Я. П. БЛАНК та М. А. МИКОЛАЄНКО

Про Лієві квадрики в системі інтеґральних кривих Пфафового рівняння $\sum P dx = 0$

1

Поміж інтеґральних кривих рівняння в повних диференціялах

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \tag{1}$$

через кожну точку простору взагалі проходять дві криві, що їхні стичні площини зливаються з площинами системи. Ці криві звуться асимптотичними кривими системи. Можна і для них утворити таке ж саме збудування, яке, якщо ми маємо поверхню, буде квадрикою *Лі* [1]).

Асимптотичні криві системи визначаються рівняннями (1) та

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0. \tag{2}$$

Будемо користуватися з символа d для напрямків уздовж однієї з асимптотичних кривих, що проходять через дану точку — уздовж кривої C, і символом δ для напрямків уздовж другої C', так що поруч з (1) і (2) маємо

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0 \tag{3}$$

$$\delta P\delta x + \delta Q\delta y + \delta R\delta z = 0, \tag{4}$$

дотичні до асимптотичних кривих, що виходять з точок кривої C, рівнання якої

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s)$$

утворюють лінійчату поверхню

$$\xi = x(s) + p\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \eta = y(s) + p\frac{\delta y}{\delta s}, \quad \zeta = z(s) + p\frac{\delta z}{\delta s}. \tag{5}$$

Три безмежно-близькі прямолінійні твірні цієї поверхні визначають деяку поверхню другого порядку, рівнання якої дістанемо, коли примітимо, що одна система її прямолінійних твірних складається з дотичних до асимптотичних кривих (непрямолінійних) лінійчатої поверхні.

---

[1]) W. Blaschke. — Differentialgeometrie, II (1923) S. 221.

Отже поверхню другого порядку можна дати в такому виді:

$$X = \xi + q\left(\frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds}\right), \tag{6}$$

і аналогічні формули для Y та Z, де

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{(\xi_s \xi_p \xi_{ss})}{2\,(\xi_s \xi_p \xi_{ps})}\,. \tag{7}$$

Щоб обчислити детермінат, що входить в попередню формулу, введемо трієдр, складений з дотичних до асимптотичних кривих C і C' та нормалі системи, і уявімо відповідні вектори через його компоненти відносно цього трієдра

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{ds^2} = a\frac{dx}{ds} + b\frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \frac{\delta^2 x}{\delta s^2} = b'\frac{dx}{ds} + a'\frac{\delta x}{\delta s}, \\
\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \lambda\frac{dx}{ds} + \mu\frac{\delta x}{\delta s} + \nu P, \qquad \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \mu'\frac{dx}{ds} + \lambda'\frac{\delta x}{\delta s} + \nu' P, \\
\frac{dP}{ds} = \alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \frac{\delta P}{\delta s} = \beta'\frac{\delta x}{\delta s} + \alpha'\frac{\delta x}{\delta s}.
\end{gathered} \tag{8}$$

В перших двох формулах звернімо увагу на те, що

$$\sum P d^2 x = 0 \qquad \sum P\delta^2 x = 0,$$

а в двох останніх

$$\sum P^2 = 1.$$

Коефіцієнти в формулах (8) зв'язані деякими співвідношеннями; через те що

$$\sum \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1, \qquad \sum \left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)^2 = 1$$

буде

$$\begin{aligned}
a + b\cos\theta &= 0 \qquad & a' + b'\cos\theta &= 0 \\
\mu + \lambda\cos\theta &= 0 \qquad & \mu' + \lambda'\cos\theta &= 0 \\
\alpha + \beta\cos\theta &= 0 \qquad & \alpha' + \beta'\cos\theta &= 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

де θ — кут між асимптотичними кривими.

