Д. М. СИНЦОВ

Кривина асимптотичних ліній

(Лінії головних дотичних)

ДЛЯ ПОВЕРХОНЬ, СИСТЕМ ІНТЕҐРАЛЬНИХ КРИВИХ ПФАФОВИХ ТА МОНЖЕВИХ РІВНАНЬ ТА КОМПЛЕКСІВ

В попередніх моїх роботах я розглядав деякі властивості систем інтеґральних кривих Пфафових рівнань, що являють величезну аналогію відповідним властивостям кривих на поверхнях. Але Пфафове рівнання є, з одного боку, окремий випадок Монжевого рівнання, з другого боку, охоплює як окремі випадки як поверхні, також і диференціяльне рівнання лінійного комплексу. Монжеве ж рівнання і собі охоплює як окремий випадок диференціяльне рівнання лінійчатого комплексу нелінійного. Цікаво, на мою думку, розглянути деякі питання для всіх цих категорий кривих. Я вибрав питання про асимптотичні лінії особливо тому, що для лінійчатих комплексів кожна інтеґральна крива є разом з тим крива асимптотична.

§ 1. АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ НА ПОВЕРХНІ

В теорії поверхонь понайбільше залишають без розгляду питання, що стосуються до особливих точок та характеристики поведінки поверхні поблизу тих або інших її кривих. Це питання дуже цікаве з погляду топологічних особливостей, найтісніше вони зв'язані з топологією інтеґральних кривих диференціяльного рівнання 1-го порядку і W. Dyck, що досліджував останнє питання, дав роботу та рисунки асимптотичних кривих (див. Katalog Mathem. Modelle, München, 1892 р.). Ми зосередимо нашу увагу на асимптотичних лініях і їхніх радіюсах кривини.

Маємо щодо цього відомий результат E. Beltrami, а саме: радіюс кривини асимптотичної лінії дорівнює $^2/_3$ радіюсу кривини, перетину поверхні її дотичною площиною [1]) (для гіперболічної точки, як підкреслює Mangoldt в Enzyclop. d. Mathem. Wissenschaften III_3).

Результат E. Beltrami можна вивести без цього обмеження, але треба додати деякі зауваження. Суть справи в тому, що точка дотику є особлива точка кривої перетину поверхні та її дотичної площини. Які можуть бути тут випадки та якого значіння може набірати відповідний радіюс кривини, це питання я розв'язував в іншому місці.

---

[1]) Див., наприклад, „Курс диф. геометрії" — Зап. Хар. Ун., 1908.

Хай точка (x, y, z) є еліптична точка поверхні, відповідні асимптоти є уявні, крива перетину поверхні з дотичною площиною має точку дотику ізольовану. Наприклад, кожна точка еліпсоїду є еліптична. Коли осі координат є три спряжені діяметри, $z' = c'$ є дотична площина точки (o, o, c') і перетинає еліпсоїд по кривій

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 0,$$

$$z' = c'$$

цебто вподовж пари ізотропних прямих, що перетинаються в точці (o, o, c'). Радіюс кривини дорівнює ∞ $\left(\text{бо}\, \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0\right)$. Для оборотових поверхонь Паскалевого слимака навколо його осі симетрії

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad (2a < b < 4a, \text{ напр., } b = 3a)$$

відповідна крива перетину поверхні з дотичною площиною $x = 2a - b$ точки $(2a - b, o, o)$ розпадається на коло

$$y^2 + z^2 - 4ab + b^2 = 0, \quad x = 2a - b$$

та на коло-точку

$$y^2 + z^2 = 0 \quad x = 2a - b,$$

що є ізольованою точкою

Формула

$$\frac{\left(F_x'^2 + F_y'^2\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix}} \qquad (x,\ y,\ z \text{ — однорідні координати})$$

для цієї ізольованої точки дає $R = \frac{0}{0}$. Також крива $y^2 = x^2(x - 1)$. Таким чином, в ізольованій точці радіюс кривини є ∞, але $\frac{0}{0}$. В точці параболічної два напрямки головних дотичних зливаються, і крива перетину має точку звороту або самостику, і радіюс кривини є або 0, або ∞.

