Д. М. СИНЦОВ

Окремі випадки систем інтеґральних кривих Пфафового рівнання

В кількох статтях та нотатках[1]) я студіював деякі властивості систем інтеґральних кривих Пфафового рівнання

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{1}$$

Теорія кривини, лінії асимптотичні, ізотропні, лінії кривини, геодезичні тощо мають аналоги в цій теорії. Тепер я хочу дати деякі приклади систем кривих, що мають аналогію з певними відомими типами поверхонь.

I. СИСТЕМИ КОНІЧНІ, ЦИЛІНДРИЧНІ ТА РОЗВИВНІ

1. Питання про таку систему, що усі її площини:

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0 \tag{2}$$

проходять через ту саму точку (x_0, y_0, z_0) приводить до умови

$$P(x_0 - x) + Q(y_0 - y) + R(z_0 - z) = 0.$$

Якщо для простоти візьмемо точку (0, 0, 0), ця умова набирає форми:

$$Px + Qy + Rz = 0, \tag{3}$$

звідкіль

$$R = -\frac{1}{z}(Px + Qy)$$

і (1) дає

$$P(zdx - xdz) + Q(zdy - ydz) = 0. \tag{4}$$

Системі (4) можна дати назву *конічної системи.*

2. Циліндричні поверхні можна характеризувати з тої їхньої властивости, що прямолінійні їх твірні, а також і дотичні площини паралельні єдиній прямій (l, m, n). В нашому разі маємо, що площини системи (2) паралельні (l, m, n), цебто

$$Pl + Qm + Rn = 0, \tag{5}$$

---

[1]) О системах интегральных кривых Пфафова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Зап. Н.-Иссл. Каф. Украины, т. III. Обобщение формулы Эннепера-Бельтрами на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения. Распространение теоремы Гаусса. Сообщ. Х. М. О. (4) I. Гауссова кривизна и линии кривизны 2-го рода, ib. (4), II.

і (1) набуває форми

$$P(ndx - ldz) + Q(ndy - mdz) = 0, \tag{6}$$

Можна цим системам дати назву *циліндричних*.

3. Легко довести, що обидві системи є окремі випадки систем, що задовольняють рівнання

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} P_x' & P_y' & P_z' & P \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' & Q \\ R_x' & R_y' & R_z' & R \\ P & Q & R & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

цебто Ґавсова кривина їх [див. (1), (4)] дорівнює нулеві.

Але повна кривина для цих систем не дорівнює нулеві, бо $\Delta' = G^2 + 4\Delta$.

Таким чином можна сказати: *системи циліндричні та конічні є окремі випадки систем, що мають Ґавсову кривину* $= 0$, *і ці системи можна назвати розвивними системами.*

4. Асимптотичні лінії конічних систем

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \text{та} \quad Px + Qy + Rz = 0 \tag{a}$$

визначаються рівнанням

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0,$$

але

$$d(Px + Qy + Rz) = 0 = Pdx + Qdy + Rdz + xdP + ydQ + zdR = \\ = xdP + ydQ + zdR$$

Тому маємо:

$$1) \quad \frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q} = \frac{dR}{R}$$

$$2) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Цебто асимптотичні лінії конічних систем є 1° прямі, що проходять через центр системи

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

2° плоскі криві

$$\frac{P}{\lambda_1} = \frac{Q}{\mu_1} = \frac{R}{\nu_1},$$

бо за (а) задовольняють рівнання $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = 0$.

Асимптотичні лінії *циліндричних* поверхонь визначаються рівнаннями

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

з умовою

$$lP + mQ + nR = 0$$

та

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0 \quad \text{і} \quad ldP + mdQ + ndR = 0.$$

Тому

$$1^\circ \quad \frac{dx}{l} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{n}, \quad \text{цебто} \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

$$2^\circ \quad \frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q} = \frac{dR}{R}, \quad \text{цебто} \quad \frac{P}{\lambda} = \frac{Q}{\mu} = \frac{R}{\nu}.$$

5. З другого боку, аналогія з Ермітовими рівнаннями лінійчатих поверхонь навіває думку дорівняти нулеві члени 2-го та 3-го порядку в виразі перпендикуляра з (x, y, z) на площину

$$\sum \left(P + dP + \frac{1}{2} d^2 P\right)(X - x - dx) = 0,$$

цебто маємо три рівнання

$$\sum Pdx = 0, \quad \sum dPdx = 0, \quad \sum d^2 Pdx = 0.$$

Коли $P = p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Q = q = \frac{\partial z}{\partial y}$, маємо рівнання лінійчатих поверхонь, але коли $G \neq 0$ конічні та циліндричні системи цим рівнанням не задовольняють,— їх не можна вважати за окремі випадки цих систем.

