Д. М. СИНЦОВ

Геометрія Монжевих рівнань

Рівнання між низкою однорідних координат точки $x_1 x_2 x_3 x_4$, та низкою координат прямої $p_{12} p_{13} \ldots p_{34}$:

$$F\left(\overset{m}{x}; \overset{r}{p}\right) = 0, \tag{1}$$

визначає конфіґурацію, що студіював Bonsdorf — Bulletin Ac. Petersb., 1878, але дав лише простіші енумеративні властивості.

Випадок $m = r = 1$ студіювали Lazzeri, Veneroni, Kasner, Ogura, за останній час Chouffeur в дуже докладній роботі Het bilineaire punt-lijn connex in de driedimensionale ruimte. Amst. 1927 — 8°. 139 ст.

Для $r = 1$ головну коїнциденцію розробив A. Voss під назвою Punct-Ebenen Systeme.

Головна коїнциденція конексу (1) є сукупність елементів (x, p), що їх точка x та пряма p мають інцидентне (злите) положення, тобто точка x лежить на прямій p, або пряма p проходить через точку x, і тому справджуються рівнання

$$(xpp)_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

незалежних є два. В просторі цих елементів маємо ∞^5, в конексі (1) ∞^4.

З цією коїнциденцією зв'язана певна інтеґраційна проблема: розподілити ці ∞^4 елементів на ∞^3 інтеґральних множин (Integralmannigfaltigkeiten) 1-го ступеня, що утворюються неперервним переходом від точки x до безконечно-близької точки $x + dx$ уздовж прямої p, і т. ін. Так що

$$p_{ik} = x_i dx_k - x_k dx_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Підставимо (3) в (1) і маємо рівнання 1-го ступеня

$$F\left(\overset{m}{x_i}; \overset{r}{x_i dx_k - x_k dx_i}\right) = 0. \tag{4}$$

Поклавши $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$, $dx_4 = 0$, маємо рівнання

$$0 = F(x, y, z, 1;\ xdy - ydx,\ xdz - zdx,\ ydz - zdy,\ -dx,\ -dy,\ -dz), \tag{4}$$

яке S. Lie назвав Монжевим рівнанням.

Коли в (1) $r = 1$, рівнання має форму $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, тобто є Пфафове рівнання, що його студіювали A. Voss, R. Lilienthal, H. Liebmann, S. Lie (Geometrie d. Berührungstransformationen B. 1), Rogers, G. Darboux.

У своїх друкованих розвідках[1]) я виявив властивості систем інтегральних кривих рівнання (5), що мають величезну аналогію з властивостями сукупности кривих, які лежать на поверхні, але показують і істотні відміни й через те дають можливість глибше розуміти поняття елементу поверхні та теорію поверхонь взагалі.

Перехід від випадку $r = 1$ до випадку $r > 1$ тягне за собою значні зміни властивостей відповідних конфігурацій, на що звертав увагу Софус Лі та підкреслював ріжницю між Пфафовими та Монжевими рівнаннями. Це є факт, що зустрічаємо для конексу з елементом (точка, пряма) в площині, але в просторі (точка, площина).

До цього часу маємо дуже небагато результатів в геометрії Монжевих рівнань. Основне є один капітальний результат С. Лі в Berichte Sächsischen Gesellschaft, 1898 [також Math. Ann., 59 — у фрагментах II тому Geometrie d. Berührungstransformationen], але окремі зауваження зустрічаємо і в роботах G. Darboux Mémoire sur les solutions singulières des équations différentielles du 1er ordre та інших. Щождо систем кривих лінійчатого комплексу не лінійного, то на помилку в результаті С. Лі вказав недавно L'ainé[2]), а виправили Gambier — геометрично та H. Liebmann — аналітично. В зв'язку з цим дальше студіювання властивостей Пфафового рівнання природно привело мене до спроби поширити на інтеґральні криві Монжевого рівнання ці властивості, наслідком її є ця робота.

