність тільки з похідних, що належать до alternance'ів, то коло збіжности для точки x проходить через дійсну особливу точку $z_1 \leqslant a$.

Отже коли функція реґулярно-монотонна на деякому заданому відтинку не буде цілою, то вона має принаймні одну дійсну особливу

---

[1])
$$\sqrt[n+1]{E_n(f(x))} = \frac{b-a}{\varrho},$$

де ϱ є сума осей еліпса, що для нього кінці відтинку b та a правлять за фокуси, та який проходить найближче до особливої точки функції $f(x)$.

Дивись вищеназвану мою книжку, стор. 113.

[2])
$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} < E_n\left(f(x)\right) < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

де

$0 < N < f(x) < M$, коли $a \leqslant x \leqslant b$ (Ibid., стор. 10).

точку. Тоді на відтинку ab завжди існує точка ξ така, що її коло збіжности C містить в своїй середині всі кола збіжности, відповідні всім точкам ab. Коли ξ є внутрішня точка,— функція неминуче має дві дійсних особливі точки. Крім того, реґулярну монотонність функції $f(x)$ очевидно не можна порушити приєднанням довільних особливостей поза максимальним колом збіжности (C). Отже, не можна нічого сказати про особливості реґулярно-монотонної функції поза цим колом. Я ще зауважу, що правий кінець b відтинку монотонности може бути особливою точкою лише тоді, коли permanence'и становляться остільки довгими, що

$$\lim \frac{\lambda_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} = 1\,; \tag{3}$$

так само й точка a може бути особливою лише тоді, коли

$$\lim \frac{\lambda_{2k}}{\sigma_{2k}} = 1. \tag{3 bis}$$

Отже, видно, що крім випадку абсолютної монотонности, що його ми розглянули вище, — типи реґулярної монотонности, припустимі навколо особливої точки, дуже обмежені; і коли для визначености візьмемо за особливу точку т-ку b, то для того, щоб проблема сумовання відповідного розбіжного Тейльорового ряду реґулярно-монотонними функціями могла мати розв'язок, треба, щоб знаки послідовних похідних вдовольняли закону (3).

Крім того, в цьому випадку майже абсолютної монотонности, сумовання, коли воно можливе, можна провести звичайним групуванням членів Тейльорового ряду в точці b, а саме таким, щоб кожна група починалась деяким членом alternance'у.

За цих умов, користуючись з залишка $R(x)$ в Lagrange'вій формі, видно, що, коли існує функція реґулярно-монотонна на ab, то після зазначеного групування

$$\left| R(x) \right| < \frac{(b-x)^n}{n!} \left| f^{(n)}(x) \right| < \frac{(b-x)^n}{n!} \left| f^{(n)}\!\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|; \tag{3}$$

отже цей залишок наближається до нуля для $\frac{a+b}{2} < x < b$, а ряд збігається в цьому інтервалі так само, як і всі його похідні. Ясно, що в цьому випадку не можна мати більш як одну реґулярно-монотонну функцію, яка б мала задані похідні в точці b; крім того, тут доцільно зауважити, що функція $f(x)$ буде quasi-аналітичною на всьому відтинку ab, включаючи кінці.

9. Раніш, ніж закінчити, я б хтів зупинитися ще на деяких типових екстремальних задачах, зв'язаних з нашою теорією.

Розглянемо спочатку дві такі альґебричні задачі протилежної природи, що мають за розв'язок поліноми, аналогічні Bernoulli'євим та Euler'овим поліномам, при чому за границі цих полиномів правлять тригонометричні функції.

1. Визначити поліном:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!}\, p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n \tag{4}$$

що найбільш відхиляється від нуля на відтинку $(0, 1)$ коли він, а також і кожна з його похідних до $(n-1)$-го порядку включно, обертаються на нуль на відтинку $(0, 1)$ принаймні один раз.

2. Визначити циклічно-монотонний на відтинку $(0, 1)$ поліном виду (4), що він найменш відхиляється від нуля на цьому відтинку.

Легко переконатись в тотожності поліномів, що розв'язують ці обидві задачі; обидва полінома визначено тим, що їх послідовні похідні дорівнюють нулеві то на одному, то на другому кінці відтинку $(0, 1)$. Отже розв'язок першої задачі здійснюється так само циклічно-монотонним поліномом.

І от поліноми, що ми їх шукаємо, будуть такі:

$$P_1 = x,\ P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

та взагалі

$$P_{2k}(x) + \int_1^x P_{2k-1}(x)\,dx,\ P_{2k+1}(x) = \int_1^x P_{2k}(x)\,dx;$$

відсіль легко виявити, що

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \ldots + \frac{E_{n-h}\,x^n}{(n-\lambda)!\,h!} + \ldots + \frac{E_n}{n!} = \frac{1}{n!}(x+E)^n,$$

де E_n є Euler'ові числа, що дорівнюються нулеві, коли n парне; тому $P_n(x)$ завжди є функція або парна, або непарна. Коли n парне, $n = 2k$, максимальний ухил, що його шукаємо, є

$$L_n = \left|\frac{E_{2k}}{2k!}\right| \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}.$$

Зазначу, що знайдені поліноми дуже просто зв'язані з Euler'овими поліномами, бо вони справджують рівняння

$$\frac{1}{2}\left[P_n(x+1) + P_n(x-1)\right] = \frac{x^n}{n!}$$

Отже з Euler'ових поліномів $E_n(x)$ дістанемо наші за формулою

$$P_n(x) = \frac{2^n}{n!}\,E_n\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Якщо $n = 2k+1$, маємо

$$L_n = \frac{2}{(2k+1)!}(1+E)^{2k+1} = \frac{E_{2k}}{2k!} + \frac{E_{2k-2}}{3!(2k-2)!} + \ldots \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\Big[1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \ldots\Big] = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}$$

10. Поліноми $P_n(x)$ тепер дають змогу розв'язати аналогічну задачу не тільки для поліномів, але й для довільних циклічно-монотонних функцій.

А саме, можна довести такі теореми.

Якщо функція та всі її похідні принаймні один раз обертаються на нуль на відтинку $(0, 1)$ а сама функція на відтинку $(0, 1)$ досягає значіння, то її похідна заданого порядку m неминуче доходить $\left(\frac{\pi}{2}\right)^m$, на абсолютне значіння, і лише похідні функцій $\sin\frac{\pi x}{2}$ та $\cos\frac{\pi x}{2}$ не переходять цього значіння. Також, коли циклічно-монотонна функція не переходить на цьому відтинку одиниці, її похідні порядку, для визначености непарного, $m = 2k - 1$, не переходять $\frac{(m+1)!}{E_{m+1}}$, і цього значіння (що асимптотично дорівнює $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+2}$) дійсно доходять лише $f(x) = P_{m+1}(x)$. Отже тепер цілком чітко визначається, що з усіх типів реґулярної монотонности саме циклічна монотонність найдужче обмежує модулі послідовних похідних, при чому з останнього результату виходить, що функція циклічно-монотонна на відтинку (0, 1) мусить бути цілою і степеня не вище $\frac{e\pi}{2}$.

Крім того, легко довести, що довільну цілу функцію степеня p завжди можна визначити ріжницею двох циклічно-монотонних функцій на будь-якому відтинку, коротшому за $\frac{2p}{e\pi}$, але на відтинку довшому цього вже зробити не можна.

Закінчуючи, я додам, що поняття про тип в заданій точці, що ми його вище запровадили, відограє значну ролю й тоді, коли немає певного інтервалу реґулярної монотонности: множина нулів послідовних похідних має задану точку за граничну. Згущення нулів цієї множини, яка зростає разом з модулями послідовних похідних, залежить також від їх знаків; це згущення зменшується, коли збільшуються типові числа.

RÉSUMÉ

Le présent travail est la traduction de la conférence faite au Congrès nternational des Mathématiciens à Bologne au mois de septembre 1928 sous e titre „Sur les Fonctions monotones".

Sur la variation minimale du polynome $P_n(x)$ monotone dans l'intervalle $(-1,+1)$ dont les derivées $P_n'(1)=a^2=a$, $P_n''(1)=b$ sont donnés

(Resultat du travail collectif de la Section de mathématiques appliquées de l'Institut des sciences Mathématiques d'Ukraine, effectué par *M. M. S. Bernstein, W. Brecka, B. Rymarenko*)

Il est connu, que chaque polynôme monotone du degré impair $n = 2m+1$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ peut être présenté sous la forme

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]dx, \tag{1}$$

ou $U(x)$ est un polynôme de degré m, $V(x)$ un polynome de degré $m-1$, en supposant, sans restreindre la généralité, que $P_n(-1)=0$, car tout polynome non négatif dans l'intervalle $(-1, +1)$ de degré pair $2m$ peut être mis sous la forme [1])

$$U^2(x) + (1-x^2)\,V^2(x).$$

Ainsi le problème consiste dans la recherche du minimum de

$$P_n(1) = \int_{-1}^{+1} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]dx, \tag{2}$$

que nous pouvons désigner par L_n sous la condition, que

$$U^2(1) = a = a^2,\ 2U'(1).a - 2V^2(1) = b. \tag{3}$$

Nous introduisons une variable auxiliaire $U'(1) = d$, qui doit satisfaire seulement aux conditions, que

$$2d.a - b = 2V^2(1) \geqslant 0.$$

En cherchant le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} U'(x)\,dx$$

sous les conditions, que $U(1) = a$, $U'(1) = d$, nous trouvons que ce minimum est

$$I_n = \frac{8}{m^2(m+1)^2(m+2)^2}[a^2m^2(m+2)^2 - 6adm(m+2) + 12d^2]. \tag{4}$$

[1]) Pólya und Szegö.— Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. B. II. Seite 82, Aufg. № 47.

D'autre part le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)\, V^2(x)dx,$$

sous la condition $V^2(1) = ad - \frac{b}{2}$, a pour valeur

$$G_n = \frac{8\,(2ad-b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}. \tag{5}$$

Ainsi

$$L_n = min \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[a^2m\,(m+2) - 4ad + \frac{12d^2}{m\,(m+2)} - b\right], \tag{6}$$

si nous prenons pour d seulement des valeurs, qui satisfont à la condition, que $2ad - b \geqslant 0$.

Mais

$$L_n = min \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[\frac{12}{m\,(m+2)} \left(d - \frac{am\,(m+2)}{6}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2a^2m\,(m+2)}{3} - b\right]. \tag{7}$$

Donc

$$L_n = \frac{16}{3\,(m+1)^2} \left[a^2 - \frac{3b}{2m\,(m+2)}\right], \tag{8}$$

si la valeur $d = \frac{am\,(m+2)}{6}$ est acceptable, c'est à dire, si

$$b \leqslant \frac{a^2m\,(m+2)}{3}.$$

Au contraire, si $b > \frac{a^2m\,(m+2)}{3}$, alors

$$L_n = \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[a^2m\,(m+2) + \frac{3\frac{b^2}{a^2}}{m\,(m+2)} - 3b\right] \tag{9}$$

que nous recevons en prenant la plus petite valeur $d = \frac{b}{2a}$ qui conduit a

$$G_n = V(x) = 0.$$

Les formules indiquées ne sont pas valables seulement pour $a = 0$. Pourtant dans ce cas nous trouvons directement, que

$$L_n = \frac{8(b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \tag{10}$$

qui rentre comme cas particulier dans la formule (8).

En passant aux formules asymptotiques, nous voyons, que si $\frac{b}{a} = k = Am^\delta$, alors

$$L_n \sim \frac{16a}{3(m+1)^2}\left[1 - \frac{3k}{2m^2}\right] \tag{11}$$

si $\delta < 2$, ou $\delta = 2$ et $A \leqslant \frac{1}{3}$, ou si $A \leqslant 0$.

Au contraire si $\delta = 2$ et $A \geqslant \frac{1}{3}$, ou $\delta > 2$ et $A > 0$, alors

$$L_n \sim \frac{8a}{(m+1)^2}\left(1 - \frac{3k}{m^2} + \frac{3k^2}{m^4}\right). \tag{11bis}$$

ПРО НАЙМЕНШУ ВАРІЯЦІЮ МОНОТОННОГО ПОЛІНОМА $P_n(x)$ В ІНТЕРВАЛІ $(-1, 1)$, ПОХІДНІ ЯКОГО ($P_n(1) = a = a^2$, $P_n''(1) = b$)

(Результат колективної праці С. Н. Бернштейна, В. Ф. Бржечки та Б. О. Римаренка на відділі прикладної математики Українського Інституту Математичних Наук)

Відомо, що всякий монотонний поліном непарного степеня $n = 2m+1$ в інтервалі $(-1, 1)$ можна написати так:

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]\,dx, \tag{1}$$

де $U(x)$ є поліном степеня m, а $V(x)$ — поліном степеня $m-1$, з додатком умови, яка не порушує загальности, що $P_n(-1) = 0$, бо кожний, не від'ємний в інтервалі $(-1, 1)$ поліном степеня $2m$ можна написати в формі [1]):

$$U^2(x) + (1-x^2)V^2(x).$$

Отже задача зводиться на те, щоб знайти найменше значіння

$$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]\,dx, \tag{2}$$

позначмо його через L_n, за умов, що

$$U^2(1) = a = a^2;\ 2U'(1)a - 2V^2(1) = b. \tag{3}$$

Уведімо допоміжний параметр $U'(1) = d$,— хай він лише вдовольняє умову

$$2ad - b = 2V^2(1) \geqslant 0$$

Обертаючи в мінімум інтеґрал

$$\int_{-1}^{+1} U^2(x)\,dx$$

за умов, що $U(1) = a$, $U'(1) = d$, знайдемо, що цей мінімум

$$I_n = \frac{8}{m^2(m+1)^2(m+2)^2}\left[a^2m^2(m+2)^2 - 6adm(m+2) + 12d^2\right]. \tag{4}$$

---

[1]) Polya u. Szegö.— Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis. B. II. S. 82, Aufg. № 47.

З другого боку, мінімум інтеґрала

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\,V^2(x)\,dx$$

за умови, що $V^2(1)=ad-\frac{b}{2}$ дорівнює

$$G_n=\frac{8\,(2ad-b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}. \tag{5}$$

Отже

$$L_n=\min\frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}\left[a^2m\,(m+2)-4ad+\frac{12d^2}{m(m+2)}-b\right], \tag{6}$$

якщо для d брати лише ті значіння, що справджують умову $2ad-b\geqslant 0$. Але

$$L_n=\min\frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}\left[\frac{12}{m(m+2)}\left(d-\frac{am\,(m+2)}{6}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2a^2\,m\,(m+2)}{3}-b\right] \tag{7}$$

А тому

$$L_n=\frac{16}{3\,(m+1)^2}\left[a^2-\frac{3b}{2m\,(m+2)}\right], \tag{8}$$

якщо значіння для $d=\frac{am\,(m+2)}{6}$ є можливе, тобто коли

$$b\leqslant\frac{a^2m\,(m+2)}{3}.$$

Навпаки, якщо $b>\frac{a^2m\,(m+2)}{3}$, то

$$L_n=\frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}\left[a^2m\,(m+2)+\frac{3\frac{b^2}{a^2}}{m\,(m+2)}-3b\right] \tag{9}$$

яке дістанемо, взявши найменше з припустимих значінь $d=\frac{b}{2a}$, що відповідає $G_n=V(x)=0.$

Зазначені формули не годяться лише для $a=0$, але в цьому разі безпосередньо знаходимо, що

$$L_n=\frac{-8\,(b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \tag{10}$$

Наведену формулу дістанемо як окремий випадок формули (8). Перейшовши до асимптотичних формул, пересвідчуємось, що коли $\frac{b}{a}=k=Am^\delta$, то

$$L_n\sim\frac{16a}{(m+1)^2}\left(1-\frac{3k}{2m^2}\right) \tag{11}$$

при $\delta < 2$ а також при $\delta = 2$, $A \leqslant \frac{1}{3}$, а також при $k < 0$;

коли ж $\delta = 2$ і $A \geqslant \frac{1}{3}$, а також, коли $\delta > 2$ і $A > 0$, то

$$L_n \sim \frac{8a}{(m+1)^2}\left[1 - \frac{3k}{m^2} + \frac{3k^2}{m^4}\right].$$

W. BRECKA et J. GUERONIMUS

Sur le polynome monotone qui s'écarte le moins de zéro sur le segment donné dans le cas où les valeurs de ses deux dérivées premières sont données aux extrémités opposées

Nous allons résoudre le problème suivant:

Déterminer l'oscillation minima dans l'intervalle $(-1, +1)$ *d'un polynome non décroissant*

$$y(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$$

de degré non supérieur à n, *si* $y'(-1) = a^2$, $y''(1) = b^2$.

§ 1

Soit

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, q(x)\, dx$$

où *toutes les racines de* $u(x)$ *se trouvent dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *et* $q(x)$ *n'a pas de racines dans cet intervalle*. On trouve facilement que

$$u'(-1) \neq 0, \quad u(1) > 0, \quad u'(1) > 0.$$

Nous voyons aussi que $q(x)$ *ne peut pas avoir la racine* $x = -1$, car alors on aurait $y'(-1) = 0$. Plus loin, si $q(x) = (1-x)\, s(x)$, alors

$$y''(x) = 2u(x)\, u'(x)\, (1-x)\, s(x) - u^2(x)\, s(x) + u^2(x)\, (1-x)\, s'(x)$$

et pour $x = 1$

$$y''(1) = -u^2(1)\, s(1) < 0$$

dons, $q(x)$ *ne peut non plus avoir la racine* $x = 1$.

Supposons que le degré de $q(x)$ *dépasse l'unité*. Alors on pourrait construire le polynome

$$\overline{y}(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, [q(x) - \lambda^2 (1+x)(c-x)]\, dx$$

où

$$c - 1 = \frac{2u^2(1)}{4u(1)u'(1) + u^2(1)} > 0$$

et λ est choisi de telle manière que

$$q(x) - \lambda^2 (1+x)(c-x) \geqslant 0$$

pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Alors $\bar{y}(x)$ satisfait à toutes les conditions de notre problème et $\bar{y}(1) < < y(1)$. Par conséquent le degré de $q(x)$ ne dépasse pas l'unité et nous avons

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)dx \quad \text{pour} \quad n = 2m+1$$

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(z \pm x)\,dx \quad (z > 1) \quad \text{pour} \quad n = 2m+2.$$

§ 2

Soit $n = 2m+1$. Nous devons donc minimer l'intégrale $L = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx$ sous les conditions que

$$u^2(-1) = a^2, \quad u(1)\,u'(1) = \frac{b^2}{2} \cdot$$

Posons

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

où $P_k(x)$ est le polynome de Legendre. Alors nous devons minimer

$$L = \sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1} \tag{1}$$

sous les conditions que

$$\left.\begin{aligned} u(-1) &= \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(-1) = a \\ u(1)\,u'(1) &= \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(1) \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k P_k'(1) = \frac{b^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les conditions d'extremum nous donnent

$$\frac{4a_k}{2k+1} = \lambda P_k(-1) + \mu\,[u'(1)\,P_k(1) + u(1)\,P_k'(1)] \tag{3}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2 \ldots m)$$

d'où

$$2L = \lambda a + \mu b^2 \tag{4}$$

Plus loin

$$4\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k = 4a = \lambda \sum_{k=0}^{m}(2k+1) + \mu\left[u'(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k + \right.$$

$$\left. + u(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k P_k'(1)\right]$$

$$4\sum_{k=0}^{m} a_k = 4u(1) = \lambda \sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k + \mu\left[u'(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1) + \right.$$

$$\left. + u(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k'(1)\right]$$

$$4\sum_{k=0}^{m} a_k P_k'(1) = 4u'(1) = \lambda \sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k P_k'(1) + \mu\left[u'(1)\sum_{k=0}^{m}(2k + \right.$$

$$\left. + 1)P_k'(1) + u(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)[P_k'(1)]^2\right]$$

ou autrement

$$\left.\begin{aligned} 4a &= \lambda A + \mu[Eu'(1) + Fu(1)] \\ 4u(1) &= \lambda E + \mu[Au'(1) + Bu(1)] \\ 4u'(1) &= \lambda F + \mu[Bu'(1) + Cu(1)] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1) = (m+1)^2 \\ B &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k(1)P_k'(1) = \frac{m(m+1)^2(m+2)}{4} \\ C &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)[P_k'(1)]^2 = \frac{m^2(m+1)^2(m+2)^2}{12} \\ F &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k(1)P_k'(-1) = \frac{(-1)^m m(m+1)(m+2)}{2} \\ E &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k = (-1)^m(m+1). \end{aligned}\right| \tag{6}$$

[Le calcul de A et E ne présente aucune difficulté. Pour calculer B et C nous utilisons la formule

$$\sum_{k=0}^{m} (2k+1)\, P_k^{(i)}(\xi)\, P_k^{(j)}(\xi) =$$

$$= \frac{(m+j+1)(m+i+1)\, P_m^{(i)}(\xi)\, P_m^{(j)}(\xi) + (1-\xi^2)\, P_m^{(i+1)}(\xi)\, P_m^{(j+1)}(\xi)}{i+j+1}$$ [1]

Enfin pour déterminer F on prend la formule de Christoffel

$$\sum_{k=0}^{m} (2k+1)\, P_k(x)\, P_k(y) = (m+1)\, \frac{P_{m+1}(x)\, P_m(y) - P_m(x)\, P_{m+1}(y)}{x-y}$$ [2]

En la differentiant par rapport à x et en posant ensuite $x=1$, $y=-1$, nous obtenons le résultat voulu].

Nous avons

$$u(1) = \frac{[\mu(AF-BE)+4E]\lambda}{\mu^2(B^2-AC)-8B\mu+16} \tag{7}$$

$$u'(1) = \frac{[\mu(CE-BF)+4F]\lambda}{\mu^2(B^2-AC)-8B\mu+16} \tag{8}$$

En faisant le produit de (7) et (8) nous trouvons

$$\lambda^2 = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{[\mu^2(B^2-AC)-8B\mu+16]^2}{[\mu(AF-BE)+4E]\,[\mu(CE-BF)+4F]} \tag{9}$$

En substituant $u(1)$ et $u'(1)$ dans la première équation (5) nous trouvons

$$\lambda = -\frac{4a\,[\mu^2(B^2-AC)-8B\mu+16]}{\mu^2 \begin{vmatrix} A & E & F \\ E & A & B \\ F & B & \end{vmatrix} + 8(AB-EF)\mu - 16A} \tag{10}$$

De (9) et (10) nous obtenons l'équation pour μ:

$$8\, \frac{[\mu(AF-BE)+4E]\,[\mu(CE-BF)+4F]}{\left\{\mu^2 \begin{vmatrix} A & E & F \\ E & A & B \\ F & B & C \end{vmatrix} + 8(AB-EF) - 16A\right\}^2} = \frac{b^2}{a^2} \tag{11}$$

---

1) J. Gueronimus.— Sur l'écart minimal quadratique d'un polynome de zéro dans un intervalle donné.
Communications de la Société Mathématique de Kharkow. Série 4, tome II, p. 17.

2) Journal für Mathematik.— Band 55. Seite 73.

Pour les grandes valeurs de m nous avons

$$A \sim m^2 \qquad B \sim \frac{1}{4} m^4 \qquad C \sim \frac{1}{12} m^6 \qquad E \sim (-1)^m m \qquad F \sim \frac{(-1)^m}{2} m^3$$

$$AF - BE \sim \frac{(-1)^m}{4} m^5 \qquad CE - BF \sim \frac{(-1)^{m+1}}{24} m^7 \qquad AB - FE \sim -\frac{m^6}{4}$$

$$\begin{vmatrix} A & E & F \\ E & A & B \\ F & B & C \end{vmatrix} \sim \frac{m^{10}}{48}$$

Alors l'équation (11) prend la forme

$$\frac{8\left(\frac{z}{4}+4\right)\left(2-\frac{z}{24}\right)}{\left(\frac{z^2}{48}+2z-16\right)^2} = \frac{b^2}{a^2} \tag{12}$$

où $z = \mu m^4$. De (10) nous trouvons $\lambda = \frac{4a}{m^2}$.
Donc

$$2L \sim \frac{4a^2}{m^2} + \frac{z_0 b^2}{m^4} \tag{13}$$

où z_0 est la plus petite racine positive de (12).

§ 3

Soit

$$\frac{b^2}{a^2} \sim cm^a \qquad \frac{8\left(\frac{z}{4}+4\right)\left(2-\frac{z}{24}\right)}{\left(\frac{z^2}{48}+2z-16\right)^2} \sim cm^a. \tag{14}$$

Alors, il faut distinguer trois cas.

$$\text{I. } a > 0. \quad z_0 = 16(\sqrt{12}-3) + \frac{k}{m^{a/2}}$$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\,ca^2}{m^{4-a}}.$$

Si $0 < a < 2$, alors le rapport du second membre au premier tend vers zéro. Par conséquent

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}$$

$$\text{Si } a = 2 \quad L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\,ca^2}{m^2} \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\,b^2}{m^4}.$$

Si $a > 2$, $4 - a < 2$, alors le rapport du deuxième membre au premier tend vers zéro et

$$L \sim \frac{8(\sqrt{12}-3)\,ca^2}{m^{4-a}} \sim \frac{8(\sqrt{12}-3)\,b^2}{m^4}.$$

II. $a = 0$. Alors de (14) nous trouvons z_0 (un nombre fini), et

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}$$

puisque le rapport du deuxième membre au premier tend vers zéro.

III. *Soit enfin* $a < 0$. Alors de (14) $z_0 = 48 - km^a$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{24ca^2}{m^{4-a}}.$$

Donc

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}.$$

Finalement pour $a < 2$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} \tag{15}$$

pour $a = 2$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\,b^2}{m^4}. \tag{16}$$

pour $a > 2$

$$L \sim \frac{8(\sqrt{12}-3)\,b^2}{m^4}. \tag{17}$$

Comparons notre problème avec celui de M. S. Bernstein où la derivée première seule est donnée [1]) (pour x = — 1) et avec le problème de M. W. Brecka où la derivée seconde est donnée [2]) (pour $x = 1$). Le calcul montre que dans le problème de M. S. Bernstein

$$\frac{b^2}{a^2} \sim 1$$

$$\text{donc } a = 0 \quad \text{et} \quad L \sim \frac{2a^2}{m^2} \qquad \text{selon (15)}$$

Dans le problème avec la derivée seconde le calcul montre que

$$\frac{b^2}{a^2} \sim C\,m^4$$

$$\text{donc } a = 4 \quad \text{et} \quad L \sim \frac{8(\sqrt{12}-3)\,b^2}{m^4} \qquad \text{selon (17)}$$

---

[1]) „Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle", professées à la Sorbonne par S. Bernstein., p. 47 — 50.

[2]) Comptes Rendus, t. 186, p. 1187.

§ 5

Supposons maintenant que

$$y'(-1)=0, \quad y''(+1)=b^2.$$

On prouve aisément que

$$y(x)=\int_{-1} u^2(x)\,dx \quad u(-1)=0, \text{ pour } \quad n=2m+1.$$

$$y(x)=\int_{-1}^{x} u^2(x)(1+x)\,dx \quad \text{pour} \quad n=2m+2.$$

Posons $n=2m+1$. Il faut minimer

$$L=\int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx$$

sous la condition que

$$u(-1)=0, \quad u(1)\,u'(1)=\frac{b^2}{2}.$$

Posons

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

où $P_k(x)$ est le polynome de Legendre.
Nous devons, donc, minimer

$$L=\sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1}$$

sous les conditions que

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k=0, \quad \sum_{k=0}^{m} a_k\cdot\sum_{k=0}^{m} a_k P_k'(1)=\frac{b^2}{2}.$$

Nous trouvons facilement que

$$L=\frac{\mu b^2}{2}$$

et

$$\left.\begin{aligned} 0&=\lambda A+\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)] \\ 4u(i)&=\lambda E+\mu\,[Au'(1)+Bu(1)] \\ 4u'(1)&=\lambda F+\mu\,[Bu'(1)+Cu(1)] \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où A, B, C, E, F ont les mêmes valeurs qne précédemment.
De (18) nous trouvons

$$\lambda=-\frac{\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)]}{A} \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned} 4Au(1)&=-\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)]\,E+A\mu\,[Au'(1)+Bu(1)] \\ 4Au'(1)&=-\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)]\,F+A\mu\,[Bu'(1)+Cu(1)] \end{aligned} \tag{20}$$

De (20) nous trouvons

$$\mu = \frac{4A}{AB - EF + \sqrt{(A^2 - E^2)(AC - F^2)}}$$

et en substituant les valeurs de A, B, C, E, F, on trouve finalement l'oscillation cherché

$$L = \frac{24b^2}{m(m+2)\left[3(m^2+2m-1) + 2\sqrt{3(m^2+2m-2)(m^2+2m)}\right]}.$$

Pour $n = 2m + 2$ on trouve

$$L = \frac{24b^2}{(m+1)(m+2)\left[3(m^2+3m+1) + \sqrt{3(2m^2+6m+1)(2m^2+6m+3)}\right]}.$$

Pour les grandes valeurs de m on a

$$L \sim 8b^2 \frac{\sqrt{12} - 3}{m^4}.$$

On peut obtenir cette formule de (16) en y posant $\alpha > 2$.

§ 6

Supposons maintenant que

$$y'(-1) = a^2, \quad y''(1) = 0.$$

Soit

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x) q(x)\, dx.$$

Il est clair que $u(1) = 0$ parce que $y''(1) = 0$.
Plus loin $q(-1) \neq 0$ parce que $y'(-1) = a^2 \neq 0$.
On démontre aisément que

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, dx, \quad u(1) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 2m + 1$$

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)\, dx, \quad u(1) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 2m + 2.$$

Supposons le contraire. Alors on peut construire le polynome

$$\bar{y}_n(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)^a \left[q(x) - \lambda(1+x)\right] dx$$

où $\lambda > 0$ est choisi de telle manière que

$$q(x) - \lambda(1+x) > 0$$

pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Alors $\overline{y}_n(x)$ satisfait à toutes les conditions de notre problème, mais

$$\overline{y}_n(1) < y_n(1)$$

ce qui est impossible

Nous devons donc minimer l'intégrale (en posant $n = 2m + 1$)

$$L = \int_{-1}^{1} u^2(x)\, dx$$

sous les conditions que

$$u(-1) = a \quad u(1) = 0.$$

Alors

$$L = \sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1} \quad \left[u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x) \right].$$

Les conditions d'extremum nous donnent

$$\frac{4a_k}{2k+1} = \lambda P_k(-1) + \mu P_k(1)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots m)$$

d'où

$$L = \frac{\lambda a}{2} \tag{21}$$

Plus loin

$$\begin{gathered} 4a = \lambda \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k^2(-1) + \mu \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k(1) P_k(-1). \\ 0 = \lambda \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k(1) P_k(-1) + \mu \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k^2(1). \end{gathered} \tag{22}$$

Si on trouve λ de (22) on obtient de (21)

$$L = \frac{2a^2}{m^2 + 2m}.$$

Pour $n = 2m + 2$ on trouve

$$L = \frac{2a^2}{m^2 + 3m}.$$

Pour les grandes valeurs de m on trouve la formule asymptotique

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}$$

On peut obtenir cette formule de (15) en posant $\alpha < 2$.

В цій статті ми розв'язуємо таку задачу:

Знайти найменше відхилення від нуля в інтервалі $(-1, +1)$ *монотонного поліному, що не спадає*

$$y(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$$

ступня не вищого за n, *якщо дано*

$$y'(-1) = a^2, \; y''(+1) = b^2.$$

Ми показуємо, що $y(x)$ має вид

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, dx, \qquad n = 2m + 1;$$

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\,(z \pm x)\, dx, \qquad n = 2m + 2$$

Припускаючи, що $\frac{b^2}{a^2} \sim cm^\alpha$, та $n = 2m + 1$, ми знаходимо:

при $\alpha < 2$ відхилення $L \sim \frac{2a^2}{m^2}$ (1)

„ $\alpha = 2$ „ $L \sim \frac{2a^2}{m^2} + 8\,\frac{\sqrt{12} - 3}{m^4}\, b^2$ (2)

„ $\alpha > 2$ „ $L \sim \frac{8(\sqrt{12} - 3)\, b^2}{m^4}$ (3)

Далі, припускаючи, що $y'(-1) = 0$ та $y''(1) = b^2$, ми показуємо, що матиме місце формула (2).

Коли $y'(-1) = a^2$, та $y''(1) = 0$, ми доводимо, що має місце формула (1).

Я. ГЕРОНІМУС

Узагальнення теореми Euler'а про брахістохрони

Хай точка під дією сили, що має силову функцію U, рухається вздовж такої кривої лінії, щоб інтеґрал

$$\int \varphi(U)\, ds$$

мав мінімум (як звичайно $U+h=\frac{mv^2}{2}$; $\varphi(U)$ довільна функція U. Коли $\varphi(U)=\sqrt{2(U+h)}$, маємо вільний рух; коли $\varphi(U)=\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$ — маємо брахістохрону).

Рівнання Euler — Lagrange'а дають

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{\varphi(U)}\cdot\frac{d\varphi(U)}{dU}\left[\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\right] \tag{1}$$

Хай l, m, n будуть косинуси тих кутів, що їх утворює головна нормаль нашої лінії з координатними осями, l_0, m_0, n_0 косинуси тих самих кутів для вільного руху. Тоді маємо

$$l=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{dU}{ds}\,\frac{dx}{ds}}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}=l_0 \qquad \text{де } F=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Ми бачимо, що *в кожній точці нашої кривої лінії радіюс кривини йде вздовж тієї самої прямої, як для траєкторії, що її описала б наша точка, коли б, починаючи з цього моменту, вона рухалась вільним рухом* [1]).

Проекція нашої сили на бінормаль дорівнює

$$F_b=\varrho\begin{vmatrix}\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}$$

Отже F_b — та $N_b=0$, тобто *нормальна реакція йде вздовж головної нормалі* [2]).

[1]) Appell.—Traité de Mécanique rationnelle. Vol. I. Chap. XV, probl. 10
[2]) Appell.— Ibidem, § 255. Théorème d'Euler.

Радіюс кривини нашої кривої дорівнює

$$\varrho = \frac{\varphi(U)}{\varphi'(U)} \cdot \frac{1}{\sqrt{F^2 - \left[\frac{dU}{ds}\right]^2}}$$

а для вільного руху

$$\varrho_0 = \frac{2(U+h)}{\sqrt{F^2 - \left[\frac{dU}{ds}\right]^2}}$$

звідки

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{2(U+h)\,\varphi'(U)}{\varphi(U)}. \tag{2}$$

З рівнання

$$N + F_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

знаходимо нормальну реакцію

$$N = \left[\frac{2(U+h)\,\varphi'(U)}{\varphi(U)} - 1\right] F_n \tag{3}$$

або інакше $$N = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1\right) F_n. \tag{4}$$

Якщо ми хочемо, щоб радіюси кривини нашої траєкторії та вільної були пропорційні, треба щоб

$$2(U+h)\frac{d\varphi(U)}{dU} = c\varphi(U), \qquad c = \mathrm{const}$$

звідки $$\varphi(U) = (U+h)^{\frac{c}{2}}$$

тоді $$\varrho_0 = c\varrho \qquad N = (c-1)\,F_n$$

Коли $c = -1$, ми маємо брахістохрону.

Для неї $\varrho_0 = -\varrho \qquad N = -2F_n.$

Таким чином ми дістанемо, як окремий випадок, Euler'ову теорему:

Якщо точка рухається вздовж брахістохрони, то нормальна реакція йде вздовж головної нормалі та дорівнює (*з оберненим знаком*) *подвійній нормальній складовій сили.*

J. GUERONIMUS

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME d'EULER SUR LES BRACHISTO — CHRONES

Supposons qu'un mobile parcoure sous l'action d'une force dépendant d'une fonction de forces donnée U la courbe qui rend minimum l'intégrale

$$\int \varphi(U)\,ds.$$

où $U + h = \frac{mv^2}{2}$ et $\varphi(U)$ est une fonction arbitraire de U.

Pour $\varphi(U)=\sqrt{2(U+h)}$ nous avons le mouvement libre, et pour $\varphi(U)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$ le mouvement brachistochrone.

Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{\varphi(U)}\cdot\frac{d\varphi(U)}{dU}\left[\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\right] \tag{1}$$

Désignons par l, m, n les cosinus des angles de la normale principale de notre courbe avec les axes et par l_0, m_0, n_0 ceux de la normale principale de la trajectoire libre. Alors

$$l=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}=l_0 \qquad \text{où } F=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Il est clair qu'*en chaque point de notre courbe le rayon de courbure est dirigé suivant la même droite que celui de la trajectoire que le mobile décrirait s'il devenait libre à partir de ce point*[1]).

La projection de notre force sur la binormale est égale à

$$F_b=\varrho\begin{vmatrix}\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}$$

Donc $F_b=0$ et par conséquent $N_b=0$; c'est à dire *la réaction normale est dirigée suivant la normale principale*[2]).

Le rayon de courbure de notre courbe est

$$\varrho=\frac{\varphi(U)}{\varphi'(U)}\cdot\frac{1}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}$$

et celui qui correspond à la trajectoire libre est égal à

$$\varrho_0=\frac{2(U+h)}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}$$

d'où

$$\frac{\varrho_0}{\varrho}=\frac{2(U+h)\varphi'(U)}{\varphi(U)} \tag{2}$$

---

[1]) Comp. Appell. — Traité de Mecanique rationnelle. V. I, chap. XV, probl. 10.

[2]) Comp. Appell. — Ibidem, § 255. Théorème d'Euler.

On trouve la réaction normale au moyen de l'équation

$$N + F_n = \frac{mv^2}{\varrho}$$

d'où

$$N = \left[\frac{2(U+h)\,\varphi'(U)}{\varphi(U)} - 1\right] F_n. \tag{3}$$

ou autrement

$$N = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1\right) F_n. \tag{4}$$

Si nous voulons que les rayons de courbure de notre courbe et de la trajectoire libre soient proportionnels il faut que la relation

$$2(U+h)\,\frac{d\varphi(U)}{dU} = c\varphi(U) \qquad c = \text{const.}$$

soit satisfaite, d'où

$$\varphi(U) = (U+h)^{\frac{1}{2}c}.$$

Alors

$$\varrho_0 = c\varrho \qquad \text{et} \qquad N = (c-1)\,F_n.$$

Pour $c = -1$ nous avons le mouvement brachistochrone.
Alors

$$\varrho_0 = -\varrho \qquad \text{et} \qquad N = -2F_n.$$

Nous avons donc obtenu comme cas particulier le théorème d'Euler: *dans le mouvement brachistochrone la réaction normale est dirigée suivant la normale principale et opposée au double de la composante normale de la force.*

Я. Л. ГЕРОНІМУС

Про найменше відхилення від нуля монотонного поліному, коли задано значіння одного коефіцієнта

§ 1

Задачу, що тут її подано, зформульовано так: *найти найменше відхилення від нуля в інтервалі* $(-1, +1)$ *монотонного неспадного поліному*

$$y(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_l x^{n-l} + \ldots + \sigma_n,$$

ступеня не вищого за n, *коли дано значіння його коефіцієнта* σ_l.

(Задачу розв'язуватимемо асимптотично, вважаючи, що n зростає до безконечности, але l залишається конечним).

Нашому поліномові можемо дати такий вигляд

$$y(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(x)\, dx$$

де $\varphi(x) \geqslant 0$ *для* $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Через те, що перша похідна нашого поліному не неґативна в інтервалі $(-1, +1)$, ясно, що всі корені її, що лежать в інтервалі $(-1, +1)$, можуть бути тільки паристої кратности.

Хай

$$\varphi(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} u^2(x)\, q(x),$$

де кожне з чисел α і β дорівнює або нулеві, або одиниці, $u(x)$ поліном ступеня m, а $q(x)$ не має коренів в інтервалі $(-1, +1)$.

Доведім, що $q(x)$ *можна вважати за постійну величину.*

Хай

$$\bar{\varphi}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} u^2(x), \qquad \bar{y}(x) = \int_{-1}^{x} \bar{\varphi}(x)\, dx,$$

$$R(x) = \frac{y(x) - \lambda \bar{y}(x)}{\sigma_l - \lambda \bar{\sigma}_l} \cdot \sigma_l,$$

де через $\bar{\sigma}_l$ зазначено коефіцієнт при x^{n-l} в поліномі $\bar{y}(x)$, а позитивну постійну величину λ вибрано так, щоб $q(x) - \lambda > 0$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $\sigma_l(\sigma_l - \lambda \bar{\sigma}_l) > 0$. Тоді

$$R'(x) \geqslant 0 \qquad \text{для } -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

тобто поліном $R(x)$, ступеня не вищого за n, теж монотонний в інтервалі $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Його коефіцієнт при x^{n-l} дорівнює, очевидячки, σ. Таким чином поліном $R(x)$ задовольняє всі умови нашої задачі.

Хай $\sigma_l > 0$ і $\bar{\sigma}_l > 0$. Тоді

$$\frac{y(1)}{\sigma_l} \leqslant \frac{\bar{y}(1)}{\bar{\sigma}_l}, \tag{1}$$

бо відхилення нашого поліному $y(x)$ в інтервалі $(-1, +1)$ не більш за відхилення якого завгодно іншого монотонного полінома, ступеня не вищого за n, коли їх коефіцієнти при x^{n-l} дорівнюють одиниці.

Але тоді

$$R(1) = \frac{y(1) - \lambda\bar{y}(1)}{\sigma_l - \lambda\bar{\sigma}_l} \cdot \sigma_l \leqslant y(1). \tag{2}$$

Отже, з нерівности

$$\frac{y(1)}{\sigma_l} < \frac{\bar{y}(1)}{\bar{\sigma}_l}$$

виходило б, що $R(1) < y(1)$, а це показує, що форма $u^2(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,q(x)$ не можлива, бо $y(x)$ поліном, який найменше відхиляється від нуля. Коли ж було б

$$\frac{y(1)}{\sigma_l} = \frac{\bar{y}(1)}{\bar{\sigma}_l},$$

то ясно, що досить розглянути форму

$$u^2(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta.$$

Аналогічними міркуваннями можна довести, що *при будь-яких знаках σ_l і $\bar{\sigma}_l$ нашому поліномові можна дати форму*

$$y(x) = \int_{-1}^{x} (1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,u^2(x)\,dx,$$

де $\alpha = 0$, $\beta = 0$, *або* $\alpha = 1$, $\beta = 1$, *коли n непаристе число*, і $\alpha = 0$, $\beta = 1$, *або* $\alpha = 1$, $\beta = 0$, *коли n паристе число.*

§ 2

Отже, нам треба обернути в minimum інтеґрал

$$L = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,u^2(x)\,dx$$

при умові, що σ_l має задане значіння. Для цього припустімо

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\,P_k(x),$$

де $P_k(x)$ — нормований поліном Jacobi, тобто

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_k(x)\, P_s(x)\, dx = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ 1 & k = s. \end{cases}$$

Хай $$P_n(x) = d_0^{(n)} x^n + d_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + d_n^{(n)}.$$

Нам треба найти асимптотичне значіння $d_s^{(n)}$, вважаючи s за конечне число. Скористуємось з диференціяльного рівнання поліномів Jacobi [1])

$$(1-x^2)\, P''_n(x) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\, x]\, P'_n(x) + n\,(n+\alpha+\beta+1)\, P_n(x) = 0,$$

або

$$(1-x^2) \sum_{s=0}^{n-2} (n-s)(n-s-1)\, d_s^{(n)} x^{n-s-2} + (\beta-\alpha) \sum_{s=0}^{n-1} (n-s)\, d_s^{(n)} x^{n-s-1} -$$

$$-(\alpha+\beta+2)\, x \sum_{s=0}^{n-1} (n-s)\, d_s^{(n)} x^{n-s-1} + n\,(n+\alpha+\beta+1) \sum_{s=0}^{n} d_s^{(n)} x^{n-s} = 0.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при x^{n-s}, ми дістанемо рівнання

$$s d_s^{(n)} (2n - s + \alpha + \beta + 1) = -(n-s+2)(n-s+1)\, d_{s-2}^{(n)} + $$
$$+ (\alpha - \beta)(n-s+1)\, d_{s-1}^{(n)},$$

або, інакше, для великих значінь n

$$2s d_s^{(n)} \sim -n d_{s-2}^{(n)} + (\alpha-\beta)\, d_{s-1}^{(n)}. \tag{3}$$

Перший коефіцієнт $d_0^{(n)}$ легко написати, користуючись із формули

$$d_0^{(n)} = \frac{(n+\alpha+\beta)!}{2^n \cdot n!\,(n+\alpha+\beta)!} \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\, n!\,(n+\alpha+\beta)!}{2^{\alpha+\beta+1}(n+\alpha)!\,(n+\beta)!}}.$$ [2])

Коли ми скористуємося з формули Stirling'а [3])

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\, n^n,$$

то легко найдемо, що $$d_0^{(n)} \sim \frac{2^{n+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Знайдім ще $d_1^{(n)}$. Поліномові Jacobi $P_n(x)$ можна дати такий вигляд [4]):

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1).\, n!\,(n+\alpha+\beta)!}{2^{\alpha+\beta+1}.\,(n+\alpha)!\,(n+\beta)!}} \cdot \frac{(n+\alpha)!}{n!\,\alpha!} F\Big(-n,\, n+$$
$$+\alpha+\beta+1,\; \alpha+1,\; \frac{1-x}{2}\Big),$$

---

[1]) Pólya und Szegö.— Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. II. S. 293.
[2]) Ibidem. Bd. II, S. 292.
[3]) Ibidem. Bd. I. S. 79.
[4]) Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Tome II, volume 5, p. 231.