Якщо помножимо $(8)_2$ відповідно на P, Q, R і додамо, то дістанемо

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \nu, \qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \nu'$$

і через те що

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = -\sum\frac{dP}{ds}\cdot\frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\sum\frac{\delta P}{\delta s}\cdot\frac{dx}{ds},$$

то

$$\nu = -\beta\sin^2\theta, \qquad \nu' = -\beta'\sin^2\theta; \tag{10}$$

зауважмо, що

$$\sum \frac{\delta P}{\delta s}\cdot\frac{dx}{ds}-\frac{dP}{ds}\frac{\delta x}{\delta s}=G\sin\theta,$$

де G — ліва частина умови інтеґрувальности

$$G=P(Q_z-R_y)+Q(R_x-P_z)+R(P_y-Q_x),$$

так що

$$\nu-\nu'=G\sin\theta. \tag{11}$$

Якщо продиференціюємо (5) і підставимо частинні похідні в чисельник формули (7), то

$$(\xi_s\,\xi_p\,\xi_{ss})=\left[\frac{dx}{ds}+p\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right),\ \frac{\delta x}{\delta s},\ \frac{d^2x}{ds^2}+p\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)\right];$$

через (9) ця формула перетворюється

$$(\xi_s\,\xi_p\,\xi_{ss})=$$

$$=\left\{(1+p\lambda)\frac{dx}{ds}+p\nu P,\ \frac{\delta x}{\delta s},\ \left[a+p\left(\frac{d\lambda}{ds}+a\lambda+\mu\lambda+\nu\alpha\right]\frac{dx}{ds}+p\left(\mu\nu+\frac{d\nu}{ds}\right)P\right\}=$$

$$=\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s},P\right)\left[(1+p\lambda)\,p\left(\mu\nu-\frac{d\nu}{ds}\right)-p\nu\right]\left[a+p\left(\frac{d\lambda}{ds}+a\lambda+\mu\lambda+\nu\alpha\right)\right]=$$

$$=\nu\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s},P\right)\left[p\left(\mu-a+\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}\right)+p^2\lambda\left(\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}-\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds}-\frac{\nu}{\lambda}\alpha-a\right)\right]$$

або

$$(\xi_s\,\xi_p\,\xi_{ss})=\nu\ (pA+p^2B)\ \left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\vartheta s},\ P\right),$$

де

$$A=\mu-a-\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds},\quad B=\frac{\lambda}{\nu}\frac{d\nu}{ds}-\frac{d\lambda}{ds}-\nu a-a\lambda; \tag{12}$$

те ж саме

$$(\xi_s\,\xi_p\,\xi_{ps})=\nu\left(\frac{dx}{ds},\ \frac{\delta x}{\delta s},\ P\right),$$

так що формула (7) набирає такого виду:

$$\frac{dp}{ds}=-\frac{1}{2}(pA+p^2B). \tag{7'}$$

Якщо підставимо в (6) замість ξ та $\frac{dp}{ds}$ їхні вирази з формул (5) і (7), дістанемо рівняння шуканої поверхні

$$X=x(s)+(q+pq\lambda)\frac{dx}{ds}+\left(p+pq\mu-\frac{1}{2}p^2qB\right)\frac{\delta x}{\delta s}+pq\nu P. \tag{6'}$$

Відносно трієдра, складеного дотичними до асимптотичних кривих та нормалею системи, ця поверхня матиме таке рівнання:

$$(\nu x - \lambda z)\left[\nu y - \left(\mu - \frac{A}{2}\right) z\right] - \nu z + \frac{1}{2} B z^2 = 0.$$

Якщо зробимо аналогічні збудовання для другої асимптотичної кривої (C'), дістанемо так само поверхню другого порядку; її рівнання відносно до цього трієдра:

$$(\nu' y - \lambda' z)\left[\nu' x - \left(\mu' - \frac{A'}{2}\right) z\right] - \nu' z + \frac{1}{2} B' z^2 = 0,$$

де

$$A' = \mu' - a' + \frac{1}{\nu'}\frac{\delta \nu'}{\delta s}, \quad B' = \frac{\lambda'}{\nu'}\frac{\delta \nu'}{\delta s} - \frac{\delta \lambda'}{\delta s} - \nu' a' - a' \lambda';$$

теорема *Лі* і полягає в тому, що на випадок поверхні, ці квадрики зливаються. У нас цього немає.

Справді, для того, щоб вони зливалися треба й досить виконання таких умов:

$$\nu = \nu', \quad \lambda = \mu' - \frac{A'}{2}, \quad \lambda' = \mu - \frac{1}{2} A, \quad B = B'.$$

Але вже перше з (11) є умова інтеґрувальности. Таким чином в кожній точці системи існує дві різні квадрики, що дані рівнаннями (13), (14).