Головніші результати я доповідав на засіданнях семінару н.- д. катедри геометрії та Харківського Математичного Товариства.

§ 1. РАДІЮС КРИВИНИ ТА ТЕОРЕМА MEUSNIER

Першу виразну вказівку на можливість поширити теорему Meusnier на систему інтеґральних кривин Монжевого рівнання (4) зустрічаємо в статті С. Лі Einige Bemerkungen über Pffaf'sche Gleichungen, Leipzig. Ber. 1896. B. 48. S. 412, але Fr. Engel підкреслює, що по суті вона є вже й у відомому мемуарі Über Complexe etc. M. Ann. Bd5. Можна (4′) переписати простіше

$$F(x,\ y,\ z;\ dx,\ dy,\ dz) = 0. \tag{5}$$

Набуває важливого значіння те, що рівнання (5) є однорідне відносно dx, dy, dz.

Поділом на ds у відповідній степені маємо

$$F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z') = 0, \tag{5}$$

рівнання також однорідне відносно x', y', z',

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \tag{6}$$

та з кожною точкою простору $(x,\ y,\ z)$ це рівнання зв'язує такий конус, прямолінійні твірні якого є дотичні інтеґральних кривих (5). Рівнання цього конусу є:

$$F(x, y, z;\ X - x,\ Y - y,\ Z - z) = 0. \tag{7}$$

---

[1]) Зап. Н.-Дос. Мат. Кат. України, т. III. С. Хар. М. О. (4), т. I, II, та Math. Ann. 101. Див. також Я. П. Бланк. Сооб. Х. М. О (4), II та III.

[2]) Nouv. Ann. (5), III, 1929, але ще раніш P. Demoulin C. R. Paris, t. 24, p. 1077, 1897. Див. F. Engels'Anmerkungen zum III Bd. S. Liés Gesammelten Abhandlungen.

Коли $r=1$, конус зводиться на площину. Площину дотичну до цього конусу по твірній (x', y', z') можна визначити рівнанням

$$F'_{x'}(X-x)+F_{y'}(Y-y)+F'_{z'}(Z-z)=0. \tag{8}$$

Хай M' — точка

$$\left(x+x'ds+\frac{1}{2}x''ds^2+\ldots,\ y+y'ds+\frac{1}{2}y''ds^2+\ldots,\ z+z'ds+\frac{1}{2}z''ds^2+\ldots\right),$$

безконечно близька до точки (x, y, z), лежить на інтеґральній кривій, дотична до якої міститься в площині (8). Перпендикуляр з M' на площину (8), якщо обмежитись членами 2-го порядку, є

$$M'Q=\frac{(F'_{x'}.x'+F'_{y'}y'+F'_{z'}.z')\,ds+\frac{1}{2}(F'_{x'}.x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z'')\,ds^2+\ldots}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}};$$

$M'Q$ — паралельна нормалі до площини (8) в точці $M(x, y, z)$.

Але

$$x'F'_{x'}+y'F'_{y'}+z'F'_{z'}\equiv rF(x, y, z;\ x', y', z')=0,$$

отже

$$M'Q=\frac{1}{2}\frac{F'_{x'}x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}. \tag{10}$$

Хай MP — пряма, що уздовж її (8) дотикається до конусу (7). Якщо $M'P\perp MP$, маємо

$$M'Q=\overline{M'P}.\cos\varphi.$$

Хай в площині MPM' пряма $M'C\perp MM'$ $MC\perp MP$; маємо із $\triangle MM'C\backsim\triangle MPM'$

$$\frac{1}{MC}=\frac{M'P}{MM'^2}. \tag{11}$$

Якщо ж $\varphi=0$, точки P та Q зливаються, $MD=2R$ є діяметр кола, що проходить через точки M, M' та C і

$$\frac{1}{R}=\frac{F'_{x'}x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}. \tag{12}$$

