І. Е. ОГІЄВЕЦЬКИЙ

Узагальнення кососиметричного дуалістичного закону на некон́ґруентні перетворення

У цій статті поставлено завдання поширити твердження, подане в нашім попереднім дослідженні[1]), також на некон́ґруентні перетворення.

Розгляньмо перетворення, визначене співвідношеннями

$$x_i = f_i(x^1, x^2, \ldots x^n) \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

де в даному обсязі функції f_i мають непереривні частинні похідні, і де Якобіян

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial x^i} \right|$$

не зникає.

Добуток точкових перетворів, що справджують наведені вище умови, буде також точкове перетворення, так що сукупність перетворень (1) становитиме групу, де є й попарно обернені перетворення[2]).

Перетворення, визначені через (1), є деформації множини в собі[3]), бо вони є однозначні і разом з своїми оберненими перетвореннями непереривні та стоять в одній клясі з тотожними перетвореннями.

Очевидно, можна розрізняти два типи деформації множини в собі. Один з них, визначений через (1) з даним напрямом (з інваріянтною або оберненою індикатрисою), звемо прямим перетворенням, другий же, визначений відповідним оберненим перетворенням, при чому напрям множини M_n дано протилежною індикатрисою, зватимемо оберненим перетворенням.

Отже індикатриса від M_n буде за оберненого перетворення та сама, коли за прямого перетворення вона змінюється, або, навпаки, вона стає оберненою за оберненого перетворення, за прямого ж залишається інваріянтною.

Означмо тепер поняття про характеристику точкового перетворення. За характеристику вважаємо всяку річ (вектор або тензор, параметр, функцію), що її розглядаємо за точкового перетворення.

Як у випадку конґруентного перетворення[4]) розрізнюватимемо паристі й непаристі характеристики точкових перетворень. За паристу характеристику будемо вважати таку, що не змінює свого значіння підчас зміни напряму множини; за непаристу характеристику точкового перетворення[5])

[1]) Див. Rendiconti del Circ. mat. di Palermo. T. LI, 1927, стр. 315.
[2]) Пор. Lie. — Theorie d. Transformationsgruppen. B. I. S. I.
[3]) Пор. H. Tietze.—Über Analysis Situs, Hamburger Math. Einzelschriften Heft 2. H. 1923.
[4]) Див. мою працю l. c.[1]), стор. 317.
[5]) Тут іде мова тільки про такі точкові перетворення, що справджують наведені умови.

таку, що залежить від індикатриси, при чому кляса цієї індикатриси визначається клясою індикатриси множини.

Легко побачити, що індикатриса непаристої характеристики за оберненого перетворення належатиме до першої кляси, якщо за прямого перетворення вона належала до другої кляси, і навпаки.

Тепер доведімо таку теорему.

Теорема 1. Якщо за деформації множини M_n у собі буде

$$O\left[A^{a_1a_2\ldots a_p},\ B^{b_1b_2\ldots b_p},\ldots,\ I^{i_1i_2\ldots i_p},\ L_{l_1l_2\ldots l_q},\ M_{m_1m_2\ldots m_q},\ldots,\ R_{r_1r_2\ldots r_q},\ \alpha\right]=0, \tag{2}$$

то також

$$O\left[\overline{A}_{a_1a_2\ldots a_p},\ \overline{B}_{b_1b_2\ldots b_p},\ldots,\ \overline{J}_{i_1i_2\ldots i_p},\ \overline{L}^{l_1l_2\ldots l_q},\ \overline{M}^{m_1m_2\ldots m_q},\ldots,\ \overline{R}^{r_1r_2\ldots r_q},\ -\alpha\right]=0, \tag{3}$$

де

$$[a_1a_2,\ldots a_p,\ldots,\ i_1i_2\ldots i_p,\quad l_1l_2\ldots l_q,\ldots,\ r_1r_2\ldots r_q=1,\ 2,\ldots,\ n];$$

і $A^{a_1a_2\ldots a_p},\ldots,\ L_{l_1l_2\ldots l_p}$ позначають p-разові контраваріянтні тензори й відповідно q-разові коваріянтні тензори множини M_n. Риска над тензорами у співвідношення (3) показує, що тензори підлягають змінам, зумовленим переходом індикатриси з одної кляси у другу, α означає параметр, залежний від індикатриси множини, і O позначає однозначну дію над тензорами й параметром.