На останнє *гіперболічна* точка поверхні має головні дотичні дійсні, і на криві перетину буде вузлова точка. Але разом з тим вона може бути точкою перегину на одній або й на обох витинах кривої, і радіюс кривини для відповідної вітини є ∞. Наприклад, гіперболічний параболоїд $2z = x^2 - y^2$ в точці $(0, 0, 0)$ перетинається дотичною площиною $z = 0$ по двох прямих $x^2 - y^2 = 0$, і радіюс кривини для обох є ∞. Катеноїд

$$z = a \lg \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a}$$

перетинається дотичною площиною $X = a$ точки $(0,\ 0,\ 0)$ по кривій

$$z = a \lg \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}, \quad \text{або} \quad y = \pm a \sin h\left(\frac{z}{a}\right).$$

Для кожної вітини маємо $R = \infty$.

Таким чином теорема E. Beltrami має дуже обмежений обсяг прикладання і цікаво підрахувати вираз для радіюсу кривини асимптотичної лінії безпосередньо.

Асимптотичну лінію поверхні

$$z = f(x,\ y) \tag{1}$$

відділяємо диференціяльним рівнанням

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0 \tag{2}$$

або

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0. \tag{2'}$$

Її радіюс кривини можна вирахувати так. Інтеґрали (2) дають криві основи циліндрів, що вирізають на поверхні (1) асимптотичні лінії. Таким чином за (2) маємо

$$y = \varphi(x)$$

і за (1)

$$z = f(x,\ \varphi(x)),$$

за (2′)

$$z' = p + qy', \quad z'' = qy'' + (r + 2sy' + ty'^2) = qy'',$$

отже

$$R = \frac{[1 + y'^2 + (p + qy')^2]^{3/2}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Але коли диференціювати (2) ще раз, маємо

$$k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3 + 2(s + ty')y'' = 0 \quad \left(k = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \text{ і т. д.}\right) \tag{3}$$

за (2′)

$$s + ty' = \pm\sqrt{rt - s^2}$$

і таким чином

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{2}\,\frac{(k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\pm\sqrt{rt - s^2}\,(1 + p^2 + 2pqy' + (1 + q^2)y'^2)^{3/2}}.$$

Радіюс кривини плоскої кривої — перетину поверхні та її дотичної площини (див., напр., мій курс „Геометр. крив.“ 1908 р., стор. 135 — 6) визначаємо за допомогою рівнання

$$(k + 3ly' + 3my'^2 + ny'^3) + 3(s + ty')y'' = 0,$$

а тому (5)

$$\frac{1}{R_{дот}} = -\frac{1}{3}\,\frac{(k+3ly'+3my'^2+ny'^3)\sqrt{1+p^2+q^2}}{\pm\sqrt{rt-s^2}\,(1+p^2+2pqy'+(1+q^2)y'^2)^{3/2}} \tag{5}$$

і маємо відношення E. Beltrami

$$3R_{ac} = 2R_{дот}.$$

Підкреслимо ще таке зауваження. Радіус кривини інтеґральної кривої (2) за (3)

$$\frac{1}{R_{пр}} = -\frac{1}{2}\,\frac{k+3ly'+3my'^2+ny'^3}{\pm\sqrt{rt-s^2}\,(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Таким чином

$$R_{ac}:R_{пр} = \frac{1+p^2+2pqy'+(1+qyy'^2)^{3/2}}{(1+y'^2)^{3/2}\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{7}$$

Відношення радіюсів кривини асимптотичної лінії та її проекції на площину XOY дорівнює добуткові відношення кубів їх лінійних елементів на косинус кута дотичної площини з площиною XOY.