Для площини $M'PM$, що утворює кут φ з площиною $M'MN$, маємо

$$\frac{1}{R_\varphi}=\frac{M'P}{MQ'^2}=\frac{M'Q}{\cos\varphi\, MM'^2}$$

або

$$\frac{1}{R_\varphi}=\frac{1}{R\cos\varphi},\quad \text{але}\quad R_\varphi=R.\cos\varphi, \tag{I}$$

тобто, коли φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$ і відповідний центр кривини C описує коло діяметру $MC_0 = R$ в площині, що проходить через M та перпендикулярна до прямої

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

це є *круг Meusnier. Для кожного φ відповідний центр кривини C є проєкція на відповідну площину центру кривини тієї інтеґральної кривої, що її оскуляційна (стична) площина проходить через нормаль.*

Це є теорема Meusnier, поширена на системи інтеґральних кривих рівнання (5), яку найшов S. Lie.

Коли візьмемо повну похідну (5′) по s, маємо

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' = -(F'_{x'} x'' + F'_{y'} y'' + F'_{z'} z''), \tag{II}$$

то замість (12) маємо

$$\frac{1}{R_\varphi} = -\frac{F'_x x' + F'_y y' + F'_z z'}{\cos\varphi \sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}}, \tag{12′}$$

для $\varphi = 0$

$$\frac{1}{R} = -\frac{F'_x x' + F'_y y' + F'_z z'}{\sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}}. \tag{13}$$

Формула (12′) є формула S. Lie, що міститься в 59 томі Math. Ann. В 98 т. Ber. Sächs. Ges. замість φ фігурує n кут його доповнення до 90° між дотичною площиною та стичною (оскуляційною) площиною інтеґральної кривої.

Коли (5′) лінійне відносно x', y', z', тобто (5) є Пфафове рівнання, (13) дає формулу

$$\frac{1}{r} = -\frac{P' x' + Q' y' + R' z'}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \tag{13′}$$

а проте згідну із знаком включно з тою, що мали раніше; істотно вона відрізняється від (13) тим, що *знаменник не залежить від x', y', z'.* Але (13) і (13′) обидві не залежать від похідних 2-го порядку, тобто *усі криві Монжевого рівнання* (5), *що мають ту саму дотичну пряму й стичну площину, мають і однакову першу кривину.*

§ 2. ВИПАДОК НЕВИЗНАЧЕНОСТИ

Дослід формули (13) дає перш за все те, що знаменник знищується, 1° коли (x', y', z') є напрям особливої твірної конусу (7), 2° коли площина (18) є мінімальна. Ці обидва випадки зараз розглядати не будемо.

Формула (13) також порушається, коли

$$F_x' x' + F_y' y' + F_z' z' = 0. \tag{14}$$

Якщо ця умова справджується для всіх лінійних елементів, тобто для всіх елементів (x, p), що вдовольняють (2), функція повинна бути інтеґралом сукупної системи.

$$\frac{dx}{x'}=\frac{dy}{y'}=\frac{dz}{z'}=\frac{dx'}{0}=\frac{dy'}{0}=\frac{dz'}{0}.$$

Три інтеґрали $x'=c,\quad y'=c',\quad z'=c''$ пишемо одразу; щождо останніх трьох, то із $\dfrac{y'dx-x'dy}{0}=\dfrac{z'dx-x'dz}{0}=\dfrac{z'dy-y'dz}{0}$ маємо

$$xy'-x'y=C''',\quad zx'-xz'=C^{\mathrm{IV}},\quad z'y-y'z=C^{\mathrm{V}},$$

тобто загальний інтеґрал є

$$F(x', y', z',\quad yz'-zy',\quad zx'-xz',\quad xy'-yx')=0, \tag{14a}$$

це є Монжеве рівнання лінійчатого комплексу

$$F(p_{41},\ p_{42},\ p_{43},\ p_{23},\ p_{31},\ p_{12})=0.$$

Коли умова (14) справджується для деякого напряму (x', y', z') і разом з тим $\sin\Theta$ дорівнюється 0, вираз (12′) стає ілюзорний, що й підкреслював S. Lie l. c. Нижче ми дослідимо цей випадок. Зараз для перевірки обчислімо $\Sigma F'^2_{x'}$ для лінійного комплексу, що має за Монжеве рівнання:

$$ax'+by'+cz'+\alpha(yz'-zy')+\beta(zx'-xz')+\gamma(zx'-yx')=0.$$

$$F'_{x'}=a+\beta z-\gamma y,\quad F'_{y'}=b+\gamma x-\alpha z,\quad F'_{z'}=c+\alpha y-\beta x.$$

Звідкіль

$$F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}\equiv a^2+b^2+c^2+2\begin{vmatrix} a & b & c\\ \alpha & \beta & \gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}+$$

$$+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\neq 0,$$

а

$$F_x'x'+F_y'y'+F_z'z'=x'(\gamma y'-\beta z')+y'(\alpha z'-\gamma x')+z'(\beta x'-\alpha y')\equiv 0.$$

Коли візьмемо лінійний комплекс в канонічному виді, маємо

$$(5):\ ydx-xdy+kdz=0\quad (5'):\ yx'-xy'+kz'=0.$$

$$F'_{x'}=y,\quad F'_{y'}=-x,\quad F'_{z'}=k\ .\cdot.\ \sum F'^2_{x'}=x^2+y^2+k^2.$$

$$x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z\equiv x'y'+y'x'\equiv 0.$$

Тетраедральний комплекс

$$ap_{14}p_{23}+bp_{13}p_{24}+cp_{34}p_{12}=0$$

має за Монжеве рівняння

$$(b-c)\,xy'z'+(c-a)\,yz'x'+(a-b)\,zx'y'=0$$

і

$$\sum F_{x'}'^2 \equiv x'^2\,[(a-b)^2z^2+(c-a)^2y^2]+y'^2\,[(a-b)^2z^2+(b-c)^2x^2]+$$
$$+z'^2\,[(c-a)^2y^2+(b-c)^2x^2]+2\,x'y'\,(b-c)\,(c-a)\,xy+$$
$$+2\,x'z'\,(b-c)\,(a-b)\,xz+2\,y'z'\,(c-a)\,(a-b)\,yz\neq 0.$$
$$x'F_{x'}+y'F_{y'}+z'F_{z'}=x'y'z'\,[b-c+c-a+a-b]\equiv 0.$$

§ 3. ЛІНІЇ ГОЛОВНИХ ДОТИЧНИХ (АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ)

Можна й для систем інтеґральних кривих (5) поставити питання про ті напрями, що для них $M'Q$ є безконечно мала не 2-го, а 3-го порядку; отже маємо:

$$F_x'x'+F_y'y'+F_z'z'=0. \tag{14}$$

Криві, що в точці (x, y, z) дотикаються до цих прямих, мають з відповідною дотичною площиною конусу (7) стичність не 1-го, а 2-го порядку.

Можна підійти до них трохи інакше. Щоби дотична площина (8) конусу (7) була стичною (оскуляційною) площиною кривої, треба, щоб:

$$F_{x'}'x'+F_{y'}'y'+F_{z'}'z'=0;$$
$$F_{x'}'x''+F_{y'}'y''+F_{z'}'z''=0.$$

Але перше рівняння із-за однорідности (5′) відносно x', y', z' приводиться до (5′), а друге із-за тотожности (II) перетворюється на (14). Зокрема для Пфафового рівняння (14) зводиться до

$$P'x'+Q'y'+R'z'=0.$$

Рівняння (14) є порядку $m-1$ відносно x, y, z і порядку $r+1$ щодо x', y', z'. Розв'язання (14) разом з (5′) дає для $x':y':z'$ $r(r+1)$ розв'язків.