6. *Лінії кривини* 2-го роду циліндричних систем визначаються рівнанням

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ nP & nQ & -lP - mQ \\ ndP & ndQ & -ldP - mdQ \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(ldx + mdy + ndz)(PdQ - QdP) = 0,$$

цебто: a) сімейство плоских кривих

$$P(ndx - ldz) + Q(ndy - mdz) = 0,$$
$$ldx + mdy + ndz = 0$$
$$(\text{або } lx + my + nz = \text{const})$$

міститься на площинах, перпендикулярних до постійного напряму (l, m, n).

b) Друге сімейство теж плоских кривих є

$$P(ndx - ldz) + Q(ndy - mdz) = 0,$$
$$PdQ - QdP = 0$$

або в остаточній формі

$$P - \lambda Q = 0$$
$$\lambda(nx - lz) + \mu(ny - mz) = C,$$

що містяться на площинах, паралельних тому самому постійному напряму (l, m, n).

Лінії кривини теж 2-го роду для *конічних* систем визначаються рівнянням

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ dP & dQ & dR \end{vmatrix} = 0$$

за умови $Px + Qy + Rz = 0$, що зводиться до

$$(xdx + ydy + zdz)(PdQ - QdP) = 0.$$

Ці дві системи можна характеризувати так:

1° сферичні криві: $x^2 + y^2 + z^2 = C$, $P(zdx - xdz) + Q(zdy - ydz) = 0$;
2° плоскі криві: $\mu P + \lambda Q = 0$, $\lambda x + \mu y = Cz$,

які містяться в площинах, що самі проходять через вершину системи.

II. СИСТЕМИ, АНАЛОГІЧНІ ДО ПОВЕРХОНЬ ОБОРОТОВИХ

Характеристична властивість поверхонь оборотових, що дає можливість встановити їх диференціяльне рівнання, є та, що всі нормалі її зустрічають одну пряму. Це означення для систем

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

дає умову

$$\frac{P}{x} = \frac{Q}{y} = S$$

і, коли зазначимо $R = K.S$, рівнанням цих систем буде

$$xdx + ydy + Kdz = 0. \tag{6}$$

Умова інтеґрувальности:

$$O = x\frac{\partial K}{\partial y} - y\frac{\partial K}{\partial x}$$

дає $K \equiv \Omega(x^2 + y^2, z)$, що приводить до оборотових поверхонь.

Лінії рівня для OZ вертикального є ті інтеґральні криві, що лежать на площинах, паралельних XOY,— це є кола:

$$dz = 0,\ xdx + ydy = 0,$$

тобто

$$z = z_0,\ x^2 + y^2 = C, \tag{a}$$

але нормалі до площин

$$x(X - x) + y(Y - y) + k(Z - z) = 0 \tag{b}$$

в точках (a) не зустрічають вісі OZ в одній точці:

$$\overline{z} = z_0 - K(x, y, z_0).$$

Питання про такі точки дає поверхню:

$$K(x,\ y,\ z) = z - z_0 \tag{7}$$

Інтеґральні криві, що лежать на цій поверхні, визначаються як перетин із сферою

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = C. \tag{8}$$

Лінії меридіянні системи є інтеґральні криві, що лежать на площинах $y = mx$:

$$xdx\,(1 + m^2) + K(x,\ mx,\ z)\,dz = 0. \tag{9}$$

Для OZ вертикальної це є лінії найкрутішого спаду, що утворюють максимальний кут із осею OZ і, як ортогональні траєкторії до ліній рівня системи, вони визначаються рівнаннями

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{Kdz}{x^2 + y^2}.$$

Лінії кривини 2-го роду системи (6) визначаються рівнанням

$$O = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & K \\ dx & dy & dK \end{vmatrix} \equiv (dK - dz)(ydx - xdy). \tag{10}$$

Маємо два сімейства: a) лінії меридіянні (9); b) лінії (7), (8) такі, що нормалі в їх точках до площини (b) зустрічають вісь Z-тів в одній точці.