Визначімо тепер добуток мір кривини обох асимптотичних ліній. Знаменник буде:

$$[1+p^2+2pqy_1'+(1+q^2)y_1'^2]\cdot[1+p^2+2pqy_2'+(1+q^2)y_2'^2],$$

але

$$y_1'+y_2' = -\frac{2s}{t},\quad y_1'y_2' = \frac{r}{t}\quad \text{і}\quad y_1'^2+y_2'^2 = \frac{4s^2-rt}{t^2}.$$

Отже знаменник дорівнює

$$\frac{1}{t^2}\left\{[t(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)]^2-4(rt-s^2)(1+p^2+q^2)\right\}.$$

Щождо чисельника, то я колись[1]) визначив добуток

$$[k+3ly_1'^2+3my_1'+ny_1'^3]\,[k+3ly_2'+3my_2'^2+ny_2'^3] =$$

$$= \frac{1}{t^3}\left[r(\Delta_y)^2-2s\Delta_x'\Delta_y'+t(\Delta_x')^2-8\Delta\begin{vmatrix} r & s & t\\ r_x' & s_x' & t_x'\\ r_y' & s_y' & t_y'\end{vmatrix}\right],$$

де

$$\Delta = rt-s^2.$$

Таким чином маємо остаточно

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{r\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)^2-2s\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial y}+t\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2-8\Delta\begin{vmatrix} r & s & t\\ r_x' & s_x' & t_x'\\ r_y' & s_y' & t_y'\end{vmatrix}}{\Delta\left\{[t(1+p^2)-2pqs+r(1+q^2)]^2-4\Delta(1+p^2+q^2)\right\}^{3/2}} \tag{8}$$

---

[1]) Nouv. Ann. (3), XIV, p. 4, 1894, févr. та Изв. Каз. Физ.-Мат. О. (2), 1894.

Ця формула знищується в усіх точках лінійчатої поверхні, і таким чином маємо таке геометричне значіння рівнання лінійчатих поверхонь в наведеній вище формі: *в кожній точці лінійчатої поверхні добуток мір кривини двох її асимптотичних ліній дорівнює нулеві.*

Знаменника можна переписати за допомогою виразу середньої кривини

$$2H = \frac{t(1+p^2) - 2pqs + r(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Таким чином знаменник набирає форми

$$8(1+p^2+q^2)^{3/2}\Delta[H^2(1+p^2+q^2)+\Delta]^{3/2}.$$

В точках, що мають середню кривину $= 0$, маємо

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{32}\,\frac{r\Delta_y'^2 - 2s\Delta_x'\Delta_y' + t\Delta_x'^2 - 8\Delta\begin{vmatrix} r & s & t \\ r_x' & s_x' & t_x' \\ r_y' & s_y' & t_y' \end{vmatrix}}{\Delta^{5/2}\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{9}$$

Для лінійчатої мінімальної поверхні цей вираз можна застосувати до всіх її точок[1]).

§ 2. КРИВИНА АСИМПТОТИЧНИХ ЛІНІЙ ПФАФОВОГО РІВНАННЯ

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{1}$$

В цім випадку асимптотичні лінії виділяються рівнанням

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0. \tag{2}$$

Поділом через ds, resp. ds² маємо

$$Px' + Qy' + Rz' = 0 \tag{1'}$$

та

$$P'x' + Q'y' + R'z' = 0. \tag{2'}$$

Розгорнувши останнє рівнання детально, дістанемо:

$$\begin{aligned} P_2 \equiv P_x'x'^2 + Q_y'y'^2 + R_z'z'^2 + (P_y' + Q_x')x'y' + \\ + (P'_z + R'_x)x'z' + (Q_z' + R_y')y'z' = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Диференціюємо (1′) ще раз і за допомогою (3) маємо:

$$Px'' + Qy'' + Rz'' = 0 \tag{4}$$

Диференціюємо (2′) або (3) ще раз, маємо:

$$\frac{\partial P_2}{\partial x'}x'' + \frac{\partial P_2}{\partial y'}y'' + \frac{\partial P_2}{\partial z'}z'' + P_3 = 0, \tag{5}$$

---

[1]) В скороченій формі цей § надруковано в Отчете о деятельности **Математической Конференции** Н.-Пед. О-ва ДВГУ, июнь — декабрь 1928.