Отже, *серед твірних конусу* (5′) *є* $r(r+1)$ *таких, що дотичні до них криві мають з відповідними дотичними площинами* (8) *стик 2-го порядку, тобто мають їх за свої оскуляційні площини, інакше: через точку* (x, y, z) *проходять взагалі* $r(r+1)$ *кривих* (5), *що мають з відповідними твірними конусу* (5) *стик (оскуляцію) 2-го порядку.*

Число $r(r+1)$ для всякого цілого r є число паристе. Тому всі напрями головних дотичних можуть бути уявні.

Повертаючись до випадку невизначености, що ми його відзначили, підкреслимо, що *для лінійчатого комплексу* (*що має Монжеве рівняння* (5) *в формі* (14a] *усі прямолінійні твірні конусу* (7) *є головні дотичні.*

Це можна визначити ще так: *усі прямолінійні твірні, що мають в даній точці ту саму дотичну, мають також і спільну стичну (оскуляційну) площину*[1]).

[1]) До відповідних результатів S. Lie, Gambier та Liebmann'а звернемося далі окремо.

§ 4. ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ РАДІЮСІВ

Формула (13), як то було підкреслено, містить

$$x' = \frac{dx}{ds} = \alpha, \quad y' = \frac{dy}{ds} = \beta, \quad z' = \frac{dz}{ds} = \gamma$$

не тільки в чисельнику, але й в знаменнику через те, що F_α', F_β', F_γ' не залежать від α, β, γ лише тоді, коли F є лінійна відносно цих величин, тобто коли маємо справу не з Монжевим рівнанням, а з Пфафовим. Через те для визначення extremum'а радіюсу

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z'}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}}$$

треба зважати не тільки на чисельника, але на весь вираз у цілому, що істотно ускладнює задачу, і аналогії з теорією поверхонь, що наявні є для Пфафових рівнань, тут слабшають. А проте задачу можна поставити і можна її розв'язати. Можна шукати extremum $\frac{1}{R}$ або $\frac{1}{R^2}$, але останнє не спрощує помітно обчислень. Величини α, β, γ зв'язані співвідношеннями

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad F(x, y, z;\ \alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{15}$$

Знайдемо

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\alpha} = \frac{F_x' + \alpha F_{x\alpha}'' + \beta F_{y\alpha}'' + \gamma F_{z\alpha}''}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}} - \frac{F_\alpha' F_{\alpha\alpha}'' + F_\beta' F_{\beta\alpha}'' + F_\gamma' F_{\gamma\alpha}''}{(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{3/2}} (\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z'),$$

що можна зазначити

$$F_1 \cdot (F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{-3/2},$$

і такі ж вирази маємо для

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\beta} = F_2 (F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{3/2} \quad \text{і} \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\gamma} = F_3 (F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2)^{3/2}.$$

Отже умова extremum'а є

$$F_1 \frac{d\alpha}{ds} + F_2 \frac{d\beta}{ds} + F_3 \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Величини $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$ задовольняють співвідношення

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} = 0;$$

$$F_\alpha' \frac{d\alpha}{ds} + F_\beta' \frac{d\beta}{ds} + F_\gamma' \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Три рівнання повинні бути згідні, а тому косинуси екстремальних напрямів задовольняють крім (15) ще й рівнання

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ F_\alpha' & F_\beta' & F_\gamma' \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

