Д. М. СИНЦОВ

# Скрут асимптотичних ліній

Як і в попередній статті, розглядаємо питання про скрут асимптотичних ліній (ліній головних дотичних) 1° для поверхонь, 2° для Пфафового рівнання, 3° для лінійного комплексу, 4° для Монжевого рівнання та 5° для лінійчатого комплексу нелінійного.

## § 1. АСИМПТОТИЧНІ ЛІНІЇ ПОВЕРХНІ

Хай поверхню задано рівнанням

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

Рівнання стичної (оскуляційної) площини її асимптотичних ліній, тобто її дотичної площини, є

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0, \tag{2}$$

а самі асимптотичні лінії мають рівнання

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0. \tag{3}$$

Тому координати точки сферичного відображення їх бінормалі

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

звідціль його елемент дуги

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dp^2 + dq^2 + (p dq - q dp)^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

а міра скруту

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} \text{ (де } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Щоб обчислити міру скруту для асимптотичної лінії треба, підставити значіння $\frac{dy}{dx}$ з (3), або

$$\frac{r dx + s dy}{dy} = \frac{s dx + t dy}{-dx} = \lambda \tag{4}$$

і таким чином

$$d\sigma^2 = \frac{\lambda^2(dy^2 + dx^2 + dz^2)}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{\lambda^2 ds^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

а

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{\lambda}{1+p^2+q^2}. \tag{5}$$

Але розв'язування (4) дає

$$y' = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \therefore s + ty' = \pm \sqrt{s^2 - rt}.$$

Тому для кореня (3)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm\sqrt{s^2 - rt}}{1+p^2+q^2} \tag{6}$$

Коли візьмемо добуток мір кривини двох асимптотичних ліній, маємо:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

## § 2. СИСТЕМА ІНТЕҐРАЛЬНИХ КРИВИХ РІВНАННЯ

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{1}$$

Для асимптотичних кривих системи стична (оскуляційна) площина є

$$P(X-x) + Q(Y-y) + R(Z-z) = 0, \tag{2}$$

що відповідає точці $(x, y, z)$. Напрямкам асимптотичних ліній відповідають рівнання

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0. \tag{3}$$

Елементи дуги сферичного відображення $(V^2 = P^2 + Q^2 + R^2)$

$$d\sigma^2 = \frac{1}{V^4} \sum (VdP - PdV)^2 = \frac{1}{V^4} \left\{ \sum P^2 \sum dP^2 - \left(\sum PdP\right)^2 \right\}$$

і тому

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(PdQ - QdP)^2 + (QdR - RdQ)^2 + (RdP - PdR)^2}}{(P^2 + Q^2 + R^2)\, ds}. \tag{4}$$

Треба ще підставити замість $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ їх значіння з (1) та (3). Для цього розв'яжемо (1), (3) відносно $dx$, $dy$, $dz$:

$$\frac{dx}{QdR - RdQ} = \frac{dy}{RdP - PdR} = \frac{dz}{PdQ - QdP} = \frac{1}{S} \tag{5}$$

Тому

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{S}{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Рівнання (5) можна переписати

$$\begin{aligned} &QdR - RdQ - Sdx = 0 \\ &RdP - PdR - Sdy = 0 \\ &PdQ - QdP - Sdz = 0, \end{aligned}$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} &[QR_x' - RQ_x' - S]\,dx + [QR_y' - RQ_y']\,dy + [QR_z' - RQ_z']\,dz = 0 \\ &[RP_x' - PR_x']\,dx + [RP_y' - PR_y' - S]\,dy + [RP_z' - PR_z']\,dz = 0 \\ &[PQ_x' - QP_x']\,dx + [PQ_y' - QP_y']\,dy + [PQ_z' - QP_z' - S]\,dz = 0. \end{aligned}$$

Умова згідности цих рівнань є

$$O = \begin{vmatrix} QR_x' - RQ_x' - S, & QR_y' - RQ_y' & QR_z' - RQ_z' \\ RP_x' - PR_x' & RP_y' - PR_y' - S, & RP_z' - PR_z' \\ PQ_x' - QP_x' & PQ_y' - QP_y' & PQ_z' - QP_z' - S \end{vmatrix} = 0.$$