III. ЛІНІЇ НАЙКРУТІШОГО СПАДУ

Хай OZ є вертикальна пряма, і треба найти

$$\max . c = -\frac{Pa + Qb}{R}$$

за умови

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{Pa + Qb}{R}\right)^2 = 1$$

або

$$R^2(a^2 + b^2) + (Pa + Qb)^2 = R^2.$$

Маємо

$$P - \lambda\,[(P^2 + R^2)\,a + PQb] = 0,$$
$$Q - \lambda\,[PQa + (Q^2 + R^2)\,b] = 0,$$

звідкіль

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{(P^2 + R^2)\,a + PQb}{P} = \frac{PQa + (Q^2 + R^2)\,b}{Q}$$

або

$$\frac{a}{P} = \frac{b}{Q} = \frac{-Rc}{P^2 + Q^2},$$

але

$$a=\frac{dx}{ds},\quad b=\frac{dy}{ds},$$

отже маємо

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{-Rdz}{P^2+Q^2}.$$

рівнання ліній найкрутішого спаду нашої системи.

Цікаво відзначити, що для системи кривих лінійного комплексу можна знайти конечні рівнання цих ліній. Рівнання кривих лінійного комплексу можна написати так:

$$ydx-xdy+kdz=0.$$

Отже відповідні лінії найкрутішого спаду мають за рівнання

$$\frac{dx}{ky}=\frac{dy}{-ky}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Перші два відношення дають інтеґрал $x^2+y^2=C$.

Покладімо

$$x=\sqrt{C}\cos\theta,\quad y=\sqrt{C}\,.\sin\theta.$$

Тоді

$$\frac{dz}{C}=-\frac{d\theta}{k}\therefore z=\frac{C}{k}\theta+C'.$$

Отже лінії найкрутішого спаду для системи інтеґральних кривих лінійного комплексу є

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\quad z=\frac{a^2}{k}(\theta-\theta_0),$$

тобто ґвинтові лінії.

IV. КРИВІ ЛІНІЙНОГО КОМПЛЕКСУ

Хай рівнання лінійного комплексу є

$$ydx-xdy+kdz=0, \tag{1}$$

так що

$$P=y,\quad Q=-x,\ R=k,$$

маємо

$$G=-2k.$$

Умову інтеґрувальности задовольняє тільки спеціяльний лінійний комплекс.

Детермінант $\Delta=-k^2$; $\Delta'=4\Delta+G^2=0$.

Отже *повна кривина системи дорівнює нулеві*, а *Ґавсова*

$$=\frac{k^2}{(x^2+y^2+k^2)^2}.$$

Асимптотичні лінії:

$$(dydx - dxdy + 0 \, . \, dz \equiv 0)$$

невизначені.

Лінії кривини 1-го роду невизначені: їх рівнання

$$\begin{vmatrix} 0 & y & dx \\ 0 & -x & dy \\ 0 & k & dz \end{vmatrix} = 0$$

задовольняється тотожно.

Лінії кривини 2-го роду:

$$O = \begin{vmatrix} y & -x & k \\ dx & dy & dz \\ dy & -dx & 0 \end{vmatrix} \equiv -k(dx^2 + dy^2) + dz(ydx - xdy),$$

або за (1)

$$0 = -k(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Лінії кривини 2-го роду є мінімальні криві.

Геодезичні лінії 1-го роду (найпряміші)

$$O = \begin{vmatrix} y & -x & x^2 + y^2 + k^2 \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} \equiv (x^2 + y^2 + k^2)(x'y'' - y'x'').$$

Особлива розв'язка є

$$x^2 + y^2 + k^2 = 0,$$

загальна розв'язка

$$y = Cx + C', \quad kz = C'' - C'x,$$

цебто прямі комплексу.

Геодезичні лінії 2-го роду (найкоротші[1]) визначаються рівнаннями

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\lambda' y - 2\lambda y' \\ y'' &= \lambda' x + 2\lambda x' \\ z'' &= -k\lambda' \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Останнє дає безпосередньо

$$z' = c - k\lambda$$

і за (1)

$$(y'x - x'y = (c - k\lambda)\, k.$$

Оскуляційна (стична) площина:

$$Xy - Yx + k(Z - z) = 0. \tag{3}$$

За допомогою (1) та (2) складаємо

$$x'y'' - y'x'', \quad y'z'' - z'y'', \quad z'y'' - z'z'',$$

[1]) Див. H. Liebmann. — Kürzeste u. geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem Math. Ann. 52. 1899. 120 — 126.