де

$$F_1 = (F_x' + \alpha F_{x\alpha}'' + \beta F_{y\alpha}'' + \gamma F_{z\alpha}'')(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2) -$$
$$-(F_\alpha' F_{\alpha\alpha}'' + F_\beta' F_{\alpha\beta}'' + F_\gamma' F_{\alpha\gamma}'')(\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z')$$

$$F_2 = (F_y' + \alpha F_{x\beta}'' + \beta F_{y\beta}'' + \gamma F_{z\beta}'')(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2) -$$
$$-(F_\alpha' F_{\alpha\beta}'' + F_\beta' F_{\beta\beta}'' + F_\gamma' F_{\gamma\beta}'')(\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z')$$

$$F_3 = (F_z' + \alpha F_{x\gamma}'' + \beta F_{y\gamma}'' + \gamma F_{z\gamma}'')(F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2) -$$
$$-(F_\alpha' F_{\alpha\gamma}'' + F_\beta' F_{\beta\gamma}'' + F_\gamma' F_{\gamma\gamma}'')(\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z').$$

Ці вирази, якщо F однорідні відносно α, β, γ і порядку r, є порядку $3r-2$, а тому (16) є порядку $4r-2$ відносно α, β, γ. Разом з (5′) воно визначає $2r(2r-1)$ напрямів (відношень $\alpha:\beta:\gamma$). Але в тім числі є сторонні розв'язки. Справді значіння, що вдовольняють рівнанням

$$\frac{F_\alpha'}{\alpha} = \frac{F_\beta'}{\beta} = \frac{F_\gamma'}{\gamma}, \tag{16}$$

саме й є сторонні розв'язки, бо вони визначають напрями (α, β, γ), перпендикулярні до площини (8). Рівнання (16) можна замінити на рівнання:

$$\alpha F_\beta' - \beta F_\alpha' = 0, \quad \alpha F_\gamma' - \gamma F_\alpha' = 0, \quad \beta F_\gamma' - \gamma F_\beta' = 0.$$

що мають $r^2 - r$ спільних розв'язків, бо від r^2 розв'язків двох перших мусимо відкинути r розв'язків $\alpha = 0$, $F_\alpha' = 0$, що не задовольняють 3-го. Отже загальне число розв'язків системи (15′), (15) є

$$4r^2 - 2r - (r^2 - r) = 3r^2 - r = (3r-1)\,r.$$

Розглянемо, чи не може бути одночасно

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \ F_3 = 0.$$

Але ці рівнання еквівалентні рівнанням

$$\frac{\alpha F_x' + \beta F_y' + \gamma F_z'}{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2} = \frac{F_x' + \alpha F_{\alpha x}'' + \beta F_{\alpha y}'' + \gamma F_{\alpha z}''}{F_\alpha' F_{\alpha\alpha}'' + F_\beta' F_{\beta\alpha}'' + F_\gamma' F_{\gamma\alpha}''} =$$

$$= \frac{F_y' + \alpha F_{\beta x}'' + \beta F_{\beta y}'' + \gamma F_{\beta z}''}{F_\alpha' F_{\beta\alpha}'' + F_\beta' F_{\beta\beta}'' + F_\gamma' F_{\gamma\beta}''} = \frac{F_z' + \alpha F_{\gamma x}'' + \beta F_{\gamma y}'' + \gamma F_{\gamma z}''}{F_\alpha' F_{\gamma\alpha}'' + F_\beta' F_{\gamma\beta}'' + F_\gamma' F_{\gamma\gamma}''}.$$

Множимо в трьох останніх відношеннях чисельника та знаменника на α, β, γ й додаємо; маємо нове відношення

$$=\frac{\sum\alpha F'_x+\alpha rF'_x+\beta rF'_y+\gamma rF'_z}{\sum F'_\alpha\cdot(r-1)F'_\alpha}=\frac{(r+1)\sum\alpha F'_x}{(r-1)\sum F'^2_\alpha},$$

і воно дорівнює

$$\frac{\sum\alpha F'_x}{\sum F'^2_\alpha}.$$

А це можливе тільки тоді, коли разом і

$$\sum\alpha F'_x=0 \quad \text{і} \quad \sum F'^2_\alpha=0.$$

Таким разом такий привід зниження відпадає.