де

$$\frac{\partial P_2}{\partial x'} = 2P'_x x' + (P'_y + Q'_x)y' + (P'_z + R'_x)z' \quad \text{і т. д.,}$$

а

$$P_3 = \frac{\partial P_2}{\partial x}x' + \frac{\partial P_2}{\partial y}y' + \frac{\partial P_2}{\partial z}z' \equiv P''_{xx}x'^3 + Q''_{yy}y'^3 + R''_{zz}z'^3$$
$$+ (2P''_{xy} + Q''_{xx})x'^2y' + (P''_{yy} + 2Q''_{xy})x'y'^2$$
$$+ (2P''_{xz} + R''_{xx})x'^2z' + (P''_{zz} + 2R''_{xz})x'z'^2$$
$$+ (2Q''_{yz} + R''_{yy})y'^2z' + (Q''_{zz} + 2R''_{yz})y'z'^2$$
$$+ 2(P''_{yz} + Q''_{xz} + R''_{xy})x'y'z'.$$

Рівняння (4) та (5) з допомогою рівняння

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

можна розв'язати відносно x'', y'', z''; маємо

$$Dx'' = -P_3(Ry' - Qz'),\ Dy'' = -P_3(Pz' - Rx'),\ D.z'' = -P_3(Qx' - Py'),$$

де

$$D = \begin{vmatrix} x' & P & \frac{\partial P_2}{\partial x'} \\ y' & Q & \frac{\partial P_2}{\partial y'} \\ z' & R & \frac{\partial P_2}{\partial z'} \end{vmatrix}.$$

Тому радіус кривини асимптотичої лінії (1) визначається формулою

$$D^2 \cdot \frac{1}{R_{ac}^2} = P_3^2(P^2 + Q^2 + R^2),$$

цебто

$$\frac{1}{R_{ac}} = \pm \frac{P_3\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{D}. \tag{6}$$

Але можна декілька перетворити знаменника:

$$D^2 = \begin{vmatrix} \sum x'^2 & \sum Px' & \sum \frac{\partial P_2}{\partial x'}x' \\ \sum Px' & \sum P^2 & \sum P\frac{\partial P_2}{\partial x'} \\ \sum \frac{\partial P_2}{\partial x'}x' & \sum P\frac{\partial P_2}{\partial x'} & \sum \left(\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum P^2 \cdot \sum\left(\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 - \left(\sum P\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 =$$

$$= \left(P\frac{\partial P_2}{\partial y'} - Q\frac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2 + \left(Q\frac{\partial P_2}{\partial z'} - R\frac{\partial P_2}{\partial y'}\right)^2 + \left(R\frac{\partial P_2}{\partial x'} - P\frac{\partial P_2}{\partial z'}\right)^2.$$

— сума мінорів матриці

$$\begin{Vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial x'} & \dfrac{\partial P_2}{\partial y'} & \dfrac{\partial P_2}{\partial z'} \end{Vmatrix}$$

Таким чином

$$\frac{1}{R_{ac}} = \pm \frac{P_3\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\sqrt{\sum\left(P\dfrac{\partial P_2}{\partial y'} - Q\dfrac{\partial P_2}{\partial x'}\right)^2}}. \tag{6'}$$

Але цей вираз не можна вважати за остаточний. Справді він містить x', y', z', що зв'язані проміж себе співвідношеннями (1), (4) та

$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Тому в окремих випадках елімінації, що тут потрібні, досить складні, — складні навіть в простіших випадках.

§ 3. РАДІЮС КРИВИНИ ЛІНІЙНОГО КОМПЛЕКСУ

S. Lie — Geometrie d. Berührungstransformationen, Bd. I, 1896 р. та Jessop — Treatise on the line complex, 1903 не дають вказівок щодо цього. Формула § 2 не годиться. Тому я поставив собі за задачу найти такий вираз. Але одночасно в червні минулого року H. Liebmann[1]) дав відповідну формулу, але при спеціяльному розположенні осей координат. Тому доцільно навести й мої результати.