де

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\,.\,2\,.\,c(c+1)} z^2 + \ldots\ldots$$

гіпергеометрична функція. Якщо написати в ній тільки два найвищі члени, то найдемо, що

$$d_1^{(n)} = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\,n!\,(n+\alpha+\beta)!}{2^{\alpha+\beta+1}(n+\alpha)!\,(n+\beta)!}} \cdot \frac{(2n+\alpha+\beta-1)!}{2^n (n-1)!\,(n+\alpha+\beta)!} (\alpha-\beta).$$

Користуючись знов із формули Stirling'a, ми найдемо, що

$$d_1^{(n)} \sim \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot d_0^{(n)}. \tag{5}$$

Із (3) легко знайдемо, що

$$d_2^{(n)} \sim -\frac{n d_0^{(n)}}{2^2}, \qquad d_3^{(n)} \sim -\frac{n d_1^{(n)}}{2^2}. \tag{6}$$

Доведім, що для конечного і існує формула

$$d_{2i}^{(n)} \sim \frac{(-1)^i n^i d_0^{(n)}}{2^{2i}\,.\,i!}, \qquad d_{2i+1}^{(n)} \sim \frac{(-1)^i n^i d_1^{(n)}}{2^{2i}\,.\,i!}. \tag{7}$$

Із (6) бачимо, що для $i=1$, формула (7) правдива.
Доведім, що коли вона правдива для $i=1, 2, 3\ldots s$, то вона правдива також для $i=s+1$. Дійсно,

$$4(s+1)\,d_{2s+2}^{(n)} \sim -n d_{2s}^{(n)} + (\alpha-\beta)\,d_{2s+1}^{(n)} \sim \frac{(-1)^{s+1} n^{s+1} d_0^{(n)}}{2^{2s}\,.\,s!} + $$
$$+ (\alpha-\beta)\frac{(-1)^s\,.\,n^s d_1^{(n)}}{2^{2s}\,.\,s!}.$$

Але відношення другого члена цієї суми до першого члена простує до нуля, коли зростає n. Через це

$$d_{2s+2}^{(n)} \sim \frac{(-1)^{s+1} n^{s+1} d_0^{(n)}}{2^{2(s+1)}(s+1)!}.$$

Так саме

$$2(2s+3)\,d_{2s+3}^{(n)} \sim -n d_{2s+1}^{(n)} + (\alpha-\beta)\,d_{2s+2}^{(n)} \sim \frac{(-1)^{s+1} n^{s+1} d_1^{(n)}}{2^{2s}\,.\,s!} +$$
$$+ \frac{(-1)^{s+1} n^{s+1} d_1^{(n)}}{2^{2s+1}(s+1)!} = \frac{(-1)^{s+1} n^{s+1} d_1^{(n)} (2s+3)}{2^{2s+1}(s+1)!}.$$

Звідсіль виходить, що

$$d_{2s+3}^{(n)} \sim \frac{(-1)^{s+1} n^{s+1} d_1^{(n)}}{2^{2(s+1)}(s+1)!},$$

що й треба було довести. *Отже, остаточно, користуючись з формул* (4) *й* (5), *ми знаходимо, що*

$$d_{2s}^{(n-i)} \sim \frac{(-1)^s n^s \cdot 2^{n-i-2s+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot s!}, \qquad d_{2s+1}^{(n-i)} \sim \frac{(-1)^s n^s \cdot 2^{n-i-2s-1+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot s!}(\alpha-\beta), \quad (8)$$

де i та s конечні числа.

§ 3

Тепер ми можемо підійти до розв'язання нашої задачі. *Припустімо спочатку* $l=2k$. Ми маємо

$$\sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_{2k} x^{n-2k} + \ldots + \sigma_n = \int_{-1}^{x} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x) dx.$$

Зазначім через A коефіцієнт при $x^{2m-2k+\alpha+\beta}$ у виразі

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x)$$

(через m зазначено ступінь $u(x)$ і $n = 2m+\alpha+\beta+1$).

Тоді $(n-2k)\sigma_{2k} = A$.

Знайдемо вираз для A в залежності від коефіцієнтів розкладу $u(x)$ за поліномами Jacobi. Маємо

$$A = (-1)^\alpha \sum_{i,\, j=0}^{i+j\leqslant 2k} C_{ij} a_{m-i} a_{m-j} + (-1)^\alpha (\beta-\alpha) \sum_{i,\, j=0}^{i+j\leqslant 2k-1} D_{ij} a_{m-i} a_{m-j} +$$

$$+ (-1)^{\alpha-1}\alpha\beta \sum_{i,\, j=0}^{i+j\leqslant 2k-2} E_{ij} a_{m-i} a_{m-j},$$

де C_{ij}, D_{ij}, E_{ij} мають таке значіння:

1. *Для i та j однієї паристости:*

$$C_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1}^{(m-j)},$$

$$D_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1}^{(m-j)} + \sum_{s=}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)}^{(m-j)},$$

$$E_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-2} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-2\right)+1}^{(m-j)}.$$

Користуючись із формули (8), найдемо, що

$$C_{ij} \sim \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} \frac{(-m)^s \cdot 2^{m-i-2s+\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot (-m)^{k-s-\frac{i+j}{2}} \cdot 2^{m-j-2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\pi \cdot s!\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)!} +$$

$$+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} \frac{(-m)^s \cdot 2^{m-i-2s-1+\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot (-m)^{k-s-\frac{i+j}{2}-1} \cdot 2^{m-j-2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)-1+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\pi \cdot s!\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)!} \sim$$

$$\sim \frac{(-m)^{k-\frac{i+j}{2}} \cdot 2^{2m-2k+\alpha+\beta}}{\pi} \cdot \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} \frac{1}{s!\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)!}.$$

Ми обмежились лише першим членом, бо другий член суми буде порядку $m^{k+\frac{i+j}{2}-1}$ і через це його відношення до першого члена простує до нуля, коли зростає m.

Остаточно
$$C_{ij} \sim \frac{(-n)^{k-\frac{i+j}{2}} \cdot 2^{n-2k-1}}{\pi\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!}. \tag{9}$$

Легко бачити, що D_{ij} й E_{ij} порядку не вищого за $m^{k-\frac{i+j}{2}-1}$.

II. *Хай тепер і та ј неоднакової паристости.* Тоді

$$C_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)+1}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)}^{(m-j)},$$

$$D_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)+1}^{(m-j)},$$

$$E_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)+1}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)}^{(m-j)}.$$

Користуючись знов з формули (8), найдемо:

$$C_{ij} \sim \frac{(-n)^{k-\frac{i+j+1}{2}} \cdot 2^{n-2k}}{\pi\left(k-\frac{i+j+1}{2}\right)!}(\alpha-\beta), \qquad D_{ij} \sim \frac{(-n)^{k-\frac{i+j+1}{2}} \cdot 2^{n-2k}}{\pi\left(k-\frac{i+j+1}{2}\right)!};$$

E_{ij} — порядку $m^{k-\frac{i+j+3}{2}}$.

Зазначивши через i та j числа однакової паристости, та через i_1 та j_1 числа різної паристости, ми можемо написати:

$$n\sigma_{2k} \sim (-1)^{\alpha} \sum_{i,\, j=0}^{i+j \leq 2k} \frac{(-n)^{k-\frac{i+j}{2}} . 2^{n-2k-1} a_{m-i}\, a_{m-j}}{\pi \left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!} +$$

$$+ (-1)^{\alpha} \sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1 \leq 2k} \frac{(-n)^{k-\frac{i_1+j_1+1}{2}} . 2^{n-2k} (\alpha-\beta)\, a_{m-i_1}\, a_{m-i_1}}{\pi \left(k-\dfrac{i_1+j_1+1}{2}\right)!} +$$

$$+ (-1)^{\alpha} (\beta-\alpha) \sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1 \leq 2k-1} \frac{(-n)^{k-\frac{i_1+j_1+1}{2}} . 2^{n-2k} a_{m-i_1}\, a_{m-j_1}}{\pi \left(k-\dfrac{i_1+j_1+1}{2}\right)!}$$

Через те що при i_1 та j_1 різної паристости умова $i_1+j_1 \leq 2k$ еквівалентна умові $i_1+j_1 \leq 2k-1$, то другий та третій член скорочуються. Остаточно

$$\sum_{i,\, j=0}^{i+j \leq 2k} \frac{a_{m-i}\, a_{m-j}}{\left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)! \, (-n)^{\frac{i+j}{2}}} \sim \frac{(-1)^{k+\alpha} . \pi\sigma_{2k}}{n^{k-1} . 2^{n-2k-1}}. \tag{10}$$

Отже нам треба обернути в minimum

$$L = \sum_{r=0}^{m} a_r^2,$$

користуючись формулою (10). Умови extremum'a дають

$$\lambda a_{m-i} = \sum_{j} \frac{a_{m-j}}{(-n)^{\frac{i+j}{2}} \left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!}, \tag{11}$$

де $i \equiv j \; (mod\, 2)$ та $i+j \leq 2k$. Звідсіль ми бачимо, що $a_r = 0$ при $r < m - 2k$. Помножаючи (11) на a_{m-i} та підсумовуючи по i, найдемо

$$\lambda L \sim \frac{(-1)^{k+\alpha} \pi\sigma_{2k}}{n^{k-1} . 2^{n-2k-1}},$$

звідкіля

$$L \sim \frac{(-1)^{k+\alpha} . \pi\sigma_{2k}}{\lambda n^{k-1} . 2^{n-2k-1}}.$$

Із лінійних однорідних рівнань (11) знаходимо рівнання, щоб найти λ:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{k!}-\lambda & 0 & \frac{1}{(-n)(k-1)!} & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{(-n)^k.0!} \\ 0 & \frac{1}{(-n)(k-1)!}-\lambda & 0 & \frac{1}{(-n)^2(k-2)!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(-n)^k!\,0} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

У цьому детермінанті $(2k+1)^{го}$ порядку елемент

$$C_{ij}=\frac{1}{(-n)^{\frac{i+j}{2}}\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!},$$

коли $i\equiv j \pmod 2$ та $i+j\leqslant 2k$. Коли ж $i\equiv j-1 \pmod 2$, або $i+j>2k$, то $C_{ij}=0$. Ми мусимо найти найбільший за модулем корінь цього рівнання. Розгортаючи цей детермінант за ступенями λ, ми можемо написати:

$$\lambda^{2k+1}-\frac{1}{k!}\lambda^{2k}+0\left(\frac{1}{n}\right)=0,$$

де через $0\left(\frac{1}{n}\right)$ зазначено сукупність членів, в яких в знаменнику є n. Таким чином для значінь n, що безконечно зростають

$$\lambda\sim\frac{1}{k!}$$

та

$$L\sim\frac{\pi k!\,|\sigma_{2k}|}{n^{k-1}\cdot 2^{n-2k-1}}. \tag{12}$$

(Очевидно $\alpha=0$, коли σ_{2k} має знак $(-1)^k$, та $\alpha=1$, коли знак σ_{2k} однаковий зі знаком $(-1)^{k+1}$).

§ 4

Розгляньмо тепер другий можливий випадок $l=2k+1$. **Так саме, як і раніш, ми найдемо, що**

$$n\sigma_{2k+1}\sim(-1)^{\alpha}\sum_{i,\,j=0}^{i+j\leq 2k+1}C'_{ij}\,a_{m-i}\,a_{m-j}+(-1)^{\alpha}(\beta-\alpha)\sum_{i,\,j=0}^{i+j\leq 2k}D'_{ij}\,a_{m-i}\,a_{m-j}+$$

$$+(-1)^{\alpha-1}\alpha\beta\sum_{i,\,j=0}^{i+j\leq 2k-1}E'_{ij}\,a_{m-i}\,a_{m-j}\,.$$

I. *Хай спочатку i та j однієї паристости.*
Тоді

$$C'_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)+1} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)},$$

$$D'_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1},$$

$$E'_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)}.$$

Користуючись із формули (8), ми найдемо, що

$$C'_{ij} \sim \frac{2^{n-2k-1}\,.\,(\alpha-\beta)\,.\,(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi\,.\left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!},\quad D'_{ij} \sim \frac{2^{n-2k-1}\,(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi\left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!},$$

а E'_{ij} порядку $n^{k-\frac{i+j}{2}-1}$.

II. *Хай тепер i та j неоднакової паристости. Тоді*

$$C'_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j-1}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j-1}{2}\right)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)+1},$$

$$D'_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)+1} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)},$$

$$E'_{ij} = \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)} d^{(m-j)}_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)+1},$$

звідкіля

$$C'_{ij} \sim \frac{2^{n-2k-2}\,.\,(-n)^{k-\frac{i+j-1}{2}}}{\pi\left(k-\dfrac{i+j-1}{2}\right)!},$$

а D'_{ij} та E'_{ij} порядку $n^{k-\frac{i+j+1}{2}}$.

Отже ми маємо

$$n\sigma_{2k+1} \sim (-1)^{a} \sum_{i,\, j=0}^{i+j \leq 2k+1} \frac{(a-\beta) \,.\, 2^{n-2k-1} \,.\, (-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi \left(k - \frac{i+j}{2}\right)!} a_{m-i}\, a_{m-j} +$$

$$+ (-1)^{a} (\beta - a) \sum_{i,\, j=0}^{i+j \leq 2k} \frac{2^{n-2k-1} \,.\, (-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi \left(k - \frac{i+j}{2}\right)!} a_{m-i}\, a_{m-j} +$$

$$+ (-1)^{a} \sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1 \leq 2k+1} \frac{2^{n-2k-2} \,.\, (-n)^{k-\frac{i_1+j_1-1}{2}}}{\pi \left(k - \frac{i_1+j_1-1}{2}\right)!} a_{m-i_1}\, a_{m-j_1},$$

або простіше

$$\sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1 \leq 2k+1} \frac{a_{m-i_1}\, a_{m-j_1}}{(-n)^{\frac{i_1+j_1-1}{2}} \left(k - \frac{i_1+j_1-1}{2}\right)!} \sim \frac{(-1)^{a+k} \,.\, \pi\sigma_{2k+1}}{2^{n-2k-2} \,.\, n^{k-1}}, \qquad (13)$$

де i_1 та j_1 різної паристости.

Ми мусимо знов обернути в minimum

$$L = \sum_{r=0}^{m} a_r^2$$

при умові (13). Умови extremum'а дають

$$\lambda a_{m-i_1} \sim \sum_{j_1} \frac{a_{m-j_1}}{(-n)^{\frac{i_1+j_1-1}{2}} \left(k - \frac{i_1+j_1-1}{1}\right)!},$$

де i_1 та j_1 різної паристости. Звідсіль

$$L \sim \frac{(-1)^{a+k}\, \pi\sigma_{2k+1}}{\lambda n^{k-1}\, 2^{n-2k-2}},$$

де λ буде найбільший за модулем корінь детермінанту

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{k\,!} & 0 & \frac{1}{(-n)\,(k-1)!} & \cdots\cdots & \frac{1}{(-n)^{k}\, 0\,!} \\ \frac{1}{k\,!} & -\lambda & \frac{1}{(-n)\,(k-1)!} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(-n)^{k}\, 0\,!} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

У цьому детермінанті $(2k+2)^{го}$ порядку елемент

$$C_{ij} = \frac{1}{(-n)^{\frac{i+j-1}{2}}\left(k-\frac{i+j-1}{2}\right)!}$$

для $i \equiv j-1 \pmod 2$ та $i+j \leqslant 2k+1$. Коли $i \equiv j \pmod 2$, або $i+j > 2k+1$, то $C_{ij}=0$. Ми можемо записати наше рівняння так

$$\lambda^{2k+2} - \frac{1}{k!^2}\lambda^{2k} + 0\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

відкіля асимптотично $\lambda \sim \frac{1}{k!}$. Тоді

$$L \sim \frac{\pi\,|\,\sigma_{2k+1}\,|\,k!}{2^{n-2k-2}\,.\,n^{k-1}}\,. \tag{14}$$

Формули (12) та (14) можна з'єднати в одну, а саме

$$L \sim \frac{\pi\,|\,\sigma_e\,|\,k!}{2^{n-l-1}\,.\,n^{k-1}} \qquad k = \left[\frac{l}{2}\right]. \tag{15}$$

При $l=0$ ми дістанемо відому формулу Чебишова [1])

$$L \sim \frac{\pi n\,|\,\sigma_0\,|}{2^{n-1}}\,.$$

При $l=1$ ми дістанемо формулу

$$L \sim \frac{\pi n\,|\,\sigma_1\,|}{2^{n-2}}\,, \tag{16}$$

яку можна дістати розв'язуючи загальнішу задачу, а саме *находження мінімального відхилення від нуля многократно-монотонного поліному* $(h+1)$*-го порядку, коли відомо значіння його другого коефіцієнта* [2]).

Відхилення дорівнює

$$L \sim \frac{\pi\,|\,\sigma_1\,|\,.\,n^{h+1}}{2^{n-2}.\,h!\left(h+\sqrt{h^2+1}\right)}\,. \tag{17}$$

Коли у (17) $h=0$ (що відповідає монотонному поліномові), ми дістанемо формулу (16).

J. GUERONIMUS

SUR LE POLYNOME MONOTONE QUI S'ÉCARTE LE MOINS DE ZÉRO DONT UN COEFFICIENT EST DONNÉ

Résumé

Le but de ce travail est de résoudre le problème suivant:

Trouver l'oscillation minima dans l'intervalle $(-1, +1)$ *du polynome non décroissant*

$$y(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_l x^{n-l} + \ldots + \sigma_n$$

de degré $\leqslant n$, *si son coefficient* σ_l *est donné.*

[1]) П. Л. Чебышев. — О функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Собрание сочинений, т. II, стр. 210.

[2]) W. Břečka and J. Geronimus. — On a problem concerning the polynomials monotonic of $h+1$ order. Tôhoku Mathematical Journal.

(*On suppose que* n *augmente infiniment tandis que* l *reste fini*). L'oscillation minima cherchée est donnée par la formule

$$L \sim \frac{\pi \mid \sigma_l \mid . k!}{2^{n-l-1} . n^{\kappa-1}} \qquad k = \left[\frac{l}{2}\right]$$

Pour $l = 0$ on obtient la formule connue de Tchebycheff

$$L \sim \frac{\pi \mid \sigma_0 \mid . n}{2^{n-1}}$$

W. GONTCHAROFF

Note sur les moyennes carrées du module des dérivées successives d'une fonction holomorphe dans le cercle-unité

En désignant par $f(x)=\sum\limits_{0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x|<1$ et continue avec toutes ses dérivées sur la circonférence elle-même, posons

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f^{(n)}(e^{i\theta})|^2\,d\theta,\qquad I_n^*=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}|f^{(n)}(\varrho e^{i\theta})|^2\,\varrho\,d\varrho\,d\theta \tag{1}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

où I_n est le carré de la moyenne carrée des valeurs que $|f^{(n)}(x)|$ prend sur le cercle $|x|=1$ et I_n^* la même chose relativement à l'intérieur du cercle considéré. On peut dire aussi que I_n^* $(n\geqslant 1)$ est l'aire du domaine riemannien engendré par la $n-1$-ième dérivée $f^{(n-1)}(x)$ et correspondant au cercle-unité.

Nous nous proposons ici d'établir une inégalité qui lie entre eux trois nombres I_0, I_p et I_q $(0<p<q)$ ainsi que celle qui lie les nombres I_0^*, I_p^* et I_q^* [1]).

Quel que soit le nombre entier positif n, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\begin{aligned}\Psi_n\equiv(q-p)\,(2n+q-p)\,[(n+q)\,!]^2\,I_0-q\,(2n+q)[(n+q-p)\,!]^2\,I_p+\\+p\,(2n+2q-p)\,.\,[n\,!]^2\,I_q\geqslant 0\end{aligned} \tag{2}$$

Posons, pour abréger,

$$\Gamma_\nu=|c_\nu|^2\geqslant 0\qquad\qquad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

On trouve aisément

$$I_0=\sum_0^\infty\Gamma_\nu,\qquad I_p=\sum_0^\infty\lambda^2(\nu)\Gamma_\nu,\qquad I_q=\sum_0^\infty\mu^2(\nu)\Gamma_\nu,$$

---

[1]) Quelques autres problèmes du même genre ont été étudiés par M. Bernstein („Sur les fonctions absolument monotones", „Acta Mathematica, t. 52; „Sur une propriété de la fonction exponentielle", „Annales Scientifiques des Institutions Savantes de l'Ukraïne", t. 3; „Sur la croissance des polynomes", CR, le 1 octobre 1928).

où l'on a posé

$$\lambda(\nu) = (\nu - p + 1)(\nu - p + 2)\ldots\nu, \qquad \mu(\nu) = (\nu - q + 1)(\nu - q + 2)\ldots\nu.$$

Donc, il s'ensuit

$$\Phi_n \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_n(\nu)\Gamma_\nu \quad ,$$

où $\psi_n(\nu)$ est défini par l'égalité

$$\psi_n(\nu) = A_n - B_n\lambda^2(\nu) + C_n\mu^2(\nu),$$

avec

$$A_n = (q-p)(2n+q-p)[(n+q)!]^2, \qquad B_n = q(2n+q)[(n+q-p)!]^2,$$
$$C_n = p(2n+2q-p)[n!]^2.$$

J'affirme que $\psi_n(\nu)$ est positif pour toutes les valeurs entières de $\nu\ (\nu \geqslant 0)$ sauf les valeurs $\nu = n+q$ et $\nu = n+q-1$; dans ce dernier cas, on vérifie immédiatement que l'on a

$$\psi_n(n+q) = \psi_n(n+q-1) = 0. \tag{3}$$

Tout d'abord, on obtient, pour $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$,

$$\psi_n(\nu) = A_n > 0.$$

Ensuite, si $p \leqslant \nu \leqslant q-1$, $\psi_n(\nu)$ se réduit à $A_n - B_n\lambda^2(\nu)$, donc $\psi_n(\nu)$ décroît lorsque ν parcourt ces valeurs en croissant. Par suite,

$$\psi_n(\nu) \geqslant \psi_n(q-1).$$

Or, il vient:

$$\psi_n(q-1) =$$
$$= (q-p)(2n+q-p)\left[\frac{(n+q-p)!(q-1)!}{(q-p-1)!}\right]^2 \left\{\left[\frac{(n+q-p+1)\ldots(n+q)}{(q-p)\ldots(q-1)}\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{q(2n+q}{(q-p)(2n+q-p)}\right\}.$$

La quantité entre parenthèses figurées étant une fonction croissante de n, elle atteint le minimum pour $n=0$, et ce minimum étant zéro, on a $\psi_n(q-1) > 0$ pour $n > 0$ et $\psi_0(q-1) = 0$. Donc, pour $p \leqslant \nu \leqslant q-1$, on obtient

$$\psi_n(\nu) \geqslant 0,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que dans le cas où $n=0$, $\nu = q-1$.

Plus loin, on s'assure queela dérivée $\psi_n(\nu)$ (ν étant considéré comme une variable susceptible de prendre toutes les valeurs réelles) ne possède qu'un seul zéro réel plus grand que $q-1$. En effet, on trouve

$$\psi'_n(\nu) = 2C_n\lambda(\nu)\lambda'(\nu)\left[\frac{\mu(\nu)}{\lambda(\nu)}\,\frac{\mu'(\nu)}{\lambda'(\nu)} - \frac{B_n}{C_n}\right]. \tag{4}$$

Le rapport $\dfrac{\mu(\nu)}{\lambda(\nu)}$ est un polynome en ν qui croît d'une manière monotone avec ν, si $\lambda \geqslant q-1$. Comme on a

$$\frac{\mu'(\nu)}{\lambda'(\nu)} = \frac{q}{p} \frac{\prod\limits_{1}^{q-1} (\nu-\mu_i)}{\prod\limits_{1}^{p-1} (\nu-\lambda_i)} = \frac{q}{p} \prod_{1}^{p-1} \frac{\nu-\mu_i}{\nu-\lambda_i} \cdot \prod_{p}^{q-1} (\nu-\mu_i) \;,$$

où les ν_i et les μ_i vérifient les inégalités

$$q-1 > \mu_1 > q-2 > \mu_2 > \ldots > q-i > \mu_i > q-i-1 > \ldots > 1 > \mu_{q-1} > 0,$$
$$p-1 > \lambda_1 > p-2 > \lambda_2 > \ldots > p-i > \lambda_i > p-i-1 > \ldots > 1 > \lambda_{p-1} > 0,$$

il en résulte que le rapport $\dfrac{\mu'(\nu)}{\lambda'(\nu)}$ croît aussi avec ν, si $\nu \geqslant q-1$ (car ceci est vrai pour le produit $\prod\limits_{p}^{q-1} (\nu-\mu_i)$ ainsi que pour chacun des facteurs $\dfrac{\nu-\mu_i}{\nu-\lambda_i}\Big)$. Par conséquent, d'après (4), $\psi'_n(\nu)$ ne s'annule qu'une seule fois pour $\nu > q-1$; soit $\bar{\nu}_n$ la racine de l'équation $\psi_n'(\nu)=0$ $(\bar{\nu}_n > q-1)$ (cette racine existe car l'expression en parenthèses dans le second membre de (4) croît de 0 à ∞ lorsque ν parcourt toutes les valeurs plus grandes que $q-1$). En vertu des égalités (3), on a $n+q-1 < \bar{\nu}_n < n+q$, donc

$$\psi'_n(\nu) < 0 \quad \text{pour} \quad q-1 \leqslant \nu \leqslant q+n-1,$$
$$\psi'_n(\nu) > 0 \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant q+n.$$

Par conséquent, on obtient

$$\psi_n(\nu) > \psi_n(q+n-1) = 0 \quad \text{pour} \quad q-1 \leqslant \nu < q+n-1,$$
$$\psi_n(\nu) > \psi_n(q+n) = 0 \quad \text{pour} \quad \nu > q+n.$$

L'inégalité (2) est par suite démontrée. L'égalité n'est atteinte, dans (2), que dans le cas où l'on a $\Gamma_\nu = 0$ pour toutes les valeurs de ν sauf $\nu = n + q - 1$ et $\nu = n+q$, donc pour les binomes de la forme

$$f(x) = c_{n+q-1}\, x^{n+q-1} + c_{n+q}\, x^{n+q}. \tag{5}$$

Admettons maintenant que, les valeurs de I_0 et de I_q étant données, on cherche à déterminer le maximum des valeurs possibles de I_p ainsi que les fonctions $f(x)$ pour lesquelles ce maximum est atteint $(0 < p < q)$.

L' inégalité (2) nous fournit

$$I_p \leqslant K_n = A_n I_0 + B_n I_q, \tag{6}$$

où l'on a posé

$$A_n = \frac{(q-p)(2n+q-p)}{q(2n+q)} \left[\frac{(n+q)!}{(n+q-p)!}\right]^2,$$

$$B_n = \frac{p(2n+2q-p)}{q(2n+q)} \left[\frac{n!}{(n+q-p)!}\right]^2 \tag{7}$$

Le nombre n étant susceptible de prendre toutes les valeurs $n=0$, 1, 2, ..., il s'agit de le déterminer de telle manière que K_n soit aussi petit que possible. Les A_n forment une suite croissante et les B_n une suite décroissante; on déduit de (6 — 7) que l'on a

$$K_{n+1} \gtreqless K_n$$

suivant que

$$\frac{I_q}{I_0} \gtreqless \frac{A_{n+1}-A_n}{B_n-B_{n+1}}$$

Or, le second membre de l'inégalité précédente peut être écrit sous la forme

$$\frac{q-p}{p}\left[\frac{(n+q)!}{n!}\right]^2 \frac{\left(1+\frac{p}{n+q-p+1}\right)^2\left(1-\frac{p}{2n+q+2}\right)-\left(1-\frac{p}{2n+q}\right)}{\left(1+\frac{q-p}{2n+q}\right)-\left(1-\frac{q-p}{n+q-p+1}\right)^2\left(1+\frac{q-p}{2n+q+2}\right)},$$

et cette expression se réduit à $[(n+1)(n+2)\dots(n+q)]^2$. Soit N la valeur de n définie par

$$[N(N+1)\dots(N+q-1)]^2 \leq \frac{I_q}{I_0} < [(N+1)(N+2)\dots(N+q)]^2\,; \tag{8}$$

alors on obtient

$$K_0 > K_1 > \dots > K_{N-1} \geqslant K_N < K_{N+1} < K_{N+2} < \dots$$

Donc, c'est la valeur $n=N$ qu'il faut prendre dans l'inégalité (6) pour obtenir le maximum possible de I_p (ou bien $n=N-1$ dans le cas où le signe d'égalité a lieu dans (8). Le maximum est atteint pour les binomes de la forme (5), où il faudra poser $n=N$ (ou $n=N-1$ respectivement).

Inversement, supposons que, trois nombres I_0, I_p et I_q étant donnés, l'égalité (6) a lieu lorsqu'on donne à n la valeur N tirée de (8). Alors, il est possible de construire une fonction $f(x)$ telle que les carrés des moyennes carrées du module de la fonction elle-même et de ses dérivées d'ordre p et q $(0<p<q)$ soient respectivement égaux à I_0, I_p, I_q. Toutes ces fonctions sont comprises dans la formule

$$f(x) = x^{N+q-1}\left(\varepsilon\sqrt{\Gamma_{N+q-1}} + \eta x\sqrt{\Gamma_{N+q}}\right),$$

où l'on a

$$\Gamma_{N+q-1} = \frac{1}{q(2N+q)}\left[(N+q)^2 I_0 - \frac{I_q}{[(N+1)\dots(N+q-1)]^2}\right],$$

$$\Gamma_{N+q} = \frac{1}{q(2N+q)}\left[\frac{I_q}{[(N+1)\dots(N+q-1)]^2} - N^2 I_0\right],$$

et ε et η sont des nombres complexes arbitraires de module 1.

En particulier, soit $p=1$, $q=2$. Alors

$$A_n = \frac{(2n+1)(n+2)^2}{4(n+1)}, \qquad B_n = \frac{2n+3}{4(n+1)^3}.$$

Par exemple, si $I_2 \leqslant 4I_0$, on a $I_1 \leqslant I_0 + \frac{3}{4} I_2$; si $4I_0 \leqslant I_2 \leqslant 36I_0$, on a $I_1 \leqslant \frac{27}{8} I_0 + \frac{5}{32} I_1$; si $36I_0 \leqslant I_2 \leqslant 144I_0$, on a $I_1 \leqslant \frac{20}{3} I_0 + \frac{7}{108} I_2$ etc.

Sans entrer dans les détails des calculs qui d'aileurs ne diffèrent pas essentiellement de ceux qui ont été développés plus haut, je vais indiquer les inégalités qui se rapportent aux moyennes carrées à l'intérieur du cercle-unité. On trouve, pour $0 < p < q$,

$$I_p^* \leqslant K_n^* \equiv A_n^* I_0^* + B_n^* I_q^*, \tag{9}$$

où

$$A_n^* = \frac{(q-p)(2n+q-p+1)(n+q+1)}{q(2n+q+1)(n+q-p+1)} \left[\frac{(n+q)!}{(n+q-p)!}\right]^2$$

$$B_n^* = \frac{p(2n+2q-p+1)(n+1)}{q(2n+q+1)(n+q-p+1)} \left[\frac{n!}{(n+q-p)!}\right]^2, \tag{10}$$

n étant susceptible de prendre les valeurs 0, 1, 2, ... Les moyennes I_0^* et I_q^* étant données, la valeur $n = N$ qui rend minimum le second membre de (9) est définie par l'inégalité

$$N[(N+1)\dots(N+q-1)]^2(N+q) \leqslant \frac{I_q^*}{I_0^*} \leqslant (N+1)[(N+2)\dots(N+ \\ +q)]^2(N+q+1) \tag{11}$$

Inversement, si les nombres I_0^*, I_p^* et I_q^* vérifient l'égalité (9), les fonctions auxquelles il correspondent sont comprises dans la formule

$$f(x) = x^{N+q-1}(\varepsilon\sqrt{\Gamma_{N+q-1}} + \eta x\sqrt{\Gamma_{N+q}}),$$

où

$$\Gamma_{N+q-1} = \frac{(N+q)^2}{q(2N+q+1)}\left[(N+q+1)I_0^* - \frac{I_q^*}{(N+1)[(N+2)\dots(N+q)]^2}\right],$$

$$\Gamma_{N+q} = \frac{(N+1)(N+q+1)}{q(2N+q+1)}\left[\frac{I_q^*}{[(N+1)\dots(N+q-1)]^2(N+q)} - NI_0^*\right],$$

et ε et η sont des nombres complexes arbitraires de module 1.

En particulier, soit $p = 1$, $q = 2$. Alors

$$A_n^* = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n+3}, \qquad B_n^* = \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Par exemple, si $I_2^* \leqslant 12I_0^*$, on a $I_1^* \leqslant 2I_0^* + \frac{1}{3} I_2^*$; si $12I_0^* \leqslant I_2^* \leqslant 72I_0^*$, on a $I_1^* \leqslant \frac{24}{5} I_0^* + \frac{1}{10} I_2^*$; si $72I_0^* \leqslant I_2^* \leqslant 240I_0^*$, on a $I_1^* \leqslant \frac{60}{7} I_0^* + \frac{1}{21} I_2^*$ etc.

В. Л. ГОНЧАРОВ

НОТАТКА ПРО КВАДРАТИЧНІ ПЕРЕСІЧНІ МОДУЛЯ ПОСЛІДОВНИХ ПОХІДНИХ ОД ФУНКЦІЙ, ГОЛОМОРФНИХ В КОЛІ-ОДИНИЦЯ

Резюме

В цій нотатці доводимо, що величини I_0, I_p та I_q $(0 < p < q)$, що їх визначено рівністю (1), при довільному цілому $n \geqslant 0$ задовольняють нерівностям (6). Навпаки, які б ні були числа I_0, I_p та I_q, коли тільки задоволено нерівності (8) та (для $n = N$) (6), то можна визначити таку функцію $f(x)$, щоб вона задовольняла рівностям (1) (для $n = 0$, p і q).

Подібні до цих твердження, що до величин I_0^*, I_p^* і I_q^* (див. (1)).

М. КРАВЧУК

Про наближене розв'язання лінійних диференціяльних рівнань

Нехай лінійне диференціяльне рівнання

$$L[y] = A(x)y^{(k)} + \lambda A_1(x)y^{(k-1)} + \ldots + \lambda A_k(x)y = f(x) \qquad \text{(I)}$$

має на інтервалі (0, 1) за умов

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(j)} y^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a_{k+i}^{(j)} y^{(i)}(1) = 0. \ (j = 1, 2, \ldots k)$$

єдиний інтеграл y. Будемо шукати наближено цей інтеграл у формі

$$y_m = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_{m-1}^{(m)} \varphi_{m-1}(x),$$

визначаючи сучинники $a_i^{(m)}$ із рівнань

$$\int_0^1 L[y_m] A\theta_i dx = \int_0^1 f A\theta_i dx \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \qquad \text{(II)}$$

Ми доведемо, що коли належно дібрати функції φ_i, θ_i то буде

$$y = \lim_{m \to \infty} y_m$$

Так само, коли система лінійних диференціяльних рівнань

$$L_j[y_1, y_2, \ldots y_k] = A_j(x)y_j' + \lambda_j A_{j1}(x)y_1 + \ldots + \lambda_j A_{jk}(x)y_k = f_j(x)$$
$$(j = 1, 2, \ldots k) \qquad \text{(III)}$$

за граничних умов

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} y_i(0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+1}^{(j)} y_i(1) = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots k)$$

має на інтервалі (0, 1) єдиний розв'язок

$$y_1, y_2, \ldots y_k,$$

то можна так дібрати функції φ_{ji}, θ_{ji} що, визначивши сучинники a_{ji} з рівнань

$$\int_0^1 L_j[y_1, y_2, \ldots y_k] A_j\theta_{ji} dx = \int_0^1 f_j A_j \theta_{ji} dx \ (i = 0, 1, \ldots, m-1; j = 1, 2, \ldots k), \ \text{(IV)}$$

де

$$y_{jm} = a_{j0}^{(m)} \varphi_{j0}(x) + a_{j1}^{(m)} \varphi_{j1}(x) + \ldots + a_{j,m-1}^{(m)} \varphi_{j,m-1}(x),$$

матимемо

$$y_j = \lim_{m=\infty} y_{im} \qquad (j = 1,\ 2, \ldots k).$$

Іншими словами, для диференціяльного рівнання (I) та (III) маємо довести збіжність способу наближеної інтеграції, визначеного рівнаннями (II) та (IV).

Ми обмежуємося тут випадком, коли розв'язки задач (I) та (III) справджують *однорідні* лінійні умови на кінцях інтервалу (0, 1), бо на нього можна звести й випадок умов неоднорідних, заступивши функції y та y_j відповідно функціями $z + p(x)$, $z_j + p_j(x)$, де $p(x)$ та $p_j(x)$ є многочлени з відповідно дібраними сучинниками.

Деякі висліди цієї розвідки стисло подано в моїй замітці в Comptes Rendus Паризької Академії Наук (Т. 187, р. 411) та в параграфі з артикулу „Про спосіб найменших квадратів та про спосіб моментів у теорії наближеної інтеграції диференціяльних рівнань" (Вісті Київського Політехнічного Інституту, 1928).

Так само визначено праці акад. М. Крилова, що їх автор використав.

1

Далі нам доведеться користуватися з системи функцій

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \tag{1}$$

що має наступну властивість.

Розгляньмо на інтервалі (0, 1) збір усіх функцій $F(x)$, що їхні r—і похідні $F^{(r)}(m)$ існують та справджують Lipschitz'ову умову δ-го ступеня, і нехай кожну з функцій $F(x)$ можна наближено представити сумою

$$F_m(x) = f_0^{(m)} \varphi_0(x) + f_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + f_{m-1}^{(m)} \varphi_{m-1}(x)$$

зі сталими сучинниками $f_i^{(m)}$ так, що ріжниці

$$E(x) - F_m(x),\ F'(x) - F'_m(x), \ldots F^{(k)}(x) - F_m^{(k)}(x)$$

є відповідно

$$\varepsilon_m^{(r-k+\delta)} = \frac{M_m(x)}{m^{r-k+\delta}},\quad \varepsilon_{m-1}^{(r-k+\delta)}(x) = \frac{M_{m-1}(x)}{m^{r-k+\delta}}, \ldots,\quad \varepsilon_{mk}^{(r-k+\delta)}(x) = \frac{M_{mk}(x)}{m^{r-k+\delta}}, \tag{2}$$

а M_m, $M_{m_1}, \ldots M_{mk}$ є обмежені функції від m та від x. Після дослідів С. Бернштейна за таку систему (1) можна взяти, напр.

$$1,\ x,\ x^2, \ldots$$

Подібні системи називатимемо $(r,\ k,\ \delta)$ повними або абсолютно повними. Коли не всі функції $F(x)$ мають зазначену властивість щодо системи (1), а лише ті з них, що справджують лінійні однорідні граничні умови

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} F^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+1}^{(j)} F^{(j)}(1) = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ k), \tag{3}$$

то таку систему (1) теж називатимемо (r, k, δ) повною, але *умовно*, за умов (3). Напр., коли з функцій $F(x)$ взяти ті, що мають період 1, то за систему (1) можна взяти

$$1, \ \sin 2\pi x, \ \cos 2\pi x, \ \sin 4\pi x, \ \cos 4\pi x, \dots$$

Коли обмежитися тими функціями $F(x)$, що справджують умови

$$F(0) = F'(0) = \dots = F^{(k-1)}(0) = 0,$$

то такою системою буде

$$x^k, \ x^{k+1}, \ x^{k+2}, \dots$$

Доведімо, що взагалі *за умов* (3) *систему* (1) *можна дібрати так, щоб усі функції* φ_l *справджували ті самі умови* (3):

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} \varphi_l^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} \varphi_l^{(i)}(1) = 0 \qquad (j = 0, 1, \dots, k-1, \ 1 = 0, 1, 2, ..) \quad (4)$$

Справді, є безліч многочленів, що додержують умов (4); візьмімо за φ_0 один із них, найнижчого можливого ступеня l_0, за φ_1 — другий, дальшого вищого ступеня l_1, і т. д. Очевидно почавши з певного значка $v \leqslant 2k$, ці многочлени можна, напр., вибрати так:

$$\varphi_v(x) = x^p(1-x)^p, \ \varphi_{v+1}(x) = x^{p+1}(1-x)^p, \ \varphi_{v+2}(x) = x^{p+2}(1-x)^p, \dots,$$

де число p є напевно не більше за k. Долучивши до так утвореної системи функцій φ_i, ще

$$1, x, \dots, x^{l_0-1}, x^{l_0+1}, \dots, x^{l_1-1}, x^{l_1+1}, \dots,$$

дістанемо очевидно абсолютно повну систему. Отже існує функція

$$F_m(x) = g_0^{(m)} + g_1^{(m)} x + \dots + g_{l_0-1}^{(m)} x^{l_0-1} + g_{l_0+1}^{(m)} x^{l_0+1} + \dots + g_{l_1-1}^{(m)} x^{l_1-1} + \\ + g_{l_1+1}^{(m)} x^{l_1+1} + \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)} \varphi_i(x),$$

що справджує умови

$$F - F_m = \varepsilon_m^{(r-k+\delta)}, \ \ F' - F'_m = \varepsilon_{m1}^{(r-k+\delta)}, \dots, \ F^{(k)} - F_m^{(k)} = \varepsilon_{mk}^{(r-k+\delta)},$$

де функції

$$\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}, \ \varepsilon_{m1}^{(r-k+\delta)}, \dots, \ \varepsilon_{mk}^{(r-k+\delta)} \ \text{є типу (2).}$$

З цього висновок, що з похибкою типу (2) многочлен

$$g_m(x) = g_0^{(m)} + g_1^{(m)} x + \dots + g_{l_0-1}^{(m)} x^{l_0-1} + g_{l_0+1}^{(m)} x^{l_0+1} + \dots + g_{l_1-1}^{(m)} x^{l_1-1} + \\ + g_{l_1+1}^{(m)} x^{l_1+1} + \dots$$

справджує умови (3). Тимчасом система рівнань

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} g_m^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} g_m^{(i)}(1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots k)$$

справджується, з огляду на добір функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, лише нулевими вартостями сучинників $g_i^{(m)}$; отже всі вони в суми $F_m(x)$ є малі типу (2), а сума

$$F_m(x) - g_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

є теж наближення функції $F(x)$ з похибкою типу (2).

Так само можна утворити k систем функцій

$$\varphi_{j0}(x),\ \varphi_{j1}(x),\ \varphi_{j2}(x), \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{5}$$

відповідно повних щодо функцій

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots,\ F_k(x), \tag{6}$$

з похідними

$$F_1^{(r)}(x),\ F_2^{(r)}(x), \ldots,\ F_k^{(r)}(x)$$

що справджують Lipschitz'ові умови δ-го ступеня, за умов

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} F_j(0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+1}^{(j)} F_j(1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{7}$$

Інакше кажучи, k систем функцій (5) даються дібратись так, напр., у формі многочленів, що всякий збір функцій F_j' можна представити відповідно сумами

$$F_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} f_{ji}^{(m)} \varphi_{ji}'(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

з похибками типу

$$\varepsilon_{jm}^{(r-1+\delta)} = \frac{M_{jm}(x)}{m^{r-1+\delta}},$$

де M_{jm} обмежені функції від x та від m.

Далі скрізь уважатимемо функції φ_i та φ_{ji} за многочлени.

2

Доведімо теорему, що далі матиме основне значіння.

Теорема 1. Коли p-та похідна функції $\Gamma(\xi)$ є скінчена на інтервалі (0,1) та справджує Lipschitz'ову умову на інтервалах $(0,x)$, $(x,1)$, а функції

$$\theta_0(x),\ \theta_1(x),\ \theta_2(x), \ldots$$

творять абсолютно повну систему, то є таке наближення

$$\Gamma_m(\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m)} \theta_i(\xi)$$

цієї функції, що

$$\int_0^1 (\Gamma - \Gamma_m)^2 \, d\xi = \frac{M_m}{m^{\frac{2}{3}(p+1)}} \quad \text{або} \quad \frac{M_m}{m^{2p}} \tag{8}$$

де M_m є обмежена функція від m.

Довід. У всякій точці інтервалів $(0, x-h)$ та $(x, 1-h)$ можна представити $\Gamma(\xi)$ функцією

$$F(\xi) = \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} \Gamma(\xi) \, d\xi \tag{9}$$

з похибкою $hP_m(\xi)$, де P_m величина обмежена. З другого боку, на інтервалі (0,1) функцію $F(\xi)$ можна представити лінійною комбінацією $\Gamma_m(\xi)$ з функцій

$$\theta_0(\xi),\ \theta_1(\xi), \ldots,\ \theta_{m-1}(\xi)$$

з похибкою типу $h^{-1} m^{-p-1} Q_m(\xi)$, де Q_m є величина обмежена. Отже й різниця $\Gamma - \Gamma_m$ на інтервалі (0,1) за винятком хіба проміжок $(x-h, x)$ та $(1-h, 1)$ є величина типу

$$h\, P_m(\xi) + h^{-1} m^{-p-1} Q_m(\xi),$$

а тоді

$$\int_0^1 (\Gamma - \Gamma_m)^2 \, d\xi = (p_m h + q_m h^{-1} m^{-p-1})^2 + r_m h,$$

де p_m, q_m, r_m є обмежені функції від m. Взявши тут $m^{\frac{2}{3}(p+1)}$ за h, дістанемо перший вислід теореми. Другий просто випливає з існування такої $\Gamma_m(\xi)$, що

$$\Gamma - \Gamma_m = \frac{M_m(\xi)}{m^p}$$

Зауважмо, що коли

$$\Gamma(\xi) = \frac{d^l}{dx^l} G(x, \xi) \qquad (l = 0,\ 1, \ldots,\ k-1),$$

де $G(x, \xi)$ є Green'ова функція лінійного диференціяльного рівнання k-го $(k > 1)$ порядку, то напевно за p можна взяти 0, а коли $G(x, \xi)$ є ще й симетрична, то при $l = 0$ можна взяти $p = k - 1$.