2

Для дальшого з'ясуймо геометричне значіння деяких коефіцієнтів, що входять в формули (8).

Кривини асимптотичних кривих C та C' визначаються так:

$$\frac{1}{r^2} = \sum \left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 = b^2 \sin^2 \theta, \quad \frac{1}{r'^2} = b'^2 \sin^2 \theta.$$

Щоб обчислити закрути асимптотичних кривих, користуємося зі співвідношення

$$\frac{1}{\rho} = r^2 \left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^3 x}{ds^3}\right).$$

Примітивши, що

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^3 x}{ds^3}\right) = b^2 \nu \sin \theta,$$

дістанемо

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\nu}{\sin \theta}, \quad \frac{1}{\rho'} = -\frac{\nu'}{\sin \theta}. \tag{17}$$

Якщо візьмемо на увагу (11), матимемо:

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=G;$$

сума закрутів асимптотичних кривих системи, що проходять через довільну точку, дорівнює лівій частині умови інтеґрувальности.

3

Формула Enneper'а - Beltrami, що її узагальнив проф. Д. М. Синцов відносно інтеґральних кривих Пфафового рівняння [1]), дозволяє так само обчислити добуток закрутів асимптотичних кривих.

Ця формула за спеціяльним добором координатних осей буде:

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}\right)-2H.\,\mathrm{II}+\mathrm{III}-G.\,\mathrm{IV}=0,$$

де

$$\mathrm{I}=dx^2+dy^2,\quad \mathrm{II}=\frac{1}{R_1}\,dx^2+\frac{1}{R_2}dy^2,\quad \mathrm{III}=\sum dP^2$$

$$\mathrm{IV}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)dx\,dy.$$

Для асимптотичної кривої буде

$$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=\frac{1}{\rho^2}\quad \mathrm{II}=0\quad \frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}=\pm\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}},$$

так що

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}+\frac{1}{\rho^2}\pm G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}+\frac{1}{\rho'^2}\mp G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

і тому

$$\tau.\tau'=\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{R_1R_2}=K.$$

Добуток закрутів асимптотичних кривих ліній дорівнює Gauss'овій кривині системи [2]).

4

Розгляньмо спеціяльний випадок, коли центри квадрик міститимуться у випрямних площинах асимптотичних кривих.

[1]) Д. М. Синцов. Сообщения Харьк. Математ. Общества за 1928 г., стор. 64—73

[2]) Д. М. Синцов. Наукові записки... т. III, 1928 р., стор. 139.

Координати центру першої квадрики

$$x_0=\frac{\lambda}{B},\quad y_0=\frac{\mu-\frac{A}{2}}{B},\quad z_0=\frac{\nu}{B},$$

В нашому випадку

$$y_0=2\mu-A=0$$

і за (12)

$$\mu+a=\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}. \tag{18}$$

Диференціюємо тотожність

$$\sum\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta s}=\cos\theta$$

і користаємося зі співвідношень (8) та (9) дістаємо

$$b+\lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds},\quad b'+\lambda'=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\delta\theta}{\delta s}, \tag{19}$$

так що (20) за допомогою (9) та (19) перетворюється так:

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}.$$

Інтеґруємо останню рівність:

$$\nu=k\sin\theta,$$

де k — уздовж C^2 стале.

Порівнюючи останню формулу з (17), бачимо, що асимптотична крива C — є крива сталого закруту і навпаки, якщо асимптотична крива має сталий закрут, то відповідні центри квадрик міститимуться в їхніх випрямних площинах.

Справді

$$\frac{1}{\rho}=k,$$

тоді

$$\nu=k\sin\theta.$$

Беремо логаритмічну похідну і за допомогою (19) і (9)

$$\frac{1}{\nu}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds}=a+\mu,$$

але

$$A=\mu-a+\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}=2\mu,$$

тобто

$$y_0=0$$

5

Асимптотична площина, що відповідає твірній δx лінійчатої поверхні (5), містить центр квадрики.