Хай

$$yx' - xy' + kz' = 0$$

рівнання інтеґральних кривих лінійного комплексу.

Хай, як і в H. Liebmann'a[2])

$$y = r\cos\theta, \quad x = r\sin\theta \tag{1}$$

(1) набирає форми

$$r^2 d\theta + k dr = 0. \tag{1'}$$

Хай до того $r=\varphi(\theta)$ — довільна функція θ. Тоді (1′) дає

$$dz = -\frac{1}{k}\varphi(\theta)^2 d\theta,$$

звідкіль

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{1}{k}\int \varphi(\theta)^2\,d\theta \\ x &= \varphi(\theta)\sin\theta \\ y &= \varphi(\theta)\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Die Sätze von Lie u. Gambier über Kurven eines Linienkomplexes, Heidelberger Sitzungsberichte, Math - nat. Kl.— J. 1928, Abh, 9.

[2]) Math. Ann., 52, Ss. 120 — 126, 1899.

Рівнання (2) визначають інтеґральні криві лінійного комплексу. Уже вони дають можливість упевнитися, що ці криві не мають особливих точок, тобто точок звороту (вузлові точки за параметричної форми рівнань (2) не є особливі); а саме

$$x'_\theta = \Phi'(\theta)\sin\theta + \Phi(\theta)\cos\theta, \quad y'_\theta = \Phi'(\theta)\cos\theta - \Phi(\theta)\sin\theta,$$

$$z'_\theta = -\frac{1}{k}\Phi^2(\theta) \tag{3}$$

Умови особливости точки є

$$x'_\theta = 0 = y'_\theta = z'_\theta = 0;$$

тому треба, щоб

$$\Phi(\theta) = 0 \quad \text{і} \quad \Phi'(\theta) = 0,$$

тобто для точок $r = 0$, для кривих комплексу, що проходять через початок координати і мають XOY за стичну (оскуляційну) площину.

З (3) маємо

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \Phi(\theta)^2 + \Phi'(\theta)^2 + \frac{1}{k^2}\Phi''(\theta).$$

Далі

$$x'' = (\Phi'' - \Phi)\sin\theta + 2\Phi'\cos\theta, \quad y'' = (\Phi'' - \Phi)\cos\theta - 2\Phi'\sin\theta,$$

$$z'' = \frac{-2\Phi(\theta)\,\Phi'(\theta)}{k}$$

і тому

$$\left.\begin{aligned} y'z'' - z'y'' &= -\frac{\Phi}{k}\left[2\Phi'^2 + \Phi(\Phi'' - \Phi)\right]\cos\theta \\ z'x'' - x'z'' &= +\frac{\Phi}{k}\left[2\Phi'^2 - \Phi(\Phi'' - \Phi)\right]\sin\theta \\ x'y'' - x''y' &= -\left[2\Phi'^2 - \Phi(\Phi'' - \Phi)\right] \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Відсіль радіюс кривини

$$R = \frac{\left[\Phi'^2 + \Phi^2 + \frac{1}{k^2}\Phi^4\right]^{3/2}}{\begin{vmatrix} \Phi' & \Phi \\ \Phi'' - \Phi, & 2\Phi' \end{vmatrix} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Phi^2}{k^2}}}. \tag{5}$$

Щоб визначити радіюс кривини якоїсь з кривих комплексу, треба задати функцію $\Phi(\theta)$.

Приклади: a) $\Phi = a\ (= \mathrm{const})$; $x = a \sin\theta$, $y = a\cos\theta$, $z = ma\theta$ — кругова ґвинтова лінія, $r = a(1 + m^2) = \mathrm{const}$;

b) $\Phi \equiv \dfrac{kc}{b\sin\theta - a\cos\theta}$ і $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $2\Phi'^2 - \Phi(\Phi'' - \Phi) = 0$,

$$\frac{1}{R} = 0$$

криві є прямі лінії комплексу;

c) $\Phi(\theta) = \sqrt{\sin\theta}$, $z = \dfrac{\cos\theta}{k}$, $x = (\sin\theta)^{3/2}$, $y = \cos\theta\sqrt{\sin\theta}$