3

Очевидно, систему функцій φ_i можна заступити системою функцій

$$\psi_l(x) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i^{(l)} \varphi_i(x) + \varphi_l(x) \quad (l = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{10}$$

де $k^{(l)}$ є сталі числа, що визначаються з рівнань:

$$\int_0^1 L[\psi_m] A \varphi_i^{(k)} dx = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ m = 1,\ 2 \ldots) \tag{11}$$

цілком, коли

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 L[\varphi_0] A\varphi_0^{(k)} dx, & \int_0^1 L[\varphi_1] A\varphi_0^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}] A\varphi_0^{(k)} dx \\ \int_0^1 L[\varphi_0] A\varphi_1^{(k)} dx, & \int_0^1 L[\varphi_1] A\varphi_1^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}] A\varphi_1^{(k)} dx \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^1 L[\varphi_0] A\varphi_{m-1}^{(k)} dx, & \int_0^1 L[\varphi_1] A\varphi_{m-1}^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}] A_{m-1}^{(k)} dx \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12}$$

для всіх вартостей m. Повна система функцій

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots \tag{13}$$

має властивість:

$$\int_0^1 L[\psi_m] A \psi_l^{(k)} dx = 0 \qquad (l = 0,\ 1, \ldots m-1) \tag{14}$$

Так само систему функцій (5) можна заступити системами з функцій

$$\psi_{jl}(x) = \sum_{i=0}^{l-1} k_{ji}^{(l)} \varphi_{ji}(x) + \varphi_{jl}(x) \qquad (l = 0,\ 1.\ 2, \ldots,\ j = 1,\ 2, \ldots k) \tag{15}$$

теж повними, що справджують рівності

$$\int_0^1 L_j[\psi_{1m},\ \psi_{2m}, \ldots \psi_{km}]\ A_j \psi_{j\,je}^{(k)} dx = 0, \quad (l = 0, 1, \ldots,\ m-1) \tag{16}$$

якщо система лінійних рівнань щодо $k_{ji}^{(m)}$

$$\int_0^1 L_j[\psi_{1m},\ \psi_{2m}, \ldots,\ \psi_{km}]\ A_j \varphi_{ji}^{(k)} dx = 0 \qquad (i = 0,\ 1, \ldots m-1) \tag{17}$$

має один і лише один розв'язок для всіх вартостей m.

Щодо нерівности (12), то при неозначенім чиннику λ вона справджується напевно, коли функції $\varphi_i^{(k)}$ лінійно незалежні, бо тоді, як відомо,

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^1 A^2 \varphi_0^{(k)} \varphi_0^{(k)}\, dx, & \int\limits_0^1 A^2 \varphi_1^{(k)} \varphi_0^{(k)}\, dx, \ldots, & \int\limits_0^1 A^2 \varphi_{m-1}^{(k)} \varphi_0^{(k)}\, dx \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_0^1 A^2 \varphi_0^{(k)} \varphi_{m-1}^{(k)}\, dx, & \int\limits_0^1 A^2 \varphi_1^{(k)} \varphi_{m-1}^{(k)}\, dx, \ldots, & \int\limits_0^1 A^2 \varphi_{m-1}^{(k)} \varphi_{m-1}^{(k)}\, dx \end{vmatrix} > 0 \qquad (18)$$

Цей випадок напр., маємо, коли функції φ_i справджують граничні умови

$$\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = \ldots = \varphi_i^{(l-1)}(0) = 0$$

$$\varphi_i(1) = \varphi_i'(1) = \ldots \varphi_i^{(k-l-1)}(1) = 0$$

Нехай в загальнім випадку,

$$\varphi_0^{(k)}(x) = \varphi_1^{(k)}(x) = \ldots = \varphi_{v-1}^{(k)}(x) = 0\,;\ \varphi_v^{(k)}(x) \neq 0 \qquad (19)$$

тоді функції

$$\varphi_v^{(k)},\ \varphi_{v+1}^{(k)},\ \varphi_{v+2}^{(k)}, \ldots$$

є, очевидно, лінійно незалежні і при неозначенім λ

$$\begin{vmatrix} \int\limits_0^1 L[\varphi_v]\, A\varphi_v^{(k)}\, dx, & \int\limits_0^1 L[\varphi_{v+1}]\, A\varphi_v^{(k)}\, dx, \ldots, & \int\limits_0^1 L[\varphi_{m-1}]\, A\varphi_v^{(k)}\, dx \\ \int\limits_0^1 L[\varphi_v]\, A\varphi_{v+1}^{(k)}\, dx, & \int\limits_0^1 L[\varphi_{v+1}]\, A\varphi_{v+1}^{(k)}\, dx, \ldots, & \int\limits_0^1 L[\varphi_{m-1}]\, A\varphi_{v+1}^{(k)}\, dx \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_0^1 L[\varphi_v]\, A\varphi_{m-1}^{(k)}\, dx, & \int\limits_0^1 L[\varphi_{v+1}]\, A\varphi_{m-1}^{(k)}\, dx, \ldots, & \int\limits_0^1 L[\varphi_{m-1}]\, A\varphi_{m-1}^{(k)}\, dx \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (20)$$

Отже й за умови (20) функції (13) дібрати можна згідно з рівняннями (11). Справді, ці рівняння не суперечні, бо серед них є якраз стільки лінійно незалежних, скільки серед функцій

$$\varphi_0^{(k)},\ \varphi_1^{(k)}, \ldots,\ \varphi_{m-1}^{(k)}. \qquad (21)$$

4

Нехай лінійне диференціяльне рівнання

$$L(y) = A(x)\, y^{(k)} + \lambda\, A_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + \lambda\, A_k(x)\, y = f(x) \qquad (22)$$

порядку $k > 1$ має на інтервалі $(0,\ 1)$ при $\lambda = 1$ єдиний інтеґрал, що справджує умови (23)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} y^{(j)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} y^{(i)}(1) = 0 \qquad (j = 1,\ 2, \ldots k) \tag{23}$$

Пошукаймо його наближений вираз у формі

$$y_m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m)} \varphi_i, \tag{24}$$

припускаючи, що існують і справджують Lipschitz'ові умови δ-го ступеня функції

$$A^{(r-k)},\ A_1^{(r-k)}, \ldots,\ A_k^{(r-k)},\ f^{(r-k)}$$

і що функції φ_i творять $(r,\ k,\ \delta)$ — повну систему за умов (23). Не фіксуючи зразу вартости параметра λ, доберемо сучинники $a_i^{(m)}$ згідно з рівнаннями

$$\int_0^1 L\,[y_m]\, A\, \varphi_i^{(k)}\, dx = \int_0^1 f \varphi_i^{(k)}\, dx \quad (0,1, \ldots, m-1) \tag{25}$$

що можливо з огляду на умови (19) та (20).

Теорема II. Коли функції $\varphi_i^{(k)}$ творять абсолютно повну систему, то вираз (24), де сучинники $a_i^{(m)}$ справджують рівнання (25), відрізняється від інтеґрала y цього рівнання для вартостей параметра близьких до 1 на величину ступеня мализни меншого, як

$$\varepsilon_m^{r-k+\delta}(x) = \frac{M_m}{m^{r-k+\delta}}, \tag{26}$$

де M_m є функція, обмежена від m, λ та x, залежна від A, $A_1, \ldots A_k$ та f.

Довід. Впровадивши зазначення

$$u_m = y_m - y, \tag{27}$$

можемо, очевидно, дібрати такі сучинники $b_i^{(m)}$, що буде

$$u_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{m-1} b_i^{(m)} \varphi_i^{(k)} - \frac{1}{A} \varepsilon_m^{r-k+\delta} \tag{28}$$

Тоді систему рівнань (25) можна заступити такою:

$$\int_0^1 L\,[u_m]\, A\, \varphi_i^{(k)}\, dx = 0 \qquad (i = 0,\ 1, \ldots m-1) \tag{29}$$

Завдяки рівності (28), можемо утворити з рівностей (29) наступну лінійну комбінацію:

$$\int_0^1 L\,[u_m]\,(A u_m^{(k)} + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})\, dx = 0 \tag{30}$$

Зазначивши через η ріжницю $L[u_m] - Au_m^{(k)}$, перепишемо рівність (30) так:

$$\int_0^1 (Au_m^{(k)} + \eta_m)\,(Au_m^{(k)} + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})\,dx = 0,$$

звідки, за допомогою нерівности Буняковського, дістанемо:

$$\int_0^1 A^2 (u_m^{(k)})^2\,dx - 2\mu \sqrt{\int_0^1 A^2 (u_m^{(k)})^2\,dx \int_0^1 (\eta_m + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})^2\,dx} +$$

$$+ \int_0^1 \eta_m\,\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\,dx = 0,$$

де

$$|\mu| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$\sqrt{\int_0^1 (Au_m^{(k)})^2\,dx} = \mu \sqrt{\int_0^1 (\eta_m + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})^2\,dx} \pm$$

$$\pm \sqrt{\mu^2 \int_0^1 (\eta_m + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})^2\,dx - \int_0^1 \eta_m\,\varepsilon_m^{(v-k+\delta)}\,dx}$$

отже

$$\int_0^1 (Au_m^{(k)})^2\,dx \leqslant \int_0^1 (|\eta_m| + |\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}|)^2\,dx \tag{31}$$

Зазначивши Green'ову функцію виразу

$$L[y(x)] = A(x)y^{(k)} + A_1 x y^{(k-1)} \ldots + A(x)y$$

за умов (23) через $G(x, \xi)$, матимемо:

$$\left.\begin{aligned}
u_m(x) &= \int_0^1 G(x, \xi)\,.\,L[u_m(\xi)]\,\xi d \\
u_m'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\,.\,L[u_m(\xi)]\,d\xi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_m^{(k-1)}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial^{k-1} G(u,\xi)}{\partial x^{k-1}}\,.\,L[u_m(\xi)]\,d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

де в сучинниках $A_1 A_1 \ldots A_k$, f узято ξ замість x. Взявши тепер за функцію $\Gamma(\xi)$ теореми I параграфу 2 ступнево функції

$$\Gamma^{(1)}(x,\xi) = \frac{1}{A(\xi)} G(x,\xi),\ \xi^{(2)}(x,\xi) = \frac{1}{A(\xi)} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}, \ldots, \Gamma^{(k)}(x,\xi) = \frac{1}{A(\xi)} \frac{\partial G^{k-1}(x,-)}{\partial x^{k-1}}$$

і додавши до рівностей (32) належно дібрані лінійні комбінації з рівностей (29), дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} u_m(x) &= \int_0^1 \gamma_m^{(1)}(x,\xi)\,.\,L\,[u_m(\xi)]\,d\xi, \\ u'_m(x) &= \int_0^1 \gamma_m^{(2)}(x,\xi)\,.\,L\,[u_m(\xi)]\,d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_m^{(k-1)}(x) &= \int_0^1 \gamma_m^{(k)}(x,\xi)\,.\,L\,[u_m(\xi)]\,d\xi, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

де в зазначеннях згаданої теореми

$$\gamma_m^{(i)} = \Gamma^{(i)} - \Gamma_m^{(i)} \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, k).$$

Отже, з огляду на відомі властивості Green'ової функції, маємо:

$$\int_0^1 (\gamma_m^{(i)})^2\,d\xi = \frac{M_m^{(i)}}{m^{\frac{2}{3}}} = \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Далі, використавши знов нерівність Буняковського, дістанемо з (33)

$$\left.\begin{aligned} u_m^2(x) &\leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 L^2\,[u_m(\xi)]\,d\xi \\ [u'_m(x)]^2 &\leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 L^2\,[u_m(\xi)]\,d\xi \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[u_m^{(k-1)}(x)\right]^2 &\leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 L^2\,[u_m(\xi)]\,d\xi \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ці нерівності, по використанні залежности (31) та нерівности Cauchy, перетворяться в наступні:

$$\left[u_m^{(i)}(x)\right]^2 \leqslant 4\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 \left(\left|\eta_m\right| + \left|\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right|\right)^2 dx \qquad (i = 0_1,\ 1, \ldots k-1),$$

звідки

$$\left[u_m^{(i)}(x)\right]^2 \leqslant 4\,(k+1)\,M^2\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int\limits_0^1 \left[\left(u_m^{(k-1)}\right)^2 + \ldots + u_m^2 + \left(\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right)^2\right] d\xi, \quad (35)$$

де M максимум модулів функцій

$$1,\ \lambda A_1,\ \lambda A_2, \ldots \lambda A_k.$$

Із нерівностей (35) легко виводимо:

$$\left[u_m^{(i)}(x)\right]^2 \leqslant \frac{4(k+1)\,M^2\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1-4(k+1)\,M^2\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}\left[\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right]^2 \quad (i=0_1,\ 1, \ldots, k-1), \quad (36)$$

якщо число m дібрано таке велике, щоб знаменник цього виразу був додатній.

Цим показано, що для всіх вартостей λ близьких до 1 ріжниці

$$y_m - y,\ y'_m - y',\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}$$

мають ступені мализни відповідно не слабші від ступеня мализни виразу

$$\varepsilon_m^{\left(r-k+\delta+\frac{1}{3}\right)} = M_m\, m^{-\left(r-k+\delta+\frac{1}{3}\right)}.$$

Коли система фуннції $\varphi_i^{(k)}$ не є абсолютно повна, то, щоб висліди цього параграфу лишилися правдиві, досить в рівнаннях (25) *заступити* $\varphi_i^{(k)}$ *функцією* x^i.

Ясно, що в основному подані висліди не порушуються, коли припустити, що функції $A_1,\ A_1 \ldots A_k,\ f$ мають перерви; слід тільки подані вище міркування застосувати до рівнання, де замість тих функцій узято

$$\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} A\,dx,\quad \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} A_1\,dx, \ldots,\quad \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} A_k\,dx,\quad \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f\,dx$$

і зменшувати h належним робом разом із $\frac{1}{m}$.

5

Коли

$$G(x,\ \xi) = G((\xi,\ x), \quad (37)$$

то на підставі *теореми I* параграфу 2 можна першу з рівностей (34) заступити такою:

$$u_m^2(x) \leqslant \varepsilon_m^{(2k-2)} \int\limits_0^1 L^2\left[u_m(\xi)\right] d\xi,$$

або такою

$$u_m^2(x) \leqslant 4(k+1)\, M^2\, \varepsilon_m^{(2k-2)} \int\limits_0^1 \left[\left(u_m^{(k-1)}\right)^2 + \ldots + u_m^2 + \left(\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right)^2\right] d\xi,$$

що з допомогою нерівностей (36) для $i = 1, 2, \ldots k-1$ дає

$$u_m^2(x) \leqslant N_m\, \varepsilon_m^{(2k-2)} \left(\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right)^2,$$

де N_m — обмежена функція від m. Отож бачимо, що ріжниця $y_m - y$ має в цьому випадку ступінь мализни не слабший за ступінь мализни числа $m-(r+\delta-1)$; звідси, на підставі загальної теорії наближення функцій многочленами, виводимо, що ступінь мализни ріжниці $y_m^{(h)} - y^{(h)}$ є не слабший від ступеня мализни числа $m^{-(r+\delta-1-h)}$.

Розберемо докладніше випадок рівняння

$$y'' - A(x)\, y = f(x) \tag{38}$$

за умов

$$y(0) = y(1) = 0,$$

що якраз справджує вимогу (37).

В цьому випадку та й у деяких загальних поданий вище спосіб є тотожний в істоті за Ritz'овим варіяційним алгоритмом і доводить його збіжність усякий раз, коли шукана функція y існує. Досліди М. Крилова дали дуже точні визначення похибок наближених інтеґралів у Ritz'овім способі для різних важливих випадків. Тому застосування наших загальних міркувань до цієї задачі подаємо без подробиць.

Як відомо, коли η_1 та η_2 є інтеґрали однорідного рівняння

$$\eta'' - A(\xi)\, \eta = 0$$

и справджують вимоги

$$\eta_1(0),\ \eta_2(1) = 0,$$

то Green'ова функція задачі (38) є

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\eta_1(\xi)\, \eta_2(x)}{\eta'_1(0)\, \eta_2(0)} & \text{для } \xi < x \\[2ex] \dfrac{\eta_2(\xi)\, \eta_1(x)}{\eta'_1(0)\, \eta_2(0)} & \text{для } \xi > x. \end{cases} \tag{39}$$

Способом ступеневих наближень знайдемо

$$\eta_1(x) = \eta'_1(0)\, \upsilon(x), \qquad \eta_2(x) = \eta_2'(0)\, \upsilon(1-x),$$

де

$$\upsilon(x) = x + \int\limits_0^x \int\limits_0^x A(x)\, dx^2 + \int\limits_0^x \int\limits_0^x A\left(\int\limits_0^x \int\limits_0^x A(x)\, dx^2\right) dx^2 + \ldots$$

Отже

$$|G'(v_\xi)| \leqslant \frac{max\,|\upsilon|\, max\,|\upsilon'|}{|\upsilon(1)|} \leqslant \frac{e^M + e^{-M}}{4\,|\upsilon(1)|\,\sqrt{M}},$$

де

$$M = max\,|A(x)|,$$

а $|\upsilon(x)|$ можна взяти наближено з недостачею.

Величина, що в формулах (34) зазначена через $\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}$, тепер буде, як відомо з теореми I та з теорії наближення функцій многочленами, ступеня мализни не слабшого за ступінь мализни числа m^{-2}, а саме не перевищуватиме

$$\varepsilon_m^2 = Q \cdot \frac{e^M - e^{-M}}{4m^2|\upsilon(1)|\sqrt{M}} \geqslant Q \cdot \frac{max\,|G_\xi'|}{m^2} \tag{40}$$

де Q не залежить ні від m, ні від функцій A та f.

Поклавши $r=2$, $\delta=1$, матимемо так само, що

$$\left|\varepsilon_{m\ \ (x)}^{(r-k+\delta)}\right| = \left|\varepsilon_m^{(\delta)}\right| \leqslant k \cdot \frac{|y'''|}{m} \leqslant k\,\frac{N\,max\,|y| + P}{m}, \tag{41}$$

де k не залежить ні від m, ні від функцій A та f, а

$$N = max\,|A'(x)| + [max\,|A(x)|]^2,\quad P = max\,|f'(x)| + max\,|A|\,max\,|f(x)|.$$

Замість рівностей (35) матимемо:

$$u_m^2(x) \leqslant 8\varepsilon_m^{(2)} \int_0^1 \left[M^2 u_m^2 + \left(\varepsilon_m^{\delta}\right)^2\right] d\xi$$

або

$$u_m^2 \leqslant \frac{8\varepsilon_m^{(2)}\left(\varepsilon_m^{(\delta)}\right)^2}{1 - 8M^2\varepsilon_m^{(2)}} = \eta_m^2 \cdot \left(\varepsilon_m^{(\delta)}\right)^2, \tag{42}$$

звідки

$$|y_m - y| \leqslant k\eta_m\,\frac{N\,max\,(y) + P}{m}, \tag{43}$$

Отже

$$|y| \leqslant \left[max\,|y_m| + \frac{k\eta_m P}{m}\right] : \left[1 - \frac{k\eta_m N}{n}\right], \tag{44}$$

якщо

$$\frac{k\eta_m N}{m} < 1.$$

Підставивши (44) в праву сторону нерівности (43), дістанемо:

$$|y_m - y| \leqslant k\eta_m \cdot \frac{N\,max\,|y_m| + P}{m - k\eta_m N} =$$

$$= k\sqrt{\frac{8\varepsilon_m^{(2)}}{1 - 8M^2\varepsilon_m^{(2)}}} \cdot \frac{N\,max\,|y_m| + P}{m - kN\sqrt{\dfrac{8\varepsilon_m^{(2)}}{1 - 8M^2\varepsilon_m^{(2)}}}}, \tag{45}$$

що й дає похибку наближеного інтеґралу y_m, коли взяти під увагу рівність (40).

В загальнім випадку буде

$$\left|\varepsilon^{(r-k+\delta)}_{m\;\;(x)}\right| \leqslant \frac{k \max |y^{(r)}|}{m^{r-k+\delta}}, \tag{46}$$

де k є стала величина, незалежна ні від m, ні від $A_1, A_1, \ldots A_k, f$.

З другого боку, наше диференціяльне рівнання визначає $y^{(r)}$ як лінійну функцію від $y, y', \ldots y^{(k-1)}$. Отже з (36) маємо:

$$\left|y_m^{(i)} - y^{(i)}\right| \leqslant L_i \frac{\rho + |y| + |y'| + \ldots + |y^{(k-1)}|}{m^{r-k-\delta}} \cdot \eta_i, \tag{47}$$

де L_i та ρ легко визначити через k й через модулі функції $A_1, A_1, \ldots A_k, f$ та їхніх похідних, а

$$\eta_i = \sqrt{\frac{4(k+1) M^2 \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1 - 4(k+1) M^2 \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}}. \tag{48}$$

Взявши m таке велике, щоб було

$$L = \sum \frac{|L_i \eta_i}{m^{r-k+\delta}} < 1,$$

бачимо з (47), що

$$\rho + |y| + |y'| + \ldots + |y^{(k-1)}| < \frac{\rho + |y_m| + |y'_m| + \ldots + |y_m^{(k-1)}|}{1 - L}.$$

Тоді нерівність (47) можна заступити такою:

$$\left|y_m^{(i)} - y^{(i)}\right| < \frac{L_i \eta_i}{1-L} \cdot \frac{\rho + |y_m| + |y'_m| + \ldots + |y_m^{(k-1)}|}{m^{r-k+\delta}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, (k-1),$$

що й дає похибку наближеного інтеґралу y_m та його $k-1$ похідних, коли відомі, хоч би дуже наближено, з перевишкою середні квадратичні вартості величини

$$G - G_m, \quad \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G_m}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} - \frac{\partial^{k-1} G_m}{\partial x^{k-1}}.$$

6

Інтеґрація системи

$$L_j[y_1, y_2, \ldots y_k] = A_j(x) y_j' + \lambda_j \sum_{i=1}^{k} A_{ji}(x) y_i = f_j(x) \quad (j = 1, 2, \ldots k) \tag{49}$$

за граничних умов

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} y_i(0) + \sum_{i=k}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)} y_i(1) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots k) \tag{50}$$

є рівноважна з задачею інтеґрації одного лінійного рівнання k-го порядку, що її розібрано вище. Тому задачу (49) розглянемо коротко. Припустивши, що для $\lambda_j = 1$, і за умов (50) вона має єдиний розв'язок:

$$y_1, y_2, \ldots y_k,$$

шукаємо його в формі сум

$$y_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ji}^{(m)} \varphi_{ji} \qquad (j = 1, 2, \ldots k), \tag{51}$$

де функції φ_{ji} узято з системи (5) параграфу 1, визначаючи сучинники $a_{ji}^{(m)}$ із системи рівнань:

$$\int_0^1 L_j [y_{1m}, y_{2m}, \ldots y_{km}] A_j x_i \, dx = \int_0^1 f_j A_j x^i \, dx \quad (j = 1, 2, \ldots k;\ i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{52}$$

Як і у випадку одного диференціяльного рівнання k-го порядку, можна довести, що ця система не суперечна. Впровадивши зазначення

$$u_{jm} = y_{jm} - y_j \qquad (j = 1, 2 \ldots k),$$

перепишемо (52) так:

$$\int_0^1 L_j [u_{1m}, u_{2m}, \ldots, u_{km}] A_j x^i \, dx = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots k;\ i = 0, 1, \ldots m-1). \tag{53}$$

Коли всі функції A_{ji} та f_j мають похідні r-го порядку, що справджують Lipschitz'ові умови δ-го ступеня, то знайдуться такі сучинники $b_{ji}^{(m)}$, що буде

$$u'_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} b_{ji}^{(m)} x^i - \frac{1}{A_j} \varepsilon_{jm\ (x)}^{r-1+\delta}.$$

Отже з рівностей (53) можна утворити такі лінійні комбінації:

$$\int_0^1 L_j [u_{1m}, u_{2m}, \ldots u_{km}] [A_j u_j{}'_m + \varepsilon_{jm}^{r-1+\delta}] \, dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots k).$$

Звідси легко виводимо:

$$\int_0^1 \left(A_j u'_{jm}\right)^2 dx = \mu_j \int_0^1 \left[u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + \ldots + u_{km}^2 + (\varepsilon^{r-1+\delta})^2\right] dx, \tag{54}$$

де μ_j є обмежені функції від m.

З другого боку, зазначивши через

$$\begin{array}{l} G_{11}(x, \xi),\ G_{12}(x, \xi), \ldots,\ G_{1k}(x, \xi) \\ G_{21}(x, \xi),\ G_{22}(x, \xi), \ldots,\ G_{2k}(x, \xi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{k1}(x, \xi),\ G_{k2}(x, \xi), \ldots,\ G_{kk}(x, \xi), \end{array}$$

Green'ову матицю системи (49), матимемо:

$$u_{jm}(x) = \int_0^1 \sum_{l=1}^{k} G_j(x, \xi)\, L_l\,[u_{1m}(\xi), u_{2m}(\xi), \ldots u_{km}(\xi)]\, d\xi, \tag{55}$$

де в функціях A_j, A_{ji}, f_j замість x поставлено ξ. Так само, як у параграфі 4 функцію G_{il} можна представити лінійною комбінацією з функцій

$$A_j(\xi)\,\xi^l \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1)$$

з середньою квадратичною похибкою γ_{jm}, яка йде до нуля разом із $\frac{1}{m}$, і виявити ступінь мализни цієї похибки. Тоді з допомогою рівностей (53) дістаємо з (55):

$$u_{jm}^2(x) \leqslant \gamma_{jm}^2 \int_0^1 L_j^2\,[u_{1m}(\xi), u_{2m}(\xi), \ldots u_{km}(\xi)]\, d\xi \quad (j = 1, 2 \ldots k), \tag{56}$$

а звідси

$$u_{jm}^2(x) \leqslant \eta_{jm} \int_0^1 \left[u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + \ldots + u_{km}^2 + \left(\varepsilon_m^{r-1+\delta}\right)^2\right] d\xi \quad (j = 1, 2, \ldots k), \tag{57}$$

де

$$\lim_{m\to\infty} \eta_{jm} = 0.$$

Рівності (57), як подібні рівності в параграфі 4, доводять, що ріжниці

$$u_{jm} = y_{jm} - y_j$$

мають ступінь мализни вищий за ступінь мализни числа $m^{-(r-1+\delta)}$. Докладніший розбір цих похибок наближених вартостей y_{jm} функцій y_j ми опускаємо, бо в міркуваннях не було б нічого принципово відмінного від того, що подано в параграфі 5.

Зауважмо тут ще, що практично можна, утворюючи наближені інтеґрали y_m та y_{jm}, брати функції φ_{ji} з абсолютно повних систем. Але тоді доводиться в системах (25) та (52) відкидати по стільки рівнань, щоб сучинники $a_i^{(m)}$ та $a_{ji}^{(m)}$ могли справдити, крім решти цих рівнань, ще й граничні умови. Так можна визначати поближено й загальний розв'язок, коли лишити серед тих сучинників k неозначених. Другим разом застосуємо подані засоби до розв'язання рівнань інтеґральних.

7

Заступивши в рівності (24) функції φ_i функціями ψ_i з параграфу 3, отже шукаючи наближений інтеґрал рівнання (22) у формі лінійної комбінації з функцій ψ_i, дістанемо інтеґрал y у формі ряду:

$$y = a_0\,\psi_0 + a_1\,\psi_1 + a_2\,\psi_2 + \ldots,$$

що збігатиметься з огляду на доведене в параграфі 4 і що кожен його сучинник a_i визначатиметься в залежності лише від попередніх сучинників $a_0\,a_1 \ldots a_{i-1}$.

У випадку, коли функції $\psi_i^{(k)}$ творять абсолютно повну систему, обчислення зводиться на розв'язання системи нескінченного числа лінійних рівнань щодо a_0, a_1, $a_2, \ldots$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 f A\, \psi_0^{(k)}\, dx = a_0 \int_0^1 L\,[\psi_0]\, A\, \psi_0^{(k)}\, dx \\
&\int_0^1 f A\, \psi_1^{(k)}\, dx = a_0 \int_0^1 L\,[\psi_0]\, A\, \psi_1^{(k)}\, dx + a_1 \int_0^1 L\,[\psi_1]\, A\, \psi_1^{(k)}\, dx \\
&\int_0^1 f\, A \psi_2^{(k)}\, dx = a_0 \int_0^1 L\,[\psi_0]\, A\, \psi_2^{(k)}\, dx + a_1 \int_0^1 L[\psi_2]\, A\, \psi_2^{(k)}\, dx + \\
&\qquad\qquad + a_2 \int_0^1 L\,[\psi_2]\, A \psi_2^{(k)} x \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Зосібна, коли

$$\int_0^1 L\,[\psi_i]\, A\, \psi_j^{(k)}\, dx = \int_0^1 L\,[\psi_j]\, A \psi_i^{(k)}\, dx$$

для всякої пари значків i, j, то система рівнань (58) переводиться на простішу:

$$a_i \int_0^1 L\,[\psi_i]\, A \psi_i^{(k)}\, dx = \int_0^1 f A\, \psi_i^{(k)}\, dx \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Такий випадок маємо, напр., коли сучинники A_1, $A_1 \ldots$, A_k диференціяльного рівнання є сталі, а граничні умови є

$$y\,(0) = y'\,(0) = \ldots = y^{(h-1)}\,(0) = 0$$
$$y\,(1) = y'\,(1) = \ldots = y^{(k-h-1)}(1) = 0.$$

Коли система функцій $\psi_i^{(k)}$ не є абсолютно повна, то перші k з рівнань (58) можуть мати складніший вигляд, на чому тут не спиняємось. Щоправда, утворення функцій ψ_i є, з практичного погляду, не завжди виправдане, але, напр., у випадку, коли сучинники диференціяльного рівнання, мають вигляд

$$\sum \alpha x^{\beta},$$

то воно обходиться легкими квадратурами та розв'язанням систем лінійних рівнань. Подібні ж міркування можна розвинути для систем звичайних лінійних диференціяльних рівнань та для лінійних рівнань з частинними похідними.

Коли закінчувалася ця розвідка, з'явилася праця E. Trefftz'а „Konvergenz und Fehlerschätzung beim Ritz'schen Verfahren" (Math. Ann., Bd 100, Hefte 4 — 5), де теж використовується Green'ову функцію, але іншим способом і лише для доводу збіжности Ritz'ового способу в застосуванні до лінійних рівнань із частинними похідними 2 порядку еліптичного типу. Вся трудність цих проблем, з погляду поданого тут способу, є в доборі функцій φ_i, що мають бути тут функціями двох змінних і справджувати граничні умови задачі. Тут ці функції, загалом кажучи, не можна взяти в форми многочленів. Але, коли згори вважати їх за дані, то наші міркування, без принципових одмін, можна застосувати до дуже загальних рівнань із частинними похідними, до чого автор має звернутися іншим разом.

M. KRAWTCHOUK

SUR L'IHTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Entre autres résultats l'auteur démontre le théorème suivant:

Soit $y_1, y_2, \ldots y_k$ la solution unique du système des équations différentielles

$$L_j[y_1, y_2 \ldots, y_k] = A_j(x)\, y_j' + A_{j1}(x)\, y_1 + A_{j2}(x)\, y_2 + \ldots + A_{jk}(x)\, y_k = \\ = f_j(x) \qquad (j = 1,\ 2, \ldots k)$$

vérifiant les conditions frontières suivantes:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)}\, y_i(0) + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)}\, y_i(1) = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots k);$$

soit encore

$$\varphi_{j0}(x),\ \varphi_{j1}(x),\ \varphi_{j2}(x), \ldots \qquad (j = 1,\ 2, \ldots k)$$

k systèmes complets de polynomes vérifiant les mêmes conditions

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(j)}\, \varphi_{im}(0) + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)}\, \varphi_{im}(1) = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots, k;\ m = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Alors les sommes

$$y_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ji}^{(m)}\, \varphi_{ji}(x),$$

déterminées par les équations

$$\int_0^1 [L(y_{1m}, y_{2m}, \ldots y_{km}) - f_j]\, x^i\, dx = 0 \quad (i = 0,\ 1, \ldots m-1;\ j = 1,\ 2, \ldots k)$$

remplissent les conditions suivantes:

$$y_j = \lim_{m\to\infty} y_{jm} \quad (j = 1,\ 2 \ldots k)$$

М. К. КУРЕНСЬКИЙ

Про деякі звичайні диференціяльні рівнання

I. У статті Д. М. Синцова „Заметки об уравненіях, аналогичных уравненію Риккати“, Казань, 1894, розглядається декілька типів диференціяльних рівнань. Найбільше уваги звертається на рівнання вигляду

$$y' = Py^2 + Qy + R, \tag{1}$$

для якого Д. М. Синцов подає випадки інтеґрувальности та спочатку вказує й відповідну російську літературу: досліди Лєтнікова, Флорова, Олексієвського, Імшенецького та інших вчених.

Як я зауважив у розвідці цього року у I т. „Записок Київського ІНО“, Летніков випадок інтеґрувальности для (1), користуючись яким Лєтніків, Флоров та Олексієвський прийшли до можливости інтеґрування рівнань

$$y' = Py^2 + Qy - Pe^{2\int Q\,dx}\left(C - \int Pe^{\int Q\,dx}\,dx\right)^{-\frac{4i}{2i\pm 1}};$$

$$z' + Pz^2 = P\left(a + b\int P\,dx\right)^{-\frac{4k}{2k-1}}$$

є частинний випадок Abel'ової умови

$$R = a\,Pe^{2\int Q\,dx}$$

при $a = -1$, а Abel'ова умова є дуже частинний випадок моєї умови

$$\left[k\left(e^{\frac{1}{2}\int Q\,dx} - \frac{1}{2}\int Q\,e^{\frac{1}{2}\int Q\,dx}\,dx\right) + C\right]^4 R = a\,Pe^{2\int Q\,dx}$$

при $k = 0$; $C = \pm 1$.

У розвідці Н. В. Бугаєва за 1893 р. у 17 т. „Матем. Сборн.“ подається випадок інтеґрувальности

$$PQ' - QP' = 2\left(\frac{PQ^2}{4} - RP^2 - cP^3\right); \quad c = \text{const}\,[1]);$$

---

1) У тексті Бугаєва замість cP^3 стоїть cP^2. Деякі з інших помилок виправлено у 19 т. Матем. Сборн.

цей випадок відповідає частинному випадкові мого рівнання

$$t' = \frac{1}{2}t^2 + \frac{\mu_1'}{\mu_1}t + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^2\right] - \frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)',$$

(Sitzungsberichte d. M. - N. - Aer. S. Sewčenko Gesellschaff in Lemberg. H. X. 1929) що воно володіє частинними інтеґралами

$$t_1 = -\frac{\mu' - \mu_1}{\mu}; \quad t_2 = -\frac{\mu' + \mu_1}{\mu},$$

коли покласти

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad \mu_1 = P.$$

11. Звернімо увагу на цікаве розкладання інтеґралу y рівнання (1) у ступанковий дріб, про яке йде мова й у розвідках П. С. Флорова та Д. М. Синцова; він подав влучну ідею будувати інтеґрувальні форми рівнання Ріккаті.

Перевівши рівнання (1) підстановкою

$$y = \frac{Z}{P} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{P}\right)' - \frac{Q}{P}\right] \tag{2}$$

до канонічного виду

$$Z' = Z^2 + J \tag{3}$$

$$\left(J = \frac{1}{4}\left[4PR - Q^2 + 2\left(\frac{P'}{P}\right)' + 2P\left(\frac{Q}{P}\right)' - \left(\frac{P'}{P}\right)^2\right]\right),$$

підстановкою

$$Z = \frac{2J^2}{J' - 2JZ_1},$$

зведемо рівнання (3) до такої саме канонічної форми

$$Z_1' = Z_1^2 + J_1.$$

Після n подібних операцій рівнання (3) набуде вигляду

$$Z_n' = Z_n^2 + J_n,$$

де інваріянт J_n зв'язаний буде з інваріянтом J_{n-1} попередньої операції формулою

$$J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2}(\lg J_{n-1})'' - \frac{1}{4}(\lg J_{n-1})'^2.$$

Вводячи скорочення запису

$$(\lg J)'' = \lg'' J; \quad (\lg J)'^2 = \lg'^2 y,$$

інваріянтів $J_1, J_2, \ldots$ через інваріянт J заданого рівнання (3) матимемо з таких формул:

$$J_1 = J + \frac{1}{2}\lg'' J - \frac{1}{4}\lg'^2 J;$$

$$J_2 = J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J + \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right);$$

$$J_3 = J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J + \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) + \frac{1}{2}\lg'^2\Big[J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J +$$

$$+ \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) - \frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\lg'^2\Big[\Big[J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J + \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right)\Big]\Big];$$

. . . .

Коли після n операцій буде

$$2\lg''J_n = \lg'^2 J_n, \tag{4}$$

тоді ми матимемо інтеґрал Z скінченої форми, тому що

$$J_{n+1} = J_n; \quad Z_{n+1} = Z_n;$$

$$Z_n = \frac{2J_n^2}{J_n' - 2J_n Z_n},$$

або

$$Z_n = \frac{J_n' \pm \sqrt{J_n'^2 - 4 \,.\, 4 J_n^3}}{4J_n}.$$

Інтеґрал заданого рівняння знайдеться з формули

$$Z = \cfrac{2J^2}{J' - \cfrac{4JJ_1^2}{J_1' - \cfrac{4J_1J_2^2}{J_2' - \ldots - \cfrac{4J_{n-2}J_{n-1}^2}{J_{n-1}' - 2J_{n-1}Z_n}}}}, \tag{5}$$

яку, користуючись n означеннями

$$-\frac{1}{J} = I; \quad -\frac{1}{J_1} = I_1; \ldots,$$

можна переписати у вигляді:

$$Z=\cfrac{1}{\cfrac{I'}{2}+\cfrac{I}{\cfrac{I_1'}{2}+\cfrac{I_1}{\cfrac{I_2'}{2}+\cdots+\cfrac{I_{n-2}}{\cfrac{I'_{n-1}}{2}+I_{n-1}Z_n.}}}}$$

III. Рівнання (4) можна переписати так:

$$\frac{J_n''}{J_n}-\frac{3}{2}\left(\frac{J_n'}{J_n}\right)^2=0\,; \tag{6}$$

загальний інтеґрал його є

$$J_n=\frac{k_1}{(x+k_2)^2}\,. \tag{7}$$

Таким чином, коли після скінченого ряду n операцій ми прийдемо до інваріянта (7), тоді інтеґрал рівнань (1), (3) матиме скінчену форму; буде

$$Z_n=\frac{-1\pm\sqrt{1-4k_1}}{2\,(x+k_2)}\,,$$

а Z та y дістанемо з формул (5), (2).

Для дуже частинного випадку

$$n=0,$$

тобто для інваріянта

$$J=\frac{k_1}{(x+k_2)^2}\,,$$

приходимо до можливости інтеґрувати рівнання Riccati

$$Z'=Z^2+c\,(x+k)^m \tag{8}$$

тоді, коли $m=0$, або $m=-2$; для такого інваріянта й рівняння (6) задовольняється; з випадку $m=0$, завдяки перетворенню й *незалежного змінного x*, дістанемо клясичний Liouville'ів випадок інтеґрувальности рівнянь 8) для

$$m=\frac{-4i}{2i+1} \tag{9}$$

(i — число ціле дод. або від'ємне).

Другий частинний випадок

$$n=1$$

переводить рівнання (6) у таке рівнання для вирахування інваріянта J рівнання (3) зі скінченим інтеґралом:

$$\frac{J''}{J}-\frac{3}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2+2J=\frac{2k_1}{(x+k_2)^2}\,. \tag{10}$$

Це рівнання має частинний інтеґрал

$$J = \frac{k_1}{(x + k_2)^2}.$$

Коли б пощастило знайти загальний інтеґрал рівнання (10), тоді, аналогічно тому, як це робиться для випадку $n = 0$, завдяки перетворенням ще й незалежного змінного x, можна сподіватись знайти цілу клясу функцій J, яка при $n = 0$ відповідає покажчикам m вигляду (9), що вони дають скінчений інтеґрал рівнання (8).

Випадок рівнання (10), для $k_1 = 0$ являє собою рівнання Д. М. Синцова

$$\frac{J''}{J} - \frac{3}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2 + 2J = 0,$$

проінтеґроване Д. М. Синцовим за допомогою функції $Sl(u) =$ sinus lemniscaticus u, яку дістанемо з функції $\mathrm{sinam}(u)$, коли для параметра k цієї функції взяти $k^2 = -1$.

IV. Теорія рівнань

$$y' = Py^3 + Qy^2 + Ry + S \tag{11}$$

почала розвиватись лише за останні часи. Рівнання цього вигляду, за Appell'ем (Journ. de Liouville, 1889); заміною залежного та незалежного змінного, зводяться до канонічної форми

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J, \tag{12}$$

де J є абсолютний інваріянт.

З задачею інтеґрування рівнання (12) є, між іншим, зв'язана, як я вже вказував у розвідці 1926 р., „Известия Казанского Физ.-Мат. О-ва", задача про троє тіл на одній простій: рівнання руху я привів до вигляду більш простого, ніж вигляд Euler'ів, або Jacobi'їв; тоді умова інтеґрувальности рівнань визначається моїм альґебричним рівнанням 4-го ступеня, другий, Euler'ів випадок, що він належить Jacobi, приводить до рівнання вигляду (12).

Для рівнання вигляду

$$yy' + py' + qy^2 = ry + s = 0, \tag{13}$$

канонічною формою є, за Кояловичем („Изследованія о диф. ур. $ydy - ydx = Rdx$". Диссерт., Спб., 1894 р.) така:

$$YY' - Y = R(X). \tag{14}$$

Підстановка $Y = \frac{1}{Z}$ переводить Кояловичове рівнання (14) до вигляду

$$Z' + Z^2 + R(X)Z^3 = 0; \tag{15}$$

це є один з типів рівнання (11); а саме: випадок рівнання (24), що на його вказав Д. М. Синцов, коли $M_1 = 1$ (друге рівнання Синцова (23) можна було б теж написати у Appell'овому вигляді (12).

Найбільш повне дослідження про форму інтеґралу рівнання

$$(T + Uy)y' = Py^3 + Qy^2 + Ry + S \tag{16}$$

та рівнання (11)[1]) зробив E. Häntschel (Crelle Journ., Bd. 112, 1893); частинними випадками його результатів є результати дослідів Güntsche[2]), Elliot (Ann. de l'Ec. Norm, 1890) та інших вчених.

Частинний випадок рівнання (16), коли $P=0$ є рівнання вигляду (13). Це саме можна сказати й про рівнання (11), (12), (14), (15).

Зупинімось лише на одному частинному випадкові рівнання (13), інакше — рівнання (16): залежність

$$(y-\omega_1)^m C+\omega_3 y=\omega_2\omega_3 \tag{17}$$

дає інтеґрал рівнання вигляду (13) при такій умові для коефіцієнтів:

$$\left[\frac{mpp'+(m-1)p^2q+pr-(m+1)s}{2pq+p'-r}\right]'+q\left[\frac{mpp'+(m-1)p^2q+pr-(m+1)s}{2pq+p'-r}\right]=$$

$$=\frac{m}{m+1}[r+mp'+(m-1)pq];$$

функції ω_1, ω_2, ω_3, легко дістанемо через p, q, r, s квадратурами.

Рівнання (17) при

$$m=1$$

дає загальний інтеґрал рівнання Riccati (1), а саме

$$y=\frac{C\omega_1+\omega_2\omega_3}{C+\omega_3},$$

де $\omega_1\equiv y_2$ та $\omega_2\equiv y_1$ — це частинні інтеґрали рівнання Riccati, а ω_3 визначається через частинні інтеґрали y_1, y_2, y_3 з формули

$$\omega_3=\frac{y_3-y_2}{y_1-y_3},$$

а для рівнання канонічної форми (3) задовольняє Schwarz'овому рівнанню[3])

$$\frac{\omega_3'''}{\omega_3'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\omega_3'''}{\omega_3'}\right)^2=2J, \quad \text{або} \quad \{\tilde{\omega}_3,\ x\}=2J.$$

Загальний інтеґрал рівнання Riccati (1) можна написати ще за такою моєю формулою:

$$y=\Omega_1+\Omega_2\operatorname{tg}(\Omega_3+C);$$

тоді між функціями ω та Ω матимемо залежності вигляду:

$$\omega_1=\Omega_1+i\Omega_2;\quad \omega_2=\Omega_1-i\Omega_2;\quad \omega_3=e^{2i\Omega_3}.$$

29/II 1929,
м. Київ

---

[1]) Це треба мати на увазі для моєї розвідки 1926 р., при розшукуванні форми інтеґралу рівнання (12).

[2]) Diss., Jena, 1891: *R. Güntsche.*— Beitrag zur Integration d. Differentialgleichung $\frac{dY}{dZ}=$ $=P_0+P_1y+P_2y^2+P_3y^3$, Berlin, 1893.

[3]) *M. Kourensky.* — Proceedings of the London Math. Soc., vol. 24, 1925; pp. 205, 498. *M. Kourensky.* — Sitzungsberichte der M.-N.-Är. S. Sewcenko Ges. in Lemberg, H. X, 1929.

І. Е. ОГІЄВЕЦЬКИЙ

Узагальнення кососиметричного дуалістичного закону на неконґруентні перетворення

У цій статті поставлено завдання поширити твердження, подане в нашім попереднім дослідженні[1]), також на неконґруентні перетворення.

Розгляньмо перетворення, визначене співвідношеннями

$$x_i = f_i(x^1, x^2, \ldots x^n) \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

де в даному обсязі функції f_i мають неперервні частинні похідні, і де Якобіян

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial x^i}\right|$$

не зникає.

Добуток точкових перетворів, що справджують наведені вище умови, буде також точкове перетворення, так що сукупність перетворень (1) становитиме групу, де є й попарно обернені перетворення[2]).

Перетворення, визначені через (1), є деформації множини в собі[3]), бо вони є однозначні і разом з своїми оберненими перетвореннями неперервні та стоять в одній клясі з тотожними перетвореннями.

Очевидно, можна розрізняти два типи деформації множини в собі. Один з них, визначений через (1) з даним напрямом (з інваріянтною або оберненою індикатрисою), звемо прямим перетворенням, другий же, визначений відповідним оберненим перетворенням, при чому напрям множини M_n дано протилежною індикатрисою, зватимемо оберненим перетворенням.

Отже індикатриса від M_n буде за оберненого перетворення та сама, коли за прямого перетворення вона змінюється, або, навпаки, вона стає оберненою за оберненого перетворення, за прямого ж залишається інваріянтною.

Означмо тепер поняття про характеристику точкового перетворення. За характеристику вважаємо всяку річ (вектор або тензор, параметр, функцію), що її розглядаємо за точкового перетворення.