Справді p і q-разовий контраваріянтний тензор є n^p чисел, або відповідно n^q, що визначені співвідношеннями [1])

$$A^{a_1a_2\ldots a_p}=\frac{\partial\overline{x}_{a_1}}{\partial x_{h_1}}\cdot\frac{\partial\overline{x}_{a_2}}{\partial x_{h_2}}\cdots\frac{\partial\overline{x}_{a_p}}{\partial x_{h_p}}A^{h_1h_2\ldots h_p}\ ^{2)} \tag{4}$$

і

$$L_{l_1l_2\ldots l_q}=\frac{\partial x_{k_1}}{\partial\overline{x}_{l_1}}\cdot\frac{\partial x_{k_2}}{\partial\overline{x}_{l_2}}\cdots\frac{\partial x_{k_q}}{\partial\overline{x}_{l_q}}L_{k_1k_2\ldots k_q}. \tag{5}$$

Легко побачити, що множники виду

$$\frac{\partial\overline{x}_\nu}{\partial x_\mu}\quad\text{й}\quad\frac{\partial x_\nu}{\partial\overline{x}_\mu}$$

за оберненого перетворення взаємно переміняються своїми місцями у виразах (4) й (5).

Відповідно до цього змінюються тензори у співвідношеннях (2) й (3), що їх контраваріянтність і коваріянтність визначаються рангами p і q, за оберненого перетворення на такі, де контраваріянтність і коваріянтність визначається рангами q і p.

Крім цього, через те що індикатриса множини M_n за оберненого перетворення переходить з одної кляси в другу, то тензори зазнають зміни, що позначається рискою над знаком тензора.

---

[1]) Пор. A. S. Eddington. — Espace, temps et gravitation, partie théorique, Paris 1921, p. 33.

[2]) Знак суми після рівних покажчиків в однорідних виразах, як це звичайно, пропускаємо.

Але параметр змінює свій знак за оберненого перетворення. З іншого боку відбувається разом із прямим також обернене перетворення, так що разом із (2) також і співвідношення (3) є правдиве. Отже й наше твердження правдиве.

Зауваження I. На підставі теореми I можна зробити висновок, що із співвідношень[1])

$$P_k = g^{ik} P^i \tag{6}$$

виникають співвідношення

$$P^k = g_{ik} P_i, \tag{7}$$

де P^i є контраваріянтні компоненти й P_i коваріянтні компоненти вектора, g_{ik} та g^{ik} є основні тензори.

Справді дістанемо (6), бо g_{ik} є париста характеристика

$$-P^k = g_{ik}(-P_i),$$

тобто співвідношення (7).

Висновок I. Якщо за деформації множини M_n у собі існує

$$O[A^a, B^b, \ldots, I^i, L_l, M_m, \ldots, R_r] = 0, \tag{8}$$

то існує також

$$O[-A_a, -B_b, \ldots, -I_i, -L^l, -M^m, \ldots, -R^r] = 0, \tag{9}$$

де A^a, $B^b, \ldots, R^r$ є контраваріянтні, L_l, $M_m, \ldots, R_r$ — коваріянтні вектори.

Це виходить безпосередньо з теореми I, бо вектора можна розглядати, як тензора першого рангу, що змінює свій знак із знаком індикатриси.

Висновок II. Якщо за конґруентного перетворення площини в собі існує

$$U[W_1, W_2, \ldots, W_n, V_1, V_2, \ldots, V_n] = 0, \tag{10}$$

то також є

$$U[-V_1, -V_2, \ldots, -V_n, -W_1, -W_2, \ldots, -W_n] = 0, \tag{11}$$

де W_i і V_i є відповідні вектори для непорушеної й порушеної площини, U — функція, що встановлює однозначну відповідність між векторами W_i та V_i[2]).

Справді, сукупність конґруентних перетворень становить підгрупу групи перетворень (1); з іншого ж боку контраваріянтні й коваріянтні вектори за конґруентного перетворення є рівні величиною.

Можна легко пересвідчитись правильности таких двох тверджень, що являють собою узагальнення теореми (1).