крива перетину

$$xy = kz(1 - k^2z^2), \quad kzx = y(x^2 + y^2).$$

Можна ще інакше вивести формулу для радіюсу кривини:

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\sum (x'y'' - y'x'')^2};$$

але

$$z' = \frac{1}{k}(xy' - yx'), \tag{1}$$

$$z'' = \frac{1}{k}(xy'' - yx''); \tag{1a}$$

отже

$$y'z'' - z'y'' = \frac{y}{k}(x'y'' - y'x''),$$

також

$$x'z'' - z'x'' = -\frac{x}{k}(x'y'' - y'x''),$$

і тому

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{k}\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}. \tag{6}$$

Аналогічну формулу можна дати й для загального рівнання лінії комплексу

$$\sum a_{ik}p_{ik} = 0,$$

що його Пфафове рівнання є

$$(a_{21}y + a_{31}z + a_{41})\,dx + (a_{12}x + a_{32}z + a_{42})\,dy + (a_{13}x + a_{23}y + a_{43})\,dz = 0,$$

отже

$$\frac{1}{R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{C} = \frac{z'x'' - x'z''}{B} = \frac{y'z'' - z'y''}{A}. \tag{7}$$

Але для (1) можна формулу (6) перетворити так:
Незалежна змінна є s, тому

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

і

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

За допомогою (1), (1a) маємо:

$$x'x'' + y'y'' + \frac{1}{k^2}(xy' - yx')(xy'' - yx'') = 0$$

або

$$x''[k^2x' - y(xy' - yx')] + y''[k^2y' + x(xy' - yx')] = 0.$$

Визначмо

$$A = x^2 + y^2 + k^2, \quad B = xx' + yy' = \frac{1}{2}A';$$

тоді попередню рівність можна записати так:

$$\frac{x''}{Ay' - By} = \frac{y''}{-Ax' + Bx}$$

і

$$= \frac{\frac{xy'' - yx''}{k}}{-kB} = \frac{z''}{-kB}$$

або

$$= \pm \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}{\sqrt{A^2(x'^2 + y'^2) - 2AB^2 + B^2(A - k^2) + k^2B^2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{A[A(x'^2 + y'^2) - B^2]}};$$

але

$$A(x'^2 + y'^2) - B^2 = k^2(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx')^2 = k^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = k^2.$$

Отже

$$= \pm \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{k\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}$$

і

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{x''\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}{ky' + xz'} = \pm \frac{y''\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}{-(kx' + yz')} =$$

$$= \pm \frac{z''\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}{-(xx' + yy')}.$$

Легко виявити, що стична (оскуляційна) площина є одна для всіх кривих комплексу, що проходять через точку (x, y, z).

Справді, величини $x'y'' - x''y'$ і т. д. пропорціональні до косинусів кутів бінормалі з осями координат. Таким чином, точка (x, y, z) має в комплексі відповідну площину

$$y(X - x) - x(Y - y) + k(Z - z) = 0.$$

Напрямок дотичної (x', y', z') або $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ справджує рівнання

$$yx' - xy' + kz' = 0$$

або

$$y\alpha - x\beta + k\gamma = 0.$$

Відсіль

$$yl - xm + kn = 0$$

але λ, μ, ν справджують співвідношення

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0, \quad \lambda l + \mu m + \nu n = 0.$$

Тобто

$$\frac{\lambda}{y} = \frac{\mu}{-x} = \frac{\nu}{k} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + k^2}}.$$

Площина лінійного комплексу є площина стична (оскуляційна) і єдина для всіх його кривих, що проходять через точку (x, y, z).