Як у випадку конґруентного перетворення[4]) розрізнюватимемо паристі й непаристі характеристики точкових перетворень. За паристу характеристику будемо вважати таку, що не змінює свого значіння підчас зміни напряму множини; за непаристу характеристику точкового перетворення[5])

[1]) Див. Rendiconti del Circ. mat. di Palermo. T. LI, 1927, стр. 315.
[2]) Пор. Lie. — Theorie d. Transformationsgruppen. B. I. S. I.
[3]) Пор. H. Tietze.—Über Analysis Situs, Hamburger Math. Einzelschriften Heft 2. H. 1923.
[4]) Див. мою працю l. c.[1]), стор. 317.
[5]) Тут іде мова тільки про такі точкові перетворення, що справджують наведені умови.

таку, що залежить від індикатриси, при чому кляса цієї індикатриси визначається клясою індикатриси множини.

Легко побачити, що індикатриса непаристої характеристики за оберненого перетворення належатиме до першої кляси, якщо за прямого перетворення вона належала до другої кляси, і навпаки.

Тепер доведімо таку теорему.

Теорема 1. Якщо за деформації множини M_n у собі буде

$$O\,[A^{a_1 a_2 \dots a_p},\ B^{b_1 b_2 \dots b_p}, \dots,\ I^{i_1 i_2 \dots i_p},\ L_{l_1 l_2 \dots l_q},\ M_{m_1 m_2 \dots m_q}, \dots, \\ R_{r_1 r_2 \dots r_q},\ \alpha] = 0, \tag{2}$$

то також

$$O\,[\overline{A}_{a_1 a_2 \dots a_p},\ \overline{B}_{b_1 b_2 \dots b_p}, \dots,\ \overline{J}_{i_1 i_2 \dots i_p},\ \overline{L}^{l_1 l_2 \dots l_q},\ \overline{M}^{m_1 m_2 \dots m_q}, \dots, \\ \overline{R}^{r_1 r_2 \dots r_q},\ -\alpha] = 0, \tag{3}$$

де

$$[a_1 a_2, \dots a_p, \dots,\ i_1 i_2 \dots i_p, \quad l_1 l_2 \dots l_q, \dots,\ r_1 r_2 \dots r_q = 1,\ 2, \dots,\ n];$$

і $A^{a_1 a_2 \dots a_p}, \dots, L_{l_1 l_2 \dots l_p}$ позначають p-разові контраваріянтні тензори й відповідно q-разові коваріянтні тензори множини M_n. Риска над тензорами у співвідношення (3) показує, що тензори підлягають змінам, зумовленим переходом індикатриси з одної кляси у другу, α означає параметр, залежний від індикатриси множини, і O позначає однозначну дію над тензорами й параметром.

Справді p і q-разовий контраваріянтний тензор є n^p чисел, або відповідно n^q, що визначені співвідношеннями[1])

$$A^{a_1 a_2 \dots a_p} = \frac{\partial \overline{x}_{a_1}}{\partial x_{h_1}} \cdot \frac{\partial \overline{x}_{a_2}}{\partial x_{h_2}} \cdots \frac{\partial \overline{x}_{a_p}}{\partial x_{h_p}} A^{h_1 h_2 \dots h_p}\ {}^{2)} \tag{4}$$

і

$$L_{l_1 l_2 \dots l_q} = \frac{\partial x_{k_1}}{\partial \overline{x}_{l_1}} \cdot \frac{\partial x_{k_2}}{\partial \overline{x}_{l_2}} \cdots \frac{\partial x_{k_q}}{\partial \overline{x}_{l_q}} L_{k_1 k_2 \dots k_q}. \tag{5}$$

Легко побачити, що множники виду

$$\frac{\partial \overline{x}_\nu}{\partial x_\mu} \quad \text{й} \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_\mu}$$

за оберненого перетворення взаємно переміняються своїми місцями у виразах (4) й (5).

Відповідно до цього змінюються тензори у співвідношеннях (2) й (3), що їх контраваріянтність і коваріянтність визначаються рангами p і q, за оберненого перетворення на такі, де контраваріянтність і коваріянтність визначається рангами q і p.

Крім цього, через те що індикатриса множини M_n за оберненого перетворення переходить з одної кляси в другу, то тензори зазнають зміни, що позначається рискою над знаком тензора.

---

[1]) Пор. A. S. Eddington. — Espace, temps et gravitation, partie théorique, Paris 1921, p. 33.

[2]) Знак суми після рівних покажчиків в однорідних виразах, як це звичайно, пропускаємо.

Але параметр змінює свій знак за оберненого перетворення. З іншого боку відбувається разом із прямим також обернене перетворення, так що разом із (2) також і співвідношення (3) є правдиве. Отже й наше твердження правдиве.

Зауваження I. На підставі теореми I можна зробити висновок, що із співвідношень[1])

$$P_k = g^{ik} P^i \tag{6}$$

виникають співвідношення

$$P^k = g_{ik} P_i, \tag{7}$$

де P^i є контраваріянтні компоненти й P_i коваріянтні компоненти вектора, g_{ik} та g^{ik} є основні тензори.

Справді дістанемо (6), бо g_{ik} є париста характеристика

$$-P^k = g_{ik}(-P_i),$$

тобто співвідношення (7).

Висновок I. Якщо за деформації множини M_n у собі існує

$$O[A^a, B^b, \ldots, I^i, L_l, M_m, \ldots, R_r] = 0, \tag{8}$$

то існує також

$$O[-A_a, -B_b, \ldots, -I_i, -L^l, -M^m, \ldots, -R^r] = 0, \tag{9}$$

де A^a, $B^b, \ldots$, R^r є контраваріянтні, L_l, $M_m, \ldots$, R_r — коваріянтні вектори.

Це виходить безпосередньо з теореми I, бо вектора можна розглядати, як тензора першого рангу, що змінює свій знак із знаком індикатриси.

Висновок II. Якщо за конґруентного перетворення площини в собі існує

$$U[W_1, W_2, \ldots, W_n, V_1, V_2, \ldots, V_n] = 0, \tag{10}$$

то також є

$$U[-V_1, -V_2, \ldots, -V_n, -W_1, -W_2, \ldots, -W_n] = 0, \tag{11}$$

де W_i і V_i є відповідні вектори для непорушеної й порушеної площини, U — функція, що встановлює однозначну відповідність між векторами W_i та V_i[2]).

Справді, сукупність конґруентних перетворень становить підгрупу групи перетворень (1); з іншого ж боку контраваріянтні й коваріянтні вектори за конґруентного перетворення є рівні величиною.

Можна легко пересвідчитись правильности таких двох тверджень, що являють собою узагальнення теореми (1).

Теорема II. Якщо за деформації множини M_n у собі є

$$O\left[A^{a_1 a_2 \ldots a_p \cdot \cdot \cdot \cdot}{}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\, b_1 b_2 \ldots b_q}, \ldots, R^{r_1 r_2 \ldots r_p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\, s_1 s_2 \ldots s_q}, \alpha\right] = 0, \tag{12}$$

то також

$$O\left[A^{\cdot \cdot \cdot \cdot\, b_1 b_2 \ldots b_q}{}_{a_1 a_2 \ldots a_p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}, \ldots, R^{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\, s_1 s_2 \ldots s_q}{}_{r_1 r_2 \ldots r_p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}, -\alpha\right] = 0 \tag{13}$$

---

1) Див. M. von Laue. — Die Relativitätstheorie, B. II. S. 40.

2) Це твердження доведено в моїм дослідженні l. c. Стр. 317.

де кожен символ[1]) у дужках означає множину чисел, що визначають тензори „$p+q$“ рангу, усі ж інші співвідношення зберігають те саме значіння, як у твердженні I.

Теорема III. Якщо за деформації множини M_n у собі є

$$A\left[A^{a_1a_2\ldots a_p\ldots\ldots}_{\ldots\ldots\, b_1b_2\ldots b_q},\ldots,\ R^{r_1r_2\ldots r_p\ldots\ldots}_{\ldots\ldots\, s_1s_2\ldots s_q},\ \alpha\right]=0 \tag{14}$$

то відбувається також

$$A\left[\overline{A}^{\ldots\ldots\, b_1b_2\ldots b_q}_{a_1a_2\ldots a_p\ldots\ldots},\ldots,\ \overline{R}^{\ldots\ldots\, s_1s_2\ldots s_q}_{r_1r_2\ldots r_p\ldots\ldots},\ -\alpha\right]=0, \tag{15}$$

де A позначає вираз, незалежний від індикатриси M_n, інші позначення зберігають своє значіння, як у твердженні II.

Зауваження II. Фізичні й геометричні закони, що справджують теорему III та що їх можна написати у вигляді (12), або (14), мають таку властивість, що кожному законові відповідає інший, який виникає з першого на підставі дуалістичного закону.

Зауваження III. Легко побачити, що дуалістичний принцип Poncelet-Plücker'а є висновок з дуалістичного закону (теорема III) в тому розумінні, що кожне твердження проєктивної геометрії, що дістаємо за допомогою дуалістичного принципу, можна вивести також на підставі дуалістичного закону.

Справді, на підставі теореми III інваріянти проєктивної групи, що їх можна визначити в формі

$$A\left[A^{a_1a_2\ldots a_p\ldots\ldots}_{\ldots\ldots\, b_1b_2\ldots b_q},\ldots,\ R^{r_1r_2\ldots r_p\ldots\ldots}_{\ldots\ldots\, s_1s_2\ldots s_q},\ \alpha\right]=0,$$

мають властивість, дану цією теоремою, так що з кожного твердження проєктивної геометрії, що має згадану вище форму, виходить інше твердження на підставі теореми III. Ті самі твердження можна вивести одне з одного за допомогою дуалістичного принципу Poncelet-Plücker'а. Як приклад візьмемо площину, що її рівнання буде

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+1=0, \tag{16}$$

де x_1, x_2, x_3 — координати змінної точки, що її можемо вважати за контраваріянтний вектор. Площина або рівнання (16) є відносно проєктивних перетворень інваріянтна, тому можна u_1, u_2, u_3 вважати за коваріянтного вектора. Іншими словами, вираз

$$u_ix^i_i=-1\quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{17}$$

характеризує площину, якщо $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ є контраваріянтний вектор і $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ — коваріянтний вектор.

Те саме рівнання (16) визначає точку, коли розглядати $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ як незалежну змінну, тобто як контраваріянтний вектор, і $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ як коваріянтний вектор. З іншого боку через інваріянтність

$$u_ix^i=-1$$

[1]) Пор. I. A. Schouten. — Ricci-Kalkül, Einleitung, S. 4.

на підставі твердження I також повинна мати місце інваріянтність

$$(-u^i)(-x_i) = -1$$

або

$$u^i x_i = -1.$$

Отже рівнання (16), залежно від того, чи ми підчас прямої чи оберненої трансформації вважатимемо його ліву частину як інваріянтну, визначає площину або точку.

Подібно можна як висновок з дуалістичного закону (теорема III) вивести також інші теореми проєктивної геометрії, що їх можна дістати за допомогою дуалістичного принципу Poncelet-Plücker'а. Те саме міркування можна поширити на простор з n вимірами й можна, наприклад, показати, що інваріянт n — вимірного проєктивного перетворення

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n + 1 = 0 \tag{18}$$

визначає точку або площину залежно від того, чи вважатимемо (18) за інваріянти прямого або оберненого перетворення, що є рівнозначне тому, чи вважатимемо $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ за контраваріянтний вектор та $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ за коваріянтний вектор чи, навпаки, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за коваріянтний вектор і $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ за контраваріянтний вектор.

J. OGIEWETZKI

Verallgemeinerung des schiefsymmetrischen Dualitätsgesetzes auf die nichtkongruenten Transformationen

Dieser Artikel stellt sich die Aufgabe den Satz, welcher in unserer früheren Mitteilung [1]) ausgesprochen wurde, auch auf nichtkongruente Transformationen zu erweitern.

Wir betrachten eine Transformation, die durch die Beziehungen:

$$x_i = f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{1}$$

bzw.

$$x^k = g_k(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad [i, k = 1, 2, \ldots, n], \tag{1'}$$

bestimmt wird, wobei in gegebenem Bereich die Funktionen f_i und g_k stetige Ableitungen besitzen und die Jacobi'schen Determinanten

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial x^i} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial x^i}{\partial x_i} \right|$$

nicht verschwinden.

Das Produkt von Punkttransformationen, die diesen Bedingungen genügen, ist auch eine Punkttransformation, so dass die Gesamtheit der Transformationen (1) eine Gruppe bildet, welche paarweise reziproke Transformationen enthält [2]).

Die Transformationen, welche durch (1) definiert werden, sind Deformationen der Mannigfaltigkeit in sich [3]), da sie eineindeutig und samt der umgekehrten Transformation auch stetig sind und endlich mit der identischen Transformation $z' = z$ in einer Klasse stehen.

Offenbar lassen sich von vornherein zwei Arten von Deformationen der Mannigfaltigkeit M_n in sich unterscheiden, die eine von ihnen, durch (1) bestimmt, mit einem gegebenem Umlaufsinn der M_n (mit invarianter oder umkehrender Indikatrix), nennen wir direkte Transformation, die andere, welche durch die entsprechende inverse Transformation (2') definiert wird

[1]) Über ein schiefsymmetrisches Dualitätsgesetz, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd LI 1927, S. 315.

[2]) Vgl. Lie. — Theorie der Transformationsgruppen, Bd I, S. I.

[3]) Vgl. H. Tietze. — Über Analysis Situs, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 2 Heft, 1923.

und bei welcher der Umlaufsinn der Mannigfaltigkeit durch die entgegengesetzte Indikatrix der M_n bestimmt ist, werden wir umgekehrte Transformation nennen. Somit bleibt die Indikatrix der M_n bei umgekehrter Transformation dieselbe, wenn sie bei der direkten sich ändert oder umgekehrt, sie kehrt sich bei der umgekehrten Transformation um, wenn sie bei direkter invariant ist.

Stellen wir jetzt den Begriff von der Charakteristik einer Punkttransformation fest. Unter Charakteristik verstehen wir ein Ding (Vektor oder Tensor, Parameter, Funktion), das bei der Punkttransformation betrachtet wird.

Wie im Fall kongruenter Transformation[1]) werden wir gerade und ungerade Punkttransformationscharakteristiken unterscheiden. Unter einer geraden Charakteristik meinen wir eine solche, die ihren Wert bei Änderung des Umlaufsinnes der Mannigfaltigkeit nicht ändert, unter ungerader Punkttransformationscharakteristik aber eine solche, die von einer Indikatrix, deren Klasse durch die Klasse der Indikatrix der Mannigfaltigkeit bestimmt wird, abhängt.

Es ist leicht zu sehen, dass die Indikatrix einer ungeraden Charakteristik bei umgekehrter Transformation von der zweiten Klasse sein wird, wenn sie bei direkter der ersten war und umgekehrt.

Jetzt beweisen wir folgenden Satz.

Satz I. Findet bei einer Deformation[2]) einer Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$O\,[A^{a_1a_2\ldots a_p},\ B^{b_1b_2\ldots b_p},\ldots,\ I^{i_1i_2\ldots i_p},\ L_{l_1l_2\ldots l_q},\ M_{m_1m_2\ldots m_q},\ldots,\ R_{r_1r_2\ldots r_q},\ \alpha] = \\ = 0; \qquad (2)$$

statt, so ist auch

$$O\,[\bar{A}_{a_1a_2\ldots a_p},\ \bar{B}_{b_1b_2\ldots b_p},\ldots,\ \bar{I}_{i_1i_2\ldots i_p},\ \bar{L}^{l_1l_2\ldots l_q},\ \bar{M}^{m_1m_2\ldots m_q},\ldots,\ \bar{R}^{r_1r_2\ldots r_q},\ -\alpha] = \\ = 0; \qquad (3)$$

wo

$$[a_1a_2\ldots a_p,\ \ldots,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p,\ l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_q,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n]$$

und

$$A^{a_1a_2\ldots a_p},\ \ldots,\ L_{l_1l_2\ldots l_q}$$

p-fach kontravariante Tensoren und bzw. q-fach kovariante Tensoren der Mannigfaltigkeit M_n bezeichnen; der Strich über die Tensoren in der Beziehung (3) weist darauf, dass die Tensoren einer Veränderung unterliegen, die durch den Übergang der Indikatrix von einer Klasse in die andere bedingt wird, α — ein von der Indikatrix von M_n abhängiger Parameter ist und O eine eindeutige Operation über die Tensoren und den Parameter ausdrückt.

In der Tat, der p-fach kontravariante Tensor und q-fach kovariante Tensor stellen n^p bzw. n^q Zahlen dar, die durch Beziehungen[3]) von der Form

$$A^{a_1a_2\ldots a_p} = \frac{\partial \bar{x}_{a_1}}{\partial x_{h_1}}\cdot\frac{\partial x_{a_2}}{\partial x_{h_2}}\cdots\frac{\partial \bar{x}_{a_p}}{\partial x_{h_p}}\,A^{h_1h_2\ldots h_p}\ {}^{4)} \qquad (4)$$

[1]) Sieh meine Arbeit a. a. o. [1]), S. 319.

[2]) In dieser Notiz ist die Rede nur von solchen Punkttransformationen, welche den hingewiesenen Bedingungen genügen.

[3]) Vgl. A. S. Eddington. — Espace, temps et gravitation, partie théorique, Paris, 1921, p. 33.

[4]) Die Summationszeichen nach gleichen Indexen in homogenem Ausrdücken werden wir, wie üblich, weglassen.

und

$$L_{l_1 l_2 \ldots l_q} = \frac{\partial x_{k_1}}{\partial \overline{x}_{l_1}} \cdot \frac{\partial x_{k_2}}{\partial \overline{x}_{l_2}} \cdots \frac{\partial x_{k_q}}{\partial \overline{x}_{l_q}} L_{l_1 l_2 \ldots l_q}; \tag{5}$$

bestimmt sind.

Es ist leicht zu sehen, dass die Faktoren von der Form

$$\frac{\partial \overline{x}_\nu}{\partial x_\mu} \text{ und } \frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_\mu}$$

bei umgekehrter Transformation ihre Plätze in den Ausdrücken (4) und (5) gegenseitig wechseln.

Dementsprechend verwandeln sich die Tensoren in den Beziehungen (2) und (3), deren Kontravarianz und Kovarianz durch die Range p und q bestimmt sind, bei umgekehrter Transformation in solche, deren Kontravarianz und Kovarianz durch die Range q und p bestimmt sind.

Ausserdem unterliegen die Tensoren, da die Indikatrix von der Mannigfaltigkeit M_n bei umgekehrter Transformation von einer Klasse in die andere übergeht, einer Veränderung, die ihren Ausdruck in Strichen über dem Tensorsymbol findet.

Der Parameter ändert aber bei der umgekehrten Transformation sein Vorzeichen. Anderseits, findet zugleich mit der direkten auch die umgekehrte Transformation statt, so dass mit (2) ist auch die Beziehung (3) richtig, danach ist unser Satz bewiesen.

Bemerkung I. Auf Grund des Satzes I folgt, dass aus den Beziehungen[1])

$$P_k = g^{ik} P^i; \tag{6}$$

die Beziehungen

$$P^k = g_{ik} P_i; \tag{7}$$

wo P^i — die kontravarianten Komponenten und P_i — die kovarianten Komponenten eines Vektors, g_{ik} und g^{ik} — die Fundamentaltensoren sind, folgen.

In der Tat, wir erhalten (6), weil g_{ik} eine gerade Charakteristik ist,

$$-P^k = g_{ik}(-P_i);$$

d. h. die Beziehung (7).

Folgerung I. Wenn bei einer Deformation der Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$O\,[A^a, B^b, \ldots, I^i, L_l, M_m, \ldots, R_r] = 0 \tag{8}$$

stattfindet, so findet auch

$$O\,[-A_a, -B_b, \ldots, -I_i, -L^l, -M^m, \ldots, -R^r] = 0; \tag{9}$$

statt, wo A^a, B^b, ..., R^r — kontravariante, L_l, M_m, ..., R_r — kovariante Vektoren sind.

Das folgt unmittelbar aus dem Satz I, da ein Vektor als ein Tensor des ersten Ranges angesehen werden kann, der sein Vorzeichen mit der ndikatrix ändert.

---

[1]) Sieh M. von Laue. — Die Relativitätstheorie, B. II, S. 40.

Folgerung II. Findet bei einer kongruenten Transformation der Ebene in sich

$$U(W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n) = 0\,; \tag{10}$$

statt, so ist auch

$$U(-V_1,\ -V_2,\ \ldots,\ -V_n,\ -W_1,\ -W_2,\ \ldots,\ W_n) = 0\,; \tag{11}$$

wo W_i und V_i die entsprechende Vektoren für die feste und bewegte Ebene sind, U — eine Funktion, welche eine eineindeutige Korrespondenz zwischen die Vektoren W_i und V_i festsetzt [1]).

In der Tat, bildet die Gesamtheit der kongruenten Transformationen eine Untergruppe der Gruppe der Transformationen (1), anderseits sind kontravariante und kovariante Vektoren bei einer kongruenten Transformation ihrer Grösse nach gleich.

Es fällt nicht schwer sich an der Richtigkeit folgender zwei Sätze, die eine Verallgemeinerung des Satzes I sind, zu überzeugen.

Satz II. Wenn bei einer Deformation der Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$O\left[A^{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ b_1 b_2 \ldots b_q},\ \ldots,\ R^{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ s_1 s_2 \ldots s_q},\ \alpha\right] = 0\,; \tag{12}$$

stattfindet, so findet auch

$$O\left[\overline{A}^{\cdots\cdots\ b_1 b_2 \ldots b_q}_{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots},\ \ldots,\ \overline{R}^{\cdots\cdots\ s_1 s_2 \ldots s_q}_{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots},\ -\alpha\right] = 0\,; \tag{13}$$

wo jedes Symbol [2]) in den Klammern eine Menge von [3]) Zahlen darstellt, welche Tensoren vom Range $(p+q)$ ausdrückt, alle anderen Beziehungen aber dieselbe Bedeutung wie in Satz I behalten.

Satz III. Findet bei einer Deformation der Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$A\left[A^{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ b_1 b_2 \ldots b_q},\ \ldots,\ R^{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ s_1 s_2 \ldots s_q},\ \alpha\right] \tag{14}$$

statt, so findet auch

$$A\left[\overline{A}^{\cdots\cdots\ b_1 b_2 \ldots b_q}_{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots},\ \ldots,\ \overline{R}^{\cdots\cdots\ s_1 s_2 \ldots s_q}_{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots},\ -\alpha\right] \tag{15}$$

wo A eine Aussage bezeichnet, welche von der Indikatrix von M_n unabhängig ist und die übrigen Bezeichungen ihre Bedeutung, wie im Satz II, behalten.

Bemerkung II. Es ist leicht zu sehen, dass die Sätze I, II, III auch dann noch wahr bleiben, wenn (2), (12) und (14) Invarianten einer Gruppe der Deformationen der M_n in sich sind.

Bemerkung III. Auf Grund des Satzes I kann man der Beziehung

$$\cos\varphi = \cos(p,\ f) = p_i,\ f^i\,; \tag{16}$$

[1]) Dieser Satz wurde von uns auch in dem Aufsatz „Über ein schiefsymmetrisches Dualitätsgesetz", loc. cit. S. 317 bewiesen.

[2]) Vgl. J. A. Schouten, Ricci-Kalkül, Einleitung, S. 4.

[3]) Vgl. M. Laue, loc. cit. [8]), S. 41.

wo p_i und f^i — kovariante und kontravariante Komponenten der Einheitsvektoren p und f sind, welche einen Winkel φ bilden $|i=1, 2|$ die Formel

$$\cos(-\varphi) = (-p^i)(-f_i);$$

d. h.

$$\cos\varphi = p^i f_i;$$

ableiten.

Ebenso folgt aus der Beziehung[1])

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\,(p^1 f^2 - p^2 f^1); \tag{18}$$

auf Grund des Satzes I

$$\sin(-\varphi) = \pm\sqrt{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2}\,[(-p_1)(-f_2) - (-p_2) - (-f_1)];$$

d. h.

$$\sin\varphi = \mp\sqrt{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2}\,(p_1 f_2 - p_2 f_1); \tag{19}$$

wo g_{ik} $(i, k = 1, 2)$ uud g^{ik} die Komponenten eines kovarianten und bzw. kontravarianten Fundamentaltensors sind, welche gerade Charakteristiken darstellen, φ, p_i, f_i, p_i, f_i behalten dieselbe Bedeutung wie in der Beziehung (16).

In der Richtigkeit der Beziehung (19) kann man sich folgendermassen überzeugen. Wie bekannt, ist[2])

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}; \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{g}; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \tag{20}$$

wobei

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$g_{21} = g_{12}; \quad g^{21} = g^{12};$$

ausserdem ist wegen (6)

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= g_{11}p^1 + g_{12}p^2; \\ f_2 &= g_{21}f^1 + g_{22}f^2; \\ p_2 &= g_{21}p^1 + g_{22}p^2; \\ f_1 &= g_{11}f^1 + g_{12}f^2; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

deshalb ist

$$p_1 f_2 - p_2 f_1 = (p^1 f^2 - p^2 f^1)\,[g_{11}g_{22} - (g_{12})^2] \tag{22}$$

Jetzt bekommen wir aus (19), (20), (21), und (22)

$$\sin\varphi = \mp\sqrt{\frac{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}{g^2}}\,(p^1 f^2 - p^2 f^1)\,[g_{11}g_{22} - (g_{12})^2];$$

---

1) Vgl. loc. cit. 11).
2) Vgl. H. Rothe. — Einführung in die Tensorrechnung, S. 41.

d. h.

$$\sin\varphi = \mp\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\,(p^1 f^2 - p^2 f^1);$$

w. z. b. w.

Auf analoger Weise kann gezeigt werden, dass aus

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k; \tag{24}$$

$$ds^2 = g^{ik}\,dx_i\,dx_k; \tag{25}$$

folgt, wo ds ein Linienelement und g^{ik}, g_{ik} — Fundamentaltensoren sind.

In der Tat, man kann ds in der Form

$$ds = l_i\,dx^i;$$

darstellen, deshalb kann man (24) auch

$$[l_i\,dx^i]^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k; \tag{26}$$

schreiben.

Dann folgt aus (24) auf Grund des Satzes I

$$[(-l^i)\,(-dx^i)]^2 = g^{ik}\,(-dx_i)\,(-dx_k);$$

wo l^i und l^i die entsprechenden kontravarianten und kovarianten Koordinatenvektoren sind.

Somit ist

$$(l^i\,dx_i)^2 = g^{ik}\,dx_i\,dx_k;$$

oder

$$ds^2 = g^{ik}\,dx_i\,dx_k;$$

Bemerkung IV. Die physischen und geometrischen Gesetze, welche dem Satz III genügen und in der Form (12) oder (14) ausgedrückt werden können, die Beschaffenheit haben, dass jedem Gesetz ein anderes entspricht, welches dem ersten auf Grund des Dualitätsgesetzes (Satzes III) entspringt.

Bemerkung V. Es ist leicht zu sehen, dass das Dualitätsprinzip von Poncelet-Plücker eine Folgerung des Dualitätsgesetzes (Satzes III) ist, in dem Sinne, dass jeder Satz der projektiven Geometrie, den man mit Hilfe des Dualitätsprinzips erhält, auch auf Grund des Dualitätsgesetze abgeleitet werden kann.

In der Tat, auf Grund des Satzes III besitzen die Invarianten der projektiven Gruppe, die in der Form

$$A\left[A^{a_1a_2\dots a_p\dots\dots}_{\dots\dots b_1b_2\dots b_q}, \dots, R^{r_1r_2\dots r_p\dots\dots}_{\dots\dots s_1s_2\dots s_q}, \alpha\right]$$

ausgedrückt werden können, die Beschaffenheit, welche durch diesen Satz III gegeben ist, so dass aus jedem Satz der projektiven Geometrie, welcher die erwähnte Form hat, ein anderer Satz, auf Grund des Satzes III, folgt. Dieselbe Sätze können auseinander mit Hilfe des Dualitätsprinzips von Poncelet-Plücker abgeleitet werden.

Als Beispiel betrachten wir die Gerade, deren Gleichung

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + 1 = 0. \tag{27}$$

geschrieben wird, wo X_1, X_2, X_3 — Koordinaten des veränlichen Punktes sind, die wir als einen kontravarianten Vektor ansehen können.

Die Ebene oder die Gleichung (27) ist gegenüber projektive Transformationen invariant, deshalb kann man U_1, U_2, U_3 aes einen kovarianten Vektor ansehen. Mit anderen Worten, der Ausdruck

$$\sum_1^u {}_i\, u_i x^i = -1; \tag{28}$$

charakterisiert eine Ebene, wenn (X_1, X_2, X_3) ein kontravarianter und (U_1, U_2, U_3) ein kovarianter Vektor ist.

Dieselbe Gleichung (28) drückt einen Punkt aus, wenn (U_1, U_2, U_3) als unabhängige Veränliche, d. h. als kontravarianter und (X_1, X_2, X_3) als kovarianter Vektor muss angesehen werden.

Anderseits muss, wegen Invarianz von

$$\sum_1^n {}_i\, u_i x^i = -1$$

auf Grund des Satzes I, auch die Invarianz von

$$\sum_1^n {}_i\, (-u^i)\,(-x_i) = -1$$

oder

$$\sum_1^n {}_i\, u^i x_i = -1$$

stattfinden.

Somit drückt die Gleichung (28), in Bezug darauf, ob wir ihren linken Teil als Invariante bei gerader oder umgekehtrer Transformation ansehen, eine Ebene oder einen Punkt aus.

Auf ähnliche Weise kann man als Folge des Dualitätsgesetzes (Satz III) auch andere Sätze der projektiven Geometrie, welche mit Hilfe des Prinzips der Dualität von Poncelet und Plücker erhalten werden können, ableiten.

Dieselben Betrachtungen kann man auf den n-dimensionalen Raum erweitern und es kann, zum Beispiel, gezeigt werden, dass die Invariante der n-dimensionalen projektiven Transformation

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n + 1 = 0; \tag{29}$$

einen Punkt oder eine Hyperebene ausdrückt, in Bezug darauf, ob wir (29) als Invariante der direkten oder umgekehrten projektiven Transformation, was equivalent dem ist, ob wir (X_1, X_2, ..., X_n) als kontravarianten Vektor und (U_1, U_2, ..., U_n) als kovarianten Vektor, oder umgekehrt: (X_1, X_2, ... X_n) als kovarianten Vektor und (U_1, U_2, ..., U_n) als kontravarianten Vektor ansehen werden.

25. VIII. 28

Я. П. БЛАНК та М. А. МИКОЛАЄНКО

Про Лієві квадрики в системі інтеґральних кривих Пфафового рівняння $\sum P dx = 0$

1

Поміж інтеґральних кривих рівнання в повних диференціялах

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \tag{1}$$

через кожну точку простору взагалі проходять дві криві, що їхні стичні площини зливаються з площинами системи. Ці криві звуться асимптотичними кривими системи. Можна і для них утворити таке ж саме збудування, яке, якщо ми маємо поверхню, буде квадрикою *Лі* [1]).

Асимптотичні криві системи визначаються рівнаннями (1) та

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0. \tag{2}$$

Будемо користуватися з символа d для напрямків уздовж однієї з асимптотичних кривих, що проходять через дану точку — уздовж кривої C, і символом δ для напрямків уздовж другої C', так що поруч з (1) і (2) маємо

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0 \tag{3}$$

$$\delta P\delta x + \delta Q\delta y + \delta R\delta z = 0, \tag{4}$$

дотичні до асимптотичних кривих, що виходять з точок кривої C, рівнання якої

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s)$$

утворюють лінійчату поверхню

$$\xi = x(s) + p\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \eta = y(s) + p\frac{\delta y}{\delta s}, \quad \zeta = z(s) + p\frac{\delta z}{\delta s}. \tag{5}$$

Три безмежно-близькі прямолінійні твірні цієї поверхні визначають деяку поверхню другого порядку, рівнання якої дістанемо, коли примітимо, що одна система її прямолінійних твірних складається з дотичних до асимптотичних кривих (непрямолінійних) лінійчатої поверхні.

---

[1]) W. Blaschke. — Differentialgeometrie, II (1923) S. 221.

Отже поверхню другого порядку можна дати в такому виді:

$$X = \xi + q\left(\frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{\partial\xi}{\partial p}\cdot\frac{dp}{ds}\right), \tag{6}$$

і аналогічні формули для Y та Z, де

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{(\xi_s\xi_p\xi_{ss})}{2\,(\xi_s\xi_p\xi_{ps})}\,. \tag{7}$$

Щоб обчислити детермінат, що входить в попередню формулу, введемо трієдр, складений з дотичних до асимптотичних кривих C і C' та нормалі системи, і уявімо відповідні вектори через його компоненти відносно цього трієдра

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{ds^2} = a\frac{dx}{ds} + b\frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \frac{\delta^2 x}{\delta s^2} = b'\frac{dx}{ds} + a'\frac{\delta x}{\delta s},\\
\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \lambda\frac{dx}{ds} + \mu\frac{\delta x}{\delta s} + \nu P, \qquad \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \mu'\frac{dx}{ds} + \lambda'\frac{\delta x}{\delta s} + \nu' P,\\
\frac{dP}{ds} = \alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \frac{\delta P}{\delta s} = \beta'\frac{\delta x}{\delta s} + \alpha'\frac{\delta x}{\delta s}.
\end{gathered} \tag{8}$$

В перших двох формулах звернімо увагу на те, що

$$\sum P d^2x = 0 \qquad \sum P\delta^2 x = 0,$$

а в двох останніх

$$\sum P^2 = 1.$$

Коефіцієнти в формулах (8) зв'язані деякими співвідношеннями; через те що

$$\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1, \qquad \sum\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)^2 = 1$$

буде

$$\begin{aligned}
a + b\cos\theta &= 0 \qquad & a' + b'\cos\theta &= 0\\
\mu + \lambda\cos\theta &= 0 \qquad & \mu' + \lambda'\cos\theta &= 0\\
\alpha + \beta\cos\theta &= 0 \qquad & \alpha' + \beta'\cos\theta &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

де θ — кут між асимптотичними кривими.

Якщо помножимо $(8)_2$ відповідно на P, Q, R і додамо, то дістанемо

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \nu, \qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \nu'$$

і через те що

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = -\sum\frac{dP}{ds}\cdot\frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\sum\frac{\delta P}{\delta s}\cdot\frac{dx}{ds},$$

то

$$\nu = -\beta\sin^2\theta, \qquad \nu' = -\beta'\sin^2\theta; \tag{10}$$

зауважмо, що

$$\sum \frac{\delta P}{\delta s} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dP}{ds}\frac{\delta x}{\delta s} = G \sin\theta,$$

де G — ліва частина умови інтеґрувальности

$$G = P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x),$$

так що

$$\nu - \nu' = G \sin\theta. \tag{11}$$

Якщо продиференціюємо (5) і підставимо частинні похідні в чисельник формули (7), то

$$(\xi_s\, \xi_p\, \xi_{ss}) = \left[\frac{dx}{ds} + p\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right),\ \frac{\delta x}{\delta s},\ \frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)\right];$$

через (9) ця формула перетворюється

$$(\xi_s\, \xi_p\, \xi_{ss}) =$$

$$= \left\{(1+p\lambda)\frac{dx}{ds} + p\nu P,\ \frac{\delta x}{\delta s},\ \left[a + p\left(\frac{d\lambda}{ds} + a\lambda + \mu\lambda + \nu\alpha\right]\frac{dx}{ds} + p\left(\mu\nu + \frac{d\nu}{ds}\right)P\right\} =$$

$$= \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s}, P\right)\left[(1+p\lambda)\, p\left(\mu\nu - \frac{d\nu}{ds}\right) - p\nu\right]\left[a + p\left(\frac{d\lambda}{ds} + a\lambda + \mu\lambda + \nu\alpha\right)\right] =$$

$$= \nu\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s}, P\right)\left[p\left(\mu - a + \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}\right) + p^2\lambda\left(\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds} - \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\nu}{\lambda}\alpha - a\right)\right]$$

або

$$(\xi_s\, \xi_p\, \xi_{ss}) = \nu\ (pA + p^2B)\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\vartheta s},\ P\right),$$

де

$$A = \mu - a - \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds},\quad B = \frac{\lambda}{\nu}\frac{d\nu}{ds} - \frac{d\lambda}{ds} - \nu a - a\lambda; \tag{12}$$

те ж саме

$$(\xi_s\, \xi_p\, \xi_{ps}) = \nu\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s},\ P\right),$$

так що формула (7) набирає такого виду:

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{1}{2}(pA + p^2B). \tag{7'}$$

Якщо підставимо в (6) замість ξ та $\frac{dp}{ds}$ їхні вирази з формул (5) і (7), дістанемо рівняння шуканої поверхні

$$X = x(s) + (q + pq\lambda)\frac{dx}{ds} + \left(p + pq\mu - \frac{1}{2}p^2qB\right)\frac{\delta x}{\delta s} + pq\nu P. \tag{6'}$$

Відносно трієдра, складеного дотичними до асимптотичних кривих та нормалею системи, ця поверхня матиме таке рівняння:

$$(\nu x - \lambda z)\left[\nu y - \left(\mu - \frac{A}{2}\right) z\right] - \nu z + \frac{1}{2} B z^2 = 0.$$

Якщо зробимо аналогічні збудовання для другої асимптотичної кривої (C'), дістанемо так само поверхню другого порядку; її рівняння відносно до цього трієдра:

$$(\nu' y - \lambda' z)\left[\nu' x - \left(\mu' - \frac{A'}{2}\right) z\right] - \nu' z + \frac{1}{2} B' z^2 = 0,$$

де

$$A' = \mu' - a' + \frac{1}{\nu'}\frac{\delta \nu'}{\delta s}, \quad B' = \frac{\lambda'}{\nu'}\frac{\delta \nu'}{\delta s} - \frac{\delta \lambda'}{\delta s} - \nu' a' - a' \lambda';$$

теорема *Лі* і полягає в тому, що на випадок поверхні, ці квадрики зливаються. У нас цього немає.

Справді, для того, щоб вони зливалися треба й досить виконання таких умов:

$$\nu = \nu', \quad \lambda = \mu' - \frac{A'}{2}, \quad \lambda' = \mu - \frac{1}{2} A, \quad B = B'.$$

Але вже перше з (11) є умова інтеґрувальности. Таким чином в кожній точці системи існує дві різні квадрики, що дані рівняннями (13), (14).

2

Для дальшого з'ясуймо геометричне значіння деяких коефіцієнтів, що входять в формули (8).

Кривини асимптотичних кривих C та C' визначаються так:

$$\frac{1}{r^2} = \sum \left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 = b^2 \sin^2 \theta, \quad \frac{1}{r'^2} = b'^2 \sin^2 \theta.$$

Щоб обчислити закрути асимптотичних кривих, користуємося зі співвідношення

$$\frac{1}{\rho} = r^2 \left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^3 x}{ds^3}\right).$$

Примітивши, що

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^3 x}{ds^3}\right) = b^2 \nu \sin \theta,$$

дістанемо

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\nu}{\sin \theta}, \quad \frac{1}{\rho'} = -\frac{\nu'}{\sin \theta}. \tag{17}$$

Якщо візьмемо на увагу (11), матимемо:

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=G;$$

сума закрутів асимптотичних кривих системи, що проходять через довільну точку, дорівнює лівій частині умови інтеґрувальности.

3

Формула Enneper'a - Beltrami, що її узагальнив проф. Д. М. Синцов відносно інтеґральних кривих Пфафового рівнання [1]), дозволяє так само обчислити добуток закрутів асимптотичних кривих.

Ця формула за спеціяльним добором координатних осей буде:

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}\right)-2H\,.\,\mathrm{II}+\mathrm{III}-G\,.\,\mathrm{IV}=0,$$

де

$$\mathrm{I}=dx^2+dy^2,\quad \mathrm{II}=\frac{1}{R_1}dx^2+\frac{1}{R_2}dy^2,\quad \mathrm{III}=\sum dP^2$$

$$\mathrm{IV}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)dx\,dy.$$

Для асимптотичної кривої буде

$$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=\frac{1}{\rho^2}\quad \mathrm{II}=0\quad \frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}=\pm\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}},$$

так що

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}+\frac{1}{\rho^2}\pm G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}+\frac{1}{\rho'^2}\mp G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

і тому

$$\tau\,.\,\tau'=\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{R_1R_2}=K.$$

Добуток закрутів асимптотичних кривих ліній дорівнює Gauss'овій кривині системи [2]).

4

Розгляньмо спеціяльний випадок, коли центри квадрик міститимуться у випрямних площинах асимптотичних кривих.

[1]) Д. М. Синцов. Сообщения Харьк. Математ. Общества за 1928 г., стор. 64 — 73

[2]) Д. М. Синцов. Наукові записки... т. III, 1928 р., стор. 139.

Координати центру першої квадрики

$$x_0 = \frac{\lambda}{B}, \quad y_0 = \frac{\mu - \frac{A}{2}}{B}, \quad z_0 = \frac{\nu}{B},$$

В нашому випадку

$$y_0 = 2\mu - A = 0$$

і за (12)

$$\mu + a = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}. \tag{18}$$

Диференціюємо тотожність

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta s} = \cos\theta$$

і користаємося зі співвідношень (8) та (9) дістаємо

$$b + \lambda = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds}, \quad b' + \lambda' = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\delta\theta}{\delta s}, \tag{19}$$

так що (20) за допомогою (9) та (19) перетворюється так:

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}.$$

Інтеґруємо останню рівність:

$$\nu = k\sin\theta,$$

де k — уздовж C^2 стале.

Порівнюючи останню формулу з (17), бачимо, що асимптотична крива C — є крива сталого закруту і навпаки, якщо асимптотична крива має сталий закрут, то відповідні центри квадрик міститимуться в їхніх випрямних площинах.

Справді

$$\frac{1}{\rho} = k,$$

тоді

$$\nu = k\sin\theta.$$

Беремо логаритмічну похідну і за допомогою (19) і (9)

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds} = a + \mu,$$

але

$$A = \mu - a + \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds} = 2\mu,$$

тобто

$$y_0 = 0$$

5

Асимптотична площина, що відповідає твірній δx лінійчатої поверхні (5), містить центр квадрики.

Справді, асимптотична площина паралельна двом безмежно-близьким прямолінійним твірним лінійчатої поверхні, так що

$$\sum u\,\delta x = 0$$

$$\sum ud\,\delta x = 0, \text{ або } \sum u\,(\lambda\,dx + \nu P) = 0. \tag{20}$$

Легко примітити, що координати центру квадрики

$$X_0 = x + \frac{\lambda}{B}\frac{dx}{ds} + \frac{\mu - \frac{A}{2}}{B}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\nu}{B}P,$$

і аналогічно для Y_0 і Z_0, справджують за допомогою (20) рівняння асимптотичної площини

$$\sum U\,(X - x) = 0.$$

На випадок поверхні центр квадрики міститься на аффіній нормалі, що геометрично означена як перетин двох асимптотичних площин (Demoulin). Якщо зберегти це означення і для системи інтеґральних кривих

$$\sum P\,dx = 0,$$

то напрямні косинуси аффіної нормалі визначаться співвідношеннями:

$$(l, \delta x, \lambda\,dx + \nu P) = 0, \quad (l, dx, \lambda'\delta x + \nu P) = 0.$$

Центри квадрик взагалі не містяться на аффіній нормалі. Щоб це було так треба:

$$\sum U\left[\left(\mu' - \frac{1}{2}A'\right)dx + \nu' P\right] = 0,$$

і також

$$\sum U'\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)\delta x + \nu P\right] = 0.$$

Коли розглянемо (21) сумісно з (20) і (21′) з формулами

$$\sum U'dx = 0, \quad \sum U'\,(\lambda'\delta x + \nu' P) = 0,$$

то дістанемо шукану умову в такому виді:

$$\frac{\lambda}{\mu - \frac{A'}{2}} = \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{\lambda'} = \frac{\nu}{\nu'}.$$

BLANK, J. P. und NIKOLAJENKO, M. A.

Ueber Lie's F_2 für Systeme Integralkurven der Pfaff'schen Differentialgleichung $\sum P\,dx = 0$

1

Zwischen den Integralkurven der totalen Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \tag{1}$$

die durch einen beliebigen Raumpunkt hindurchgehen, gibt es im Allgemeinen zwei, deren Schmiegungsebenen mit den zugehörigen Ebenen des Systems zusammenfallen. Das sind die sogenannten Asymptotenlinien des Systems. Es lässt sich für sie dieselben Konstructionen ausüben, die im Fall einer Fläche zur Lie's F_2 führt [1]).

Die Asymptotenlinien des Systems werden durch die Gleichung (1) und

$$dP dx + dQ dy + dR dz = 0 \tag{2}$$

bestimmen.

Wir benutzen die Symbole d bez. δ für Fortschreitungsrichtungen längs den beiden Asymptotenlinien C, C' die durch einen bestimmten Punkt hindurchgehen.

Es gelten also auch folgende Relationen:

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0 \tag{3}$$

$$\delta P\delta x + \delta Q\delta y + \delta R\delta z = 0. \tag{4}$$

Es seien die Gleichungen der Kurve C

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s).$$

Die Tangenten zu den Asymptotenlinien, die aus den Punkten der Kurve C herausgehen, bilden eine geradlinige Fläche.

$$\xi = x(s) + p\frac{\delta x}{\delta s},\quad \eta = y(s) + p\frac{\delta y}{\delta s},\quad \zeta = z(s) + p\frac{\delta z}{\delta s} \tag{5}$$

---

[1]) W. Blaschke. — Differentialgeometrie, II, S. 221.

Drei unendlich benachbarte Erzeugenden dieser Fläche bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichungen wir erhalten, indem wir beachten dass ihre Geraden einer Schar aus den Tangenten zu den Asymptotenlinien der geradlinigen Fläche bestehen.