Теорема II. Якщо за деформації множини M_n у собі є

$$O\left[A^{a_1 a_2 \ldots a_p \cdot \cdot \cdot \cdot}{}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, b_1 b_2 \ldots b_q}, \ldots, R^{r_1 r_2 \ldots r_p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \, s_1 s_2 \ldots s_q}, \alpha\right] = 0, \tag{12}$$

то також

$$O\left[A_{a_1 a_2 \ldots a_p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{}^{\cdot \cdot \cdot \cdot \, b_1 b_2 \ldots b_q}, \ldots, R_{r_1 r_2 \ldots r_p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}{}^{\cdot \cdot \cdot \cdot \, s_1 s_2 \ldots s_q}, -\alpha\right] = 0 \tag{13}$$

---

[1]) Див. M. von Laue. — Die Relativitätstheorie, B. II. S. 40.

[2]) Це твердження доведено в моїм дослідженні l. c. Стр. 317.

де кожен символ[1]) у дужках означає множину чисел, що визначають тензори „$p+q$“ рангу, усі ж інші співвідношення зберігають те саме значіння, як у твердженні I.

Теорема III. Якщо за деформації множини M_n у собі є

$$A\left[A^{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots}{}_{\cdots\cdots\, b_1 b_2 \ldots b_q}, \ldots,\ R^{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots}{}_{\cdots\cdots\, s_1 s_2 \ldots s_q},\ \alpha\right] = 0 \tag{14}$$

то відбувається також

$$A\left[\bar{A}^{\cdots\cdots\, b_1 b_2 \ldots b_q}{}_{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots}, \ldots,\ \bar{R}^{\cdots\cdots\, s_1 s_2 \ldots s_q}{}_{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots},\ -\alpha\right] = 0, \tag{15}$$

де A позначає вираз, незалежний від індикатриси M_n, інші позначення зберігають своє значіння, як у твердженні II.

Зауваження II. Фізичні й геометричні закони, що справджують теорему III та що їх можна написати у вигляді (12), або (14), мають таку властивість, що кожному законові відповідає інший, який виникає з першого на підставі дуалістичного закону.

Зауваження III. Легко побачити, що дуалістичний принцип Poncelet-Plücker'а є висновок з дуалістичного закону (теорема III) в тому розумінні, що кожне твердження проєктивної геометрії, що дістаємо за допомогою дуалістичного принципу, можна вивести також на підставі дуалістичного закону.

Справді, на підставі теореми III інваріянти проєктивної групи, що їх можна визначити в формі

$$A\left[A^{a_1 a_2 \ldots a_p \cdots\cdots}{}_{\cdots\cdots\, b_1 b_2 \ldots b_q}, \ldots,\ R^{r_1 r_2 \ldots r_p \cdots\cdots}{}_{\cdots\cdots\, s_1 s_2 \ldots s_q},\ \alpha\right] = 0,$$

мають властивість, дану цією теоремою, так що з кожного твердження проєктивної геометрії, що має згадану вище форму, виходить інше твердження на підставі теореми III. Ті самі твердження можна вивести одне з одного за допомогою дуалістичного принципу Poncelet-Plücker'а. Як приклад візьмемо площину, що її рівняння буде

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + 1 = 0, \tag{16}$$

де x_1, x_2, x_3 — координати змінної точки, що її можемо вважати за контраваріянтний вектор. Площина або рівняння (16) є відносно проєктивних перетворень інваріянтна, тому можна u_1, u_2, u_3 вважати за коваріянтного вектора. Іншими словами, вираз

$$u_i x^i_i = -1 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{17}$$

характеризує площину, якщо (x_1, x_2, x_3) є контраваріянтний вектор і (u_1, u_2, u_3) — коваріянтний вектор.

Те саме рівняння (16) визначає точку, коли розглядати (u_1, u_2, u_3) як незалежну змінну, тобто як контраваріянтний вектор, і (x_1, x_2, x_3) як коваріянтний вектор. З іншого боку через інваріянтність

$$u_i x^i = -1$$

[1]) Пор. I. A. Schouten. — Ricci-Kalkül, Einleitung, S. 4.