Справді, асимптотична площина паралельна двом безмежно-близьким прямолінійним твірним лінійчатої поверхні, так що

$$\sum u\delta x = 0$$

$$\sum ud\,\delta x = 0, \text{ або } \sum u(\lambda dx + \nu P) = 0. \tag{20}$$

Легко примітити, що координати центру квадрики

$$X_0 = x + \frac{\lambda}{B}\frac{dx}{ds} + \frac{\mu - \frac{A}{2}}{B}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\nu}{B}P,$$

і аналогічно для Y_0 і Z_0, справджують за допомогою (20) рівнання асимптотичної площини

$$\sum U(X - x) = 0.$$

На випадок поверхні центр квадрики міститься на аффіній нормалі, що геометрично означена як перетин двох асимптотичних площин (Demoulin). Якщо зберегти це означення і для системи інтеґральних кривих

$$\sum P\,dx = 0,$$

то напрямні косинуси аффіної нормалі визначаться співвідношеннями:

$$(l, \delta x, \lambda\,dx + \nu P) = 0, \quad (l, dx, \lambda'\delta x + \nu P) = 0.$$

Центри квадрик взагалі не містяться на аффіній нормалі. Щоб це було так треба:

$$\sum U\left[\left(\mu' - \frac{1}{2}A'\right)dx + \nu' P\right] = 0,$$

і також

$$\sum U'\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)\delta x + \nu P\right] = 0.$$

Коли розглянемо (21) сумісно з (20) і (21′) з формулами

$$\sum U'dx = 0, \quad \sum U'(\lambda'\delta x + \nu' P) = 0,$$

то дістанемо шукану умову в такому виді:

$$\frac{\lambda}{\mu - \frac{A'}{2}} = \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{\lambda'} = \frac{\nu}{\nu'}.$$

BLANK, J. P. und NIKOLAJENKO, M. A.

Ueber Lie's F_2 für Systeme Integralkurven der Pfaff'schen Differentialgleichung $\sum P\,dx = 0$

1

Zwischen den Integralkurven der totalen Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \tag{1}$$

die durch einen beliebigen Raumpunkt hindurchgehen, gibt es im Allgemeinen zwei, deren Schmiegungsebenen mit den zugehörigen Ebenen des Systems zusammenfallen. Das sind die sogenannten Asymptotenlinien des Systems. Es lässt sich für sie dieselben Konstructionen ausüben, die im Fall einer Fläche zur Lie's F_2 führt [1]).

Die Asymptotenlinien des Systems werden durch die Gleichung (1) und

$$dP dx + dQ dy + dR dz = 0 \tag{2}$$

bestimmen.

Wir benutzen die Symbole d bez. δ für Fortschreitungsrichtungen längs den beiden Asymptotenlinien C, C' die durch einen bestimmten Punkt hindurchgehen.

Es gelten also auch folgende Relationen:

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0 \tag{3}$$

$$\delta P\delta x + \delta Q\delta y + \delta R\delta z = 0. \tag{4}$$

Es seien die Gleichungen der Kurve C

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s).$$

Die Tangenten zu den Asymptotenlinien, die aus den Punkten der Kurve C herausgehen, bilden eine geradlinige Fläche.

$$\xi = x(s) + p\frac{\delta x}{\delta s},\quad \eta = y(s) + p\frac{\delta y}{\delta s},\quad \zeta = z(s) + p\frac{\delta z}{\delta s} \tag{5}$$

---

[1]) W. Blaschke. — Differentialgeometrie, II, S. 221.

Drei unendlich benachbarte Erzeugenden dieser Fläche bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichungen wir erhalten, indem wir beachten dass ihre Geraden einer Schar aus den Tangenten zu den Asymptotenlinien der geradlinigen Fläche bestehen.