Die F_2 wird also folgender Weise bestimmt:

$$x = \xi + q\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds}\right) \tag{6}$$

und analoge Formeln für Y und Z, wo

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{(\xi_s \xi_p \xi_{ss})}{2(\xi_s \xi_p \xi_{ps})}. \tag{7}$$

Um die Determinanten der letzten Formel zu berechnen, führen wir ein begleitendes Dreikant ein, das aus den Tangenten zu den Asymptotenlinien C und C' und der Normale des Systems besteht, und stellen die entsprechenden Vektoren mittels ihrer Komponenten bezüglich dieses Dreikants dar:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{ds^2} = a\frac{dx}{ds} + b\frac{\delta x}{\delta s} && \frac{\delta^2 x}{\delta s^2} = b'\frac{dx}{ds} + a'\frac{\delta x}{\delta s} \\ &\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \lambda\frac{dx}{ds} + \mu\frac{\delta x}{\delta s} + \nu P && \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \mu'\frac{dx}{ds} + \lambda'\frac{\delta x}{\delta s} + \nu' P \\ &\frac{dP}{ds} = \alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{\delta x}{\delta s} && \frac{\delta P}{\delta s} = \beta'\frac{dx}{ds} + \alpha'\frac{\delta x}{\delta s}. \end{aligned} \tag{8}$$

In beiden ersten Formeln wurde beachtet, dass

$$\sum P d^2 x = 0, \qquad \sum P \delta^2 x = 0$$

und in zwei letzten dass

$$\sum P^2 = 1.$$

Die Koeffizienten der Formel (8) sind durch einige Relationen verbunden Da

$$\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1, \quad \sum\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)^2 = 1,$$

so ist

$$\begin{aligned} &a + b\cos\theta = 0 && a' + b'\cos\theta = 0 \\ &\mu + \lambda\cos\theta = 0 && \mu' + \lambda'\cos\theta = 0 \\ &\alpha + \beta\cos\theta = 0 && \alpha' + \beta'\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

wo θ den Winkel zwischen den Asymptotenlinien bedeutet.

Indem wir (8_2) bez. mit P, Q, R multiplizieren und dann summieren, erhalten wir

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \nu \qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \nu'$$

und da

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)=-\sum\frac{dP}{ds}\cdot\frac{\delta x}{\delta s},\qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right)=-\sum\frac{\delta P}{\delta s}\frac{dx}{ds},$$

so ist

$$\nu=-\beta\sin^2\theta,\qquad \nu'=-\beta'\sin^2\theta. \tag{10}$$

Wir bemerken, dass

$$\sum\left(\frac{\delta P}{\delta s}\cdot\frac{dx}{ds}-\frac{dP}{ds}\frac{\delta x}{\delta s}\right)=G\sin\theta;$$

wo G die linke Seite der Integrabilitätsbedingung ist:

$$G=P(Q_z-R_y)+Q(R_x-P_z)+R(P_y-Q_x)$$

also

$$\nu-\nu'=G\sin\theta. \tag{11}$$

Indem wir im Zähler der Formel (7) die partiellen Ableitungen aus (5) hineinführen, erhalten wir:

$$(\xi_s\xi_p\xi_{ss})=\left[\frac{dx}{ds}+p\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right),\quad \frac{\delta x}{\delta s},\quad \frac{d^2x}{ds^2}+p\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)\right].$$

Mittels (9) kann man diese Formel zur folgenden Form bringen

$$(\xi_s\xi_p\xi_{ss})=\nu\quad(pA+p^2B)\quad\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s},\ P\right)$$

wo

$$A=\mu-a+\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds},\quad B=\frac{\lambda}{\nu}\frac{d\nu}{ds}-\frac{d\lambda}{ds}-\nu\alpha-a\lambda. \tag{12}$$

Ebenso ist

$$(\xi_s\xi_p\xi_{ps})=\nu\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s},\ P\right)$$

und die Formel (7) nimmt die folgende Gestalt.

$$\frac{dp}{ds}=-\frac{1}{2}(pA+p^2B). \tag{7'}$$

Wir erhalten die Gleichungen der gesuchten Fläche, indem wir in (6) die Ausdrücke für ξ und $\frac{dp}{ds}$ aus (5) und (7') hineinführen

$$X=x(s)+(q+pq\lambda)\frac{dx}{ds}+\left(p+pq\mu-\frac{1}{2}pd\,A-\frac{1}{2}p^2qB\right)\frac{\delta x}{\delta s}+pq\nu P. \tag{6'}$$

Wird die Fläche auf das Dreikant aus der Normale des Systems und den Tangenten zu den Asymptotenlinien bezogen, so gestaltet sich ihre Gleichung folgender Weise:

$$(\nu x - \lambda z)\left[\nu y - \left(\mu - \frac{A}{2}\right)z\right] - \nu z + \frac{1}{2}Bz^2 = 0. \tag{13}$$

Führen wir dieselbe Konstruktion auch für die zweite Asymptotenlinie C' aus, so erhalten wir eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung auf dasselbe Dreikant bezogen so lautet

$$(\nu' y - \lambda' z)\left[\nu' x - \left(\mu' - \frac{A'}{2}\right)z\right] - \nu' z + \frac{1}{2}B'z^2 = 0 \tag{14}$$

wo

$$A' = \mu' - a' + \frac{1}{\nu'}\frac{\partial \nu'}{\partial s}, \quad B = \frac{\lambda'}{\nu'}\frac{\partial \nu'}{\partial s} - \frac{\partial \lambda'}{\partial s} - \nu'\alpha' - a'\lambda' \tag{12'}$$

Lie's Satz besagt nun, dass wenn es sich um eine Fläche handelt, so fallen die beiden F_2 zusammen sollen aber diese F_2 in unserem Falle zusammenfallen, so ist notwendig und hinreichend, dass folgende Relationen stattfinden

$$\nu = \nu', \quad \lambda = \mu' - \frac{1}{2}A', \quad \lambda' = \mu - \frac{1}{2}A, \quad B = B'. \tag{15}$$

Aber die erste dieser Bedingungen ist nach (11) die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also in jedem Raumpunkte zwei verschiedene F_2 Lie's, deren Gleichungen durch (13) und (14) bestimmt sind.

2

Wollen wir die geometrische Bedeutung einiger Koefficienten der Formel (8) klar machen.

Die Krümmung der Asymptotenlinien C und C' wird so bestimmt:

$$\frac{1}{r^2} = \sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = b^2 \sin^2\theta, \quad \frac{1}{r'^2} = b'^2 \sin^2\theta, \tag{16}$$

um die Torsionen zu berechnen, benutzen wir die Relation

$$\frac{1}{\rho} = r^2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}\right)$$

Wir beachten dass

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}\right) = b^2\nu \sin\theta$$

und erhalten

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\nu}{\sin\theta}, \quad \frac{1}{\rho'} = -\frac{\nu'}{\sin\theta} \tag{17}$$

also nach (11)

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=G.$$

Die Summe der Torsionen beider Asymptotenlinien des Systems, die durch ein beliebigen Punkt hindurchgehen, ist gleich der linken Seite der Integrabilitätsbedingung.

3

Mittels der Enneper-Beltramischen Formel, die durch Prof. Sintzow[1] auf Systeme Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung verallgemeinert wurde, lässt sich auch das Produkt der Torsionen der Asymptotenlinien berechnen. Diese Formel beim speziellen Auswahl der Koordinatenaxen lautet folgender Weise

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{1}{4}G^2\right)-2H.\,\mathrm{II}+\mathrm{III}-G.\,\mathrm{IV}=0$$

wo

$$\mathrm{I}=dx^2+dy^2,\quad \mathrm{II}=\frac{1}{R_1}dx^2+\frac{1}{R_2}dy^2,\quad \mathrm{III}=\Sigma\, dP^2,$$

$$\mathrm{IV}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)dx\,dy.$$

Für eine Asymptotenlinie ist

$$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=\frac{1}{\rho^2},\quad \mathrm{II}=0,\quad \frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}=\pm\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}$$

also

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}+\frac{1}{\rho^2}\pm G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{\rho'^2}\mp G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

und daher

$$\tau.\tau'=\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{R_1R_2}=K\,^{2)}$$

Das Produkt der Torsionen der Asymptotenlinien ist gleich der Gaussischen Krümmung des Systems.

4

Betrachten wir den Spezialfall, wenn die Mittelpunkte der F_2 in den rectifizierenden Ebenen der Asymptotenlinien liegen.

[1]) D. Sintzov. Mitteilungen der Charkowaer Mathem. Ges. (4) I. 1928 S. 64 — 73.
[2]) D. Sintzov. Annal. Scientif. del l'Ukraine III. 1928. S. 139.

Die Koordinaten des Mittelpunktes der ersten F_2 sind

$$x_0 = \frac{\lambda}{B}, \quad y_0 = \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{B} \quad z_0 = \frac{\nu}{B}.$$

In unserem Falle ist

$$y_0 = 2\mu - A = 0$$

und nach (12)

$$\mu + a = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds} \tag{18}$$

Differentiieren wir die Identität

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta s} = \cos\theta$$

und benutzen die Relationen (8), (9), so erhalten wir:

$$b + \lambda = -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}, \quad b' + \lambda' = -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\delta\theta}{\delta s}. \tag{19}$$

Die Formel (18) umformt sich nach (99) und (19) so:

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}$$

also

$$\nu = k . \sin\theta,$$

wo k ist längst C konstant.

Beachten wir die Formel (17), so sehen wir, dass die Asymptotenlinie C eine Kurve konstanter Torsion ist.

Umgekehrt, soll eine Asymptotenlinie konstante Torsion besitzen, so liegen die Mittelpunkte der entsprechenden F_2 in ihren rectificierenden Ebenen.

Wirklich, ist

$$\frac{1}{\rho} = k,$$

so ist

$$\nu = k . \sin\theta.$$

Die logarithmische Ableitung gibt nach (19) und (9)

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds} = a + \mu$$

aber

$$A = \mu - a + \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds} = 2\mu$$

d. h.

$$y_0 = 0.$$

5

Die Asymptotenebene die der Erzeugenden δx der geradlinigen Fläche (5) entspricht, enthält den Mittelpunkt der F_2. Wirklich: Die Asymptotenebene ist parallel zweien unendlich benachbarten Erzeugenden der geradlinigen Fläche, also

$$\sum U\,\delta x = 0$$

$$\sum U d\delta x = 0 \quad \text{oder} \quad \sum U(\lambda d\nu + \nu P) = 0. \tag{20}$$

Man sieht leicht, dass die Koordinaten des Mittelpunktes

$$X_0 = x + \frac{\lambda}{B}\frac{dx}{ds} + \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{B}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\nu}{B}P.$$

und analog Y_0 und Z_0, befriedigen die Gleichung der Asymptotenebene

$$\sum U(X - x) = 0.$$

Im Falle einer Fläche liegt der Mittelpunkt der F_2 der lauf der Affinnormale Letztere kann geometrisch definiert werden, als Durchschnittslinie, zweier Asymptotenebenen (Demoulin). Sollen wir diese Definition auch für Systeme de Integralkurven der Pfaff'schen Differentialgleichung $\Sigma P dx = 0$ beibehalten, so werden die Richtungskosinusse der Affinnormale durch folgende Relationen bestimmt:

$$(l,\ \delta x,\ \lambda\, dx + \nu P) = 0, \quad (l,\ dx,\ \lambda'\delta x + \nu' P) = 0.$$

Die Mittelpunkte der F_2 liegen im Allgemeinen nicht auf der Affinnormale. Soll dass stattfinden, somuss sein

$$\sum U\left[\left(\mu' - \frac{1}{2}A'\right)dx + \nu' P\right] = 0 \tag{21}$$

und ebenso

$$\sum U'\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)\delta x + \nu P\right] = 0 \tag{21'}$$

Betrachten wir das sämtliche System der Gleichungen (21) und (20) bez. (21') und folgende

$$\sum U' dx = 0, \quad \sum U'(\lambda'\delta x + \nu' P) = 0.$$

So avhalten wir die gesuchte Bedingung:

$$\frac{\lambda}{\mu' - \frac{1}{2}A'} = \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{\lambda'} = \frac{\nu}{\nu'}.$$

Д. М. СИНЦОВ

Окремі випадки систем інтеґральних кривих Пфафового рівняння

В кількох статтях та нотатках[1]) я студіював деякі властивості систем інтеґральних кривих Пфафового рівняння

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{1}$$

Теорія кривини, лінії асимптотичні, ізотропні, лінії кривини, геодезичні тощо мають аналоги в цій теорії. Тепер я хочу дати деякі приклади систем кривих, що мають аналогію з певними відомими типами поверхонь.

I. СИСТЕМИ КОНІЧНІ, ЦИЛІНДРИЧНІ ТА РОЗВИВНІ

1. Питання про таку систему, що усі її площини:

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0 \tag{2}$$

проходять через ту саму точку (x_0, y_0, z_0) приводить до умови

$$P(x_0-x) + Q(y_0-y) + R(z_0-z) = 0.$$

Якщо для простоти візьмемо точку (0, 0, 0), ця умова набирає форми:

$$Px + Qy + Rz = 0, \tag{3}$$

звідкіль

$$R = -\frac{1}{z}(Px + Qy)$$

і (1) дає

$$P(zdx - xdz) + Q(zdy - ydz) = 0. \tag{4}$$

Системі (4) можна дати назву *конічної системи.*

2. Циліндричні поверхні можна характеризувати з тої їхньої властивости, що прямолінійні їх твірні, а також і дотичні площини паралельні єдиній прямій (l, m, n). В нашому разі маємо, що площини системи (2) паралельні (l, m, n), цебто

$$Pl + Qm + Rn = 0, \tag{5}$$

---

[1]) О системах интегральных кривых Пфафова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Зап. Н.-Иссл. Каф. Украины, т. III. Обобщение формулы Эннепера-Бельтрами на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения. Распространение теоремы Гаусса. Сообщ. Х. М. О. (4) I. Гауссова кривизна и линии кривизны 2-го рода, ib. (4), II.

і (1) набуває форми

$$P(ndx - ldz) + Q(ndy - mdz) = 0, \tag{6}$$

Можна цим системам дати назву *циліндричних*.

3. Легко довести, що обидві системи є окремі випадки систем, що задовольняють рівняння

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P_x' & P_y' & P_z' & P \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' & Q \\ R_x' & R_y' & R_z' & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

цебто Ґавсова кривина їх [див. (1), (4)] дорівнює нулеві.

Але повна кривина для цих систем не дорівнює нулеві, бо $\Delta' = G^2 + 4\Delta$.

Таким чином можна сказати: *системи циліндричні та конічні є окремі випадки систем, що мають Ґавсову кривину* $= 0$, *і ці системи можна назвати розвивними системами.*

4. Асимптотичні лінії конічних систем

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \text{та} \quad Px + Qy + Rz = 0 \tag{a}$$

визначаються рівнянням

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0,$$

але

$$d(Px + Qy + Rz) = 0 = Pdx + Qdy + Rdz + xdP + ydQ + zdR =$$
$$= xdP + ydQ + zdR$$

Тому маємо:

$$1) \quad \frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q} = \frac{dR}{R}$$

$$2) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Цебто асимптотичні лінії конічних систем є 1° прямі, що проходять через центр системи

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

2° плоскі криві

$$\frac{P}{\lambda_1} = \frac{Q}{\mu_1} = \frac{R}{\nu_1},$$

бо за (a) задовольняють рівняння $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = 0$.

Асимптотичні лінії *циліндричних* поверхонь визначаються рівняннями

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

з умовою

$$lP + mQ + nR = 0$$

та

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0 \quad \text{і} \quad ldP + mdQ + ndR = 0.$$

Тому

$$1^\circ \quad \frac{dx}{l}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{n}, \quad \text{цебто} \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n};$$

$$2^\circ \quad \frac{dP}{P}=\frac{dQ}{Q}=\frac{dR}{R}, \quad \text{цебто} \quad \frac{P}{\lambda}=\frac{Q}{\mu}=\frac{R}{\nu}.$$

5. З другого боку, аналогія з Ермітовими рівняннями лінійчатих поверхонь навіває думку дорівняти нулеві члени 2-го та 3-го порядку в виразі перпендикуляра з (x, y, z) на площину

$$\sum\left(P+dP+\frac{1}{2}d^2P\right)(X-x-dx)=0,$$

цебто маємо три рівняння

$$\sum Pdx=0, \quad \sum dPdx=0, \quad \sum d^2Pdx=0.$$

Коли $P=p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $Q=q=\frac{\partial z}{\partial y}$, маємо рівняння лінійчатих поверхонь, але коли $G\neq 0$ конічні та циліндричні системи цим рівнянням не задовольняють,— їх не можна вважати за окремі випадки цих систем.

6. *Лінії кривини* 2-го роду циліндричних систем визначаються рівнянням

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ nP & nQ & -lP-mQ \\ ndP & ndQ & -ldP-mdQ \end{vmatrix}=0$$

або

$$(ldx+mdy+ndz)(PdQ-QdP)=0,$$

цебто: a) сімейство плоских кривих

$$P(ndx-ldz)+Q(ndy-mdz)=0,$$
$$ldx+mdy+ndz=0$$
$$(\text{або } lx+my+nz=\text{const})$$

міститься на площинах, перпендикулярних до постійного напряму (l, m, n).

b) Друге сімейство теж плоских кривих є

$$P(ndx-ldz)+Q(ndy-mdz)=0,$$
$$PdQ-QdP=0$$

або в остаточній формі

$$P-\lambda Q=0$$
$$\lambda(nx-lz)+\mu(ny-mz)=C,$$

що містяться на площинах, паралельних тому самому постійному напряму (l, m, n).

Лінії кривини теж 2-го роду для *конічних* систем визначаються рівнянням

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix} = 0$$

за умови $Px + Qy + Rz = 0$, що зводиться до

$$(xdx + ydy + zdz)(PdQ - QdP) = 0.$$

Ці дві системи можна характеризувати так:

1° сферичні криві: $x^2 + y^2 + z^2 = C$, $P(zdx - xdz) + Q(zdy - ydz) = 0$;
2° плоскі криві: $\mu P + \lambda Q = 0$, $\lambda x + \mu y = Cz$,

які містяться в площинах, що самі проходять через вершину системи.

II. СИСТЕМИ, АНАЛОГІЧНІ ДО ПОВЕРХОНЬ ОБОРОТОВИХ

Характеристична властивість поверхонь оборотових, що дає можливість встановити їх диференціяльне рівнання, є та, що всі нормалі її зустрічають одну пряму. Це означення для систем

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

дає умову

$$\frac{P}{x} = \frac{Q}{y} = S$$

і, коли зазначимо $R = K.S$, рівнанням цих систем буде

$$xdx + ydy + Kdz = 0. \tag{6}$$

Умова інтеґрувальности:

$$0 = x\frac{\partial K}{\partial y} - y\frac{\partial K}{\partial x}$$

дає $K \equiv \Omega(x^2 + y^2, z)$, що приводить до оборотових поверхонь.

Лінії рівня для OZ вертикального є ті інтеґральні криві, що лежать на площинах, паралельних XOY,— це є кола:

$$dz = 0, \ xdx + ydy = 0,$$

тобто

$$z = z_0, \ x^2 + y^2 = C, \tag{a}$$

але нормалі до площин

$$x(X - x) + y(Y - y) + k(Z - z) = 0 \tag{b}$$

в точках (a) не зустрічають вісі OZ в одній точці:

$$\bar{z} = z_0 - K(x, y, z_0).$$

Питання про такі точки дає поверхню:

$$K(x, y, z) = z - z_0 \tag{7}$$

Інтеґральні криві, що лежать на цій поверхні, визначаються як перетин із сферою

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = C. \tag{8}$$

Лінії меридіянні системи є інтеґральні криві, що лежать на площинах $y = mx$:

$$xdx(1 + m^2) + K(x, mx, z)\,dz = 0. \tag{9}$$

Для OZ вертикальної це є лінії найкрутішого спаду, що утворюють максимальний кут із осею OZ і, як ортогональні траєкторії до ліній рівня системи, вони визначаються рівняннями

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{Kdz}{x^2 + y^2}.$$

Лінії кривини 2-го роду системи (6) визначаються рівнянням

$$O = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & K \\ dx & dy & dK \end{vmatrix} \equiv (dK - dz)(ydx - xdy). \tag{10}$$

Маємо два сімейства: a) лінії меридіянні (9); b) лінії (7), (8) такі, що нормалі в їх точках до площини (*b*) зустрічають вісь Z-тів в одній точці.

III. ЛІНІЇ НАЙКРУТІШОГО СПАДУ

Хай OZ є вертикальна пряма, і треба найти

$$\max . c = -\frac{Pa + Qb}{R}$$

за умови

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{Pa + Qb}{R}\right)^2 = 1$$

або

$$R^2(a^2 + b^2) + (Pa + Qb)^2 = R^2.$$

Маємо

$$P - \lambda[(P^2 + R^2)a + PQb] = 0,$$
$$Q - \lambda[PQa + (Q^2 + R^2)b] = 0,$$

звідкіль

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{(P^2 + R^2)a + PQb}{P} = \frac{PQa + (Q^2 + R^2)b}{Q}$$

або

$$\frac{a}{P} = \frac{b}{Q} = \frac{-Rc}{P^2 + Q^2},$$

але

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds},$$

отже маємо

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-Rdz}{P^2 + Q^2}.$$

рівняння ліній найкрутішого спаду нашої системи.

Цікаво відзначити, що для системи кривих лінійного комплексу можна знайти конечні рівняння цих ліній. Рівняння кривих лінійного комплексу можна написати так:

$$ydx - xdy + kdz = 0.$$

Отже відповідні лінії найкрутішого спаду мають за рівняння

$$\frac{dx}{ky} = \frac{dy}{-ky} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Перші два відношення дають інтеґрал $x^2 + y^2 = C$.

Покладімо

$$x = \sqrt{C} \cos\theta, \quad y = \sqrt{C} \,.\, \sin\theta.$$

Тоді

$$\frac{dz}{C} = -\frac{d\theta}{k} \therefore z = \frac{C}{k}\theta + C'.$$

Отже лінії найкрутішого спаду для системи інтеґральних кривих лінійного комплексу є

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = \frac{a^2}{k}(\theta - \theta_0),$$

тобто ґвинтові лінії.

IV. КРИВІ ЛІНІЙНОГО КОМПЛЕКСУ

Хай рівняння лінійного комплексу є

$$ydx - xdy + kdz = 0, \tag{1}$$

так що

$$P = y, \quad Q = -x, \; R = k,$$

маємо

$$G = -2k.$$

Умову інтеґрувальности задовольняє тільки спеціяльний лінійний комплекс.

Детермінант $\Delta = -k^2$; $\Delta' = 4\Delta + G^2 = 0$.

Отже *повна кривина системи дорівнює нулеві, а Ґавсова*

$$= \frac{k^2}{(x^2 + y^2 + k^2)^2}.$$

Асимптотичні лінії:

$$(dydx - dxdy + 0 \, . \, dz \equiv 0)$$

невизначені.

Лінії кривини 1-го роду невизначені: їх рівнання

$$\begin{vmatrix} 0 & y & dx \\ 0 & -x & dy \\ 0 & k & dz \end{vmatrix} = 0$$

задовольняється тотожно.

Лінії кривини 2-го роду:

$$O = \begin{vmatrix} y & -x & k \\ dx & dy & dz \\ dy & -dx & 0 \end{vmatrix} \equiv -k(dx^2 + dy^2) + dz(ydx - xdy),$$

або за (1)

$$0 = -k(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Лінії кривини 2-го роду є мінімальні криві.

Геодезичні лінії 1-го роду (найпряміші)

$$O = \begin{vmatrix} y & -x & x^2+y^2+k^2 \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} \equiv (x^2+y^2+k^2)(x'y'' - y'x'').$$

Особлива розв'язка є

$$x^2 + y^2 + k^2 = 0,$$

загальна розв'язка

$$y = Cx + C', \quad kz = C'' - C'x,$$

цебто прямі комплексу.

Геодезичні лінії 2-го роду (найкоротші[1]) визначаються рівняннями

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -\lambda' y - 2\lambda y' \\ y'' &= \lambda' x + 2\lambda x' \\ z'' &= -k\lambda' \end{aligned} \right\} . \tag{2}$$

Останнє дає безпосередньо

$$z' = c - k\lambda$$

і за (1)

$$(y'x - x'y = (c - k\lambda)\, k.$$

Оскуляційна (стична) площина:

$$Xy - Yx + k(Z - z) = 0. \tag{3}$$

За допомогою (1) та (2) складаємо

$$x'y'' - y'x'', \quad y'z'' - z'y'', \quad z'y'' - z'z'',$$

[1]) Див. H. Liebmann. — Kürzeste u. geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem Math. Ann. 52. 1899. 120 — 126.

що пропорційні коефіцієнтам (3). Отже маємо рівняння

$$-\frac{1}{y}\left[\lambda'\left(ky'+\frac{x}{k}(xy'-yx')\right)+\frac{2\lambda}{k}(xy'-yx')\,x'\right]=$$

$$=-\frac{1}{x}\left[\left(kx'-\frac{y}{k}(xy'-yx')\right)\lambda'-2\lambda\frac{y'}{k}(xy'-yx')\right]=$$

$$=\frac{1}{k}\left[\lambda'(xx'+yy')+2\lambda(x'^2+y'^2)\right].$$

Відсіль, порівнюючи перше та третє відношення

$$\lambda'(x^2+y^2+k^2)+2\lambda(xx'+yy')=0,$$

тобто

$$\lambda=\frac{C'}{x^2+y^2+k^2}.$$

Тому

$$xy'-yx'=C-\frac{C'k^2}{x^2+y^2+k^2}=-kz'.$$

Введемо полярні координати:

$$r^2\frac{d\theta}{ds}=C-\frac{C'k}{r^2+k^2},\quad ds^2=r^2d\theta^2+dr^2+\frac{r^4d\theta^2}{k^2}.$$

Отже

$$\left(r^2+\frac{r^4}{k^2}\right)d\theta^2+dr^2=\frac{r^4d\theta^2}{\left(C-\dfrac{C'k^2}{r^2+k^2}\right)^2}.$$

Тому

$$\theta-\theta_0=\int\frac{kr\,[C(r^2+k^2)-k^2C']\,dr}{\sqrt{-(r^2+k^2)[C(r^2+k^2)-k^2C']^2+k^2r^2(r^2+k^2)^2}}.$$

Підставлення

$$r^2+k^2=t,\quad \frac{k^2C'}{C}=a,\quad \frac{k^2}{C}=b$$

доводить формулу до остаточного виду:

$$\theta-\theta_0=\int\frac{(t-a)\,dt}{2\sqrt{t[(t-a)^2+b(t-k^2)]}},$$

як і у H. Liebmann'a.

RÉSUMÉ

Étude de quelques cas particuliers des systèmes des courbes intégrales de l'équation de Pfaff

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \tag{1}$$

qui présentent des analogies avec certaines classes de surfaces:

I. Si $Px+Qy+Rz=0$,

tous les plans

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0 \qquad (2)$$

passent par l'origine (système conique)

Si $$P.l+Qm+Rn=0$$

les plans (2) sont parallèles à une direction donnée (l, m, n) (système *cylindrique*). Pour ces systèmes $\Delta=0$, donc la courbure de Gauss est nulle, $\Delta' \neq 0$. Les lignes de courbure de 2-d espèce pour les premières sont: a) les courbes sphèriques: (1) $xdx+ydy+zdz=0$, b) courbes planes $\mu P-\lambda Q=0$, $c(\lambda x+\mu y)=z$; pour les systèmes cylindriques ce sont deux familles de courbes planes

a) $\mu P-\lambda Q=0, \quad \lambda(nx-lz)+\mu(ny-mz)=c'$;

b) $P(ndx-ldz)+Q(ndy-mdz)=0, \quad lx+my+nz=l.$

II. Systèmes analogues aux surfaces de révolution:

$$\frac{P}{x}=\frac{Q}{y}=\frac{R}{K(x, y, z)}$$

a) Courbes de niveau sont des cercles concentriques: $z=z_0$, $x^2+y^2=l.$

b) Courbes dont les perpendiculaires (2) rencontrent l'axe Oz dans un même point $z=z_0$ sont découpées de la surface

$$K(xyz)=z-z_0$$

par des sphères

$$x^2+y^2+(z-z_0)^2=C.$$

c) Courbes méridiennes sont

$$y=mx, \quad xdx(1+m^2)+K(x, mx, z)\,dz=0.$$

Ce sont en même temps les lignes de la plus grande pente.

Les courbes b) et c) sont les lignes de courbure de 2de espèce.

III. Les lignes de la plus grande pente du complexe linéaire sont des hélices circulaires.

IV. Indication des courbes caractéristiques pour le complexe liniaire: Courbure complète nulle, celle de Gauss $\neq 0$. Lignes asymptotiques indéfinies: chaque courbe intégrale peut être regardée comme asymptotique. Lignes de courbure de 1-ère espèce sont aussi indéfinies, celles de 2de — des lignes minimales. Lignes géodésiques de 1-ère espèce (die geradesten) sont les droîtes du complexe, celles de 2de espèce (die kürzesten) sont déterminées par l'intégrale elliptique (cfr. Liebmann. Math. Ann. 52).

Д. М. СИНЦОВ

Геометрія Монжевих рівнань

Рівнання між низкою однорідних координат точки $x_1 x_2 x_3 x_4$, та низкою координат прямої $p_{12} p_{13} \ldots p_{34}$:

$$F\left(\overset{m}{x}; \overset{r}{p}\right) = 0, \tag{1}$$

визначає конфігурацію, що студіював Bonsdorf — Bulletin Ac. Petersb., 1878, але дав лише простіші енумеративні властивості.

Випадок $m = r = 1$ студіювали Lazzeri, Veneroni, Kasner, Ogura, за останній час Chouffeur в дуже докладній роботі Het bilineaire punt-lijn connex in de driedimensionale ruimte. Amst. 1927 — 8°. 139 ст.

Для $r = 1$ головну коїнциденцію розробив A. Voss під назвою Punct-Ebenen Systeme.

Головна коїнциденція конексу (1) є сукупність елементів (x, p), що їх точка x та пряма p мають інцидентне (злите) положення, тобто точка x лежить на прямій p, або пряма p проходить через точку x, і тому справджуються рівнання

$$(xpp)_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

незалежних є два. В просторі цих елементів маємо ∞^5, в конексі (1) ∞^4.

З цією коїнциденцією зв'язана певна інтеґраційна проблема: розподілити ці ∞^4 елементів на ∞^3 інтеґральних множин (Integralmannigfaltigkeiten) 1-го ступеня, що утворюються неперервним переходом від точки x до безконечно-близької точки $x + dx$ уздовж прямої p, і т. ін. Так що

$$p_{ik} = x_i dx_k - x_k dx_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Підставимо (3) в (1) і маємо рівнання 1-го ступеня

$$F\left(\overset{m}{x_i}; \overset{r}{x_i dx_k - x_k dx_i}\right) = 0. \tag{4}$$

Поклавши $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$, $dx_4 = 0$, маємо рівнання

$$0 = F(x, y, z, 1; xdy - ydx, xdz - zdx, ydz - zdy, -dx, -dy, -dz), \tag{4}$$

яке S. Lie назвав Монжевим рівнанням.

Коли в (1) $r = 1$, рівнання має форму $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, тобто є Пфафове рівнання, що його студіювали A. Voss, R. Lilienthal, H. Liebmann, S. Lie (Geometrie d. Berührungstransformationen B. 1), Rogers, G. Darboux.

У своїх друкованих розвідках[1]) я виявив властивості систем інтегральних кривих рівнання (5), що мають величезну аналогію з властивостями сукупности кривих, які лежать на поверхні, але показують і істотні відміни й через те дають можливість глибше розуміти поняття елементу поверхні та теорію поверхонь взагалі.

Перехід від випадку $r=1$ до випадку $r>1$ тягне за собою значні зміни властивостей відповідних конфігурацій, на що звертав увагу Софус Лі та підкреслював ріжницю між Пфафовими та Монжевими рівнаннями. Це є факт, що зустрічаємо для конексу з елементом (точка, пряма) в площині, але в просторі (точка, площина).

До цього часу маємо дуже небагато результатів в геометрії Монжевих рівнань. Основне є один капітальний результат С. Лі в Berichte Sächsischen Gesellschaft, 1898 [також Math. Ann., 59 — у фрагментах II тому Geometrie d. Berührungstransformationen], але окремі зауваження зустрічаємо і в роботах G. Darboux Mémoire sur les solutions singulières des équations différentielles du 1er ordre та інших. Щождо систем кривих лінійчатого комплексу не лінійного, то на помилку в результаті С. Лі вказав недавно L'ainé[2]), а виправили Gambier — геометрично та H. Liebmann — аналітично. В зв'язку з цим дальше студіювання властивостей Пфафового рівнання природно привело мене до спроби поширити на інтеґральні криві Монжевого рівнання ці властивості, наслідком її є ця робота.

Головніші результати я доповідав на засіданнях семінару н.-д. катедри геометрії та Харківського Математичного Товариства.

§ 1. РАДІЮС КРИВИНИ ТА ТЕОРЕМА MEUSNIER

Першу виразну вказівку на можливість поширити теорему Meusnier на систему інтеґральних кривин Монжевого рівнання (4) зустрічаємо в статті С. Лі Einige Bemerkungen über Pffaf'sche Gleichungen, Leipzig. Ber. 1896. B. 48. S. 412, але Fr. Engel підкреслює, що по суті вона є вже й у відомому мемуарі Über Complexe etc. M. Ann. Bd5. Можна (4') переписати простіше

$$F(x,\ y,\ z;\ dx,\ dy,\ dz)=0. \tag{5}$$

Набуває важливого значіння те, що рівнання (5) є однорідне відносно dx, dy, dz.

Поділом на ds у відповідній степені маємо

$$F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')=0, \tag{5}$$

рівнання також однорідне відносно x', y', z',

$$x'^2+y'^2+z'^2=1, \tag{6}$$

та з кожною точкою простору $(x,\ y,\ z)$ це рівнання зв'язує такий конус, прямолінійні твірні якого є дотичні інтеґральних кривих (5). Рівнання цього конусу є:

$$F(x, y, z;\ X-x,\ Y-y,\ Z-z)=0. \tag{7}$$

[1]) Зап. Н.-Дос. Мат. Кат. України, т. III. С. Хар. М. О. (4), т. I, II, та Math. Ann. 101. Див. також Я. П. Бланк. Сооб. Х. М. О (4), II та III.

[2]) Nouv. Ann. (5), III, 1929, але ще раніш P. Demoulin C. R. Paris, t. 24, p. 1077, 1897. Див. F. Engels'Anmerkungen zum III Bd. S. Liés Gesammelten Abhandlungen.

Коли $r=1$, конус зводиться на площину. Площину дотичну до цього конусу по твірній (x', y', z') можна визначити рівнанням

$$F'_{x'}(X-x)+F_{y'}(Y-y)+F'_{z'}(Z-z)=0. \qquad (8)$$

Хай M' — точка

$$\left(x+x'ds+\frac{1}{2}x''ds^2+\ldots,\ y+y'ds+\frac{1}{2}y''ds^2+\ldots,\ z+z'ds+\frac{1}{2}z''ds^2+\ldots\right),$$

безконечно близька до точки (x, y, z), лежить на інтеґральній кривій, дотична до якої міститься в площині (8). Перпендикуляр з M' на площину (8), якщо обмежитись членами 2-го порядку, є

$$M'Q=\frac{(F'_{x'}.x'+F'_{y'}y'+F'_{z'}.z')\,ds+\frac{1}{2}(F'_{x'}.x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z'')\,ds^2+\ldots}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}};$$

$M'Q$ — паралельна нормалі до площини (8) в точці $M(x, y, z)$.

Але

$$x'F'_{x'}+y'F'_{y'}+z'F'_{z'}\equiv rF(x, y, z;\ x', y', z')=0,$$

отже

$$M'Q=\frac{1}{2}\frac{F'_{x'}x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}. \qquad (10)$$

Хай MP — пряма, що уздовж її (8) дотикається до конусу (7). Якщо $M'P\perp MP$, маємо

$$M'Q=\overline{M'P}.\cos\varphi.$$

Хай в площині MPM' пряма $M'C\perp MM'$ $MC\perp MP$; маємо із $\triangle MM'C\infty\triangle MPM'$

$$\frac{1}{MC}=\frac{M'P}{MM'^2}. \qquad (11)$$

Якщо ж $\varphi=0$, точки P та Q зливаються, $MD=2R$ є діяметр кола, що проходить через точки M, M' та C і

$$\frac{1}{R}=\frac{F'_{x'}x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}. \qquad (12)$$

Для площини $M'PM$, що утворює кут φ з площиною $M'MN$, маємо

$$\frac{1}{R_\varphi}=\frac{M'P}{MQ'^2}=\frac{M'Q}{\cos\varphi\, MM'^2}$$

або

$$\frac{1}{R_\varphi}=\frac{1}{R\cos\varphi},\quad \text{але}\quad R_\varphi=R.\cos\varphi, \qquad (I)$$

тобто, коли φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$ і відповідний центр кривини C описує коло діяметру $MC_0 = R$ в площині, що проходить через M та перпендикулярна до прямої

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

це є *круг Meusnier. Для кожного* φ *відповідний центр кривини* C *є проєкція на відповідну площину центру кривини тієї інтеґральної кривої, що її оскуляційна (стична) площина проходить через нормаль.*

Це є теорема Meusnier, поширена на системи інтеґральних кривих рівнання (5), яку найшов S. Lie.

Коли візьмемо повну похідну (5′) по s, маємо

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' = -(F'_{x'} x'' + F'_{y'} y'' + F'_{z'} z''), \tag{II}$$

то замість (12) маємо

$$\frac{1}{R_\varphi} = -\frac{F'_x x' + F'_y y' + F'_z z'}{\cos\varphi \sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}}, \tag{12′}$$

для $\varphi = 0$

$$\frac{1}{R} = -\frac{F'_x x' + F'_y y' + F'_z z'}{\sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}}. \tag{13}$$

Формула (12′) є формула S. Lie, що міститься в 59 томі Math. Ann. В 98 т. Ber. Sächs. Ges. замість φ фігурує n кут його доповнення до 90° між дотичною площиною та стичною (оскуляційною) площиною інтеґральної кривої.

Коли (5′) лінійне відносно x', y', z', тобто (5) є Пфафове рівнання, (13) дає формулу

$$\frac{1}{r} = -\frac{P' x' + Q' y' + R' z'}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \tag{13′}$$

а проте згідну із знаком включно з тою, що мали раніше; істотно вона відрізняється від (13) тим, що *знаменник не залежить від* x', y', z'. Але (13) і (13′) обидві не залежать від похідних 2-го порядку, тобто *усі криві Монжевого рівнання* (5), *що мають ту саму дотичну пряму й стичну площину, мають і однакову першу кривину.*

§ 2. ВИПАДОК НЕВИЗНАЧЕНОСТИ

Дослід формули (13) дає перш за все те, що знаменник знищується, 1° коли (x', y', z') є напрям особливої твірної конусу (7), 2° коли площина (18) є мінімальна. Ці обидва випадки зараз розглядати не будемо.

Формула (13) також порушається, коли

$$F_x' x' + F_y' y' + F_z' z' = 0. \tag{14}$$

Якщо ця умова справджується для всіх лінійних елементів, тобто для всіх елементів (x, p), що вдовольняють (2), функція повинна бути інтеґралом сукупної системи.

$$\frac{dx}{x'}=\frac{dy}{y'}=\frac{dz}{z'}=\frac{dx'}{0}=\frac{dy'}{0}=\frac{dz'}{0}.$$

Три інтеґрали $x'=c$, $y'=c'$, $z'=c''$ пишемо одразу; щождо останніх трьох, то із $\dfrac{y'dx-x'dy}{0}=\dfrac{z'dx-x'dz}{0}=\dfrac{z'dy-y'dz}{0}$ маємо

$$xy'-x'y=C''', \quad zx'-xz'=C^{\mathrm{IV}}, \quad z'y-y'z=C^{\mathrm{V}},$$

тобто загальний інтеґрал є

$$F(x', y', z', \quad yz'-zy', \quad zx'-xz', \quad xy'-yx')=0, \tag{14a}$$

це є Монжеве рівнання лінійчатого комплексу

$$F(p_{41}, p_{42}, p_{43}, p_{23}, p_{31}, p_{12})=0.$$

Коли умова (14) справджується для деякого напряму (x', y', z') і разом з тим $\sin\Theta$ дорівнюється 0, вираз (12′) стає ілюзорний, що й підкреслював S. Lie l. c. Нижче ми дослідимо цей випадок. Зараз для перевірки обчислімо $\Sigma F'^2_{x'}$ для лінійного комплексу, що має за Монжеве рівнання:

$$ax'+by'+cz'+\alpha(yz'-zy')+\beta(zx'-xz')+\gamma(zx'-yx')=0.$$

$$F'_{x'}=a+\beta z-\gamma y, \quad F'_{y'}=b+\gamma x-\alpha z, \quad F'_{z'}=c+\alpha y-\beta x.$$

Звідкіль

$$F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}\equiv a^2+b^2+c^2+2\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}+$$

$$+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\neq 0,$$

а

$$F_x'x'+F_y'y'+F_z'z'=x'(\gamma y'-\beta z')+y'(\alpha z'-\gamma x')+z'(\beta x'-\alpha y')\equiv 0.$$

Коли візьмемо лінійний комплекс в канонічному виді, маємо

$$(5):\ ydx-xdy+kdz=0 \quad (5'):\ yx'-xy'+kz'=0.$$

$$F'_{x'}=y, \quad F'_{y'}=-x, \quad F'_{z'}=k\ \therefore \sum F'^2_{x'}=x^2+y^2+k^2.$$

$$x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z\equiv x'y'+y'x'\equiv 0.$$

Тетраедральний комплекс

$$ap_{14}p_{23}+bp_{13}p_{24}+cp_{34}p_{12}=0$$

має за Монжеве рівняння

$$(b-c)\,xy'z' + (c-a)\,yz'x' + (a-b)\,zx'y' = 0$$

і

$$\sum F_{x'}^{\prime 2} \equiv x'^2\,[(a-b)^2 z^2 + (c-a)^2 y^2] + y'^2\,[(a-b)^2 z^2 + (b-c)^2 x^2] + \\ + z'^2\,[(c-a)^2 y^2 + (b-c)^2 x^2] + 2\,x'y'\,(b-c)\,(c-a)\,xy + \\ + 2\,x'z'\,(b-c)\,(a-b)\,xz + 2\,y'z'\,(c-a)\,(a-b)\,yz \neq 0.$$

$$x'F_{x'} + y'F_{y'} + z'F_{z'} = x'y'z'\,[b-c+c-a+a-b] \equiv 0.$$

§ 3. ЛІНІЇ ГОЛОВНИХ ДОТИЧНИХ (АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ)

Можна й для систем інтеґральних кривих (5) поставити питання про ті напрями, що для них $M'Q$ є безконечно мала не 2-го, а 3-го порядку; отже маємо:

$$F_{x'}x' + F_{y'}y' + F_{z'}z' = 0. \tag{14}$$

Криві, що в точці (x, y, z) дотикаються до цих прямих, мають з відповідною дотичною площиною конусу (7) стичність не 1-го, а 2-го порядку.

Можна підійти до них трохи інакше. Щоби дотична площина (8) конусу (7) була стичною (оскуляційною) площиною кривої, треба, щоб:

$$F'_{x'}x' + F'_{y'}y' + F'_{z'}z' = 0;$$

$$F'_{x'}x'' + F'_{y'}y'' + F'_{z'}z'' = 0.$$

Але перше рівняння із-за однорідности (5′) відносно x', y', z' приводиться до (5′), а друге із-за тотожности (II) перетворюється на (14). Зокрема для Пфафового рівняння (14) зводиться до

$$P'x' + Q'y' + R'z' = 0.$$

Рівняння (14) є порядку $m-1$ відносно x, y, z і порядку $r+1$ щодо x', y', z'. Розв'язання (14) разом з (5′) дає для $x' : y' : z'$ $r(r+1)$ розв'язків.

Отже, *серед твірних конусу* (5′) *є* $r(r+1)$ *таких, що дотичні до них криві мають з відповідними дотичними площинами* (8) *стик 2-го порядку, тобто мають їх за свої оскуляційні площини, інакше: через точку* (x, y, z) *проходять взагалі* $r(r+1)$ *кривих* (5), *що мають з відповідними твірними конусу* (5) *стик (оскуляцію) 2-го порядку.*

Число $r(r+1)$ для всякого цілого r є число паристе. Тому всі напрями головних дотичних можуть бути уявні.

Повертаючись до випадку невизначености, що ми його відзначили, підкреслимо, що *для лінійчатого комплексу* (*що має Монжеве рівняння* (5) *в формі* (14a) *усі прямолінійні твірні конусу* (7) *є головні дотичні.*

Це можна визначити ще так: *усі прямолінійні твірні, що мають в даній точці ту саму дотичну, мають також і спільну стичну (оскуляційну) площину*[1]).

[1]) До відповідних результатів S. Lie, Gambier та Liebmann'a звернемося далі окремо.