на підставі твердження І також повинна мати місце інваріянтність

$$(-u^i)(-x_i) = -1$$

або

$$u^i x_i = -1.$$

Отже рівнання (16), залежно від того, чи ми підчас прямої чи оберненої трансформації вважатимемо його ліву частину як інваріянтну, визначає площину або точку.

Подібно можна як висновок з дуалістичного закону (теорема III) вивести також інші теореми проєктивної геометрії, що їх можна дістати за допомогою дуалістичного принципу Poncelet-Plücker'а. Те саме міркування можна поширити на простор з n вимірами й можна, наприклад, показати, що інваріянт n — вимірного проєктивного перетворення

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n + 1 = 0 \tag{18}$$

визначає точку або площину залежно від того, чи вважатимемо (18) за інваріянти прямого або оберненого перетворення, що є рівнозначне тому, чи вважатимемо $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ за контраваріянтний вектор та $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ за коваріянтний вектор чи, навпаки, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за коваріянтний вектор і $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ за контраваріянтний вектор.

J. OGIEWETZKI

Verallgemeinerung des schiefsymmetrischen Dualitätsgesetzes auf die nichtkongruenten Transformationen

Dieser Artikel stellt sich die Aufgabe den Satz, welcher in unserer früheren Mitteilung [1]) ausgesprochen wurde, auch auf nichtkongruente Transformationen zu erweitern.

Wir betrachten eine Transformation, die durch die Beziehungen:

$$x_i = f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{1}$$

bzw.

$$x^k = g_k(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad [i, k = 1, 2, \ldots, n], \tag{1'}$$

bestimmt wird, wobei in gegebenem Bereich die Funktionen f_i und g_k stetige Ableitungen besitzen und die Jacobi'schen Determinanten

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial x^i} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial x^i}{\partial x_i} \right|$$

nicht verschwinden.

Das Produkt von Punkttransformationen, die diesen Bedingungen genügen, ist auch eine Punkttransformation, so dass die Gesamtheit der Transformationen (1) eine Gruppe bildet, welche paarweise reziproke Transformationen enthält [2]).

Die Transformationen, welche durch (1) definiert werden, sind Deformationen der Mannigfaltigkeit in sich [3]), da sie eineindeutig und samt der umgekehrten Transformation auch stetig sind und endlich mit der identischen Transformation $z' = z$ in einer Klasse stehen.

Offenbar lassen sich von vornherein zwei Arten von Deformationen der Mannigfaltigkeit M_n in sich unterscheiden, die eine von ihnen, durch (1) bestimmt, mit einem gegebenem Umlaufsinn der M_n (mit invarianter oder umkehrender Indikatrix), nennen wir direkte Transformation, die andere, welche durch die entsprechende inverse Transformation (2') definiert wird

[1]) Über ein schiefsymmetrisches Dualitätsgesetz, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd LI 1927, S. 315.

[2]) Vgl. Lie. — Theorie der Transformationsgruppen, Bd I, S. I.

[3]) Vgl. H. Tietze. — Über Analysis Situs, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 2 Heft, 1923.

und bei welcher der Umlaufsinn der Mannigfaltigkeit durch die entgegengesetzte Indikatrix der M_n bestimmt ist, werden wir umgekehrte Transformation nennen. Somit bleibt die Indikatrix der M_n bei umgekehrter Transformation dieselbe, wenn sie bei der direkten sich ändert oder umgekehrt, sie kehrt sich bei der umgekehrten Transformation um, wenn sie bei direkter invariant ist.

Stellen wir jetzt den Begriff von der Charakteristik einer Punkttransformation fest. Unter Charakteristik verstehen wir ein Ding (Vektor oder Tensor, Parameter, Funktion), das bei der Punkttransformation betrachtet wird.

Wie im Fall kongruenter Transformation[1]) werden wir gerade und ungerade Punkttransformationscharakteristiken unterscheiden. Unter einer geraden Charakteristik meinen wir eine solche, die ihren Wert bei Änderung des Umlaufsinnes der Mannigfaltigkeit nicht ändert, unter ungerader Punkttransformationscharakteristik aber eine solche, die von einer Indikatrix, deren Klasse durch die Klasse der Indikatrix der Mannigfaltigkeit bestimmt wird, abhängt.