§ 5. ЛІНІЇ КРИВИНИ 1-го ТА 2-го РОДУ

Якщо помножити (16) на відповідну степінь ds та замінити $\alpha ds=dx$, $\beta ds=dy$, $\gamma ds=dz$, маємо рівнання в повних диференціялах, що разом з (5) визначає ті системи кривих, що мають в кожній точці за дотичну ті напрями, що відповідають екстремальним радіюсам. Так можна поширити в геометрії Монжевих рівнань поняття *ліній кривини* (1-го роду). Можна залишити попередні позначення α, β, γ, але не забувати значіння $\alpha=\frac{dx}{ds}$ і т. д. Тоді можна писати

$$0=\begin{vmatrix}\alpha & F'_\alpha & (F'_x+\sum\alpha F''_{x\alpha})\sum F'^2_\alpha-\sum F'_\alpha F''_{\alpha\alpha}\cdot\sum\alpha F'_x\\ \beta & F'_\beta & (F'_y+\sum\alpha F''_{x\beta})\sum F'^2_\alpha-\sum F'_\alpha F''_{\beta\alpha}\cdot\sum\alpha F'_x\\ \gamma & F'_\gamma & (F'_z+\sum\alpha F''_{x\gamma})\sum F'^2_\alpha-\sum F'_\alpha F''_{\gamma\alpha}\cdot\sum\alpha F'_x\end{vmatrix}$$

Але, з другого боку, можна поставити питання відшукати ті напрями, що уздовж них відповідні нормалі до площини (8) у двох безконечно близьких точках перетинаються.

Нормаль до (8)

$$\frac{X-x}{F'_{x'}}=\frac{Y-y}{F'_{y'}}=\frac{Z-z}{F'_{z'}}$$

безконечно близька

$$\frac{X-x-x'ds}{F'_{x'}+dF'_{x'}}=\frac{Y-y-y'ds}{F'_{y'}+dF'_{y'}}=\frac{Z-z-z'ds}{F'_{z'}+dF'_{z'}}.$$

Умова перетинання

$$\begin{vmatrix}dx & F'_{x'} & dF'_{x'}\\ dy & F'_{y'} & dF'_{y'}\\ dz & F'_{z'} & dF'_{z'}\end{vmatrix}=0. \tag{17}$$

Коли (5) зводиться до $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, (17) дасть безпосередньо рівняння в повних диференціялах 1 порядку ліній кривини 2-го роду. Але в загальному випадку ($r > 1$) рівняння (17) містить діференціяли 2-го порядку. Коли записати (17) детальніше, маємо члени з похідними 2-го порядку

$$A_1 x'' + B_1 y'' + C_1 z'' = 0,$$

де

$$A_1 = \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F''_{x'x'} \\ y' & F'_{y'} & F''_{x'y'} \\ z' & F'_{z'} & F''_{x'z'} \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F''_{x'y'} \\ y' & F'_{y'} & F''_{y'y'} \\ z' & F'_{z'} & F''_{z'y'} \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F''_{x'z'} \\ y' & F'_{y'} & F''_{y'z'} \\ z' & F'_{z'} & F''_{z'z'} \end{vmatrix}.$$

Щоб члени з x'', y'', z'' знищились, треба, щоб

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0,$$

проте це дає не три умови, а тільки дві, бо

$$A_1 x' + B_1 y' + C_1 z' = 0.$$

Можна навіть показати, що вони зводяться тільки до одного.

Справді маємо

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0;$$

$$F'_{x'} . x'' + F'_{y'} . y'' + F'_{z'} . z'' = -(F'_x . x' + F'_y . y' + F'_z . z').$$

Множимо на μ, ν й додаємо до (17). Щоб x'', y'', z'' випали, треба, щоб

$$A_1 + \mu F'_{x'} + \nu x' = 0$$
$$B_1 + \mu F'_{y'} + \nu y' = 0$$
$$C_1 + \mu F'_{z'} + \nu z' = 0,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} A_1 & F'_{x'} & x' \\ B_1 & F'_{y'} & y' \\ C_1 & F'_{z'} & z' \end{vmatrix} = 0.$$

§ 6. ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ, ЯК ЛІНІЇ НАЙПРЯМІШІ

Відносно системи інтеґральних кривих Монжевого рівняння (5) можна поставити також питання про ті, що їх випрямні (rectifiants) площини є дотичні площини до конусу (7) — конусу, що зв'язаний з точкою (x, y, z) за (5).