§ 4. ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ РАДІЮСІВ

Формула (13), як то було підкреслено, містить

$$x' = \frac{dx}{ds} = \alpha, \quad y' = \frac{dy}{ds} = \beta, \quad z' = \frac{dz}{ds} = \gamma$$

не тільки в чисельнику, але й в знаменнику через те, що F_α', F_β', F_γ' не залежать від α, β, γ лише тоді, коли F є лінійна відносно цих величин, тобто коли маємо справу не з Монжевим рівнанням, а з Пфафовим. Через те для визначення extremum'а радіюсу

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z'}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}}$$

треба зважати не тільки на чисельника, але на весь вираз у цілому, що істотно ускладнює задачу, і аналогії з теорією поверхонь, що наявні є для Пфафових рівнань, тут слабшають. А проте задачу можна поставити і можна її розв'язати. Можна шукати extremum $\frac{1}{R}$ або $\frac{1}{R^2}$, але останнє не спрощує помітно обчислень. Величини α, β, γ зв'язані співвідношеннями

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad F(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{15}$$

Знайдемо

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\alpha} = \frac{F_x' + \alpha F_{x\alpha}'' + \beta F_{y\alpha}'' + \gamma F_{z\alpha}''}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}} - \frac{F_\alpha' F_{\alpha\alpha}'' + F_\beta' F_{\beta\alpha}'' + F_\gamma' F_{\gamma\alpha}''}{(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{3/2}} (\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z'),$$

що можна зазначити

$$F_1 \cdot (F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{-3/2},$$

і такі ж вирази маємо для

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\beta} = F_2(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{3/2} \quad \text{і} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\gamma} = F_3(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{3/2}.$$

Отже умова extremum'а є

$$F_1 \frac{d\alpha}{ds} + F_2 \frac{d\beta}{ds} + F_3 \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Величини $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$ задовольняють співвідношення

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} = 0;$$

$$F_\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + F_\beta' \frac{d\beta}{ds} + F_\gamma' \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Три рівнання повинні бути згідні, а тому косинуси екстремальних напрямів задовольняють крім (15) ще й рівнання

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ F_\alpha' & F_\beta' & F_\gamma' \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

де

$$F_1 = (F_x' + \alpha F_{x\alpha}'' + \beta F_{y\alpha}'' + \gamma F_{z\alpha}'')(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2) -$$
$$-(F_\alpha' F_{\alpha\alpha}'' + F_\beta' F_{\alpha\beta}'' + F_\gamma' F_{\alpha\gamma}'')(\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z')$$

$$F_2 = (F_y' + \alpha F_{x\beta}'' + \beta F_{y\beta}'' + \gamma F_{z\beta}'')(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2) -$$
$$-(F_\alpha' F_{\alpha\beta}'' + F_\beta' F_{\beta\beta}'' + F_\gamma' F_{\gamma\beta}'')(\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z')$$

$$F_3 = (F_z' + \alpha F_{x\gamma}'' + \beta F_{y\gamma}'' + \gamma F_{z\gamma}'')(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2) -$$
$$-(F_\alpha' F_{\alpha\gamma}'' + F_\beta' F_{\beta\gamma}'' + F_\gamma' F_{\gamma\gamma}'')(\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z').$$

Ці вирази, якщо F однорідні відносно α, β, γ і порядку r, є порядку $3r-2$, а тому (16) є порядку $4r-2$ відносно α, β, γ. Разом з (5′) воно визначає $2r(2r-1)$ напрямів (відношень $\alpha:\beta:\gamma$). Але в тім числі є сторонні розв'язки. Справді значіння, що вдовольняють рівнанням

$$\frac{F_\alpha'}{\alpha} = \frac{F_\beta'}{\beta} = \frac{F_\gamma'}{\gamma}, \tag{16}$$

саме й є сторонні розв'язки, бо вони визначають напрями (α, β, γ), перпендикулярні до площини (8). Рівнання (16) можна замінити на рівнання:

$$\alpha F_\beta' - \beta F_\alpha' = 0,\quad \alpha F_\gamma' - \gamma F_\alpha' = 0,\quad \beta F_\gamma' - \gamma F_\beta' = 0.$$

що мають $r^2 - r$ спільних розв'язків, бо від r^2 розв'язків двох перших мусимо відкинути r розв'язків $\alpha = 0$, $F_\alpha' = 0$, що не задовольняють 3-го. Отже загальне число розв'язків системи (15′), (15) є

$$4r^2 - 2r - (r^2 - r) = 3r^2 - r = (3r-1)r.$$

Розглянемо, чи не може бути одночасно

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0.$$

Але ці рівнання еквівалентні рівнанням

$$\frac{\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z'}{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2} = \frac{F_x' + \alpha F_{\alpha x}'' + \beta F_{\alpha y}'' + \gamma F_{\alpha z}''}{F_\alpha' F_{\alpha\alpha}'' + F_\beta' F_{\beta\alpha}'' + F_\gamma' F_{\gamma\alpha}''} =$$
$$= \frac{F_y' + \alpha F_{\beta x}'' + \beta F_{\beta y}'' + \gamma F_{\beta z}''}{F_\alpha' F_{\beta\alpha}'' + F_\beta' F_{\beta\beta}'' + F_\gamma' F_{\gamma\beta}''} = \frac{F_z' + \alpha F_{\gamma x}'' + \beta F_{\gamma y}'' + \gamma F_{\gamma z}''}{F_\alpha' F_{\gamma\alpha}'' + F_\beta' F_{\gamma\beta}'' + F_\gamma' F_{\gamma\gamma}''}.$$

Множимо в трьох останніх відношеннях чисельника та знаменника на α, β, γ й додаємо; маємо нове відношення

$$=\frac{\sum \alpha F'_x + \alpha r F'_x + \beta r F'_y + \gamma r F'_z}{\sum F'_\alpha \cdot (r-1) F'_\alpha} = \frac{(r+1)\sum \alpha F'_x}{(r-1)\sum F'^2_\alpha},$$

і воно дорівнює

$$\frac{\sum \alpha F'_x}{\sum F'^2_\alpha}.$$

А це можливе тільки тоді, коли разом і

$$\sum \alpha F''_x = 0 \quad \text{і} \quad \sum F'^2_\alpha = 0.$$

Таким разом такий привід зниження відпадає.

§ 5. ЛІНІЇ КРИВИНИ 1-го ТА 2-го РОДУ

Якщо помножити (16) на відповідну степінь ds та замінити $\alpha ds = dx$, $\beta ds = dy$, $\gamma ds = dz$, маємо рівнання в повних диференціялах, що разом з (5) визначає ті системи кривих, що мають в кожній точці за дотичну ті напрями, що відповідають екстремальним радіюсам. Так можна поширити в геометрії Монжевих рівнань поняття *ліній кривини* (1-го роду). Можна залишити попередні позначення α, β, γ, але не забувати значіння $\alpha = \frac{dx}{ds}$ і т. д. Тоді можна писати

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & F'_\alpha & (F'_x + \sum \alpha F''_{x\alpha}) \sum F'^2_\alpha - \sum F'_\alpha F''_{\alpha\alpha} \cdot \sum \alpha F'_x \\ \beta & F'_\beta & (F'_y + \sum \alpha F''_{x\beta}) \sum F'^2_\alpha - \sum F'_\alpha F''_{\beta\alpha} \cdot \sum \alpha F'_x \\ \gamma & F'_\gamma & (F'_z + \sum \alpha F''_{x\gamma}) \sum F'^2_\alpha - \sum F'_\alpha F''_{\gamma\alpha} \cdot \sum \alpha F'_x \end{vmatrix}$$

Але, з другого боку, можна поставити питання відшукати ті напрями, що уздовж них відповідні нормалі до площини (8) у двох безконечно близьких точках перетинаються.

Нормаль до (8)

$$\frac{X-x}{F'_{x'}} = \frac{Y-y}{F'_{y'}} = \frac{Z-z}{F'_{z'}}$$

безконечно близька

$$\frac{X-x-x'ds}{F'_{x'}+dF'_{x'}} = \frac{Y-y-y'ds}{F'_{y'}+dF'_{y'}} = \frac{Z-z-z'ds}{F'_{z'}+dF'_{z'}}.$$

Умова перетинання

$$\begin{vmatrix} dx & F'_{x'} & dF'_{x'} \\ dy & F'_{y'} & dF'_{y'} \\ dz & F'_{z'} & dF'_{z'} \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Коли (5) зводиться до $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, (17) дасть безпосередньо рівнання в повних диференціялах 1 порядку ліній кривини 2-го роду. Але в загальному випадку ($r > 1$) рівнання (17) містить діференціяли 2-го порядку. Коли записати (17) детальніше, маємо члени з похідними 2-го порядку

$$A_1 x'' + B_1 y'' + C_1 z'' = 0,$$

де

$$A_1 = \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F''_{x'x'} \\ y' & F'_{y'} & F''_{x'y'} \\ z' & F'_{z'} & F''_{x'z'} \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F''_{x'y'} \\ y' & F'_{y'} & F''_{y'y'} \\ z' & F'_{z'} & F''_{z'y'} \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F''_{x'z'} \\ y' & F'_{y'} & F''_{y'z'} \\ z' & F'_{z'} & F''_{z'z'} \end{vmatrix}.$$

Щоб члени з x'', y'', z'' знищились, треба, щоб

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0,$$

проте це дає не три умови, а тільки дві, бо

$$A_1 x' + B_1 y' + C_1 z' = 0.$$

Можна навіть показати, що вони зводяться тільки до одного.

Справді маємо

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0;$$

$$F'_{x'} . x'' + F'_{y'} . y'' + F'_{z'} . z'' = -(F'_x . x' + F'_y . y' + F'_z . z').$$

Множимо на μ, ν й додаємо до (17). Щоб x'', y'', z'' випали, треба, щоб

$$A_1 + \mu F'_{x'} + \nu x' = 0$$
$$B_1 + \mu F'_{y'} + \nu y' = 0$$
$$C_1 + \mu F'_{z'} + \nu z' = 0,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} A_1 & F'_{x'} & x' \\ B_1 & F'_{y'} & y' \\ C_1 & F'_{z'} & z' \end{vmatrix} = 0.$$

§ 6. ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ, ЯК ЛІНІЇ НАЙПРЯМІШІ

Відносно системи інтеґральних кривих Монжевого рівнання (5) можна поставити також питання про ті, що їх випрямні (rectifiants) площини є дотичні площини до конусу (7) — конусу, що зв'язаний з точкою (x, y, z) за (5).

Коли, як звичайно, l, m, n позначають косинуси головної нормалі з осями координат, маємо

$$\frac{l}{F'_\alpha} = \frac{m}{F'_\beta} = \frac{n}{F'_\gamma} = \lambda$$

або, якщо незалежна змінна є s,

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\lambda F'_{x'}(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z');$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\lambda F'_{y'}(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z');$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\lambda F'_{z'}(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z').$$

Тут

$$\lambda^2=\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}.$$

Отже, коли (5) не є Монжеве рівнання лінійчатого комплексу, за формулою (13) § 1 маємо

$$\lambda=\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}},$$

і рівнання найпряміших ліній набирають форми

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\pm\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F''_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}\cdot F'_{x'};$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\pm\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}\cdot F'_{y'};$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\pm\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}\cdot F'_{z'}.$$

§ 7. ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ, ЯК ЛІНІЇ НАЙКОРОТШІ

Беремо інтеґрал

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt,$$

що визначає довжину дуги кривої, і шукаємо його extremum за умови

$$F\left(x,y,z;\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0. \tag{5''}$$

Початкові та конечні значіння координат є $(x_0y_0z_0)$ та $(x_1y_1z_1)$ відповідно значінням t_0, t_1 параметру t. Задача зводиться на визначення абсолютного extremum'а інтеґралу

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}\{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}+\lambda F(x,y,z,x',y',z')\}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}Gdt.$$

9*

Величини x, y, z визначаються, як функції t рівняннями

$$\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)=0,\quad \frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)=0,\quad \frac{\partial G}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial z'}\right)=0$$

або написавши детальніше

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0\,;$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\lambda+\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\,;$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\lambda+\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0.$$

Якщо за незалежну змінну взяти дугу s, рівняння зводиться до форми

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial x'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right];$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial y'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right];$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial z'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right];$$

де

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x'+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x'}z'+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Рівнання, хоч і лінійні, але не розв'язані відносно похідних 2-го порядку.

RÉSUMÉ

Die Resultate der Untersuchungen der Verf. über die Eigenschaften der Systeme der Integralkurven einer Pfaff'schen Gleichung $Pdx+Qdy+Rdz=0$ werden auf nicht-lineare in Bezug auf dx, dy, dz („Monge'sche") Gleichungen erweitert. S. Lie hat schon das Theorem von Meusnier auf solche Systeme erweitert. Es werden hier diese Resultate wieder aufgenommen und weiter geführt. Der Ausdruck des Krümmungsradius wird aufgestellt (§ 1) und wird gezeigt, es können auf Monge'sche Gleichungen die Begriffe der Haupttangentenrichtungen und Haupttangentenkurven (§ 3), der extremalen Werte der Krümmungsradien (Hauptkrümmungsrichtungen (§ 4), der Krümmungslinien 1-ster u. 2-ter Art (§ 5), endlich der geodätischen Linien als geradesten (§ 6) und als kürzesten (§ 7) erweitert werden. Im 52 wird der Fall der Unbestimmheit des Krümmungsradius untersucht, was wie S. Lie schon gezeigt hat, auf Monge'sche Gleichungen der Komplexe führt.

Д. М. СИНЦОВ

Кривина асимптотичних ліній

(Лінії головних дотичних)

ДЛЯ ПОВЕРХОНЬ, СИСТЕМ ІНТЕҐРАЛЬНИХ КРИВИХ ПФАФОВИХ ТА МОНЖЕВИХ РІВНАНЬ ТА КОМПЛЕКСІВ

В попередніх моїх роботах я розглядав деякі властивості систем інтеґральних кривих Пфафових рівнань, що являють величезну аналогію відповідним властивостям кривих на поверхнях. Але Пфафове рівнання є, з одного боку, окремий випадок Монжевого рівнання, з другого боку, охоплює як окремі випадки як поверхні, також і диференціяльне рівнання лінійного комплексу. Монжеве ж рівнання і собі охоплює як окремий випадок диференціяльне рівнання лінійчатого комплексу нелінійного. Цікаво, на мою думку, розглянути деякі питання для всіх цих категорий кривих. Я вибрав питання про асимптотичні лінії особливо тому, що для лінійчатих комплексів кожна інтеґральна крива є разом з тим крива асимптотична.

§ 1. АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ

В теорії поверхонь понайбільше залишають без розгляду питання, що стосуються до особливих точок та характеристики поведінки поверхні поблизу тих або інших її кривих. Це питання дуже цікаве з погляду топологічних особливостей, найтісніше вони зв'язані з топологією інтеґральних кривих диференціяльного рівнання 1-го порядку і W. Dyck, що досліджував останнє питання, дав роботу та рисунки асимптотичних кривих (див. Katalog Mathem. Modelle, München, 1892 р.). Ми зосередимо нашу увагу на асимптотичних лініях і їхніх радіусах кривини.

Маємо щодо цього відомий результат E. Beltrami, а саме: радіюс кривини асимптотичної лінії дорівнює $^2/_3$ радіюсу кривини, перетину поверхні її дотичною площиною [1]) (для гіперболічної точки, як підкреслює Mangoldt в Enzyclop. d. Mathem. Wissenschaften III_3).

Результат E. Beltrami можна вивести без цього обмеження, але треба додати деякі зауваження. Суть справи в тому, що точка дотику є особлива точка кривої перетину поверхні та її дотичної площини. Які можуть бути тут випадки та якого значіння може набірати відповідний радіюс кривини, це питання я розв'язував в іншому місці.

---

[1]) Див., наприклад, „Курс диф. геометрії" — Зап. Хар. Ун., 1908.

Хай точка (x, y, z) є еліптична точка поверхні, відповідні асимптоти є уявні, крива перетину поверхні з дотичною площиною має точку дотику ізольовану. Наприклад, кожна точка еліпсоїду є еліптична. Коли осі координат є три спряжені діяметри, $z' = c'$ є дотична площина точки (o, o, c') і перетинає еліпсоїд по кривій

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 0,$$

$$z' = c'$$

цебто вподовж пари ізотропних прямих, що перетинаються в точці (o, o, c'). Радіюс кривини дорівнює ∞ $\left(\text{бо } \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0\right)$. Для оборотових поверхонь Паскалевого слимака навколо його осі симетрії

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad (2a < b < 4a, \text{ напр., } b = 3a)$$

відповідна крива перетину поверхні з дотичною площиною $x = 2a - b$ точки $(2a - b, o, o)$ розпадається на коло

$$y^2 + z^2 - 4ab + b^2 = 0, \quad x = 2a - b$$

та на коло-точку

$$y^2 + z^2 = 0 \quad x = 2a - b,$$

що є ізольованою точкою

Формула

$$\frac{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix}} \qquad (x, y, z \text{ — однорідні координати})$$

для цієї ізольованої точки дає $R = \frac{0}{0}$. Також крива $y^2 = x^2(x - 1)$. Таким чином, в ізольованій точці радіюс кривини є ∞, але $\frac{0}{0}$. В точці параболічної два напрямки головних дотичних зливаються, і крива перетину має точку звороту або самостику, і радіюс кривини є або 0, або ∞.

На останнє *гіперболічна* точка поверхні має головні дотичні дійсні, і на криві перетину буде вузлова точка. Але разом з тим вона може бути точкою перегину на одній або й на обох витинах кривої, і радіюс кривини для відповідної вітини є ∞. Наприклад, гіперболічний параболоїд $2z = x^2 - y^2$ в точці $(0, 0, 0)$ перетинається дотичною площиною $z = 0$ по двох прямих $x^2 - y^2 = 0$, і радіюс кривини для обох є ∞. Катеноїд

$$z = a \lg \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a}$$

перетинається дотичною площиною $X = a$ точки (0, 0, 0) по кривій

$$z = a \lg \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}, \quad \text{або} \quad y = \pm a \sin h\left(\frac{z}{a}\right).$$

Для кожної вітини маємо $R = \infty$.

Таким чином теорема E. Beltrami має дуже обмежений обсяг прикладання і цікаво підрахувати вираз для радіюсу кривини асимптотичної лінії безпосередньо.

Асимптотичну лінію поверхні

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

відділяємо диференціяльним рівнанням

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0 \tag{2}$$

або

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0. \tag{2'}$$

Її радіюс кривини можна вирахувати так. Інтеґрали (2) дають криві основи цилiндрів, що вирізають на поверхні (1) асимптотичні лінії. Таким чином за (2) маємо

$$y = \varphi(x)$$

і за (1)

$$z = f(x, \varphi(x)),$$

за (2′)

$$z' = p + qy', \quad z'' = qy'' + (r + 2sy' + ty'^2) = qy'',$$

отже

$$R = \frac{[1 + y'^2 + (p + qy')^2]^{3/2}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Але коли диференціювати (2) ще раз, маємо

$$k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3 + 2(s + ty')y'' = 0 \quad \left(k = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \text{ і т. д.}\right) \tag{3}$$

за (2′)

$$s + ty' = \pm\sqrt{rt - s^2}$$

і таким чином

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{2} \frac{(k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\pm\sqrt{rt - s^2}\,(1 + p^2 + 2pqy' + (1 + q^2)y'^2)^{3/2}}.$$

Радіюс кривини плоскої кривої — перетину поверхні та її дотичної площини (див., напр., мій курс „Геометр. крив.“ 1908 р., стор. 135 — 6) визначаємо за допомогою рівнання

$$(k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3) + 3(s + ty')y'' = 0,$$

а тому (5)

$$\frac{1}{R_{дот}} = -\frac{1}{3}\,\frac{(k+3ly'+3my'^2+ny'^3)\sqrt{1+p^2+q^2}}{\pm\sqrt{rt-s^2}\,(1+p^2+2pqy'+(1+q^2)y'^2)^{3/2}} \tag{5}$$

і маємо відношення E. Beltrami

$$3R_{ac} = 2R_{дот}.$$

Підкреслимо ще таке зауваження. Радіус кривини інтеґральної кривої (2) за (3)

$$\frac{1}{R_{пр}} = -\frac{1}{2}\,\frac{k+3ly'+3my'^2+ny'^3}{\pm\sqrt{rt-s^2}\,(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Таким чином

$$R_{ac} : R_{пр} = \frac{1+p^2+2pqy'+(1+qyy'^2)^{3/2}}{(1+y'^2)^{3/2}\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{7}$$

Відношення радіюсів кривини асимптотичної лінії та її проекції на площину XOY дорівнює добуткові відношення кубів їх лінійних елементів на косинус кута дотичної площини з площиною XOY.

Визначімо тепер добуток мір кривини обох асимптотичних ліній. Знаменник буде:

$$[1+p^2+2pqy_1'+(1+q^2)y_1'^2]\cdot[1+p^2+2pqy_2'+(1+q^2)y_2'^2],$$

але

$$y_1'+y_2' = -\frac{2s}{t}, \quad y_1'y_2' = \frac{r}{t} \quad \text{і} \quad y_1'^2+y_2'^2 = \frac{4s^2-rt}{t^2}.$$

Отже знаменник дорівнює

$$\frac{1}{t^2}\left\{[t(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)]^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)\right\}.$$

Щождо чисельника, то я колись[1]) визначив добуток

$$[k+3ly_1'^2+3my_1'+ny_1'^3]\,[k+3ly_2'+3my_2'^2+ny_2'^3] =$$

$$= \frac{1}{t^3}\left[r(\Delta_y)^2-2s\Delta_x'\Delta_y'+t(\Delta_x')^2-8\Delta\begin{vmatrix} r & s & t \\ r_x' & s_x' & t_x' \\ r_y' & s_y' & t_y' \end{vmatrix}\right],$$

де

$$\Delta = rt-s^2.$$

Таким чином маємо остаточно

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{r\left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial y}\right)^2-2s\cdot\dfrac{\partial\Delta}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\Delta}{\partial y}+t\left(\dfrac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2-8\Delta\begin{vmatrix} r & s & t \\ r_x' & s_x' & t_x' \\ r_y' & s_y' & t_y' \end{vmatrix}}{\Delta\left\{[t(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)]^2-4\Delta(1+p^2+q^2)\right\}^{3/2}} \tag{8}$$

---

[1]) Nouv. Ann. (3), XIV, p. 4, 1894, févr. та Изв. Каз. Физ.-Мат. О. (2), 1894.

Ця формула знищується в усіх точках лінійчатої поверхні, і таким чином маємо таке геометричне значіння рівнання лінійчатих поверхонь в наведеній вище формі: *в кожній точці лінійчатої поверхні добуток мір кривини двох її асимптотичних ліній дорівнює нулеві.*

Знаменника можна переписати за допомогою виразу середньої кривини

$$2H = \frac{t(1+p^2) - 2pqs + r(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Таким чином знаменник набирає форми

$$8(1+p^2+q^2)^{3/2}\Delta[H^2(1+p^2+q^2)+\Delta]^{3/2}.$$

В точках, що мають середню кривину $= 0$, маємо

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{32}\,\frac{r\Delta_y'^2 - 2s\Delta_x'\Delta_y' + t\Delta_x'^2 - 8\Delta\begin{vmatrix} r & s & t \\ r_x' & s_x' & t_x' \\ r_y' & s_y' & t_y' \end{vmatrix}}{\Delta^{5/2}\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{9}$$

Для лінійчатої мінімальної поверхні цей вираз можна застосувати до всіх її точок[1]).

§ 2. КРИВИНА АСИМПТОТИЧНИХ ЛІНІЙ ПФАФОВОГО РІВНАННЯ

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{1}$$

В цім випадку асимптотичні лінії виділяються рівнанням

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0. \tag{2}$$

Поділом через ds, resp. ds^2 маємо

$$Px' + Qy' + Rz' = 0 \tag{1'}$$

та

$$P'x' + Q'y' + R'z' = 0. \tag{2'}$$

Розгорнувши останнє рівнання детально, дістанемо:

$$P_2 \equiv P_x'x'^2 + Q_y'y'^2 + R_z'z'^2 + (P_y' + Q_x')x'y' + \\ + (P'_z + R'_x)x'z' + (Q_z' + R_y')y'z' = 0. \tag{3}$$

Диференціюємо ($1'$) ще раз і за допомогою (3) маємо:

$$Px'' + Qy'' + Rz'' = 0 \tag{4}$$

Диференціюємо ($2'$) або (3) ще раз, маємо:

$$\frac{\partial P_2}{\partial x'}x'' + \frac{\partial P_2}{\partial y'}y'' + \frac{\partial P_2}{\partial z'}z'' + P_3 = 0, \tag{5}$$

---

[1]) В скороченій формі цей § надруковано в Отчете о деятельности Математической Конференции Н.-Пед. О-ва ДВГУ, июнь — декабрь 1928.

де

$$\frac{\partial P_2}{\partial x'} = 2P'_x x' + (P'_y + Q'_x)y' + (P'_z + R'_x)z' \quad \text{і т. д.,}$$

а

$$\begin{aligned} P_3 = \frac{\partial P_2}{\partial x}x' + \frac{\partial P_2}{\partial y}y' + \frac{\partial P_2}{\partial z}z' \equiv P''_{xx}x'^3 + Q''_{yy}y'^3 + R''_{zz}z'^3 \\ + (2P''_{xy} + Q''_{xx})x'^2 y' + (P''_{yy} + 2Q''_{xy})x'y'^2 \\ + (2P''_{xz} + R''_{xx})x'^2 z' + (P''_{zz} + 2R''_{xz})x'z'^2 \\ + (2Q''_{yz} + R''_{yy})y'^2 z' + (Q''_{zz} + 2R''_{yz})y'z'^2 \\ + 2(P''_{yz} + Q''_{xz} + R''_{xy})x'y'z'. \end{aligned}$$

Рівнання (4) та (5) з допомогою рівнання

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

можна розв'язати відносно x'', y'', z''; маємо

$$Dx'' = -P_3(Ry' - Qz'),\ Dy'' = -P_3(Pz' - Rx'),\ D.z'' = -P_3(Qx' - Py'),$$

де

$$D = \begin{vmatrix} x' & P & \frac{\partial P_2}{\partial x'} \\ y' & Q & \frac{\partial P_2}{\partial y'} \\ z' & R & \frac{\partial P_2}{\partial z'} \end{vmatrix}.$$

Тому радіюс кривини асимптотичої лінії (1) визначається формулою

$$D^2 \cdot \frac{1}{R_{ac}^2} = P_3{}^2(P^2 + Q^2 + R^2),$$

цебто

$$\frac{1}{R_{ac}} = \pm \frac{P_3\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{D}. \tag{6}$$

Але можна декілька перетворити знаменника:

$$D^2 = \begin{vmatrix} \sum x'^2 & \sum Px' & \sum \frac{\partial P_2}{\partial x'}x' \\ \sum Px' & \sum P^2 & \sum P\frac{\partial P_2}{\partial x'} \\ \sum \frac{\partial P_2}{\partial x'}x' & \sum P\frac{\partial P_2}{\partial x'} & \sum \left(\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum P^2 \cdot \sum\left(\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 - \left(\sum P\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 =$$

$$= \left(P\frac{\partial P_2}{\partial y'} - Q\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 + \left(Q\frac{\partial P_2}{\partial z'} - R\frac{\partial P_2}{\partial y'}\right)^2 + \left(R\frac{\partial P_2}{\partial x'} - P\frac{\partial P_2}{\partial z'}\right)^2.$$

— сума мінорів матриці

$$\begin{Vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial P_2}{\partial x'} & \frac{\partial P_2}{\partial y'} & \frac{\partial P_2}{\partial z'} \end{Vmatrix}$$

Таким чином

$$\frac{1}{R_{ac}} = \pm \frac{P_3 \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{\sqrt{\sum \left(P \frac{\partial P_2}{\partial y'} - Q \frac{\partial P_2}{\partial x'} \right)^2}}. \tag{6'}$$

Але цей вираз не можна вважати за остаточний. Справді він містить x', y', z', що зв'язані проміж себе співвідношеннями (1), (4) та

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Тому в окремих випадках елімінації, що тут потрібні, досить складні, — складні навіть в простіших випадках.

§ 3. РАДІЮС КРИВИНИ ЛІНІЙНОГО КОМПЛЕКСУ

S. Lie — Geometrie d. Berührungstransformationen, Bd. I, 1896 р. та Jessop — Treatise on the line complex, 1903 не дають вказівок щодо цього. Формула § 2 не годиться. Тому я поставив собі за задачу найти такий вираз. Але одночасно в червні минулого року H. Liebmann[1]) дав відповідну формулу, але при сцеціяльному розположенні осей координат. Тому доцільно навести й мої результати.

Хай

$$yx' - xy' + kz' = 0$$

рівнання інтеґральних кривих лінійного комплексу.

Хай, як і в H. Liebmann'a[2])

$$y = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \tag{1}$$

(1) набирає форми

$$r^2 d\theta + k dr = 0. \tag{1'}$$

Хай до того $r = \varphi(\theta)$ — довільна функція θ. Тоді (1') дає

$$dz = -\frac{1}{k} \varphi(\theta)^2 d\theta,$$

звідкіль

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{1}{k} \int \varphi(\theta)^2 d\theta \\ x &= \varphi(\theta) \sin \theta \\ y &= \varphi(\theta) \cos \theta \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

[1]) Die Sätze von Lie u. Gambier über Kurven eines Linienkomplexes, Heidelberger Sitzungsberichte, Math - nat. Kl.— J. 1928, Abh, 9.

[2]) Math. Ann., 52, Ss. 120 — 126, 1899.

Рівнання (2) визначають інтеґральні криві лінійного комплексу. Уже вони дають можливість упевнитися, що ці криві не мають особливих точок, тобто точок звороту (вузлові точки за параметричної форми рівнань (2) не є особливі); а саме

$$x'_\theta = \Phi'(\theta)\sin\theta + \Phi(\theta)\cos\theta, \quad y'_\theta = \Phi'(\theta)\cos\theta - \Phi(\theta)\sin\theta,$$

$$z'_\theta = -\frac{1}{k}\Phi^2(\theta) \tag{3}$$

Умови особливости точки є

$$x'_\theta = 0 = y'_\theta = z'_\theta = 0;$$

тому треба, щоб

$$\Phi(\theta) = 0 \quad \text{і} \quad \Phi'(\theta) = 0,$$

тобто для точок $r = 0$, для кривих комплексу, що проходять через початок координати і мають XOY за стичну (оскуляційну) площину.

З (3) маємо

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \Phi(\theta)^2 + \Phi'(\theta)^2 + \frac{1}{k^2}\Phi''(\theta).$$

Далі

$$x'' = (\Phi'' - \Phi)\sin\theta + 2\Phi'\cos\theta, \quad y'' = (\Phi'' - \Phi)\cos\theta - 2\Phi'\sin\theta,$$

$$z'' = \frac{-2\Phi(\theta)\Phi'(\theta)}{k}$$

і тому

$$\left.\begin{aligned} y'z'' - z'y'' &= -\frac{\Phi}{k}[2\Phi'^2 + \Phi(\Phi'' - \Phi)]\cos\theta \\ z'x'' - x'z'' &= +\frac{\Phi}{k}[2\Phi'^2 - \Phi(\Phi'' - \Phi)]\sin\theta \\ x'y'' - x''y' &= -[2\Phi'^2 - \Phi(\Phi'' - \Phi)] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Відсіль радіюс кривини

$$R = \frac{\left[\Phi'^2 + \Phi^2 + \frac{1}{k^2}\Phi^4\right]^{3/2}}{\begin{vmatrix} \Phi' & \Phi \\ \Phi'' - \Phi, & 2\Phi' \end{vmatrix} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Phi^2}{k^2}}}. \tag{5}$$

Щоб визначити радіюс кривини якоїсь з кривих комплексу, треба задати функцію $\Phi(\theta)$.

Приклади: a) $\Phi = a\,(=\mathrm{const})$; $x = a\sin\theta$, $y = a\cos\theta$, $z = ma\theta$ — кругова ґвинтова лінія, $r = a(1+m^2) = \mathrm{const}$;

b) $\Phi \equiv \dfrac{kc}{b\sin\theta - a\cos\theta}$ і $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $2\Phi'^2 - \Phi(\Phi'' - \Phi) = 0$,

$$\frac{1}{R} = 0$$

криві є прямі лінії комплексу;

c) $\Phi(\theta) = \sqrt{\sin\theta}$, $z = \dfrac{\cos\theta}{k}$, $x = (\sin\theta)^{3/2}$, $y = \cos\theta\sqrt{\sin\theta}$

крива перетину

$$xy = kz(1 - k^2z^2), \quad kzx = y(x^2 + y^2).$$

Можна ще інакше вивести формулу для радіюсу кривини:

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\sum (x'y'' - y'x'')^2};$$

але

$$z' = \frac{1}{k}(xy' - yx'), \tag{1}$$

$$z'' = \frac{1}{k}(xy'' - yx''); \tag{1a}$$

отже

$$y'z'' - z'y'' = \frac{y}{k}(x'y'' - y'x''),$$

також

$$x'z'' - z'x'' = -\frac{x}{k}(x'y'' - y'x''),$$

і тому

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{k}\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}. \tag{6}$$

Аналогічну формулу можна дати й для загального рівнання лінії комплексу

$$\sum a_{ik}\, p_{ik} = 0,$$

що його Пфафове рівнання є

$$(a_{21}y + a_{31}z + a_{41})\,dx + (a_{12}x + a_{32}z + a_{42})\,dy + (a_{13}x + a_{23}y + a_{43})\,dz = 0,$$

отже

$$\frac{1}{R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{C} = \frac{z'x'' - x'z''}{B} = \frac{y'z'' - z'y''}{A}. \tag{7}$$

Але для (1) можна формулу (6) перетворити так:
Незалежна змінна є s, тому

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

і

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

За допомогою (1), (1a) маємо:

$$x'x'' + y'y'' + \frac{1}{k^2}(xy' - yx')(xy'' - yx'') = 0$$

або

$$x''[k^2x' - y(xy' - yx')] + y''[k^2y' + x(xy' - yx')] = 0.$$

Визначмо

$$A = x^2 + y^2 + k^2, \quad B = xx' + yy' = \frac{1}{2}A';$$

тоді попередню рівність можна записати так:

$$\frac{x''}{Ay' - By} = \frac{y''}{-Ax' + Bx}$$

і

$$= \frac{\dfrac{xy'' - yx''}{k}}{-kB} = \frac{z''}{-kB}$$

або

$$= \pm \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}{\sqrt{A^2(x'^2 + y'^2) - 2AB^2 + B^2(A - k^2) + k^2B^2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{A[A(x'^2 + y'^2) - B^2]}};$$

але

$$A(x'^2 + y'^2) - B^2 = k^2(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx')^2 = k^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = k^2.$$

Отже

$$= \pm \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{k\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}$$

і

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{x''\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}{ky' + xz'} = \pm \frac{y''\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}{-(kx' + yz')} =$$

$$= \pm \frac{z''\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}{-(xx' + yy')}.$$

Легко виявити, що стична (оскуляційна) площина є одна для всіх кривих комплексу, що проходять через точку (x, y, z).

Справді, величини $x'y'' - x''y'$ і т. д. пропорціональні до косинусів кутів бінормалі з осями координат. Таким чином, точка (x, y, z) має в комплексі відповідну площину

$$y(X-x) - x(Y-y) + k(Z-z) = 0.$$

Напрямок дотичної (x', y', z') або $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ справджує рівняння

$$yx' - xy' + kz' = 0$$

або

$$y\alpha - x\beta + k\gamma = 0.$$

Відсіль

$$yl - xm + kn = 0$$

але λ, μ, ν справджують співвідношення

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0, \quad \lambda l + \mu m + \nu n = 0.$$

Тобто

$$\frac{\lambda}{y} = \frac{\mu}{-x} = \frac{\nu}{k} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}.$$

Площина лінійного комплексу є площина стична (оскуляційна) і єдина для всіх його кривих, що проходять через точку (x, y, z).

§ 4. КРИВИНА АСИМПТОТИЧНИХ ЛІНІЙ МОНЖЕВОГО РІВНАННЯ

Напрямки головних дотичних системи інтеґральних кривих Монжевого рівнання

$$F(x, y, z;\quad x', y', z') = 0 \tag{1}$$

виділяємо додатковим рівнанням

$$F_1 \equiv F_x'\, x' + F_y'\, y' + F_z'\, z' = 0, \tag{2}$$

але

$$F_1 = \Delta F \left(\Delta = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Диференціюємо (1) ще раз відносно s:

$$\Delta F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x'} x'' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F_1}{\partial z'} z'' = 0 \tag{3}$$

або розгорнувши маємо:

$$F''_{xx}x'^2+F''_{yy}y'^2+F''_{zz}z'^2+2F''_{xy}x'y'+2F''_{xz}x'z'+$$
$$+2F''_{yz}y'z'+(F'_x+F''_{xx'}x'+F''_{yx'}y'+F''_{zx'}z')x''+$$
$$+(F'_y+F''_{xy'}x'+F''_{yy'}y'+F''_{zy'}z')y''+$$
$$+(F'_z+F''_{xz'}x'+F''_{yz'}y'+F''_{zz'}z')z''=0.$$

Крім того, диференціюємо (1) та

$$x'^2+y'^2+z'^2=1 \tag{4}$$

За допомогою (2) маємо:

$$F'_{x'}\cdot x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''=0 \tag{5}$$

$$x'x''+y'y''+z'z''=0. \tag{6}$$

Відсіль:

$$\frac{x''}{y'F'_{z'}-z'F'_{y'}}=\frac{y''}{z'F'_{x'}-x'F'_{z'}}=\frac{z''}{x'F'_{y'}-y'F'_{x'}}.$$

До цих трьох відношень можна приєднати четверте:

$$=\pm\frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}.$$

Отже

$$x''=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{y'F'_{z'}-z'F'_{y'}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}$$

$$y''=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{z'F'_{x'}-x'F'_{z'}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z}}}$$

$$z''=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{x'F'_{y'}-y'F'_{x'}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F^2_{y'}+F'^2_{z'}}}.$$

Внесімо знайдені вирази для x'', y'', z'' в (3); маємо для R:

$$R=\pm\frac{1}{\Delta^2F\cdot\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z''}}}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \dfrac{\partial F}{\partial x'} & \dfrac{\partial F}{\partial y'} & \dfrac{\partial F}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial(\Delta F)}{\partial x'}, & \dfrac{\partial(\Delta F)}{\partial y'}, & \dfrac{\partial(\Delta F)}{\partial z'}\end{vmatrix}, \tag{7}$$

де

$$\Delta^2F=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^2F.$$

x', y', z' справджують рівнання (1), (2), та (4); $\frac{\partial(\Delta F)}{\partial x'}$, $\frac{\partial(\Delta F)}{\partial y'}$, $\frac{\partial(\Delta F)}{\partial z'}$ однорідні відносно x', y', z' і порядку $r+1$, тому чисельник порядку $2r+1$ і також однорідний.

Знаменник однорідний відносно x', y', z' і степеня $r+2+r-1=2r+1$.

Таким чином (7) залежить тільки від відношення поміж x', y', z' і можна користуватися лише з рівнань (1) та (2).

Формулі (7) можна надати наочнішої форми; вирахуємо для цього детермінант так, як вже вираховували D

$$D_1{}^2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \frac{\partial F}{\partial x'} & \frac{\partial F}{\partial y'} & \frac{\partial F}{\partial z'} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x'} & \frac{\partial F_1}{\partial y'} & \frac{\partial F_1}{\partial z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum x'^2 & rF & (r+1)F_1 \\ rF & \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 & \sum\frac{\partial F}{\partial x'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ (r+1)F_1 & \sum\frac{\partial F}{\partial x'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x} & \sum\left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Елементи 1-го ряду та колони за (4), (1) та (2) дорівнюють 1, 0, 0, а тому:

$$D_1{}^2 = \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2 - \left(\sum\frac{\partial F}{\partial x'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2$$

і дорівнює сумі квадратів мінорів матиці:

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial x'} & \frac{\partial F}{\partial y'} & \frac{\partial F}{\partial z'} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x'} & \frac{\partial F_1}{\partial y'} & \frac{\partial F_1}{\partial z'} \end{matrix}\right\|.$$

Отже остаточна формула для R є

$$R = \pm\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2}}{\Delta^2 F\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2}} \tag{8}$$

де

$$F_1 = \Delta F = \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z}\right)F(x, y, z; x', y', z').$$

§ 5. КРИВИНА ЛІНІЙ ЛІНІЙЧАТОГО КОМПЛЕКСУ

(НЕ ЛІНІЙНОГО)

Лінійчатий комплекс тотожно задовольняє (2); тому кожну інтеґральну криву його можна вважати за асимптотичну (головну) лінію. Але формула (8) не згодиться. Тому треба дослідити це питання окремо. H. Liebmann в своїй статті Die Sätze von Lie u. Gambier über Kurven eines Linienkomplexes[1])

[1]) Sitzungsberichte Heidelberger Akad. d. Wissenschaften 1928. Abh. 9.

дав доказ формули Gambier, але виразу для радіюса першої кривини для нелінійного комплексу окремо не дав. Дотичний до даного лінійний комплекс

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0$$

має ту властивість, що його інтеґральні криві в кожній точці мають ті самі дотичну пряму та стичну (оскуляційну) площину, як і інтеґральні криві даного комплексу, а тому мають з ними стичність 2-го порядку і ту саму міру 1-ої кривини.

Таким чином можна записати Пфафове рівнання дотичного комплексу так

$$\frac{\partial F}{\partial p_{12}}(xdy - ydx) + \frac{\partial F}{\partial p_{13}}(xdz - zdx) + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}(ydz - zdy) -$$
$$-\frac{\partial F}{\partial p_{14}} dx - \frac{\partial F}{\partial p_{24}} dy - \frac{\partial F}{\partial p_{34}} dz = 0$$

або

$$0 = dx\left(\frac{\partial F}{\partial p_{21}} y + \frac{\partial F}{\partial p_{31}} z + \frac{\partial F}{\partial p_{41}}\right) + dy\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}} x + \frac{\partial F}{\partial p_{32}} z + \frac{\partial F}{\partial p_{42}}\right) +$$
$$+ dz\left(\frac{\partial F}{\partial p_{13}} x + \frac{\partial F}{\partial p_{23}} y + \frac{\partial F}{\partial p_{43}}\right).$$

Таким чином можна скористуватися з формули (7) § 3 для

$$a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_{ik}}.$$

Тоді виявляємо, що коефіціент при dx є $\frac{\partial F}{\partial x'}$, при dy є $\frac{\partial F}{\partial y'}$, при dz є $\frac{\partial F}{\partial z'}$ і тоді

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{F_{x'}'^2 + F_{y'}'^2 + F_{z''}'^2}}{F_{x'}'}(y'z'' - z'y'') = \frac{\sqrt{F_{x'}'^2 + F_{y'}'^2 + F_{z'}'^2}}{F_{y'}'}(z'x'' - x'z'') =$$
$$= \frac{\sqrt{F_{x'}'^2 + F_{y'}'^2 + F_{z'}'^2}}{F_{z'}'}(x'y'' - y'x).$$

RÉSUMÉ

Es wird in Anlehnung auf vorangehende Untersuchungen des Verf. die Frage nach den Haupttangentenrichtungen u. Haupttangentenkurven und deren Krümmungsradien für Flächen (§ 1), Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung (§ 2), des linearen Komplexes, für wiechen — wie auch für nicht-linearen — jede Kurve, als Haupttangentenkurve zu betrachten ist (§ 3), für Integralkurven der Monge'schen Gleichung (§ 4), endlich für nicht-lineare Komplexe (§ 5) behandelt. Es wird auf die Resultate Gambier-Liebmann Bezug genommen. Vgl. folgende Abhandlung.

Д. М. СИНЦОВ

Скрут асимптотичних ліній

Як і в попередній статті, розглядаємо питання про скрут асимптотичних ліній (ліній головних дотичних) 1° для поверхонь, 2° для Пфафового рівняння, 3° для лінійного комплексу, 4° для Монжевого рівняння та 5° для лінійчатого комплексу нелінійного.

§ 1. АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ ПОВЕРХНІ

Хай поверхню задано рівнянням

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

Рівняння стичної (оскуляційної) площини її асимптотичних ліній, тобто її дотичної площини, є

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0, \tag{2}$$

а самі асимптотичні лінії мають рівняння

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0. \tag{3}$$

Тому координати точки сферичного відображення їх бінормалі

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

звідціль його елемент дуги

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

а міра скруту

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} \text{ (де } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Щоб обчислити міру скруту для асимптотичної лінії треба, підставити значіння $\frac{dy}{dx}$ з (3), або

$$\frac{rdx + sdy}{dy} = \frac{sdx + tdy}{-dx} = \lambda \tag{4}$$

і таким чином

$$d\sigma^2 = \frac{\lambda^2(dy^2+dx^2+dz^2)}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{\lambda^2 ds^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

а

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{\lambda}{1+p^2+q^2}. \tag{5}$$

Але розв'язування (4) дає

$$y' = \frac{-s \pm \sqrt{s^2-rt}}{t} \therefore s + ty' = \pm\sqrt{s^2-rt}.$$

Тому для кореня (3)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm\sqrt{s^2-rt}}{1+p^2+q^2} \tag{6}$$

Коли візьмемо добуток мір кривини двох асимптотичних ліній, маємо:

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

§ 2. СИСТЕМА ІНТЕҐРАЛЬНИХ КРИВИХ РІВНАННЯ

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{1}$$

Для асимптотичних кривих системи стична (оскуляційна) площина є

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0, \tag{2}$$

що відповідає точці (x, y, z). Напрямкам асимптотичних ліній відповідають рівнання

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0. \tag{3}$$

Елементи дуги сферичного відображення $(V^2 = P^2 + Q^2 + R^2)$

$$d\sigma^2 = \frac{1}{V^4}\sum(VdP - PdV)^2 = \frac{1}{V^4}\left\{\sum P^2 \sum dP^2 - \left(\sum PdP\right)^2\right\}$$

і тому

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(PdQ-QdP)^2+(QdR-RdQ)^2+(RdP-PdR)^2}}{(P^2+Q^2+R^2)\,ds}. \tag{4}$$

Треба ще підставити замість $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ їх значіння з (1) та (3). Для цього розв'яжемо (1), (3) відносно dx, dy, dz:

$$\frac{dx}{QdR-RdQ} = \frac{dy}{RdP-PdR} = \frac{dz}{PdQ-QdP} = \frac{1}{S} \tag{5}$$

Тому

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{S}{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Рівнання (5) можна переписати

$$\begin{aligned} QdR - RdQ - Sdx &= 0 \\ RdP - PdR - Sdy &= 0 \\ PdQ - QdP - Sdz &= 0, \end{aligned}$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} [QR_x' - RQ_x' - S]dx + [QR_y' - RQ_y']dy + [QR_z' - RQ_z']dz &= 0 \\ [RP_x' - PR_x']dx + [RP_y' - PR_y' - S]dy + [RP_z' - PR_z']dz &= 0 \\ [PQ_x' - QP_x']dx + [PQ_y' - QP_y']dy + [PQ_z' - QP_z' - S]dz &= 0. \end{aligned}$$

Умова згідности цих рівнань є

$$O = \begin{vmatrix} QR_x' - RQ_x' - S, & QR_y' - RQ_y' & QR_z' - RQ_z' \\ RP_x' - PR_x' & RP_y' - PR_y' - S, & RP_z' - PR_z' \\ PQ_x' - QP_x' & PQ_y' - QP_y' & PQ_z' - QP_z' - S \end{vmatrix} = 0.$$

3-го степеня відносно S. Але вільний член

$$\begin{vmatrix} QR_x' - RQ_x', & QR_y' - RQ_y', & QR_z' - R_zQ_z' \\ RP_x' - PR_x', & RP_y' - PR_y', & RP_z' - PR_z' \\ PQ_x' - QP_x', & PQ_y' - QP_y', & PQ_z' - QP_z' \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} P_x' & P_y' & P_z' \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' \\ R_x' & R_y' & R_z' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} O & -R & Q \\ R & O & -P \\ -Q & P & O \end{vmatrix} = 0\ ^{1)}.$$

Для S залишається рівнання 2-го степеня, що його корені дають скрути для двох напрямків головних дотичних:

$$S^2 - GS - \Delta = 0.$$

Це те саме рівнання, що мали для подвійних елементів проєктивної взаємности (с. 125).