що пропорційні коефіцієнтам (3). Отже маємо рівнання

$$-\frac{1}{y}\left[\lambda'\left(ky'+\frac{x}{k}(xy'-yx')\right)+\frac{2\lambda}{k}(xy'-yx')\,x'\right]=$$
$$=-\frac{1}{x}\left[\left(kx'-\frac{y}{k}(xy'-yx')\right)\lambda'-2\lambda\frac{y'}{k}(xy'-yx')\right]=$$
$$=\frac{1}{k}[\lambda'(xx'+yy')+2\lambda(x'^2+y'^2)].$$

Відсіль, порівнюючи перше та третє відношення

$$\lambda'(x^2+y^2+k^2)+2\lambda(xx'+yy')=0,$$

тобто

$$\lambda=\frac{C'}{x^2+y^2+k^2}.$$

Тому

$$xy'-yx'=C-\frac{C'k^2}{x^2+y^2+k^2}=-kz'.$$

Введемо полярні координати:

$$r^2\frac{d\theta}{ds}=C-\frac{C'k}{r^2+k^2},\ ds^2=r^2d\theta^2+dr^2+\frac{r^4d\theta^2}{k^2}.$$

Отже

$$\left(r^2+\frac{r^4}{k^2}\right)d\theta^2+dr^2=\frac{r^4d\theta^2}{\left(C-\frac{C'k^2}{r^2+k^2}\right)^2}.$$

Тому

$$\theta-\theta_0=\int\frac{kr\,[C(r^2+k^2)-k^2C']\,dr}{\sqrt{-(r^2+k^2)[C(r^2+k^2)-k^2C']^2+k^2r^2(r^2+k^2)^2}}.$$

Підставлення

$$r^2+k^2=t,\quad \frac{k^2C'}{C}=a,\quad \frac{k^2}{C}=b$$

доводить формулу до остаточного виду:

$$\theta-\theta_0=\int\frac{(t-a)\,dt}{2\sqrt{t[(t-a)^2+b(t-k^2)]}},$$

як і у H. Liebmann'a.

RÉSUMÉ

Étude de quelques cas particuliers des systèmes des courbes intégrales de l'équation de Pfaff

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \tag{1}$$

qui présentent des analogies avec certaines classes de surfaces:

I. Si $Px+Qy+Rz=0$,

tous les plans

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0 \tag{2}$$

passent par l'origine (système conique)

Si $$P.l+Qm+Rn=0$$

les plans (2) sont parallèles à une direction donnée (l, m, n) (système *cylindrique*). Pour ces systèmes $\Delta=0$, donc la courbure de Gauss est nulle, $\Delta'\neq 0$. Les lignes de courbure de 2-d espèce pour les premières sont: a) les courbes sphèriques: (1) $xdx+ydy+zdz=0$, b) courbes planes $\mu P-\lambda Q=0$, $c(\lambda x+\mu y)=z$; pour les systèmes cylindriques ce sont deux familles de courbes planes

a) $\mu P-\lambda Q=0, \quad \lambda(nx-lz)+\mu(ny-mz)=c'$;

b) $P(ndx-ldz)+Q(ndy-mdz)=0, \quad lx+my+nz=l.$

II. Systèmes analogues aux surfaces de révolution:

$$\frac{P}{x}=\frac{Q}{y}=\frac{R}{K(x, y, z)}$$

a) Courbes de niveau sont des cercles concentriques: $z=z_0$, $x^2+y^2=l$.

b) Courbes dont les perpendiculaires (2) rencontrent l'axe Oz dans un même point $z=z_0$ sont découpées de la surface

$$K(xyz)=z-z_0$$

par des sphères

$$x^2+y^2+(z-z_0)^2=C.$$

c) Courbes méridiennes sont

$$y=mx, \quad xdx(1+m^2)+K(x, mx, z)\,dz=0.$$

Ce sont en même temps les lignes de la plus grande pente.

Les courbes b) et c) sont les lignes de courbure de 2^de espèce.

III. Les lignes de la plus grande pente du complexe linéaire sont des hélices circulaires.

IV. Indication des courbes caractéristiques pour le complexe liniaire: Courbure complète nulle, celle de Gauss $\neq 0$. Lignes asymptotiques indéfinies: chaque courbe intégrale peut être regardée comme asymptotique. Lignes de courbure de 1-ère espèce sont aussi indéfinies, celles de 2^de — des lignes minimales. Lignes géodésiques de 1-ère espèce (die geradesten) sont les droîtes du complexe, celles de 2^de espèce (die kürzesten) sont déterminées par l'intégrale elliptique (cfr. Liebmann. Math. Ann. 52).