Es ist leicht zu sehen, dass die Indikatrix einer ungeraden Charakteristik bei umgekehrter Transformation von der zweiten Klasse sein wird, wenn sie bei direkter der ersten war und umgekehrt.

Jetzt beweisen wir folgenden Satz.

Satz I. Findet bei einer Deformation[2]) einer Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$O\,[A^{a_1a_2\ldots a_p},\ B^{b_1b_2\ldots b_p},\ldots,\ I^{i_1i_2\ldots i_p},\ L_{l_1l_2\ldots l_q},\ M_{m_1m_2\ldots m_q},\ldots,\ R_{r_1r_2\ldots r_q},\ \alpha] = \\ = 0; \tag{2}$$

statt, so ist auch

$$O\,[\bar{A}_{a_1a_2\ldots a_p},\ \bar{B}_{b_1b_2\ldots b_p},\ldots,\ \bar{I}_{i_1i_2\ldots i_p},\ \bar{L}^{l_1l_2\ldots l_q},\ \bar{M}^{m_1m_2\ldots m_q},\ldots,\ \bar{R}^{r_1r_2\ldots r_q},\ -\alpha] = \\ = 0; \tag{3}$$

wo

$$[a_1a_2\ldots a_p,\ \ldots,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p,\ l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_q,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n]$$

und

$$A^{a_1a_2\ldots a_p},\ \ldots,\ L_{l_1l_2\ldots l_q}$$

p-fach kontravariante Tensoren und bzw. q-fach kovariante Tensoren der Mannigfaltigkeit M_n bezeichnen; der Strich über die Tensoren in der Beziehung (3) weist darauf, dass die Tensoren einer Veränderung unterliegen, die durch den Übergang der Indikatrix von einer Klasse in die andere bedingt wird, α — ein von der Indikatrix von M_n abhängiger Parameter ist und O eine eindeutige Operation über die Tensoren und den Parameter ausdrückt.

In der Tat, der p-fach kontravariante Tensor und q-fach kovariante Tensor stellen n^p bzw. n^q Zahlen dar, die durch Beziehungen[3]) von der Form

$$A^{a_1a_2\ldots a_p} = \frac{\partial \bar{x}_{a_1}}{\partial x_{h_1}} \cdot \frac{\partial x_{a_2}}{\partial x_{h_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}_{a_p}}{\partial x_{h_p}} A^{h_1h_2\ldots h_p} \text{ }^{4)} \tag{4}$$

[1]) Sieh meine Arbeit a. a. o. [1]), S. 319.

[2]) In dieser Notiz ist die Rede nur von solchen Punkttransformationen, welche den hingewiesenen Bedingungen genügen.

[3]) Vgl. A. S. Eddington. — Espace, temps et gravitation, partie théorique, Paris, 1921, p. 33.

[4]) Die Summationszeichen nach gleichen Indexen in homogenem Ausrdücken werden wir, wie üblich, weglassen.

und

$$L_{l_1 l_2 \ldots l_q} = \frac{\partial x_{k_1}}{\partial \bar{x}_{l_1}} \cdot \frac{\partial x_{k_2}}{\partial \bar{x}_{l_2}} \cdots \frac{\partial x_{k_q}}{\partial \bar{x}_{l_q}} \bar{L}_{l_1 l_2 \ldots l_q}; \tag{5}$$

bestimmt sind.

Es ist leicht zu sehen, dass die Faktoren von der Form

$$\frac{\partial \bar{x}_\nu}{\partial x_\mu} \text{ und } \frac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\mu}$$

bei umgekehrter Transformation ihre Plätze in den Ausdrücken (4) und (5) gegenseitig wechseln.

Dementsprechend verwandeln sich die Tensoren in den Beziehungen (2) und (3), deren Kontravarianz und Kovarianz durch die Range p und q bestimmt sind, bei umgekehrter Transformation in solche, deren Kontravarianz und Kovarianz durch die Range q und p bestimmt sind.

Ausserdem unterliegen die Tensoren, da die Indikatrix von der Mannigfaltigkeit M_n bei umgekehrter Transformation von einer Klasse in die andere übergeht, einer Veränderung, die ihren Ausdruck in Strichen über dem Tensorsymbol findet.