Коли, як звичайно, l, m, n позначають косинуси головної нормалі з осями координат, маємо

$$\frac{l}{F'_\alpha} = \frac{m}{F'_\beta} = \frac{n}{F'_\gamma} = \lambda$$

або, якщо незалежна змінна є s,

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\lambda F'_{x'}(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z');$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\lambda F'_{y'}(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z');$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\lambda F'_{z'}(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z').$$

Тут

$$\lambda^2=\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}.$$

Отже, коли (5) не є Монжеве рівнання лінійчатого комплексу, за формулою (13) § 1 маємо

$$\lambda=\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}},$$

і рівнання найпряміших ліній набирають форми

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\pm\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F''_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}\cdot F'_{x'};$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\pm\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}\cdot F'_{y'};$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\pm\frac{x'F'_x+y'F'_y+z'F'_z}{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}\cdot F'_{z'}.$$

§ 7. ГЕОДЕЗИЧНІ ЛІНІЇ, ЯК ЛІНІЇ НАЙКОРОТШІ

Беремо інтеґрал

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt,$$

що визначає довжину дуги кривої, і шукаємо його extremum за умови

$$F\left(x,y,z;\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=0. \qquad (5'')$$

Початкові та конечні значіння координат є $(x_0y_0z_0)$ та $(x_1y_1z_1)$ відповідно значінням t_0, t_1 параметру t. Задача зводиться на визначення абсолютного extremum'а інтеґралу

$$J_0=\int_{t_0}^{t_1}\{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}+\lambda F(x,y,z,x',y',z')\}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}Gdt.$$

Величини x, y, z визначаються, як функції t рівняннями

$$\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)=0,\quad \frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)=0,\quad \frac{\partial G}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial z'}\right)=0$$

або написавши детальніше

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0;$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\lambda+\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0;$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\lambda+\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0.$$

Якщо за незалежну змінну взяти дугу s, рівняння зводиться до форми

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial x'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right];$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial y'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right];$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=-\lambda'\frac{\partial F}{\partial z'}+\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right];$$

де

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x'+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x'}z'+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2F}{\partial x'\partial z'}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Рівнання, хоч і лінійні, але не розв'язані відносно похідних 2-го порядку.

RÉSUMÉ

Die Resultate der Untersuchungen der Verf. über die Eigenschaften der Systeme der Integralkurven einer Pfaff'schen Gleichung $Pdx+Qdy+Rdz=0$ werden auf nicht-lineare in Bezug auf dx, dy, dz („Monge'sche") Gleichungen erweitert. S. Lie hat schon das Theorem von Meusnier auf solche Systeme erweitert. Es werden hier diese Resultate wieder aufgenommen und weiter geführt. Der Ausdruck des Krümmungsradius wird aufgestellt (§ 1) und wird gezeigt, es können auf Monge'sche Gleichungen die Begriffe der Haupttangentenrichtungen und Haupttangentenkurven (§ 3), der extremalen Werte der Krümmungsradien (Hauptkrümmungsrichtungen (§ 4), der Krümmungslinien 1-ster u. 2-ter Art (§ 5), endlich der geodätischen Linien als geradesten (§ 6) und als kürzesten (§ 7) erweitert werden. Im 52 wird der Fall der Unbestimmheit des Krümmungsradius untersucht, was wie S. Lie schon gezeigt hat, auf Monge'sche Gleichungen der Komplexe führt.