Die F_2 wird also folgender Weise bestimmt:

$$x = \xi + q\left(\frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{\partial\xi}{\partial p}\cdot\frac{dp}{ds}\right) \tag{6}$$

und analoge Formeln für Y und Z, wo

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{(\xi_s \xi_p \xi_{ss})}{2\,(\xi_s \xi_p \xi_{ps})}. \tag{7}$$

Um die Determinanten der letzten Formel zu berechnen, führen wir ein begleitendes Dreikant ein, das aus den Tangenten zu den Asymptotenlinien C und C' und der Normale des Systems besteht, und stellen die entsprechenden Vektoren mittels ihrer Komponenten bezüglich dieses Dreikants dar:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{ds^2} = a\frac{dx}{ds} + b\frac{\delta x}{\delta s} && \frac{\delta^2 x}{\delta s^2} = b'\frac{dx}{ds} + a'\frac{\delta x}{\delta s} \\ &\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \lambda\frac{dx}{ds} + \mu\frac{\delta x}{\delta s} + \nu P && \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \mu'\frac{dx}{ds} + \lambda'\frac{\delta x}{\delta s} + \nu' P \\ &\frac{dP}{ds} = \alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{\delta x}{\delta s} && \frac{\delta P}{\delta s} = \beta'\frac{dx}{ds} + \alpha'\frac{\delta x}{\delta s}. \end{aligned} \tag{8}$$

In beiden ersten Formeln wurde beachtet, dass

$$\sum P d^2 x = 0, \qquad \sum P\delta^2 x = 0$$

und in zwei letzten dass

$$\sum P^2 = 1.$$

Die Koeffizienten der Formel (8) sind durch einige Relationen verbunden Da

$$\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1, \quad \sum\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)^2 = 1,$$

so ist

$$\begin{aligned} &a + b\cos\theta = 0 && a' + b'\cos\theta = 0 \\ &\mu + \lambda\cos\theta = 0 && \mu' + \lambda'\cos\theta = 0 \\ &\alpha + \beta\cos\theta = 0 && \alpha' + \beta'\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

wo θ den Winkel zwischen den Asymptotenlinien bedeutet.

Indem wir (8_2) bez. mit P, Q, R multiplizieren und dann summieren, erhalten wir

$$\sum P\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = \nu \qquad \sum P\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \nu'$$

und da

$$\sum P \frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right) = -\sum \frac{dP}{ds} \cdot \frac{\delta x}{\delta s}, \qquad \sum P \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\sum \frac{\delta P}{\delta s} \frac{dx}{ds},$$

so ist

$$\nu = -\beta \sin^2\theta, \qquad \nu' = -\beta' \sin^2\theta. \tag{10}$$

Wir bemerken, dass

$$\sum \left(\frac{\delta P}{\delta s} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dP}{ds}\frac{\delta x}{\delta s}\right) = G \sin\theta;$$

wo G die linke Seite der Integrabilitätsbedingung ist:

$$G = P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x)$$

also

$$\nu - \nu' = G \sin\theta. \tag{11}$$

Indem wir im Zähler der Formel (7) die partiellen Ableitungen aus (5) hineinführen, erhalten wir:

$$(\xi_s \xi_p \xi_{ss}) = \left[\frac{dx}{ds} + p\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right), \quad \frac{\delta x}{\delta s}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\delta x}{\delta s}\right)\right].$$

Mittels (9) kann man diese Formel zur folgenden Form bringen

$$(\xi_s \xi_p \xi_{ss}) = \nu \quad (pA + p^2B) \quad \left(\frac{dx}{ds}, \ \frac{\delta x}{\delta s}, \ P\right)$$

wo

$$A = \mu - a + \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{ds}, \quad B = \frac{\lambda}{\nu}\frac{d\nu}{ds} - \frac{d\lambda}{ds} - \nu\alpha - a\lambda. \tag{12}$$

Ebenso ist

$$(\xi_s \xi_p \xi_{ps}) = \nu \left(\frac{dx}{ds}, \ \frac{\delta x}{\delta s}, \ P\right)$$

und die Formel (7) nimmt die folgende Gestalt.