§ 4. КРИВИНА АСИМПТОТИЧНИХ ЛІНІЙ МОНЖЕВОГО РІВНАННЯ

Напрямки головних дотичних системи інтеґральних кривих Монжевого рівнання

$$F(x, y, z;\quad x', y', z') = 0 \tag{1}$$

виділяємо додатковим рівнанням

$$F_1 \equiv F_x'\, x' + F_y'\, y' + F_z'\, z' = 0, \tag{2}$$

але

$$F_1 = \Delta F \left(\Delta = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Диференціюємо (1) ще раз відносно s:

$$\Delta F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x'} x'' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F_1}{\partial z'} z'' = 0 \tag{3}$$

або розгорнувши маємо:

$$F''_{xx}x'^2+F''_{yy}y'^2+F''_{zz}z'^2+2F''_{xy}x'y'+2F''_{xz}x'z'+$$
$$+2F''_{yz}y'z'+(F'_x+F''_{xx'}x'+F''_{yx'}y'+F''_{zx'}z')x''+$$
$$+(F'_y+F''_{xy'}x'+F''_{yy'}y'+F''_{zy'}z')y''+$$
$$+(F'_z+F''_{xz'}x'+F''_{yz'}y'+F''_{zz'}z')z''=0.$$

Крім того, диференціюємо (1) та

$$x'^2+y'^2+z'^2=1 \tag{4}$$

За допомогою (2) маємо:

$$F'_{x'}\cdot x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''=0 \tag{5}$$

$$x'x''+y'y''+z'z''=0. \tag{6}$$

Відсіль:

$$\frac{x''}{y'F'_{z'}-z'F'_{y'}}=\frac{y''}{z'F'_{x'}-x'F'_{z'}}=\frac{z''}{x'F'_{y'}-y'F'_{x'}}.$$

До цих трьох відношень можна приєднати четверте:

$$=\pm\frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}.$$

Отже

$$x''=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{y'F'_{z'}-z'F'_{y'}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}}}$$

$$y''=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{z'F'_{x'}-x'F'_{z'}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z}}}$$

$$z''=\pm\frac{1}{R}\cdot\frac{x'F'_{y'}-y'F'_{x'}}{\sqrt{F'^2_{x'}+F^2_{y'}+F'^2_{z'}}}.$$

Внесімо знайдені вирази для x'', y'', z'' в (3); маємо для R:

$$R=\pm\frac{1}{\Delta^2F\cdot\sqrt{F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z''}}}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \frac{\partial F}{\partial x'} & \frac{\partial F}{\partial y'} & \frac{\partial F}{\partial z'} \\ \frac{\partial(\Delta F)}{\partial x'}, & \frac{\partial(\Delta F)}{\partial y'}, & \frac{\partial(\Delta F)}{\partial z'} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

де

$$\Delta^2F=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^2F.$$

x', y', z' справджують рівнання (1), (2), та (4); $\dfrac{\partial(\Delta F)}{\partial x'}$, $\dfrac{\partial(\Delta F)}{\partial y'}$, $\dfrac{\partial(\Delta F)}{\partial z'}$ однорідні відносно x', y', z' і порядку $r+1$, тому чисельник порядку $2r+1$ і також однорідний.

Знаменник однорідний відносно x', y', z' і степеня $r+2+r-1=2r+1$.

Таким чином (7) залежить тільки від відношення поміж x', y', z' і можна користуватися лише з рівнань (1) та (2).

Формулі (7) можна надати наочнішої форми; вирахуємо для цього детермінант так, як вже вираховували D

$$D_1{}^2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \dfrac{\partial F}{\partial x'} & \dfrac{\partial F}{\partial y'} & \dfrac{\partial F}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x'} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum x'^2 & rF & (r+1)F_1 \\ rF & \sum\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 & \sum \dfrac{\partial F}{\partial x'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial x} \\ (r+1)F_1 & \sum \dfrac{\partial F}{\partial x'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \sum\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Елементи 1-го ряду та колони за (4), (1) та (2) дорівнюють 1, 0, 0, а тому:

$$D_1{}^2 = \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2 - \left(\sum\frac{\partial F}{\partial x'}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2$$

і дорівнює сумі квадратів мінорів матиці:

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x'} & \dfrac{\partial F}{\partial y'} & \dfrac{\partial F}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x'} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z'} \end{Vmatrix}.$$