Таким чином:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 + 4\Delta}}{2(P^2 + Q^2 + R^2)}$$

---

[1]) Див. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения, § 4 Н. Зап. Н.-д. Мат. Кат. Укр., III, 1928, стор. 124.

і тому

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = - = \frac{\Delta'}{(P^2+Q^2+R^2)^2}.$$

Добуток мір скруту для асимптотичних напрямів дорівнює Ґавсовій кривині системи.

Також і

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\frac{G}{(P^2+Q^2+R^2)^2}.$$

§ 3. ЛІНІЙНИЙ КОМПЛЕКС

Пфафове рівнання лінійного комплексу є окремий випадок рівнання (1) § 2, що можна характеризувати його властивістю мати кожну інтеґральну криву за асимптотичну. І можна обчислити скрут інтеґральної кривої за допомогою загальної формули скруту просторової кривої, що я й зробив у другому місці.

Але можна для рівнання форми:

$$y dx - x dy + k dz = 0 \tag{1}$$

показати, що координати точки сферичного відображення є

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+k^2}}, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+k^2}}, \quad \zeta = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+k^2}} \tag{2}$$

і

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \sum\left[d\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+y^2}}\right)\right]^2 = \frac{k^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{(x^2+y^2+y^2)^2},$$

тому

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{x^2+y^2+k^2}. \tag{3}$$

Значіння міри скруту залежить тільки від координат точки, але від його напряму не залежить. Це є відомий результат S. Lie. Коли лінійний комплекс задано загальним рівнанням

$$\sum_{i,k}^{1\ldots 4} a_{ik}\, p_{ik} = 0 \tag{4}$$

відповідне Пфафове рівнання є

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + a_{41})dx + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + a_{42})dy +$$
$$+ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{44})dz = 0 \tag{5}$$

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0.$$

Напрямні косинуси бінормалі є λ, μ, ν:

$$\frac{\lambda}{a_{21}y+a_{31}z+a_{41}}=\frac{\mu}{a_{12}x+a_{32}z+a_{42}}=\frac{\nu}{a_{13}x+a_{23}y+a_{43}}=$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\sum(a_{21}y+a_{31}z+a_{41})^2}} \tag{6}$$

Далі

$$G=-2(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})=-2(a,a)$$

$$\Delta=-\frac{1}{4}G^2=-(a,a)^2.$$

Тому рівнання для S:

$$S^2+2(a,a)S+(a,a)^2=0,$$

тобто

$$S=-(a,a)$$

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{-(a,a)}{(a_{21}y+a_{31}z+a_{41})^2+(a_{12}x+a_{32}z+a_{42})^2+(a_{13}x+a_{23}y+a_{43})^2}.$$

§ 4. МОНЖЕВЕ РІВНАННЯ

Хай система кривих задовольняє Монжеве рівнання

$$F(x,y,z;\ x',y',z')=0, \tag{1}$$

однорідне відносно x', y', z'. Головні напрямки визначаються умовою

$$F_x{}'x'+F_y{}'y'+F_z{}'z'=0 \tag{2}$$

Відповідні площини

$$F'_{x'}(X-x)+F'_{y'}(Y-y)+F'_{z'}(Z-z)=0, \tag{3}$$

дотичні до конусу конекса і стичні (оскуляційні) площини відповідної кривої конексу, а тому шуканий радіюс скруту визначається такою формулою:

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{F'_{x'}}{T}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{F'_{y'}}{T}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{F'_{z'}}{T}\right)}{ds}\right]^2}, \tag{4}$$

де

$$T^2=F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}.$$

Отже

$$\frac{d\left(\frac{F'_{x'}}{T}\right)}{ds}=\frac{1}{T}\frac{dF_{x'}}{ds}-\frac{F'_{x'}}{T^2}\frac{dT}{ds}$$

і підкореневий вираз є

$$\frac{1}{T}\left[T^2\sum\left(\frac{dF'_{x'}}{ds}\right)^2-\left(F'_{x'}\frac{dF'_{x'}}{ds}+F'_{y'}\frac{dF'_{y'}}{ds}+F'_{z'}\frac{dF'_{z'}}{ds}\right)^2\right];$$

таким чином

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{\left(F'_{y'}\frac{dF'_{z'}}{ds}-F'_{z'}\frac{dF'_{y'}}{ds}\right)^2+\left(F'_{z'}\frac{dF'_{x'}}{ds}-F'_{x'}\frac{dF'_{z'}}{ds}\right)^2+\left(F'_{x'}\frac{dF'_{y'}}{ds}-F'_{y'}\frac{dF'_{x'}}{ds}\right)^2}}{(F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'_{z'})}.$$

Але під коренем маємо не тільки x' y' z', але і x'', y'', z''. Тому розглядаємо ще далі. Похідні x'', y'', z'' зв'язані для асимптотичної лінії співвідношеннями:

$$x'x''+y'y''+z'z''=0 \tag{5}$$

$$F'_{x'}x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''=0 \tag{6}$$

та похідна від (2) [інша форма (2)]:

$$x''\left(F'_x+\frac{\partial F'_x}{\partial x'}x'+\frac{\partial F'_y}{\partial x'}y'+\frac{\partial F'_z}{\partial x'}z'\right)+y''\left(F'_y+\frac{\partial F'_x}{\partial y'}x'+\frac{\partial F'_y}{\partial y'}y'+\frac{\partial F'_z}{\partial y'}z'\right)+$$

$$+z''\left(F'_z+\frac{\partial F'_x}{\partial z'}x'+\frac{\partial F'_y}{\partial z'}y'+\frac{\partial F'_z}{\partial z'}z'\right)=-\Delta^2 F,$$

де

$$\Delta F=\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

і

$$\Delta^2 F=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F.$$

Розв'язуємо ці рівняння відносно x'', y'', z''

$$\begin{aligned} D_1 x'' &= -\Delta^2 F\,(y'F'_{z'}-z'F'_{y'})\\ D_1 y'' &= -\Delta^2 F\,(z'F'_{x'}-x'F'_{z'})\\ D_1 z'' &= -\Delta^2 F\,(x'F'_{y'}-y'F'_{x'}), \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$D_1=\begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F'_x+x'\frac{\partial F_x'}{\partial x'}+y'\frac{\partial F_y'}{\partial x'}+z'\frac{\partial F_z'}{\partial x'}\\ y' & F'_{y'} & F'_y+x'\frac{\partial F_x'}{\partial y'}+y'\frac{\partial F_y'}{\partial y'}+z'\frac{\partial F_z'}{\partial y'}\\ z' & F'_{z'} & F'_z+x'\frac{\partial F_x'}{\partial z'}+y'\frac{\partial F_y'}{\partial z'}+z'\frac{\partial F_z'}{\partial z'} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

що вже обчислили іншим способом.

Отже

$$x'y' - y'x'' = D_1 \Delta^2 F \left[y'(y'F'_{z'} - z'F'_{y'}) - x'(z'F'_{x'} - x'F'_{z'})\right] = D_1 \Delta^2 F \,.\, F'_{z'}$$

за

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad \sum x' F'_{x'} = rF = 0.$$

Також

$$z'x'' - x'z'' = D_1 \Delta^2 F \,.\, F'_{y'}$$
$$y'z'' - z'y'' = D_1 \Delta^2 F \,.\, F'_{z'}.$$

Диференціюємо ці вирази і маємо:

$$x'y''' - y'x''' = \frac{dD_1}{ds} \Delta^2 F \,.\, F'_{z'} + D_1 \frac{dF'_{z'}}{ds} \Delta^2 F + D_1 F'_{z'} \frac{d\Delta^2 F}{ds} \text{ і т. д.}$$

Множимо на x'', y'', z'' і додаємо.

$$-(x'y''z''') = \frac{dD_1}{ds} \Delta^2 F \sum x'' F'_{x'} + D_1 \Delta^2 F \sum x'' \frac{dF'_{x'}}{ds} + D_1 \frac{d\Delta^2 F}{ds} \sum z'' F'_{z'}.$$

Перша та третя суми дорівнюють 0 за (6), і тому

$$-(x'y''z''') = D_1 \Delta^2 F \sum x'' \frac{dF'_{x'}}{ds}.$$

Але

$$\sum x'' \frac{dF'_{x'}}{ds} = -\frac{1}{D_1} \Delta^2 F \sum \left(x'F'_{y'} - y'F'_{x'}\right) \frac{dF'_{z'}}{ds}.$$

Таким чином

$$+\frac{1}{\varrho} = D_1^2 (F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}) \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & \dfrac{dF'_{x'}}{ds} \\ y' & F'_{y'} & \dfrac{dF'_{y'}}{ds} \\ z' & F'_{z'} & \dfrac{dF'_{z'}}{ds} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

але похідні x'', y'', z'' ще є в 3 стовпці. Дійсно

$$\frac{dF'_{x'}}{ds} = \Delta F'_{x'} + F''_{x'x'} x'' + F''_{x'y'} y'' + F''_{x'z'} z'' = \Delta F'_{x'} - \frac{\Delta^2 F}{D_1} L$$

$$\frac{dF'_{y'}}{ds} = \Delta F'_{y'} + F''_{x'y'} x'' + F''_{y'y'} y'' + F''_{y'z'} z'' = \Delta F'_{y'} - \frac{\Delta^2 F}{D_1} M$$

$$\frac{dF'_{z'}}{ds} = \Delta F'_{z'} + F''_{x'z'} x'' + F''_{y'z'} y'' + F''_{z'z'} z'' = \Delta F'_{z'} - \frac{\Delta^2 F}{D_1} N,$$

де

$$L=\begin{vmatrix} F''_{x'x'} & x' & F'_{x'} \\ F''_{x'y'} & y' & F'_{y'} \\ F''_{x'z'} & z' & F'_{z'} \end{vmatrix}, \quad M=\begin{vmatrix} F''_{x'y'} & x' & F'_{x'} \\ F''_{y'y'} & y' & F'_{y'} \\ F''_{y'z'} & z' & F'_{z'} \end{vmatrix}, \quad N=\begin{vmatrix} F''_{x'z'} & x' & F'_{x'} \\ F''_{y'z'} & y' & F'_{y''} \\ F''_{z'z'} & z' & F'_{z'} \end{vmatrix}.$$

За допомогою цих виразів можна записати:

$$\frac{1}{\rho}=D_1{}^2+(F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'})\begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & \Delta F'_{x'} \\ y' & F'_{y'} & \Delta F'_{y'} \\ z' & F'_{z'} & \Delta F'_{z'} \end{vmatrix} - D_1 \sum F'^2_{x'} \Delta^2 F \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & L \\ y' & F'_{y'} & M \\ z' & F'_{z'} & N \end{vmatrix}.$$

Коли мінори матиці

$$\left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ F'_{x'} & F'_{y'} & F'_{z'} \end{matrix} \right\|$$

назвемо a, b, c, так що

$$ax'+by'+cz'=0,$$
$$F'_{x'}a+F'_{y'}b+F'_{z'}c=0,$$

перший детермінант дорівнює

$$a\Delta F'_{x'}+b\Delta F'_{y'}+c\Delta F'_{z'},$$

а другий

$$La+Mb+Nc,$$

де

$$L=F''_{x'x'}a+F''_{x'y'}b+F''_{x'z'}c$$
$$M=F''_{x'y'}a+F''_{y'y'}b+F''_{y'z'}c$$
$$N=F''_{x'z'}a+F''_{y'z'}b+F''_{z'z'}c;$$

можна позначити

$$F''_{x'x'}=A_{11}, \quad F''_{x'y}=A_{12}=A_{21} \quad \text{і т. д.}$$

і тому

$$La+Mb+Nc=A_{11}a^2+A_{22}b^2+A_{33}c^2+2A_{12}ab+2A_{13}ac+2A_{23}bc.$$

Величини x', y', z' треба обчислити з рівнань

$$F(x,y,z;\ x',y',z')=0$$
$$F_x'x'+F_y'y'+F_z'z'=0$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

§ 5. ЛІНІЙЧАТИЙ КОМПЛЕКС НЕ ЛІНІЙНИЙ

S. Lie в Geometrie d. Berührungstransformationen, B. I., S. 308, дає Satz 27 про те, що *інтеґральні криві лінійчатого комплексу, які мають спільну точку та спільну відповідну дотичну, мають і спільну стичну площину.* Але він доводить, крім того, що вони мають ще й *однаковий скрут.* Перше твердження цілком певне, бо за однорідністю Монжевого рівнання відносно x', y', z' маємо:

$$F'_{x'}x' + F'_{y'}y' + F'_{z'}z' = 0 \tag{1}$$

та для лінійчатого комплексу, крім того:

$$F'_{x'}x'' + F'_{y'}y'' + F'_{z'}z'' = 0. \tag{2}$$

Тому косинуси напряму бінормалі λ, μ, ν пропорціональні $F'_{x'}, F'_{y'}, F'_{z'}$, і не залежать від x'', y'', z''.

Але для доказу другої половини теореми S. Lie диференціює по незалежній змінній s рівність (2), що не є тотожність. На це звернув увагу, як каже Gambier, перший Lainé (Nouv. Ann. (5) III, 1925[1]), Gambier[2]) вивів на підставі диференціяльно - геометричних міркувань цікаву формулу для скруту τ кривої комплексу

$$\tau = \theta \pm \rho r,$$

де θ є скрут в тій самій точці $P(x, y, z)$ лінійного комплексу, дотичного до даного вздовж твірної PT конуса комплексу, ρ — конічна кривина конусу комплексу точки P, r — кривина кривої. Аналітичний доказ дав H. Liebmann[3]) в червні 1928 р. Його треба трохи обміркувати. Справа в тім, що Gambier та Liebmann говорять про дотичний комплекс як про цілком визначений. Але лінійчатий комплекс ранґу $r \geqslant 2$ має не єдиний дотичний комплекс, але безліч дотичних комплексів. Справді рівнання комплексу

$$F(p_{12} \ldots p_{34}) = 0$$

можна писати ще так

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots p_{34}) + (p, p)\varphi(p_{12} \ldots p_{34}) = 0, \tag{3}$$

де

$$(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

і $\varphi = 0$ довільний комплекс $(r-2)$ ранґу. Тому за рівнання дотичного комплексу не можна взяти

$$\sum_{ik} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} q_{ik} = 0, \tag{4}$$

---

[1]) F. Engel в примітках до т. III Gesammelte Abhandlungen von S. Lie, S. 770, каже, що перший це зробив Demoulin (C. R. Paris 124, p. 1077—1079, 1897. Див. ще Zindler. Ueber Complexcurven ein Theorem von Lie. Jahresb. D. M. V. VIII. 1900. S. 199).

[2]) Courbure et torsion des courbes d'un complexe linéaire ou non linéaire. Bull. Sc.. Math. 1926.

[3]) Die Sätze von S. Lie u. Gambier über Kurven eines Liniencomplexes — Sitzungsber Heidelberger Akad. 1928. Abh 9.

як роблять Gambier та Liebmann, але

$$\sum_{i,k} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} q_{ik} + (p, q)\varphi(p_{12} \ldots p_{34}) = 0, \tag{5}$$

де φ — довільна функція рангу $r-2$. *А проте всі ці лінійні комплекси мають те саме Пфафове рівняння.*

Справді (5) можна детальніше так писати

$$\sum_{i,k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \varphi . p_{34}\right) q_{12} = 0 \tag{5'}$$

і в неоднорідних координатах

$$\left.\begin{array}{lll} p_{12} = xy' - yx', & p_{13} = xz' - zx', & p_{23} = yz' - zy' \\ p_{14} = -x', & p_{24} = -y', & p_{34} = -z' \end{array}\right\} \tag{6}$$

Тому відповідне Пфафове рівняння є

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \varphi . p_{34}\right)\left(y\,dx - x\,dy\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p'_{13}} + \varphi . p_{42}\right)\left(z\,dx - x\,dz\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{23}} + \varphi . p_{14}\right)\left(z\,dy - y\,dz\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{14}} + \varphi . p_{23}\right)dx +$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{24}} + \varphi . p_{31}\right)dy + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \varphi . p_{12}\right)dz = 0$$

або

$$dx\left(y\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + z\frac{\partial F}{\partial p_{13}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}}\right) + dy\left(x\frac{\partial F}{\partial p_{21}} + z\frac{\partial F}{\partial p_{31}} + \frac{\partial F}{\partial p_{41}}\right) +$$
$$+ dz\left(\frac{\partial F}{\partial p_{31}} + y\frac{\partial F}{\partial p_{32}} + \frac{\partial F}{\partial p_{42}}\right) + \varphi\Big[(yp_{34} + zp_{42} + p_{23})\,dx +$$
$$+ (xp_{43} + zp_{14} + p_{31})\,dy + (xp_{24} + yp_{41} + p_{12})\,dz\Big] = 0.$$

Коли підставимо замість p_{ik} їх значіння за (6), маємо тотожно 0, бо коефіцієнти диференціялів dx, dy, dz є не що інше, як умови інцидентного положення точки та прямої. Тому Пфафове рівняння й усі висновки, що з нього зроблено, є вірні.

Для інтеґральних кривих комплексу (лінійчатого або нелінійного) з (1) та (2) маємо:

$$\frac{F'_{x'}}{\lambda} = \frac{F'_{y'}}{\mu} = \frac{F'_{z'}}{\nu} = \pm\sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}.$$

За допомогою позначень

$$x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma, \quad x'' : y'' : z'' = l : m : n$$

замість (1) та (2) можна писати:

$$\alpha F_\alpha' + \beta F_\beta' + \gamma F_\gamma' = 0 \tag{7}$$

$$l F_\alpha' + m F_\beta' + n F_\gamma' = 0. \tag{8}$$

Liebmann диференціює (8)

$$-\sum\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \sum l \frac{d(F'_\alpha)}{ds} = 0,$$

але за допомогою (7)

$$-\frac{1}{\rho}\sum \lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \sum l \frac{dF_\alpha'}{ds} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\sum l \frac{\partial F_\alpha'}{ds}}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}}, \tag{9}$$

але

$$\frac{dF'_\alpha}{ds} = y\frac{dF'_{p_{13}}}{ds} + z\frac{dF'_{p_{23}}}{ds} + \frac{dF'_{p_{14}}}{ds} + \beta\frac{\partial F}{\partial p_{23}} + \gamma\frac{\partial F}{\partial p_{13}}.$$

Ті ж самі операції з Пфафовим рівнянням дотичного комплексу дають

$$-\frac{1}{\rho_0}\sum \lambda\left\{y\left(\frac{\partial F}{\partial p_{21}}\right) + z\left(\frac{\partial F}{\partial p_{31}}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{41}}\right)\right\} + \left[l\left(\frac{\partial F}{\partial p_{21}}\beta + \frac{\partial F}{\partial p_{31}}\gamma\right) + \right.$$

$$\left. + m\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}}\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_{32}}\beta\right) + n\left(\frac{\partial F}{\partial p_{13}}\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}\beta\right)\right] = 0.$$

Коефіціент при $-\frac{1}{\rho_0}$ є

$$\sum \lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\sum F_\alpha'^2}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2}} = \sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}.$$

Отже

$$-\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \pm \frac{\sum l\left(y\frac{dF_{p_{12}}}{ds} + z\frac{dF_{p_{13}}}{ds} + \frac{dF_{p_{14}}}{ds}\right)}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}}. \tag{10}$$

Праву частну цього рівняння можна зв'язати з конічною кривиною конусу комплексу.

Хай маємо конус

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{11}$$

з вершком в точці (x, y, z), тобто геометричне місце прямих

$$\frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma}.$$

Кут v двох прямолінійних твірних α, β, γ та $\alpha + d\alpha,\ \beta + d\beta,\ \gamma + d\gamma$ визначається формулою

$$\cos v = \frac{\alpha(\alpha + d\alpha) + \beta(\beta + d\beta) + \gamma(\gamma + d\gamma)}{\sqrt{(\alpha + d\alpha)^2 + (\beta + d\beta)^2 + (\gamma + d\gamma)^2}},$$

звідкіль

$$\sin v = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \sum d\alpha^2}} = \frac{\sqrt{\sum d\alpha^2}}{\sqrt{1 + \sum d\alpha^2}} = \sqrt{\sum d\alpha^2} = \frac{1}{R} ds \cdot$$

Цей $\sin v$, або краще v (як відкинули члени 2-го степеня, є елемент дуги сферичної індикатриси.

Дотичні площини до конусу (11) вдовж (α, β, γ) та $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$ є:

$$F_\alpha'(X - x) + F_\beta'(Y - y) + F'_\gamma(Z - z) = 0$$
$$F'_{\alpha + d\alpha}(X - x) + F'_{\beta + d\beta}(Y - y) + F'_{\gamma + d\gamma}(Z - z) = 0.$$

Відкіль для кута w між цими площинами маємо:

$$\cos w = \frac{F_\alpha'\left(F_\alpha' + \sum \frac{\partial F_\alpha'}{\partial \alpha} d\alpha\right) + F_\beta'\left(F_\beta' + \sum \frac{\partial F_\beta'}{\partial \alpha} d\alpha\right) + F_\gamma'\left(F_\gamma' + \sum \frac{\partial F_\gamma'}{\partial \alpha} d\alpha\right)}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2} \times \sqrt{\sum F'^2_{\alpha + d\alpha}}} \therefore$$

$$\sin w = \frac{\sqrt{\left\| \begin{matrix} F_\alpha' & F_\beta' & F_\gamma' \\ dF_\alpha' & dF_\beta' & dF_\gamma' \end{matrix} \right\|^2}}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2}}.$$

Відношення

$$\frac{\sin w}{\sin v} = \frac{dw}{dv} = \frac{\sqrt{\sum (F_\beta' \, dF_\gamma' - F_\gamma' \, dF_\beta')^2}}{\sqrt{\sum d\alpha^2} \sqrt{\sum F_\alpha'^2}}$$

можна називати *конічною кривиною конусу*. Прикладемо цю формулу до конусу, що належить точці (x, y, z) конексу

$$F(x, p) = 0$$

в його головній коінциденції

$$F(x, y, z;\ X - x,\ Y - y,\ Z - z) = 0.$$

Тоді треба покласти

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \gamma = z'$$

$$\varkappa = \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{\sum\left(F'_{y'}\dfrac{dF'_{z'}}{dv} - F'_{z'}\dfrac{dF'_{y'}}{dv}\right)^2}}{\sum F'^2_{x'}\sqrt{\sum\left(\dfrac{d\alpha}{dv}\right)^2}}$$

або

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\sum F'^2_{\alpha}\cdot\sum\left(\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds}\right)^2 - \left(\sum F'_{\alpha}\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds}\right)^2}}{\left(\sum F'^2_{\alpha}\right)^{3/2}} \tag{12}$$

Коли візьмемо на увагу, що за переміщенням вдовж сферичної індикатриси точка (x, y, z) залишається нерухомою, тобто $dx = dy = dz = 0$, можна покласти, як то й зробив H. Liebmann, що

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) = R\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) = k\left\{y\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}}\right) + z\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{13}}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{14}}\right)\right\}$$

$$dx = dy = dz = 0,$$

тобто

$$y\frac{dF'_{p_{12}}}{ds} + z\frac{dF'_{13}}{ds} + \frac{dF'_{p_{14}}}{ds} = \frac{1}{R}\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right).$$

Отже чисельник формули (10) за $l = \gamma\beta - \mu\nu$ дорівнює

$$N = \begin{vmatrix} \dfrac{dF'_{\alpha}}{ds} & \dfrac{dF'_{\beta}}{ds} & \dfrac{dF'_{\gamma}}{ds} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

і тому

$$N^2 = \begin{vmatrix} \sum\left(\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds}\right)^2 & \sum\alpha\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds} & \sum\lambda\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds} \\ \sum\alpha\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds} & 1 & 0 \\ \sum\lambda\dfrac{dF'_{\alpha}}{ds} & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum\left(\frac{dF'_{\alpha}}{ds}\right)^2 - \left(\sum\lambda\frac{dF'_{\alpha}}{ds}\right)^2 - \left(\sum\alpha\frac{dF'_{\alpha}}{ds}\right)^2,$$

але

$$\sum \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \sum l \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

і тому

$$\sum \alpha \frac{dF_\alpha'}{ds} = 0 \qquad \lambda = \frac{F_\alpha'}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2}} = RF'_\alpha.$$

Отже

$$N^2 = \left[\sum \left(\frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2 \cdot \sum F_\alpha' - \left(\sum F_\alpha' \frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2\right] R^2,$$

тобто

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{\sqrt{\sum \left(\frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2 \cdot \sum F_\alpha'^2 - \left(\sum F_\alpha' \frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2}}{\sum F_\alpha'^2}.$$

За допомогою (12) маємо:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{\varkappa}{R}.$$

RÉSUMÉ

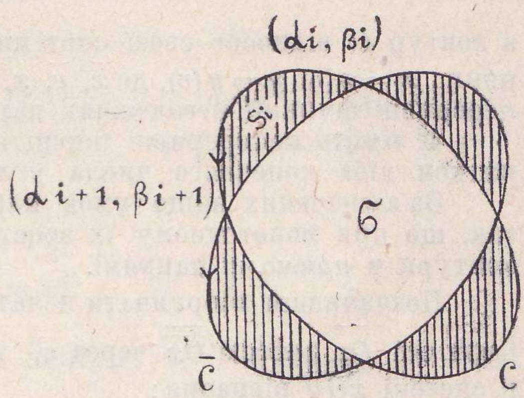
Wie in der vorangehenden Abhandlung, hat d. Verf. sich die Aufgabe gestellt die Torsion der haupttangenten Kurven zu betimmen und zwar 1° im Fall einer Fläche, 2° für das System der Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung, 3° speciell für den linearen Linien-complex, 4° für das System der Integralkurven einer Mongischen Gleichung u. 5° für deren Ausnahmefall — den nichtlinearen Linien-complex. Für d. letzteren wird der Beweis von H. Liebmann der Formel von Gambier in etwas geänderter Form wiedergegeben. Die betreff. Resultate wurden an den Versammlungen des Seminars der wissensch. Katheder der Geometrie und der Charkower mathemat. Gesellschaft während des ak. Jahres 1927/28 mitgeteilt.

СОЛОВЙОВ П. О.

Про найкраще накладання двох замкнених кривих

Хай C та $\bar{C}$ плоскі, неперервні замкнені криві, що відділяють одно-в'язні частини S та $\bar{S}$ площини. Можна вважати, що при різноманітних взаємних положеннях обох кривих в одній площині їх площі S та $\bar{S}$ завжди мають спільну частину $\sigma \geqslant 0$.

Позначмо через J суму абсолютних величин тих сеґментів s_i обох площ, що *не є спільні* для S та $\bar{S}$



$$J = \sum |s_i|;$$

маємо також, що

$$J = S + \bar{S} - 2\sigma. \qquad (1)$$

Можна довести, що J є неперервна функція параметрів, що визначають взаємне положення обох кривих, що J існує у всій площині і що також

$$0 \leqslant J \leqslant S + \bar{S}.$$

Отже неперервна, обмежена зліва функція J доходить принаймні один раз свого абсолютного minimum'у $m(J)$ і при тому в конечній часті площини. Назвімо таке взаємне положення двох кривих C та $\bar{C}$, за якого $J = m(J)$, *найкращим накладанням*, криві — *найкраще накладеними* і визначім доконечні умови такого найкращого накладання двох кривих за певних умов щодо цих кривих.

А саме припустімо, що за всякого взаємного положення обох замкнених кривих, принаймні за положень напевне не відмінних від найкращого накладання —

1) їх площі S та $\bar{S}$ мають *одно в'язну* спільну частину σ;

2) їх контури C та $\bar{C}$ мають *конечне* число спільних точок;

3) вони *не вміщаються* одна в другу, тобто не може бути такого взаємного положення обох кривих, за якого всяка точка площі однієї з них була б точкою площі другої.

Замітьмо, що коли б одну з кривих можна було б вмістити в другу, то саме за такого вміщення мали б абсолютний minimum $m(J)$.

Умови 1° та 2° напевне справджуються для безлічі таких двох опуклих кривих, що не містять конґруентних дуг.

1. За зазначених вище умов число точок перетину двох кривих C та $\overline{C}$ (не рахуючи можливих при тому точок дотику) є завжди число паристе $2k$. Число тих сеґментів s_i, що не є спільні для обох площ S та $\overline{S}$, буде також $2k$; в своєму розміщенні відносно кожної з кривих C та $\overline{C}$ зокрема ці сеґменти будуть послідовно то зовнішніми, то внутрішніми. Позначмо координати тих точок перетину обох кривих, що ними визначається сеґмент s_i, через

$$(\alpha_i, \ \beta_i), \quad (\alpha_{i+1}, \ \beta_{i+1}), \quad i = 1, \ 2, \ 3 \ldots 2k,$$

за порядком їх розміщення на контурах при прямому їх обході[1]). Хай контур $\overline{C}$ визначається в параметричній формі відносно нерухомої системи Декартових координат $x, \ y$ рівняннями

$$\bar{x} = \bar{x}(u), \quad \bar{y} = \bar{y}(u),$$

а контур C відносно своєї системи Декартових координат $x, \ y$ — рівняннями: $x = x(v), \ y = y(v)$, де $\bar{x}, \ \bar{y}, \ x, \ y$ є однозначні конечні періодичні й неперервні функції незалежних параметрів u та v і

4° мають неперервні перші похідні вподовж всього контура за винятком хіба конечного числа углових його точок.

За зазначених вище умов параметри u та v завжди можна вибрати так, що при монотонному їх зростанні відповідні точки обігають обидва контури в *прямому* напрямі.

Позначивши координати початку O відносно осей $(\bar{x}\bar{O}\bar{y})$ через ξ та η і кут осі $\overrightarrow{Ox}$ з віссю $\overrightarrow{\bar{O}\bar{x}}$ через φ, маємо для координат точок контура C в системі $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ рівняння:

$$\begin{aligned} X &= \xi + x(v)\cos\varphi - y(v)\sin\varphi \\ Y &= \eta + x(v)\sin\varphi + y(v)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Зміною параметрів $\xi, \ \eta, \ \varphi$ дістанемо всі можливі взаємні положення обох кривих C та $\overline{C}$.

Точки перетину $(\alpha_i \beta_i)$ контурів при даних $\xi, \ \eta, \ \varphi$ визначаються реальними кореннями системи рівнань:

$$\begin{aligned} \bar{x}(u) &= \xi + x(v)\cos\varphi - y(v)\sin\varphi = X(v, \xi, \varphi) \\ \bar{y}(u) &= \eta + x(v)\sin\varphi + y(v)\cos\varphi = Y(v, \eta, \varphi). \end{aligned} \tag{A}$$

Ця система дасть $2k$ пар значінь $u, \ v$ в функції параметрів $\xi, \ \eta, \ \varphi$

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(\xi, \eta, \varphi) \\ v_i &= v_i(\xi, \eta, \varphi) \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \tag{3}$$

---

[1]) Тут і скрізь далі для всіх величин, що залежать від індексів точок перетину, вважаємо:

$$\alpha_{2k+1} = \alpha_1; \quad \beta_{2k+1} = \beta_1 \ldots \text{ і т. д.}$$

за умови, що

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}, & \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v}, & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

Остання справджується для всіх систем значінь ξ, η, φ в достатньо малих інтервалах їх зміни:

$$|\xi-\xi_0|<\delta, \quad |\eta-\eta_0|<\delta, \quad |\varphi-\varphi|<\delta,$$

якщо контури C та $\bar{C}$ при даних ξ_0, η_0, φ_0 не мають ні точок дотику (які ми покищо виключаємо), ні спільних дуг (2°).

Упорядковуючи u_i, v_i при даних ξ, η, φ за їх зростанням

$$u_i \leqslant u_{i+1}, \quad v_i \leqslant v_{i+1} \} \quad i=1, 2, 3 \ldots 2k,$$

що завжди можна зробити за тих умов (4°), що зазначено для параметрів, дістанемо послідовність координат (α_i, β_i) точок перетину контурів C та $\bar{C}$ при прямому їх обході

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{x}(u_i) = X[v_i(\xi, \eta, \varphi), \xi, \varphi] \\ \beta_i &= \bar{y}(u_i) = Y[v_i(\xi, \eta, \varphi), \eta, \varphi] \end{aligned} \quad i=1, 2, 3 \ldots 2k \tag{4}$$

Визначмо $|s_i|$. Інтеґруванням по контуру s_i в прямому напрямі дістанемо:

$$|s_i| = \frac{1}{2}\left| \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\bar{x}d\bar{y} - \bar{y}d\bar{x}) - \int_{v_i}^{v_{i+1}} (XdY - YdX) \right|.$$

Зважаючи на те, що за умови 1° сеґменти s_i послідовно будуть то зовнішні, то внутрішні до $\bar{C}$ і що при обході контурів s_i в *прямому* напрямі окремі дуги контурів C та $\bar{c}$, що обмежують s_i, мусимо проходити *послідовно* то в *прямому*, то *в зворотному* напрямі, маємо:

$$|s_i| = \pm\frac{(-1)^{i+1}}{2}\left[\int_{u_i}^{u_{i+1}} (\bar{x}d\bar{y} - \bar{y}d\bar{x}) - \int_{v_i}^{v_{i+1}} (XdY - YdX) \right], \tag{5}$$

при чому з двох знаків $\pm$ перед виразом для $|s_i|$ треба брати, незалежно від покажчика i, знак $+$, якщо перший сеґмент s_i є внутрішній до $\bar{C}$, і знак $-$, якщо він є зовнішній.

Диференціюванням (5) по параметру ξ маємо:

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial \xi} = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \Bigg[-\int_{v_i}^{v_{i+1}} dY + \left(\bar{x}\bar{y}'_{u_{i+1}} - \bar{y}\bar{x}'_{u_{i+1}}\right) \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \xi} -$$

$$- \left(XY'_{v_{i+1}} - YX'_{v_{i+1}}\right) \frac{\partial v_{i+1}\,(be)}{\partial \xi} - \left(\bar{x}\bar{y}'_{u_i} - \bar{y}\bar{x}'_{u_i}\right) \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \left(XY'_{v_i} - YX'_{v_i}\right) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \Bigg] \quad (6)$$

Справді, зважаючи на формули (A), маємо:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} = 0,$$

бо $\bar{x}$, $\bar{y}$ не залежать від ξ явно, і також

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial dX}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial dY}{\partial \xi} = 0.$$

Щождо останніх 4-х члені в формули (6), то, після підстанови замість u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1} їх значінь в функції ξ, вираз можна спростити. Справді, після визначення $u_i = u_i(\xi, \eta, \varphi)$ та $v_i = v_i(\xi, \eta, \varphi)$ з рівнань (A) підстанова цих значінь u_i, v_i знов до тих рівнань перетворює їх на тотожності

$$\begin{aligned} \bar{x}\,[u_i(\xi, \eta, \varphi)] &\equiv X\,[v_i(\xi, \eta, \varphi), \xi, \varphi] = \alpha_i \\ \bar{y}\,[u_i(\xi, \eta, \varphi)] &\equiv Y\,[v_i(\xi, \eta, \varphi), \eta, \varphi] = \beta_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k. \qquad (B)$$

Отже, крім цих тотожностей, маємо також диференціюванням по ξ

$$\begin{aligned} \bar{x}'_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= X'_{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + 1 \\ \bar{y}'_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= Y'_{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \qquad \text{за (A) та (B)}$$

Тому для $\dfrac{\partial |s_i|}{\partial \xi}$ після перетворень дістанемо

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial \xi} = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left[-Y(v_{i+1}) + Y(v_i) - \bar{y}(v_{i+1}) + \bar{y}(v_i) \right] =$$

$$= \pm (-1)^i \, (\beta_{i+1} - \beta_i),$$

останнє за формулами (B).

Отже для $J = \sum_{i=1}^{2k} |s_i|$ маємо

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \pm 2 \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} \beta_i \qquad (7)$$

Цілком аналогічними міркуваннями дістанемо також:

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = \pm 2 \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \alpha_i \tag{8}$$

Щоб скоротити обчислення $\frac{\partial J}{\partial \varphi}$ перейдімо до полярних координат. За умови найкраще накладених кривих візьмімо довільний центр повертання кривої C за спільний полюс і довільного напряму прямі, що стало зв'язані одна з кривою C, друга з $\bar{C}$ — за полярні осі.

Хай $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(u)$ є параметричні полярні рівняння нерухомої кривої $\bar{C}$ проти нерухомої ж системи координат, а $\rho = \rho(v)$, $\theta = \theta(v)$ є рівнання рухомої кривої C проти рухомої системи; функції хай характеризуються умовами, що зазначено вище в 4°.

Хай φ є кут поміж полярних осей; тоді рівняння кривої C проти нерухомої системи буде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(v) \\ \Phi &= \theta(v) + \varphi. \end{aligned} \tag{2'}$$

Координати точок перетину обох кривих визначаються реальними коренями системи:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(u) &= \rho(v) \\ \bar{\theta}(u) &= \theta(v) + \varphi, \end{aligned} \tag{A'}$$

що дає $2k$ пар коренів u_i, v_i, $i = 1, 2, 3 \ldots 2k$, в функції параметра φ, а разом з тим і $2k$ пар значінь

$$\begin{aligned} \rho_i &= \bar{\rho}(u_i) = \rho(v_i) \\ \Phi_i &= \bar{\theta}(u_i) = \theta(v_i) + \varphi \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \tag{4'}$$

— рівності, що після підстановки u_i, v_i в функції φ перетворюються на тотожності:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}[u_i(\varphi)] &\equiv \rho[v_i(\varphi)] \\ \bar{\theta}[u_i(\varphi)] &\equiv \theta[v_i(\varphi)] + \varphi = \Phi \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k. \tag{B'}$$

Зважаючи на послідовну змінність внітрішнього та зовнішнього положення сеґментів s_i проти кривої $\bar{C}$, аналогічно тому, як і раніш, для площі s_i маємо:

$$|s_i| = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left(\int_{u_i}^{u_{i+1}} \bar{\rho}^2 \, d\bar{\theta} - \int_{v_i}^{v_{i+1}} \rho^2 \, d\Phi \right),$$

з аналогічною умовою щодо знаків $\pm$.

Диференціюванням $|s_i|$ по параметру φ маємо:

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial \varphi} = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left[\left(\bar{\rho}^2_{i+1} \frac{d\bar{\theta}}{du_{i+1}} \cdot \frac{du_{i+1}}{d\varphi} - \rho^2_{i+1} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{i+1}} \cdot \frac{dv_{i+1}}{d\varphi} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\bar{\rho}^2_i \frac{d\bar{\theta}}{du_i} \cdot \frac{du_i}{d\varphi} - \rho^2_i \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \cdot \frac{dv_i}{\partial \varphi} \right) \right]$$

і, за тотожностей (B'), після перетворень аналогічних попередньому

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial \varphi} = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} [\rho^2_{i+1} - \rho^2_i].$$

Для $\dfrac{\partial J}{\partial \varphi}$ маємо:

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = \pm \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} [\rho^2_{i+1} - \rho^2_i],$$

і остаточно

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = \pm \sum_{i=i}^{2k} (-1)^i \rho^2_i. \tag{9}$$

Отже, *доконечні* умови extremum'у функції J є

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \alpha_i = 0 \tag{7a}$$

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \beta_i = 0 \tag{8a}$$

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \rho^2{}_i = 0, \tag{9a}$$

рівнання, що разом з рівнаннями (4) та (4′) дають взагалі *достатнє число умов* для визначення тих параметрів ξ, η, φ, за яких $J(\xi, \eta, \varphi)$ доходить extremum'у. Серед цих значінь параметрів ξ, η, φ є обов'язково й ті, в конечному або безконечному числі, за яких J доходить *абсолютного minimum'у*, і, значить, криві C та $\bar{C}$ буде *найкраще накладено.*

Вибрати серед них трійку значінь ξ, η, φ, що саме вдовольняють поставленій задачі, можна після спеціяльного дослідження відповідної квадратичної форми, складеної з других похідних функції $J(\xi, \eta, \varphi)$. Замітьмо, що формули (7), (8), (9) можна дістати, й досить легко, з цілком геометричних міркувань.

Ми обминули при доведенні дослідити випадки дотику кривих C та $\bar{C}$. Але за умови, що число таких точок є конечне і криві є аналітичні, ми дістали б ті ж саме результати, лише припускаючи для окремих пар

$$\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad \beta_j = \beta_{j+1}, \quad \text{і} \quad \rho_j = \rho_{j+1};$$

тому в рівнаннях (7*a*), (8*a*), (9*a*) ці члени взаємно б знищились.

Отже *умови найкращого накладання аналітичних кривих формулюється, не зважаючи на можливість трапитись при такому накладанні точкам дотику в конечному числі; в остаточне формулювання входять лише точки перетину.*

2. Формулюймо зазначені вище умови найкращого накладання кривих геометрично.

Будемо називати точки перетину кривих *точками паристими,* якщо номер їх i — *паристий,* і *точками непаристими,* якщо номер їх *непаристий.*

Запишімо рівнання (7a), (8a), (9a) так

$$\sum_{t=1}^{k} \alpha_{2t} = \sum_{t=1}^{k} \alpha_{2\,t-1} \tag{7b}$$

$$\sum_{t=1}^{k} \beta_{2t} = \sum_{t=1}^{k} \beta_{2\,t-1} \tag{8b}$$

$$\sum_{t=1}^{k} \rho_{2t}^2 = \sum_{t=1}^{k} \rho_{2\,t-1}^2 \tag{9b}$$

Позначмо далі:

$$\sum_{t=1}^{k} \alpha_{2t} = k\,.\,X_p\,; \quad \sum_{t=1}^{k} \alpha_{2\,t-1} = k\,.\,X_{im}\,; \quad \sum_{t=1}^{k} \beta_{2t} = kY_p\,; \quad \sum_{t=1}^{k} \beta_{2\,t-1} = kY_{im}\,;$$

$$k\sum_{t=1}^{k} \rho_{2t}^2 = M_p\,; \quad k\sum_{t=1}^{k} \rho_{2t+1}^2 = M_{im}.$$

Тоді X_p, Y_p можна вважати за координати центру *паристих* точок, а M_p за момент тих точок відносно вибраного початку; аналогічні значіння мають X_{im}, Y_{im} та M_{im} для *непаристих* точок, (— маси = 1).

В нових позначеннях рівності (7*b*), (8*b*), (9*b*) можна записати так:

$$X_p = X_{im} \tag{7c}$$

$$Y_p = Y_{im} \tag{8c}$$

$$M_p = M_{im}. \tag{9c}$$

Замітьмо також, що за рівностей (7*c*) та (8*c*) рівність (9*c*) є правильною не лише відносно вибраного початку, але відносно довільної точки площини.

Наведені формули виявляють, що для *найкращого накладання двох неперервних замкнених аналітичних кривих таких, що*

а) за всякого *взаємного положення їх площі мають одновʼязну спільну частину* [1]),

[1]) Можна уникнути вимоги одновʼязности спільної части σ площ S та $\bar{S}$ *за всякого* взаємного положення обох кривих, якщо додатковими міркуваннями можна встановити, що для тієї части площини, в якій може відбутися найкраще накладання, σ скрізь одновʼязна.

b) *можуть мати лише конечне число спільних точок і*

c) *не вміщаються одна в одну, треба, щоб*

1) центри паристих їх точок перетину і непаристих зливалися і

2) моменти паристих їх точок перетину і непаристих були проміж себе рівні.

Запишімо доконечні умови (7*a*) й (8*a*) найкращого накладання кривих ще й так:

$$\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t}-\alpha_{2t-1})=\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t-1}-\alpha_{2t}) \tag{7d}$$

$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t}-\beta_{2t-1})=\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t-1}-\beta_{2t}); \tag{8d}$$

$\alpha_{i+1}-\alpha_i$ та $\beta_{i+1}-\beta_i$ є проекції на осі $\overline{x}$ та $\overline{y}$ тієї дуги c_i контура C (або дуги $\overline{c}_i$ контура $\overline{C}$), що належить сеґментові s_i. Називаймо c_i дугою *паристою*, якщо індекс її *i* є *паристий*, і *непаристою* в іншому випадку. Тоді умову 1 можна висловити ще й так:

1. Для найкращого накладання кривих зазначеного вище типу треба, щоб сума проекцій їх дуг паристих дорівнювала сумі проекцій їх дуг непаристих на кожну з двох взаємно-перпендикулярних (або довільних) осей.

Але проекція замкненої кривої на довільну вісь дорівнює нулеві; тому

$$\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t}-\alpha_{2t-1})+\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t-1}-\alpha_{2t})=0.$$

$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t}-\beta_{2t-1})+\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t-1}-\beta_{2t})=0.$$

Порівнявши останні формули з попередніми, дістанемо:

$$\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t}-\alpha_{2t-1})=0,\quad \sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t-1}-\alpha_{2t})=0,$$

$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t}-\beta_{2t=1})=0,\quad \sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t-1}-\beta_{2t})=0,$$

тобто за найкращого накладання обох кривих мусять дорівнювати нулеві зокрема як суми проекцій на довільну вісь паристих дуг, так і суми проекцій дуг непаристих, а це значить, що при *найкращому накладанні криві взаємно розбиваються на такі дуги — паристі й непаристі, що з дуг паристих зокрема і з дуг непаристих зокрема можна утворити замкнені контури лише паралельним їх перенесенням.*

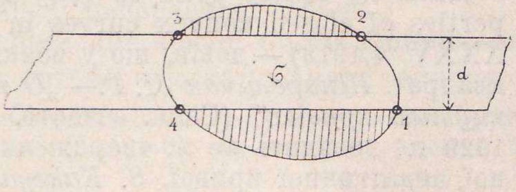
Застосуймо попередні умови до окремих випадків. Замітьмо, що для кривих того типу, що ми беремо на увагу, найкраще накладання *не може* *відбутися за наявности лише двох точок перетину*, хоча б при цьому криві ще мали довільне, але конечне число точок дотику; бо одна з тих точок перетину була б паристою, друга непаристою і, значить, доконечна умова перша не справджувалася б. Отже найменше число точок перетину кривих за їх найкращого накладання є *чотири*.