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{1}{2}(pA + p^2B). \tag{7'}$$

Wir erhalten die Gleichungen der gesuchten Fläche, indem wir in (6) die Ausdrücke für ξ und $\frac{dp}{ds}$ aus (5) und (7′) hineinführen

$$X = x(s) + (q + pq\lambda)\frac{dx}{ds} + \left(p + pq\mu - \frac{1}{2}pd\,A - \frac{1}{2}p^2qB\right)\frac{\delta x}{\delta s} + pq\nu P. \tag{6'}$$

Wird die Fläche auf das Dreikant aus der Normale des Systems und den Tangenten zu den Asymptotenlinien bezogen, so gestaltet sich ihre Gleichung folgender Weise:

$$(\nu x - \lambda z)\left[\nu y - \left(\mu - \frac{A}{2}\right)z\right] - \nu z + \frac{1}{2}Bz^2 = 0. \tag{13}$$

Führen wir dieselbe Konstruktion auch für die zweite Asymptotenlinie C' aus, so erhalten wir eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung auf dasselbe Dreikant bezogen so lautet

$$(\nu' y - \lambda' z)\left[\nu' x - \left(\mu' - \frac{A'}{2}\right)z\right] - \nu' z + \frac{1}{2}B'z^2 = 0 \tag{14}$$

wo

$$A' = \mu' - a' + \frac{1}{\nu'}\frac{\partial \nu'}{\partial s}, \quad B = \frac{\lambda'}{\nu'}\frac{\partial \nu'}{\partial s} - \frac{\partial \lambda'}{\partial s} - \nu'\alpha' - a'\lambda' \tag{12'}$$

Lie's Satz besagt nun, dass wenn es sich um eine Fläche handelt, so fallen die beiden F_2 zusammen sollen aber diese F_2 in unserem Falle zusammenfallen, so ist notwendig und hinreichend, dass folgende Relationen stattfinden

$$\nu = \nu', \quad \lambda = \mu' - \frac{1}{2}A', \quad \lambda' = \mu - \frac{1}{2}A, \quad B = B'. \tag{15}$$

Aber die erste dieser Bedingungen ist nach (11) die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also in jedem Raumpunkte zwei verschiedene F_2 Lie's, deren Gleichungen durch (13) und (14) bestimmt sind.

2

Wollen wir die geometrische Bedeutung einiger Koefficienten der Formel (8) klar machen.

Die Krümmung der Asymptotenlinien C und C' wird so bestimmt:

$$\frac{1}{r^2} = \sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 = b^2 \sin^2\theta, \quad \frac{1}{r'^2} = b'^2 \sin^2\theta, \tag{16}$$

um die Torsionen zu berechnen, benutzen wir die Relation

$$\frac{1}{\rho} = r^2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}\right)$$

Wir beachten dass

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}\right) = b^2\nu \sin\theta$$

und erhalten

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\nu}{\sin\theta}, \quad \frac{1}{\rho'} = -\frac{\nu'}{\sin\theta} \tag{17}$$

also nach (11)

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=G.$$

Die Summe der Torsionen beider Asymptotenlinien des Systems, die durch ein beliebigen Punkt hindurchgehen, ist gleich der linken Seite der Integrabilitätsbedingung.

3

Mittels der Enneper-Beltramischen Formel, die durch Prof. Sintzow[1] auf Systeme Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung verallgemeinert wurde, lässt sich auch das Produkt der Torsionen der Asymptotenlinien berechnen. Diese Formel beim speziellen Auswahl der Koordinatenaxen lautet folgender Weise

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{1}{4}G^2\right)-2H.\mathrm{II}+\mathrm{III}-G.\mathrm{IV}=0$$

wo

$$\mathrm{I}=dx^2+dy^2,\quad \mathrm{II}=\frac{1}{R_1}dx^2+\frac{1}{R_2}dy^2,\quad \mathrm{III}=\Sigma\, dP^2,$$

$$\mathrm{IV}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)dx\,dy.$$

Für eine Asymptotenlinie ist

$$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}=\frac{1}{\rho^2},\quad \mathrm{II}=0,\quad \frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}=\pm\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}$$

also

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{G^2}{4}+\frac{1}{\rho^2}\pm G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

$$\frac{1}{R_1R_2}-\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{\rho'^2}\mp G\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}=0$$

und daher

$$\tau.\tau'=\frac{1}{4}G^2+\frac{1}{R_1R_2}=K\ ^{2)}$$

Das Produkt der Torsionen der Asymptotenlinien ist gleich der Gaussischen Krümmung des Systems.

4

Betrachten wir den Spezialfall, wenn die Mittelpunkte der F_2 in den rectifizierenden Ebenen der Asymptotenlinien liegen.