Der Parameter ändert aber bei der umgekehrten Transformation sein Vorzeichen. Anderseits, findet zugleich mit der direkten auch die umgekehrte Transformation statt, so dass mit (2) ist auch die Beziehung (3) richtig, danach ist unser Satz bewiesen.

Bemerkung I. Auf Grund des Satzes I folgt, dass aus den Beziehungen[1])

$$P_k = g^{ik} P^i; \tag{6}$$

die Beziehungen

$$P^k = g_{ik} P_i; \tag{7}$$

wo P^i — die kontravarianten Komponenten und P_i — die kovarianten Komponenten eines Vektors, g_{ik} und g^{ik} — die Fundamentaltensoren sind, folgen.

In der Tat, wir erhalten (6), weil g_{ik} eine gerade Charakteristik ist,

$$-P^k = g_{ik}(-P_i);$$

d. h. die Beziehung (7).

Folgerung I. Wenn bei einer Deformation der Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$O[A^a, B^b, \ldots, I^i, L_l, M_m, \ldots, R_r] = 0 \tag{8}$$

stattfindet, so findet auch

$$O[-A_a, -B_b, \ldots, -I_i, -L^l, -M^m, \ldots, -R^r] = 0; \tag{9}$$

statt, wo A^a, B^b, ..., R^r — kontravariante, L_l, M_m, ..., R_r — kovariante Vektoren sind.

Das folgt unmittelbar aus dem Satz I, da ein Vektor als ein Tensor des ersten Ranges angesehen werden kann, der sein Vorzeichen mit der ndikatrix ändert.

---

1) Sieh M. von Laue. — Die Relativitätstheorie, B. II, S. 40.

Folgerung II. Findet bei einer kongruenten Transformation der Ebene in sich

$$U(W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n)=0\,; \tag{10}$$

statt, so ist auch

$$U(-V_1,\ -V_2,\ \ldots,\ -V_n,\ -W_1,\ -W_2,\ \ldots,\ W_n)=0\,; \tag{11}$$

wo W_i und V_i die entsprechende Vektoren für die feste und bewegte Ebene sind, U — eine Funktion, welche eine eineindeutige Korrespondenz zwischen die Vektoren W_i und V_i festsetzt[1]).

In der Tat, bildet die Gesamtheit der kongruenten Transformationen eine Untergruppe der Gruppe der Transformationen (1), anderseits sind kontravariante und kovariante Vektoren bei einer kongruenten Transformation ihrer Grösse nach gleich.

Es fällt nicht schwer sich an der Richtigkeit folgender zwei Sätze, die eine Verallgemeinerung des Satzes I sind, zu überzeugen.

Satz II. Wenn bei einer Deformation der Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$O\left[A^{a_1a_2\ldots a_p\cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ b_1b_2\ldots b_q},\ \ldots,\ R^{r_1r_2\ldots r_p\cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ s_1s_2\ldots s_q},\ \alpha\right]=0\,; \tag{12}$$

stattfindet, so findet auch

$$O\left[\overline{A}^{\cdots\cdots\ b_1b_2\ldots b_q}_{a_1a_2\ldots a_p\cdots\cdots},\ \ldots,\ \overline{R}^{\cdots\cdots\ s_1s_2\ldots s_q}_{r_1r_2\ldots r_p\cdots\cdots},\ -\alpha\right]=0\,; \tag{13}$$

wo jedes Symbol[2]) in den Klammern eine Menge von[3]) Zahlen darstellt, welche Tensoren vom Range $(p+q)$ ausdrückt, alle anderen Beziehungen aber dieselbe Bedeutung wie in Satz I behalten.

Satz III. Findet bei einer Deformation der Mannigfaltigkeit M_n in sich

$$A\left[A^{a_1a_2\ldots a_p\cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ b_1b_2\ldots b_q},\ \ldots,\ R^{r_1r_2\ldots r_p\cdots\cdots}_{\cdots\cdots\ s_1s_2\ldots s_q},\ \alpha\right] \tag{14}$$

statt, so findet auch

$$A\left[A^{\cdots\cdots\ b_1b_2\ldots b_q}_{a_1a_2\ldots a_p\cdots\cdots},\ \ldots,\ \overline{R}^{\cdots\cdots\ s_1s_2\ldots s_q}_{r_1r_2\ldots r_p\cdots\cdots},\ -\alpha\right] \tag{15}$$

wo A eine Aussage bezeichnet, welche von der Indikatrix von M_n unabhängig ist und die übrigen Bezeichungen ihre Bedeutung, wie im Satz II, behalten.