Якщо маємо такі дві криві зазначеного в умовах 1° — 4° типу, що за всякого взаємного положення вони перетинаються не більш як у чотирьох точках, то для найкращого їх накладання треба, щоб ці точки перетину містилися на вершинах прямокутника, і таке положення їх відбудеться принаймі один раз[1]).

Справді, чотири точки перетину утворюють 4-кутник; за найкращого накладання кривих центри паристих й непаристих точок мусять зливатися; отже діягоналі 4-кутника $2\rho_1$ та $2\rho_2$ перетинаються пополам і, значить, 4-кутник є *паралелограм*; але за другою умовою мусить бути $2\rho_1^2 = 2\rho_2^2 \therefore 2\rho_1 = 2\rho_2$; отже паралелограм має рівні діягоналі, тобто він є *прямокутник*. Остання частина попередньої теореми очевидна, бо положення найкращого накладання неодмінно існує.

З зазначеного виходить, що *у такі дві криві, як то вказано вище, можна завжди вписати принаймі одну пару конґруентних прямокутників*.

Розгляньмо ще частинніший випадок.



Хай $\overline{C}$ є неперервна, замкнена, *скрізь* опукла крива, тобто контур її не має прямолінійних часток. Тоді кожна пара паралельних прямих може перетинати $\overline{C}$ не більш як у 4-х точках. Хай віддалення цих паралельних є стала величина d. Найдімо доконечні умови такого положення цієї смуги ширини d, за якого вона вирізає з площі кривої найбільшу частину σ.

Хай $d < D$ — найменшого з *опорних* діяметрів $\overline{C}$ (відтинка, що сполучує точки дотику опорних прямих,— Stützgerade). Дві паралельні, якщо з'єднати їх довільними кривими (досить далеко за кривою $\overline{C}$), можуть правити за криву C. Тоді з формули (1)

$$2\sigma = (S + \overline{S}) - J$$

маємо

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial\varphi},$$

тобто для extremum'у σ будемо мати ті ж самі умови (7*a*), (8*a*), (9*a*), що й для функції J.

За першої умови найкращого накладання смуги ширини d і кривої $\overline{C}$ — накладання, що неодмінно відбувається, маємо, що точки перетину їх 1, 2, 3, 4 принаймні один раз міститимуться на вершинах паралелограма, і цього дійдемо лише паралельними пересуваннями смуги (в напрямі перпендикулярному до меж смуги; пересування смуги вздовж самої себе не впливає на

[1]) Можна стверджувати, що, коли цей прямокутник не є квадрат, а ні одна з даних кривих не є коло, існує завжди *паристе* число таких прямокутників, тобто принаймні *два*; при одному з цих прямокутників матимемо абсолютний minimum, при другому — відносний maximum.

величину σ). Отже, *у всяку скрізь опуклу замкнену криву можна вписати принаймі один паралелограм даної ширини d з боками паралельними даному напряму.*

Залишаючи одну пару боків паралелограма паралельною даному напряму ω, будемо змінювати ширину його d від нуля до того найбільшого його значіння, за якого межі смуги 23, 41 дотикатимуться $\overline{C}$. Легко пересвідчитись, що через те, що $\overline{C}$ є *скрізь опукла* крива, віддалення d_1 іншої пари боків паралелограма буде неперервною фунцією d, $d_1 = f(d)$ і при тому такою, що, коли d *зростає* від $0 \ldots d$, $f(d)$ *монотонно спадає* від $d_1 \ldots 0$; тому завжди існує одне й лише одне значіння d, таке, що $d = f(d) \therefore d = d_1$, тобто *у всяку скрізь опуклу криву можна вписати один і лише один ромб так, що одна пара його боків буде певного даного напряму* ω.

Припустивши крім паралельного пересування смуги ширини d ще й її повертання, дістанемо, що за найкращого накладання точки 1, 2, 3, 4 міститимуться на вершинах прямокутника. *Отже, у всяку скрізь опуклу криву можна вписати прямокутник даної ширини d принаймні одним способом*[1]).

Можливість вписати прямокутник певного типу, зокрема квадрат, в замкнену криву була за тему декількох мемуарів. *A. Emch* — „Some properties of closed convex curves in a plane" (Amer. Journal of Math. Voll.). XXXV, 4,1913) — довів, що у всякий овал можна вписати принаймні один квадрат. *Шнирельман Л. Г.* — „*О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых*" (Секц. естеств. и точн. Наук Коммунист. Акад., Москва, 1929 г. доводить те ж твердження (а разом і інші) для довільної замкненої аналітичної кривої. *S. Kakeya* — „*On the inscribed rectangles of a closed convex curve*" (the Tôhoku Math. Journ., Vol. 9,1916) — довів, що у всяку опуклу замкнену криву можна вписати принаймні *два* прямокутники, подібних довільному даному, якщо останній не є квадрат, і принаймні *один* квадрат. Почасти тієї ж теми стосуються й дві замітки Miss Raku Makita в Tôh. Math. Journ. І попередні висновки, досить обмеженого характеру, наводилося лише для того, щоби підкреслити той зв'язок, що існує в окремих випадках поміж задачею про найкраще накладання кривих і можливістю вписати в них прямокутник певного типу. Цей зв'язок можна висловити так: *якщо дві замкнені криві є такі, що за всякого їх положення (напевне не відмінного від найкращого) вони перетинаються не більш як у чотирьох точках і не вміщаються одна в одну, то вершини однієї пари конґруентних прямокутників, що до них можна вписати, містяться в точках перетину цих кривих за умови їх найкращого накладання.*

Припустімо тепер, що число точок перетину двох кривих в положенні близькому до найкращого їх накладання є *шість*. Застосовуючи до цього випадку загальні умови найкращого накладання, дістанемо, що:

1. Центри $\triangle\triangle$-ків із непаристих точок перетину і паристих зливаються і що:

2. $a^2 + b^2 + c = a'^2 + b'^2 + c'^2$, де a, b, c, a', b', c' є боки двох зазначених $\triangle\triangle$-ків.

---

[1]) Навіть за певних умов не менш як двома способами, тобто у двох різних положеннях відносно кривої, див. примітку на стор. 169.

3. Введімо ще один параметр у формулювання попередньої задачі, а саме: шукаймо серед сімейства кривих:

$$\begin{aligned}\bar{x}(s) &= x(s) - nx'(s) \\ \bar{y}(s) &= y(s) + ny'(s)\end{aligned} \qquad (C_n)$$

паралельних до $C\ [x(s),\ y(s)]$ ту, що з даною кривою $\bar{C}\ [\bar{x}s),\ \bar{y}(s)]$ буде в найкращому накладанні, тобто дасть найменше значіння для $J(\xi, \eta, \varphi, n)$, тепер уже функції ще й параметра n.

Нагадаймо, що всі криві сімейства C_n мають спільну еволюту і що відтинки нормалей (Δ_n) проміж кожної пари кривих сімейства є величини сталі.

Залишаючи обмеження 1°, 2° та 4° попередньої задачі щодо характеру кривих, додаймо до них ще такі:

5° серед кривих сімейства C_n є принаймні хоч одна C_{n0} — для параметра дилатації $n = n_0$ — така, що *вміщається* в криву $\bar{C}$;

6° ця крива C_{n0} — опукла; тоді і всі криві C_n для $n_0 \leqslant n$ будуть також опуклі.

Замітьмо, що за умов 5° та 6° (які обумовлюють наявність у кривих сімейства C_n такої спільної еволюти, що напевне вміщається в криву $\bar{C}$) ми можемо зняти з кривих C_n обмеження 3° попередньої задачі.

Справді $J(n)$ не може бути найменшим для кривої C_n, що вміщається в $\bar{C}$, бо зміною n на $n + \Delta n$, де $\Delta n > 0$ при потребі є достатньо мала величина, ми лише зменшили б J. Так само для $C_{n'}$, що вміщає $\bar{C}$, J не може бути найменшим, бо лише зміною n' на $n' - \Delta n'$ $(\Delta n' > 0)$ ми завжди змогли б також зменшити J.

Отже найкраще накладання кривої $\bar{C}$ з однією з кривих C_n відбувається лише за умови, що C_n й $\bar{C}$ взаємно не вміщаються (і звичайно не зовні одна одніеї), тобто за умови взаємного перетину кривої C та $\bar{C}$.

В такому разі, за їх найкращого накладання, завжди існують дуги c_{ni} $(i = 1,\ 2,\ 3 \ldots 2к)$ кривої C_n, що будуть послідовно то внутрішні, то зовнішні до кривої $\bar{C}$ і що обмежують відповідно то внутрішні, то зовнішні сеґменти s_{ni}.

Найдімо приріст Δs_{ni} — площі сеґмента s_{ni} на кожній частинній дузі c_{ni} контура C_n при зростанні n на $n + \Delta n$. Як відомо, площа смуги, обмеженої двома паральними дугами c_{ni}, $c_{n+\Delta n,\, i}$ та спільними їх нормалями в кінцях c_{ni}, визначається формулою:

$$c_{ni} \,.\, \Delta n + \frac{1}{2} (\Delta n)^2 (\alpha_{i+1} - \alpha_i),$$

де c_{ni} — довжина відповідної дуги кривої, а $\alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}$ — кути, що утворюють дотичні до дуги c_{ni} в її кінцях, з додатнім напрямом осі x.

Взявши на увагу зміну точок перетину C_n з $\bar{C}$ при зростанні n на Δn, маємо:

$$\Delta s_{ni} = \pm (-1)^{i+1} \left\{ c_{ni} \Delta n + \frac{1}{2} (\Delta n)^2 (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Delta n \,.\, \Delta c_{ni} + \frac{1}{2} \Delta n \,.\, \Delta c_{n,\,i+1} \right\};$$

Δc_{ni}, $\Delta c_{n,\,i+1}$ — прирости дуги c_{ni} від i-тої та від $(i+1)$-ої точок перетину при зміні n, при чому для двох послідовних сеґментів s_{ni}, $s_{n,\,i+1}$ $\Delta c_{n,\,i+1}$ має завжди протилежні знаки. Роля передніх знаків $\pm$ така, як і при виразах для $\frac{\partial J}{\partial \xi}, \frac{\partial J}{\partial \eta} \cdots$ (7), (8), (9).

Отже

$$\Delta J(n) = \pm \Delta n \left\{ \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} c_{ni} + \pi \Delta n + \sum_{i=1}^{2k} \Delta c_{ni} \right\}$$

і

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \pm \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} c_{ni}, \tag{10}$$

бо за умови конечного числа $(2k)$ спільних точок у обох кривих

$$\sum_{i=1}^{2k} \Delta c_{ni} \underset{\Delta n \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Доконечна умова найкращого накладання кривої $\bar{C}$ з однією з кривих C_n визначається рівнянням

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} c_{ni} = 0; \tag{10a}$$

геометрично вона визначає, що

для найкращого накладання кривої $\bar{C}$ з однією з кривих сімейства паралельних C_n треба, щоб сума паристих дуг кривої C_n дорівнювала сумі її дуг непаристих, тобто щоб кожна така сума зокрема складала половину довжини контура C_n.

Припустімо, що крива C_{n0} є коло; тоді сімейство C_n є сімейство кіл; хай крива $\bar{C}$ є такою, що за всякого положення її проти кола довільного радіюсу (за винятком хіба положень, *напевне відмінних* від найкращого накладання) вона перетинається з кожним з них не більш як у *чотирьох* точках; тоді, *для того щоб коло було в найкращому накладанні з кривою $\bar{C}$, треба, щоби точки перетину кола з кривою містилися на вершинах квадрату.*

Справді, за умов (7а) та (8а) чотирикутник 1234 є паралелограм; він вписаний у коло, тому 1234 є прямокутник і значить

$$\breve{12} = \breve{34}, \quad \breve{23} = \breve{41};$$

але за умови (10а) мусить бути

$$\breve{12} + \breve{34} = \breve{23} + \breve{41} \therefore \breve{12} = \breve{34} = \breve{23} = \breve{41},$$

тобто прямокутник 1234 є квадрат.

На можливість такого результату для кола й для опуклої кривої зазначеного типу вказував мені також С. Н. Бернштейн.

Замітьмо, що зазначену теорему можна поширити й на такі криві $\overline{C}$, що при чотирьох точках перетину можуть мати з одним або з декількома колами певних радіюсів б зліч спільних точок в формі конґруентних дуг; але треба, щоб ні одне з тих кіл не зливалося з дугами кривої $\overline{C}$ так, щоби сума цих дуг перевищувала півобвід взятого кола.

Якщо крива $\overline{C}$ зверх зазначених вище рис має ту властивість, що до неї можна вписати *лише один квадрат*, то, очевидно, зазначена вище *доконечна* умова найкращого накладання кола з кривою *є разом* з тим і *достатньою*.

Задача, що ми тут її розв'язували, є лише одна з багатьох, зв'язаних з проблемою екстремального розположення двох геометричних образів. Але про них, а також про поширення цієї на простор — іншим разом.

SOLOWIOV, P.

SUR LA SUPERPOSITION MEILLEURE DE DEUX COURBES FERMÉES

Résumé

Parmi les différentes positions relatives de deux courbes planes fermées C et $\overline{C}$, situées dans le même plan, il en existe telle, pour laquelle la partie commune σ de l'aire de la première et de la seconde courbe atteint *le maximum*. Soit S et $\overline{S}$ les aires des courbes, C et $\overline{C}$ respectivement, s_i les segments de S ou de $\overline{S}$; alors si σ est le *maximum*, $J = \Sigma \mid s_i \mid = S + \overline{S} - 2\sigma$ est le *minimum*.

Cette position pour laquelle J atteint effectivement le minimum on peut appeler *la meilleure superposition* de ces courbes.

Dans cette note est posé le problème suivant: pour quelle position relative des courbes C et $\overline{C}$ la fonction $J(\xi, \eta, \varphi,)$ a la valeur minimume, ξ, η, φ étant les paramètres de position de la courbe C?

Au n° 1 on démontre le théorème suivante: si les courbes $C\ [x(v), y(v)]$ et $\overline{C}\ [\overline{x}(u), \overline{y}(u)]$ sont telles que pour tous les déplacements dans le même plan relatifs: 1° la partie commune σ des S et $\overline{S}$ est toujours simplement connexe, 2° les contours C et $\overline{C}$ se coupent dans les points discrets en nombre fini ($2k$), 3° une de deux courbes n'est jamais la partie toute entière de l'autre, 4° les courbes C et $\overline{C}$ sont les courbes *ordinaires*, alors *les conditions nécessaires du minimum de J sont*

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \rho_i^2 = 0,$$

α_i, β_i étant les coordonnées des points d'intersection des courbes C et $\overline{C}$, ρ — leurs rayons-vecteurs correspondants au point quelconque du plan. Géometriquement: pour que C et $\overline{C}$ aient une superposition meilleure il faut 1° que *les centres des points d'intersections pairs* $(\alpha_{2t}, \beta_{2t})$ *des ces courbes et ceux d'intersections impairs* $(\alpha_{2t+1}\ \beta_{2t+1})$ *soient confondus*, 2° *le moment des points d'intersections pairs et le moment des ceux d'intersections impairs soient égaux.*

Particulièrement, si le nombre des points d'intersection de courbes C et $\overline{C}$ est égal à *quatre*, pour la superposion meilleure des ces courbes il faut que les points d'intersection sont des sommets d'un rectangle. On déduit de ce dernière théorème quelques conséquences sur la possibilité d'inscrire un rectangle dans la courbe convexe fermée.

Au n° 3 on étudit le problème un peu plus générale: quelles sont les conditions nécessaires pour que la courbe $\overline{C}$ ait la superposition meilleure avec une des courbes parallèles à la courbe C_{no}?

Pour cela il faut par dessus les conditions précedents, que la somme des arcs pairs (c_{2t}) et celle des arcs impairs (c_{2t+1}) soient égaux.

Particulièrement, soit la courbe convexe fermée ait coupé par chacune des cercles pas plus que dans les quatre points. Alors, pour la superposition meilleure cettene courbe avec un des cercles, il faut que les points d'intersection du cercle et de la courbe soient des sommets d'un carré.

С. М. УРИСМАН

Про пари кривих

Дві криві зватимемо парою, якщо між їх точками встановлено якунебудь відповідність. Хай x, y, z і $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ поточні координати відповідних точок такої пари кривих M і N; f, g, h напрямні косинуси прямої L, що проходить через відповідні точки,— тоді рівнання останньої можна написати

$$X=x+ft, \quad Y=y+gt, \quad Z=z+ht. \tag{1}$$

На L лежить відповідна точка $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, а тому

$$\bar{x}=x+f\sigma, \quad y=y+g\sigma, \quad \bar{z}=z+h\sigma, \tag{2}$$

де σ функція дуги s кривої M. Хай напрямні косинуси прямої L відносно дотичної, головної нормалі, бінормалі кривої M будуть a, b, c; косинуси ж останніх відносно осей координат відповідно α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν; в такому разі матимемо співвідношення

$$f\alpha+g\beta+h\gamma=a, \quad fl+gm+hn=b, \quad f\lambda+g\mu+h\nu=c \tag{3}$$

або

$$f=a\alpha+bl+c\lambda, \quad g=a\beta+bm+c\mu, \quad h=a\gamma+bn+c\nu. \tag{4}$$

Нехай далі $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$; $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$; $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ косинуси осей основного трієдра кривої N відносно осей координат,— A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 косинуси осей того же самого трієдра відносно трієдра кривої M, тоді можна написати співвідношення:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum \alpha\bar{\alpha}=A, & \sum l\bar{\alpha}=B, & \sum \lambda\bar{\alpha}=C; \\ \sum \alpha\bar{l}=A_1, & \sum l\bar{l}=B_1, & \sum \lambda\bar{l}=C_1; \\ \sum \alpha\bar{\lambda}=A_2, & \sum l\bar{\lambda}=B_2, & \sum \lambda\bar{\lambda}=C_2; \end{array}\right\} \tag{5}$$

з яких виводимо

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{\alpha}=A\alpha+Bl+C\lambda, & \bar{l}=A_1\alpha+B_1l+C_1\lambda, & \bar{\lambda}=A_2\alpha+B_2l+C_2\lambda; \\ \bar{\beta}=A\beta+Bm+C\mu, & \bar{m}=A_1\beta+B_1m+C_1\mu, & \bar{\mu}=A_2\beta+B_2m+C_2\mu; \\ \bar{\gamma}=A\gamma+Bn+C\nu, & n=A_1\gamma+B_1n+C_1\nu, & \bar{\nu}=A_2\gamma+B_2n+C_2\nu \end{array}\right\} \tag{6}$$

та

$$\begin{aligned} \alpha &= A\bar{\alpha} + A_1\bar{l} + A_2\bar{\lambda}, & l &= B\bar{\alpha} + B_1\bar{l} + B_2\bar{\lambda}, & \lambda &= C\bar{\alpha} + C_1\bar{l} + C_2\bar{\lambda}; \\ \beta &= A\bar{\beta} + A_1\bar{m} + A_2\bar{\mu}, & m &= B\bar{\beta} + B_1\bar{m} + B_2\bar{\mu}, & \mu &= C\bar{\beta} + C_1\bar{m} + C_2\bar{\mu}; \\ \gamma &= A\bar{\gamma} + A_1\bar{n} + A_2\bar{\nu}, & n &= B\bar{\gamma} + B_1\bar{n} + B_2\bar{\nu}, & \nu &= C\bar{\gamma} + C_1\bar{n} + C_2\bar{\nu}. \end{aligned} \tag{7}$$

Диференціюючи тепер (2), визначмо $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ і дугу $\bar{s}$ кривої N:

$$\bar{\alpha} = \frac{ds}{d\bar{s}}(\alpha + f\sigma' + f'\sigma), \quad \bar{\beta} = \frac{ds}{d\bar{s}}(\beta + g\sigma' + g'\sigma), \quad \bar{\gamma} = \frac{ds}{d\bar{s}}(\gamma + h\sigma' + h'\sigma); \tag{8}$$

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = 1 + \sigma'^2 + \sigma^2\Sigma f'^2 + 2a\sigma' + 2\sigma\Sigma\alpha f'. \tag{9}$$

За допомогою (4) співвідношення (8) і (9) перетворюються на

$$\bar{\alpha} = \frac{ds}{d\bar{s}}[(1 + a'\sigma + a\sigma' - b\sigma k)\alpha + (b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau)l + \\ + (c'\sigma + c\sigma' - b\sigma\tau)\lambda], \quad \bar{\beta} = \ldots \tag{8'}$$

і

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = (1 + a'\sigma + a\sigma' - b\sigma k)^2 + (b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau)^2 + \\ + (c'\sigma + c\sigma' - b\sigma\tau)^2, \tag{9'}$$

де k і τ перша та друга кривина кривої M

Порівнюючи (8′) та (6), виводимо

$$\begin{aligned} A &= \frac{ds}{d\bar{s}}(1 + a'\sigma + a\sigma' - b\sigma k), \\ B &= \frac{ds}{d\bar{s}}(b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau), \\ C &= \frac{ds}{d\bar{s}}(c'\sigma + c\sigma' - b\sigma\tau). \end{aligned} \tag{10}$$

Диференціюючи ж перше співвідношення (6), дістанемо

$$\bar{l} = \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}[(A' - Bk)\alpha + (B' + Ak + C\tau)l + (C' - B\tau)\lambda] \tag{11}$$

і визначмо A_1, B_1, C_1:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}(A' - Bk), \\ B_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}(B' + Ak + C\tau), \\ C_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}(C' - B\tau). \end{aligned} \tag{12}$$

Тепер A_2, B_2, C_2 можна визначити за допомогою відомих співвідношень

$$A_2 = BC_1 - B_1C, \quad B_2 = CA_1 - C_1A, \quad C_2 = AB_1 - A_1B. \tag{13}$$

Диференціюючи ж тепер два інші співвідношення (6) першого рядка, дістанемо

$$-\bar{\alpha}\bar{k} - \bar{\lambda}\bar{\tau} = \frac{ds}{d\bar{s}}[(A_1' - B_1k)\alpha + (B_1' + A_1k + C_1\tau)l + (C_1' - B_1\tau)\lambda], \tag{14}$$

$$\bar{l} = \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}[(A_2' - B_2k)\alpha + (B_2' + A_2k + C_2\tau)l + (C_2' - B_2\tau)\lambda], \tag{15}$$

що за допомогою тих самих співвідношень (6) дають:

$$\left.\begin{aligned} A\bar{k} + A_2\bar{\tau} &= -\frac{ds}{d\bar{s}}(A_1' - B_1k), \\ B\bar{k} + B_2\bar{\tau} &= -\frac{ds}{d\bar{s}}(B_1' + A_1k + C_1\tau), \\ C\bar{k} + C_2\bar{\tau} &= -\frac{ds}{d\bar{s}}(C_1' - B_1\tau); \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}(A_2' - B_2k), \\ B_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}(B_2' + A_2k + C_2\tau), \\ C_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}(C_2' - B_2\tau). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Припустімо тепер, що напрямні косинуси прямої L відносно осей трієдра кривої N є a_1, b_1, c_1, так що

$$\sum f\bar{\alpha} = a_1, \quad \sum f\bar{l} = b_1, \quad \sum f\bar{\lambda} = c_1,$$

тоді за допомогою (4) та (5) дістанемо

$$aA + bB + cC = a_1, \quad aA_1 + bB_1 + cC_1 = b_1, \quad aA_2 + bB_2 + cC_2 = c_1. \tag{18}$$

Перше співвідношення (18) за допомогою (10) перетворюється на

$$\frac{ds}{d\bar{s}}(a + \sigma') = a_1, \tag{19}$$

друге ж співвідношення (18) можна спочатку за допомогою (12) перетворити на

$$\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}[aA' + bB' + cC' + (bA - aB)k + (bC - cB)\tau] = b_1,$$

потім диференціюванням рівности

$$aA + bB + cC = a_1$$

показати за допомогою (10), що

$$aA' + bB' + cC' = a_1' - \frac{ds}{d\bar{s}}[a' + \sigma\Sigma a'^2 + (ab' - a'b)\sigma k + (b'c - c'b)\sigma\tau],$$

і знов таки за допомогою (10) знайти

$$\left.\begin{aligned} bA - aB &= \frac{ds}{d\bar{s}}[b - (ab' - a'b)\sigma - (a^2 + b^2)\sigma k - ac\sigma\tau], \\ cB - bC &= \frac{ds}{d\bar{s}}[(b'c - c'b)\sigma + ac\sigma k + (b^2 + c^2)\sigma\tau], \\ aC - cA &= \frac{ds}{d\bar{s}}[(ac' - a'c)\sigma + bc\sigma k - ab\sigma\tau - c] \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

і кінець-кінцем перетворити друге співвідношення (18) на

$$\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}\Big\{a_1' - \frac{ds}{d\bar{s}}[a' + \sigma\Sigma a'^2 + 2(ab' - a'b)\sigma k + 2(cb' - c'b)\sigma\tau - bk +$$
$$+ (a^2 + b^2)\sigma k^2 + (b^2 + c^2)\sigma\tau^2 + 2ac\sigma k\tau]\Big\} = b_1. \quad (21)$$

Щодо 3-го співвідношення (18), то його можна переписати так:

$$\begin{vmatrix} a & A & A_1 \\ b & B & B_1 \\ c & C & C_1 \end{vmatrix} = C_1,$$

що за допомогою (12) пертворюється на

$$\begin{vmatrix} a & A & A' \\ b & B & B' \\ c & C & C' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & A & -Bk \\ b & B & Ak + C\tau \\ c & C & -B\tau \end{vmatrix} = \frac{d\bar{s}}{ds}\bar{k}c_1.$$

Диференціювання ж (10) по s дає

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{d^2\bar{s}}{ds^2}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 A + \frac{ds}{d\bar{s}}[a''\sigma + 2a'\sigma' + a\sigma'' - (b\sigma k)'], \\ B' &= \frac{d^2\bar{s}}{ds^2}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 B + \frac{ds}{d\bar{s}}[b''\sigma + 2b'\sigma' + b\sigma'' + (a\sigma k)' + (c\sigma\tau)'], \\ C' &= \frac{d^2\bar{s}}{ds^2}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 C + \frac{ds}{d\bar{s}}[c''\sigma + 2c'\sigma' + c\sigma'' - b\sigma\tau'], \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

а тому в першому детермінанті можна члени третього стовпчику замінити на другі члени правих частин (22), другий же детермінант дорівнює

$$c(A^2+B^2)k-a(B^2+C^2)\tau-C(aA+bB)k+A(bB+cC)\tau,$$

що за допомогою 1-го співвідношення (18) перетворюється на $(c-a_1C)k-$ $-(a-a_1A)\tau$, так що 3-ому співвідношенню (18) можна надати виду

$$\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{k}\left[\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\Delta+(c-a_1C)k-(a-a_1A)\tau\right]=c_1, \tag{23}$$

при чому

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1+a'\sigma-b\sigma k & a''\sigma+2a'\sigma'-(b\sigma k)' \\ b & b'\sigma+a\sigma k+c\sigma\tau & b''\sigma+2b'\sigma'+(a\sigma k)'+(c\sigma\tau)' \\ c & c'\sigma-b\sigma\tau & c''\sigma+2c'\sigma'-(b\sigma\tau)' \end{vmatrix}.$$

До цих співвідношень приєднаймо ще рівності

$$\xi-x=-\frac{\Sigma f'\alpha}{\Sigma f'^2}f,\quad \eta-y=-\frac{\Sigma f'\alpha}{\Sigma f'^2}g,\quad \zeta-z=-\frac{\Sigma f'\alpha}{\Sigma f'^2}h, \tag{24}$$

що визначають стрикційну криву лінійчатої поверхні з твірною L, якщо вважати криву M за її (напрямну) провідну криву. Диференціюючи (4), дістанемо

$$\left.\begin{aligned} f'&=(a'-bk)\alpha+(b'+ak+c\tau)l+(c'-b\tau)\lambda,\\ g'&=(a'-bk)\beta+(b'+ak+c\tau)m+(c'-b\tau)\mu,\\ h'&=(a'-bk)\gamma+(b'+ak+ct)n+(c'-b\tau)\nu,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

за допомогою яких (24) перетворюється на (24′)

$$\left.\begin{aligned} \xi-x&=-\frac{(a'-bk)(a\alpha+bl+c\lambda)}{(a'-bk)^2+(b'+ak+c\tau)^2+(c'-b\tau)^2},\\ \eta-y&=-\frac{(a'-bk)(a\beta+bm+c\mu)}{(a'-bk)^2+(b'+ak+c\tau)^2+(c'-b\tau)^2},\\ \zeta-z&=-\frac{(a'-bk)(a\gamma+bn+c\nu)}{(a'-bk)^2+(b'+ak+c\tau)^2+(c'-b\tau)^2},\end{aligned}\right\}$$

КРИВІ З ПАРАЛЕЛЬНИМИ ГОЛОВНИМИ НОРМАЛЯМИ

Застосуймо попередні співвідношення до випадку, коли криві M і N мають у відповідних точках паралельні головні нормалі. За (6) та (7) матимемо тепер

$$A_1=C_1=B=B_2=0,\quad B_1=E=\pm 1, \tag{26}$$

а за (12) $A'=C'=0$, тобто A та C є сталі.

Із (13) виводимо

$$A_2=-EC,\quad C_2=EA, \tag{27}$$

отже осі основного трієдра одної кривої утворюють сталі кути з осями основного трієдра другої кривої. Залежності (18) тепер перетворюються на

$$\bar{b}_1 = Eb, \quad \bar{a}_1 = aA + cC, \quad \bar{c}_1 = E(cA - aC). \tag{28}$$

Друге ж співвідношення (10) та залежності (20) дозволяють визначити залежність поміж першою та другою кривиною кривої M, в яку не входять $\frac{d\bar{s}}{ds}$, σ, σ'. Дійсно на підставі (26) друга залежність (10) дає

$$b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau = 0, \tag{29}$$

а два перші співвідношення (20) дають

$$\frac{A}{C} = \frac{\sigma[(a^2+b^2)k + ac\tau + (ab' - a'b)] - b}{\sigma[ack + (b^2+c^2)\tau + (b'c - c'b)]} \tag{30}$$

або

$$\sigma = -\frac{bC}{Pk + Q\tau + R}, \tag{31}$$

де

$$P = acA - (a^2+b^2)C, \quad Q = (b^2+c^2)A - acC,$$
$$R = (b'c - c'b)A - (ab' - a'b)C.$$

Взявши тепер із (31) лоґаритмічну похідну від σ по s та підставивши значіння $\frac{\sigma'}{\sigma}$ в (29), дістанемо

$$ak + c\tau + b' = \frac{b(P'k + Q'\tau + R' + Pk' + Q\tau') - b'(Pk + Q\tau + R)}{Pk + Q\tau + R}. \tag{32}$$

В окремому випадку, коли a, b, c є сталі,

$$a' = b' = c' = R = R' = P' = Q' = 0$$

і (32) зводиться до простішої залежности

$$\frac{ak + c\tau}{b} = \frac{Pk' + Q\tau'}{Pk + Q\tau}, \tag{33}$$

яку дає Співак Jahresber. Math. Ver. 32 H. 9 — 12.

Щодо першої та другої кривини кривої N, то їх виводимо за (26) безпосередньо із середніх співвідношень (12) і (17).

Таким чином матимемо для N

$$\bar{k} = E\frac{ds}{d\bar{s}}(Ak + C\tau), \quad \bar{\tau} = \frac{ds}{d\bar{s}}(A\tau - Ck), \tag{34}$$

де за формулами (20) і (31) можна $\frac{d\bar{s}}{ds}$ виключити, якщо лише внести a, b, c

та їх перші похідні. (34) дає просту залежність між кривинами обох кривих

$$\frac{\bar{k}}{\bar{\tau}}=E\,\frac{A\dfrac{k}{\tau}+C}{-C\dfrac{k}{\tau}+A}, \tag{35}$$

подібну залежність

$$\frac{k}{\tau}=\frac{A\dfrac{\bar{k}}{\bar{\tau}}-EC}{C\dfrac{\bar{k}}{\bar{\tau}}+EA} \tag{35'}$$

можна дістати із (16) за формулами (26) та (27). Якщо a, b, c є сталі величини, то залежність (19) можна проінтеґрувати і дістати конечне співвідношення між дугами s, $\bar{s}$ обох кривих та віддаленням σ їх кінців:

$$a_1\bar{s}-as=\sigma-\sigma_0, \tag{36}$$

де σ_0 віддалення між початками дуг, якщо їх взято в двох якихнебудь відповідних точках.

Якщо $a=c=0$, $b=1$, тоді на підставі (28) також $a_1=c_1=0$, $b_1=E$ і пряма L стає спільною головною нормалею кривих M і N, тобто M і N стають Бертрановими кривими.

Співвідношення (9) або (19) тепер дає $\sigma'=0$, тобто σ є стала.

Внутрішнє рівнання (natürliche Gleichung) Бертранових кривих можна дістати із (33) або із 1-го та 3-го співвідношення (10), а саме:

$$\frac{A}{C}=\frac{1-\sigma k}{-\sigma\tau},$$

або

$$Ck-A\tau=\frac{C}{\sigma}.$$

На підставі ж 3-го співвідношення (9) (34) дає $\bar{\tau}\tau=\dfrac{C^2}{\sigma^2}$, тобто $\bar{\tau}$ і τ одного знака.

ПАРАЛЕЛЬНІ КРИВІ

Дослідімо тепер випадок, коли криві M і N мають у відповідних точках паралельні дотичні, тобто M і N паралельні. (6) і (7) тепер дають

$$B=C=A_1=A_2=0, \qquad A=E=\pm 1, \tag{37}$$

а на підставі (12) і (13) тепер маємо

$$C_1=B_2=0. \tag{38}$$

Із $A_1=C_1=0$ виходить $B_1^2=1$, а тому на підставі другої залежности (12) буде $B_1=E$, а на підставі третьої залежности (13) $C_2=1$, тобто завжди бінормалі двох паралельних кривих направлені однаково.

Далі, другі залежності (12) та (17) дають

$$r:\bar{r}=ds:d\bar{s},\qquad E(\rho:\bar{\rho})=ds:d\bar{s} \tag{39}$$

та

$$r:\bar{r}=E(\rho:\bar{\rho}) \tag{39'}$$

де r, ρ радіюси 1-ої та другої кривини. Умови (18) тепер перетворюються на

$$a_1=Ea,\quad b_1=Eb,\quad c_1=c, \tag{40}$$

а (19) тепер дає

$$\frac{ds}{d\bar{s}}=\frac{Ea}{a+\sigma'}, \tag{41}$$

а тому із (10) на підставі (37) дістанемо

$$\frac{a(a'-bk)}{a^2-1}=\frac{b'+ak+c\tau}{b}=\frac{c'-b\tau}{c}=-\frac{\sigma'}{\sigma}. \tag{42}$$

Звідсіль виводимо, що лінійчата поверхня, яку утворює твірна L, є розвивна; дійсно детермінант

$$\begin{vmatrix}\alpha & f & f'\\ \beta & g & g'\\ \gamma & h & h'\end{vmatrix}$$

з-за (25) перетворюється на

$$\begin{vmatrix}\alpha & b\lambda+c\lambda & (b'+ak+c\tau)\,l+(c'-b\tau)\,\lambda\\ \beta & bm+c\mu & (b'+ak+c\tau)\,m+(c'-b\tau)\,\mu\\ \gamma & bn+c\nu & (b'+ak+c\tau)\,n+(c'-b\tau)\,\nu\end{vmatrix}$$

що дорівнює нулеві на підставі (42). Якщо в рівнанні (2) кривої N замінити σ на $p\sigma$, де p довільна стала, то крива N перетвориться на криву N_p, що лежатиме також на поверхні (L). Із виразів (10) для напрямних косинусів B та C видно, що коли $B=C=0$, то також $B_p=C_p=0$, а тому криві N_p також паралельні до кривої M, яку можна вважати за одну з кривих N_p, коли $p=0$. Формула (41) та 1-ша (39) для кривих N_p матимуть вид

$$\frac{ds}{d\bar{s}_p}=\frac{E_p a}{a+p\sigma'}\quad \text{і}\quad r:\bar{r}_p=ds:d\bar{s}_p, \tag{43}$$

так що для цих кривих вірно буде

$$\bar{r}_p=E_p r\left(1+\frac{\sigma' p}{a}\right). \tag{44}$$

а тому для визначання центрів кривини N_p матимемо

$$\xi = x + pf\sigma + rl + p\frac{\sigma'}{a}rl, \quad \eta = y + pg\sigma + rm + p\frac{\sigma'}{a}rm,$$

$$\zeta = z + ph\sigma + rn + p\frac{\sigma'}{a}rn.$$

Звідси робимо висновок, що центри кривини відповідних точок кривих N_p лежать на прямій

$$\frac{\xi - x - rl}{f\sigma + \frac{\sigma'}{a}rl} = \frac{\eta - y - rm}{g\sigma + \frac{\sigma'}{a}rm} = \frac{\zeta - z - rn}{h\sigma + \frac{\sigma'}{a}rn} = p, \tag{45}$$

що перетинає поворотний руб поверхні (L), тому що рівняння останнього, яке виводимо з $(24')$ на підставі (42), має вид:

$$\xi - x = -af\frac{\sigma}{\sigma'}, \quad \eta - y = -ag\frac{\sigma}{\sigma'}, \quad \zeta - z = -ah\frac{\sigma}{\sigma'}.$$

В окремому випадку, коли крива M плоска і $\tau = 0$, друге співвідношення (17) дає $\overline{\tau}_p = 0$, тобто всі криві N_p також плоскі.

Якщо також $a = 0$ і, значить, на підставі (40) також $a_1 = 0$, а на підставі (19) і (42) $\sigma' = b' = c' = 0$, тоді перше співвідношення (10) дає

$$\frac{ds}{d\overline{s}_p} = \frac{E_p}{1 - bp\sigma k} \tag{46}$$

і друга формула (43) перетворюється на

$$\overline{r}_p = E_p r(1 - bp\sigma k). \tag{47}$$

За таких умов рівнання поворотного руба $(24')$ перетворюються на

$$\xi - x = \frac{bl + c\lambda}{bk}, \quad \eta - y = \frac{bm + c\mu}{bk}, \quad \zeta - z = \frac{bn + c\nu}{bk},$$

рівнання кривих N_p матимуть вид:

$$\overline{x}_p - x = (bl + c\lambda)\sigma p, \quad \overline{y}_p - y = (bm + c\mu)\sigma p, \quad \overline{z}_p - z = (bn + c\nu)\sigma p,$$

такщо віддалення відповідних точок N_p і поворотного руба

$$d_p = \left| \frac{1 - bp\sigma k}{\sqrt{bk}} \right|,$$

а тому маємо

$$\overline{r}_p = |b|\, d_p. \tag{48}$$

Нехай тепер s_0, r_0, ρ_0 дуга, радіюси першої та другої кривини поворотного руба, α_0, β_0, γ_0; l_0, m_0, n_0; λ_0, μ_0, ν_0 напрямні косинуси осей його основного трієдра відносно осей координат; тоді

$$f = \alpha_0, \quad g = \beta_0, \quad h = \lambda_0.$$

Диференціювання останніх рівностей дає

$$-bk\alpha\frac{ds}{ds_0}=l_0k_0 \tag{49}$$

та дві інші такі ж рівності; відсіля маємо висновок

$$l_0=\pm\alpha,\ldots,\quad k_0=\frac{ds}{ds_0}|b|k, \tag{50}$$

так що

$$\lambda_0=\pm(cl-b\lambda)\quad \text{і}\quad \lambda_0'=\mp\frac{ds}{ds_0}c\alpha k,$$

тобто

$$l_0\tau_0=\mp\frac{ds}{ds_0}c\alpha k,$$

або на підставі (50)

$$\tau_0=-\frac{ds}{ds_0}ck.$$

Припустімо тепер, що віддалення d кривої M від поворотного руба дорівнює r_0, тоді на підставі (50) матимемо

$$\frac{ds}{ds_0}=\frac{r}{|b|d},$$

що з-за (48) дає

$$\frac{ds}{ds_0}=1,$$

а тому

$$\tau_0=-ck$$

і в випадку

$$c=\pm1,\quad \tau_0=\mp k.$$

Отже коли площина кривої, ортогональної до розвивної поверхні є перпендикулярна до якоїнебудь твірної, то на останній 1-ша кривина нашої кривої дорівнює абсолютному значінню 2-ої кривини поворотного руба на тій самій твірній.

RESUMÉ

Zwei Kurven M, N, die irgendwie sich einander punctweise zugeordnet sind, nennen wir allgemein nach Salkowski ein Curvenpaar. Seien x, y, z; $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die laufenden Koordinaten zweier entsprechenden Punktendes Kurvenpaares, σ ihr Abstand, f, g, h die Richtungskosinus der verbindender Gerade L, so ist die letztere durch die Gleichungen I., also die Kurve N durch 2 gegeben.

Bezeichnen a, b, c, die Kosinus der Winkel der Gerade L mit der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurve M, α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν; ds, k, τ

der Reihe nach die Richtungskosinus der letzteren, das Bogenelement, die Krümmung und Torsion der Kurve M, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$; ...; $\bar{k}$, $\bar{\tau}$ dieselben Grössen für die Kurve N; A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; der Reihe nach die Kosinus der Winkel der Tangente, Haupt- und Binormale der letzten Kurve mit denselben der Kurve M, so gelten die Gleichungen 3. 4. 5. 6. und 7. Die Ableitungen von 2. nach $\bar{S}$ liefern die Gleichungen (8′) und (9), die $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ und das Bogenelement $d\bar{s}$ bestimmen Die Vergleichung von (8′) mit (6) liefert die Gleichungen 10, durch welche A, B, C; — die Apleitungen von 6. nach S liefern 11. und 17. durch welche A_1, B_1, C_1 bestimmt werden. A_2, B_2, C_2 werden jetzt durch 13 bestimmt. Bedeuten jetzt a_1, b_1, c_1 die Kosinus der Winkel der Geraden L mit der Tangente, Haupt- und Binormale der Kurve N, so gelten die Gleichungen 18. die, nach Umformung, nach 19. 21. und 23. führen. Aus diesen Gleichungen und 10. kann man allgemein $\frac{ds}{d\bar{s}}$, $\bar{k}$, σ, σ' eliminieren und zur natürlichen Gleichung der Kurve M kommen.

Man kann die Punktzuordnung der Kurven auf verschiedene Arten angeben und zu verschiedenen Kurvenpaaren gelangen.

So kann man annehmen, dass die Kurven M und N in entsprechenden Punkten 1) parallele Hauptnormalen, oder 2) parallele Tangenten besitzen oder 3) die verbindende Gerade L bildet mit den Kanten beider Dreikanten von Frenet konstante Winkel, die Gerade L sei die Schnittgerade, 4) der Schmiegungsebenen, 5) der Normalebenen, 6) rektifizierenden Ebenen entsprechender Punkten.

Im ersten Falle kann man zur natürlichen Gleichung 32. der Kurve M gelangen, oder zur Gleichung 33. wenn ausserdem a, b, c und also a_1, b_1, c_1 konstant sind, im zweiten Falle gelangt man zu ähnliher Gleihung 42.

Окремий відбиток з Записок Харківського Математичного Товариства та Українського Інституту Математичних Наук. Серія 4, т. III. Харків — 1929

Extrait des „Comm. Soc. Math. Kharkow“, série 4, t. 3, 1929

LISTE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES AVEC LESQUELLES LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE KHARKOFF ÉCHANGE SES COMMUNICATIONS

Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.
Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco - Josephinae.
Acta Mathematica.
Acta Societatis Scientiarum Fennicae.
The American Ephemeris and Nautical Almanach.
American Journal of Mathematics.
Anais da Faculdade de Sciências do Porto.
Annales de la Société Polonaise de Mathématique.
Annals of Mathematics.
Annual Report of the Smithsonian Institution.
Nieuw Archief voor Wiskunde.
Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.
Atti della reale Accademia dei Lincei.
Atti della reale Accademia Peloritana.
Atti della reale Accademia della Scienze di Torino.
Boletín del Seminario Matemático Argentino.
Bulletin of the American Mathematical Society.
Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres.
Bulletin de la Société Mathématique de France.
Commentationes Physico - Mathematicae.
Contribution al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matématicas.
Fundamenta Mathematicae.
Japanese Journal of Mathematics.
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung.
Journal of the Faculty of Science (Imperial University of Tokyo).
Journal de Mathématiques pures et appliquées.
Journal of Mathematics and Physics.
Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège.
Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.
Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Prace Matematyczne - Fizyczne.
Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk.
Publications of the United States Naval Observatory.
Rendiconti dell' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
Rendiconto delle Sessioni della Reale Accademia dell' Istituto di Bologna.
Revista Matemática Hispano - Americana.
Revue Sémestrielle des Publications Mathématiques.
Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.
Studia Mathematica.
The Tôhoku Mathematical Journal.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft (Basel).
Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft (Zürich).

Журнал Ленинградского Физико - Математического Общества.
Журнал Научно - Исследовательских Кафедр в Одессе.
Записки Дніпропетровського Інституту Народньої Освіти.
Записки Всеукраїнської Академії Наук.
Записки Харківського Інституту Народньої Освіти.
Известия Академии Наук СССР.
Известия Физико - Математического Общества при Казанском Гос. Университете.
Математическое Образование.
Математический Сборник.
Наукові Записки Харківського Технологічного Інституту.
Русский Астрономический Календарь.
Ученые Записки Саратовского Госуд. Университета.

ЗМІСТ

Ціна 4 крб. 25 коп. (Р

У.С.Р.Р.
Державне видавництво