Отже остаточна формула для R є

$$R = \pm\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial z'} - \dfrac{\partial F}{\partial z'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial y'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial x'} - \dfrac{\partial F}{\partial x'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial z'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial y'} - \dfrac{\partial F}{\partial y'}\cdot\dfrac{\partial F_1}{\partial x'}\right)^2}}{\Delta^2 F\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)^2}} \tag{8}$$

де

$$F_1 = \Delta F = \left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z}\right)F(x, y, z; x', y', z').$$

§ 5. КРИВИНА ЛІНІЙ ЛІНІЙЧАТОГО КОМПЛЕКСУ
(НЕ ЛІНІЙНОГО)

Лінійчатий комплекс тотожно задовольняє (2); тому кожну інтеґральну криву його можна вважати за асимптотичну (головну) лінію. Але формула (8) не згодиться. Тому треба дослідити це питання окремо. H. Liebmann в своїй статті Die Sätze von Lie u. Gambier über Kurven eines Linienkomplexes [1])

[1]) Sitzungsberichte Heidelberger Akad. d. Wissenschaften 1928. Abh. 9.

дав доказ формули Gambier, але виразу для радіюса першої кривини для нелінійного комплексу окремо не дав. Дотичний до даного лінійний комплекс

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0$$

має ту властивість, що його інтеґральні криві в кожній точці мають ті самі дотичну пряму та стичну (оскуляційну) площину, як і інтеґральні криві даного комплексу, а тому мають з ними стичність 2-го порядку і ту саму міру 1-ої кривини.

Таким чином можна записати Пфафове рівнання дотичного комплексу так

$$\frac{\partial F}{\partial p_{12}}(xdy - ydx) + \frac{\partial F}{\partial p_{13}}(xdz - zdx) + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}(ydz - zdy) -$$
$$- \frac{\partial F}{\partial p_{14}} dx - \frac{\partial F}{\partial p_{24}} dy - \frac{\partial F}{\partial p_{34}} dz = 0$$

або

$$0 = dx\left(\frac{\partial F}{\partial p_{21}} y + \frac{\partial F}{\partial p_{31}} z + \frac{\partial F}{\partial p_{41}}\right) + dy\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}} x + \frac{\partial F}{\partial p_{32}} z + \frac{\partial F}{\partial p_{42}}\right) +$$
$$+ dz\left(\frac{\partial F}{\partial p_{13}} x + \frac{\partial F}{\partial p_{23}} y + \frac{\partial F}{\partial p_{43}}\right).$$

Таким чином можна скористуватися з формули (7) § 3 для

$$a_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_{ik}}.$$

Тоді виявляємо, що коефіцієнт при dx є $\frac{\partial F}{\partial x'}$, при dy є $\frac{\partial F}{\partial y'}$, при dz є $\frac{\partial F}{\partial z'}$ і тоді

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{F_{x'}^{'2} + F_{y'}^{'2} + F_{z''}^{'2}}}{F'_{x'}}(y' z'' - z' y'') = \frac{\sqrt{F_{x'}^{'2} + F_{y'}^{'2} + F_{z'}^{'2}}}{F'_{y'}}(z' x'' - x' z'') =$$
$$= \frac{\sqrt{F_{x'}^{'2} + F_{y'}^{'2} + F_{z'}^{'2}}}{F'_{z'}}(x' y'' - y' x).$$

RÉSUMÉ

Es wird in Anlehnung auf vorangehende Untersuchungen des Verf. die Frage nach den Haupttangentenrichtungen u. Haupttangentenkurven und deren Krümmungsradien für Flächen (§ 1), Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung (§ 2), des linearen Komplexes, für wiechen — wie auch für nicht-linearen — jede Kurve, als Haupttangentenkurve zu betrachten ist (§ 3), für Integralkurven der Monge'schen Gleichung (§ 4), endlich für nicht-lineare Komplexe (§ 5) behandelt. Es wird auf die Resultate Gambier-Liebmann Bezug genommen. Vgl. folgende Abhandlung.