[1] D. Sintzov. Mitteilungen der Charkowaer Mathem. Ges. (4) I. 1928 S. 64 – 73.
[2] D. Sintzov. Annal. Scientif. del l'Ukraine III. 1928. S. 139.

Die Koordinaten des Mittelpunktes der ersten F_2 sind

$$x_0 = \frac{\lambda}{B}, \quad y_0 = \frac{\mu - \frac{1}{2} A}{B} \quad z_0 = \frac{\nu}{B}.$$

In unserem Falle ist

$$y_0 = 2\mu - A = 0$$

und nach (12)

$$\mu + a = \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{ds} \tag{18}$$

Differentiieren wir die Identität

$$\sum \frac{dx}{ds} \frac{\delta x}{\delta s} = \cos \theta$$

und benutzen die Relationen (8), (9), so erhalten wir:

$$b + \lambda = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}, \quad b' + \lambda' = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\delta \theta}{\delta s} \tag{19}$$

Die Formel (18) umformt sich nach (99) und (19) so:

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{ds}$$

also

$$\nu = k \,.\, \sin \theta,$$

wo k ist längst C konstant.

Beachten wir die Formel (17), so sehen wir, dass die Asymptotenlinie C eine Kurve konstanter Torsion ist.

Umgekehrt, soll eine Asymptotenlinie konstante Torsion besitzen, so liegen die Mittelpunkte der entsprechenden F_2 in ihren rectificierenden Ebenen.

Wirklich, ist

$$\frac{1}{\rho} = k,$$

so ist

$$\nu = k \,.\, \sin \theta.$$

Die logarithmische Ableitung gibt nach (19) und (9)

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{ds} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{ds} = a + \mu$$

aber

$$A = \mu - a + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{ds} = 2\mu$$

d. h.

$$y_0 = 0.$$

5

Die Asymptotenebene die der Erzeugenden δx der geradlinigen Fläche (5) entspricht, enthält den Mittelpunkt der F_2. Wirklich: Die Asymptotenebene ist parallel zweien unendlich benachbarten Erzeugenden der geradlinigen Fläche, also

$$\sum U\,\delta x = 0$$

$$\sum U d\delta x = 0 \quad \text{oder} \quad \sum U(\lambda d\nu + \nu P) = 0. \tag{20}$$

Man sieht leicht, dass die Koordinaten des Mittelpunktes

$$X_0 = x + \frac{\lambda}{B}\frac{dx}{ds} + \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{B}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\nu}{B}P.$$

und analog Y_0 und Z_0, befriedigen die Gleichung der Asymptotenebene

$$\sum U(X - x) = 0.$$

Im Falle einer Fläche liegt der Mittelpunkt der F_2 der lauf der Affinnormale Letztere kann geometrisch definiert werden, als Durchschnittslinie, zweier Asymptotenebenen (Demoulin). Sollen wir diese Definition auch für Systeme de Integralkurven der Pfaff'schen Differentialgleichung $\Sigma P dx = 0$ beibehalten, so werden die Richtungskosinusse der Affinnormale durch folgende Relationen bestimmt:

$$(l,\ \delta x,\ \lambda dx + \nu P) = 0, \quad (l,\ dx,\ \lambda'\delta x + \nu' P) = 0.$$

Die Mittelpunkte der F_2 liegen im Allgemeinen nicht auf der Affinnormale. Soll dass stattfinden, somuss sein

$$\sum U\left[\left(\mu' - \frac{1}{2}A'\right)dx + \nu' P\right] = 0 \tag{21}$$

und ebenso

$$\sum U'\left[\left(\mu - \frac{1}{2}A\right)\delta x + \nu P\right] = 0 \tag{21'}$$

Betrachten wir das sämtliche System der Gleichungen (21) und (20) bez. (21') und folgende

$$\sum U' dx = 0, \quad \sum U'(\lambda'\delta x + \nu' P) = 0.$$

So avhalten wir die gesuchte Bedingung:

$$\frac{\lambda}{\mu' - \frac{1}{2}A'} = \frac{\mu - \frac{1}{2}A}{\lambda'} = \frac{\nu}{\nu'}.$$