Bemerkung II. Es ist leicht zu sehen, dass die Sätze I, II, III auch dann noch wahr bleiben, wenn (2), (12) und (14) Invarianten einer Gruppe der Deformationen der M_n in sich sind.

Bemerkung III. Auf Grund des Satzes I kann man der Beziehung

$$\cos\varphi=\cos(p,\ f)=p_i,\ f^i\,; \tag{16}$$

[1]) Dieser Satz wurde von uns auch in dem Aufsatz „Über ein schiefsymmetrisches Dualitätsgesetz", loc. cit. S. 317 bewiesen.

[2]) Vgl. J. A. Schouten, Ricci-Kalkül, Einleitung, S. 4.

[3]) Vgl. M. Laue, loc. cit. [8]), S. 41.

wo p_i und f^i — kovariante und kontravariante Komponenten der Einheitsvektoren p und f sind, welche einen Winkel φ bilden $|i=1, 2|$ die Formel

$$\cos(-\varphi) = (-p^i)(-f_i);$$

d. h.

$$\cos\varphi = p^i f_i;$$

ableiten.

Ebenso folgt aus der Beziehung[1])

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\,(p^1 f^2 - p^2 f^1); \tag{18}$$

auf Grund des Satzes I

$$\sin(-\varphi) = \pm\sqrt{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2}\,[(-p_1)(-f_2) - (-p_2) - (-f_1)];$$

d. h.

$$\sin\varphi = \mp\sqrt{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2}\,(p_1 f_2 - p_2 f_1); \tag{19}$$

wo g_{ik} $(i, k = 1, 2)$ uud g^{ik} die Komponenten eines kovarianten und bzw. kontravarianten Fundamentaltensors sind, welche gerade Charakteristiken darstellen, φ, p_i, f_i, p_i, f_i behalten dieselbe Bedeutung wie in der Beziehung (16).

In der Richtigkeit der Beziehung (19) kann man sich folgendermassen überzeugen. Wie bekannt, ist[2])

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}; \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{g}; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \tag{20}$$

wobei

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$g_{21} = g_{12}; \quad g^{21} = g^{12};$$

ausserdem ist wegen (6)

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= g_{11} p^1 + g_{12} p^2; \\ f_2 &= g_{21} f^1 + g_{22} f^2; \\ p_2 &= g_{21} p^1 + g_{22} p^2; \\ f_1 &= g_{11} f^1 + g_{12} f^2; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

deshalb ist

$$p_1 f_2 - p_2 f_1 = (p^1 f^2 - p^2 f^1)\,[g_{11} g_{22} - (g_{12})^2] \tag{22}$$

Jetzt bekommen wir aus (19), (20), (21), und (22)

$$\sin\varphi = \mp\sqrt{\frac{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}{g^2}}\,(p^1 f^2 - p^2 f^1)\,[g_{11} g_{22} - (g_{12})^2];$$

---

1) Vgl. loc. cit. [11]).
2) Vgl. H. Rothe. — Einführung in die Tensorrechnung, S. 41.

d. h.

$$\sin\varphi = \mp\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\,(p^1 f^2 - p^2 f^1);$$

w. z. b. w.

Auf analoger Weise kann gezeigt werden, dass aus

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k; \tag{24}$$

$$ds^2 = g^{ik}\,dx_i\,dx_k; \tag{25}$$

folgt, wo ds ein Linienelement und g^{ik}, g_{ik} — Fundamentaltensoren sind.

In der Tat, man kann ds in der Form

$$ds = l_i\,dx^i;$$

darstellen, deshalb kann man (24) auch

$$[l_i\,dx^i]^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k; \tag{26}$$

schreiben.

Dann folgt aus (24) auf Grund des Satzes I

$$[(-l^i)\,(-dx^i)]^2 = g^{ik}\,(-dx_i)\,(-dx_k);$$

wo l^i und l^i die entsprechenden kontravarianten und kovarianten Koordinatenvektoren sind.

Somit ist

$$(l^i\,dx_i)^2 = g^{ik}\,dx_i\,dx_k;$$

oder

$$ds^2 = g^{ik}\,dx_i\,dx_k;$$

Bemerkung IV. Die physischen und geometrischen Gesetze, welche dem Satz III genügen und in der Form (12) oder (14) ausgedrückt werden können, die Beschaffenheit haben, dass jedem Gesetz ein anderes entspricht, welches dem ersten auf Grund des Dualitätsgesetzes (Satzes III) entspringt.

Bemerkung V. Es ist leicht zu sehen, dass das Dualitätsprinzip von Poncelet-Plücker eine Folgerung des Dualitätsgesetzes (Satzes III) ist, in dem Sinne, dass jeder Satz der projektiven Geometrie, den man mit Hilfe des Dualitätsprinzips erhält, auch auf Grund des Dualitätsgesetze abgeleitet werden kann.

In der Tat, auf Grund des Satzes III besitzen die Invarianten der projektiven Gruppe, die in der Form

$$A\left[A^{a_1a_2\ldots a_p\ldots\ldots}_{\ldots\ldots\, b_1b_2\ldots b_q},\ \ldots,\ R^{r_1r_2\ldots r_p\ldots\ldots}_{\ldots\ldots\, s_1s_2\ldots s_q},\ \alpha\right]$$

ausgedrückt werden können, die Beschaffenheit, welche durch diesen Satz III gegeben ist, so dass aus jedem Satz der projektiven Geometrie, welcher die erwähnte Form hat, ein anderer Satz, auf Grund des Satzes III, folgt. Dieselbe Sätze können auseinander mit Hilfe des Dualitätsprinzips von Poncelet-Plücker abgeleitet werden.

Als Beispiel betrachten wir die Gerade, deren Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + 1 = 0. \tag{27}$$

geschrieben wird, wo X_1, X_2, X_3 — Koordinaten des veränd1ichen Punktes sind, die wir als einen kontravarianten Vektor ansehen können.

Die Ebene oder die Gleichung (27) ist gegenüber projektive Transformationen invariant, deshalb kann man U_1, U_2, U_3 aes einen kovarianten Vektor ansehen. Mit anderen Worten, der Ausdruck

$$\sum_1^u {}_i\, u_i x^i = -1; \tag{28}$$

charakterisiert eine Ebene, wenn (X_1, X_2, X_3) ein kontravarianter und (U_1, U_2, U_3) ein kovarianter Vektor ist.

Dieselbe Gleichung (28) drückt einen Punkt aus, wenn (U_1, U_2, U_3) als unabhängige Veränd1iche, d. h. als kontravarianter und (X_1, X_2, X_3) als kovarianter Vektor muss angesehen werden.

Anderseits muss, wegen Invarianz von

$$\sum_1^n {}_i\, u_i x^i = -1$$

auf Grund des Satzes I, auch die Invarianz von

$$\sum_1^n {}_i\, (-u^i)\,(-x_i) = -1$$

oder

$$\sum_1^n {}_i\, u^i x_i = -1$$

stattfinden.

Somit drückt die Gleichung (28), in Bezug darauf, ob wir ihren linken Teil als Invariante bei gerader oder umgekehtrer Transformation ansehen, eine Ebene oder einen Punkt aus.

Auf ähnliche Weise kann man als Folge des Dualitätsgesetzes (Satz III) auch andere Sätze der projektiven Geometrie, welche mit Hilfe des Prinzips der Dualität von Poncelet und Plücker erhalten werden können, ableiten.

Dieselben Betrachtungen kann man auf den n-dimensionalen Raum erweitern und es kann, zum Beispiel, gezeigt werden, dass die Invariante der n-dimensionalen projektiven Transformation

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n + 1 = 0; \tag{29}$$

einen Punkt oder eine Hyperebene ausdrückt, in Bezug darauf, ob wir (29) als Invariante der direkten oder umgekehrten projektiven Transformation, was equivalent dem ist, ob wir $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ als kontravarianten Vektor und $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ als kovarianten Vektor, oder umgekehrt: $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ als kovarianten Vektor und $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ als kontravarianten Vektor ansehen werden.

25. VIII. 28