3-го степеня відносно $S$. Але вільний член

$$\begin{vmatrix} QR_x' - RQ_x', & QR_y' - RQ_y', & QR_z' - R_zQ_z' \\ RP_x' - PR_x', & RP_y' - PR_y', & RP_z' - PR_z' \\ PQ_x' - QP_x', & PQ_y' - QP_y', & PQ_z' - QP_z' \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} P_x' & P_y' & P_z' \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' \\ R_x' & R_y' & R_z' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} O & -R & Q \\ R & O & -P \\ -Q & P & O \end{vmatrix} = 0\,[1]).$$

Для $S$ залишається рівнання 2-го степеня, що його корені дають скрути для двох напрямків головних дотичних:

$$S^2 - GS - \Delta = 0.$$

Це те саме рівнання, що мали для подвійних елементів проєктивної взаємности (с. 125).

Таким чином:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 + 4\Delta}}{2(P^2 + Q^2 + R^2)}$$

[1]) Див. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения, § 4 Н. Зап. Н.-д. Мат. Кат. Укр., III, 1928, стор. 124.

і тому

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = - = \frac{\Delta'}{(P^2+Q^2+R^2)^2}.$$

*Добуток мір скруту для асимптотичних напрямів дорівнює Ґавсовій кривині системи.*

Також і

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{G}{(P^2+Q^2+R^2)^2}.$$

## § 3. ЛІНІЙНИЙ КОМПЛЕКС

Пфафове рівнання лінійного комплексу є окремий випадок рівнання (1) § 2, що можна характеризувати його властивістю мати кожну інтеґральну криву за асимптотичну. І можна обчислити скрут інтеґральної кривої за допомогою загальної формули скруту просторової кривої, що я й зробив у другому місці.

Але можна для рівнання форми:

$$ydx - xdy + kdz = 0 \tag{1}$$

показати, що координати точки сферичного відображення є

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+k^2}}, \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+k^2}}, \quad \zeta = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+k^2}} \tag{2}$$

і

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \sum\left[d\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+y^2}}\right)\right]^2 = \frac{k^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{(x^2+y^2+y^2)^2},$$

тому

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{x^2+y^2+k^2}. \tag{3}$$

*Значіння міри скруту залежить тільки від координат точки, але від його напряму не залежить.* Це є відомий результат S. Lie. Коли лінійний комплекс задано загальним рівнанням

$$\sum_{i,k}^{1\ldots4} a_{ik}\, p_{ik} = 0 \tag{4}$$

відповідне Пфафове рівнання є

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + a_{41})dx + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + a_{42})dy + \\ + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{44})dz = 0 \tag{5}$$

$$a_{ik} = -a_{ki}, \; a_{ii} = 0.$$

Напрямні косинуси бінормалі є $\lambda$, $\mu$, $\nu$:

$$\frac{\lambda}{a_{21}y+a_{31}z+a_{41}}=\frac{\mu}{a_{12}x+a_{32}z+a_{42}}=\frac{\nu}{a_{13}x+a_{23}y+a_{43}}=$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\sum(a_{21}y+a_{31}z+a_{41})^2}} \tag{6}$$

Далі

$$G=-2(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23})=-2(a,a)$$

$$\Delta=-\frac{1}{4}G^2=-(a,a)^2.$$

Тому рівняння для $S$:

$$S^2+2(a,a)S+(a,a)^2=0,$$

тобто

$$S=-(a,a)$$

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{-(a,a)}{(a_{21}y+a_{31}z+a_{41})^2+(a_{12}x+a_{32}z+a_{42})^2+(a_{13}x+a_{23}y+a_{43})^2}.$$

## § 4. МОНЖЕВЕ РІВНАННЯ

Хай система кривих задовольняє Монжеве рівняння

$$F(x,y,z;\;x',y',z')=0, \tag{1}$$

однорідне відносно $x'$, $y'$, $z'$. Головні напрямки визначаються умовою

$$F_x'x'+F_y'y'+F_z'z'=0 \tag{2}$$

Відповідні площини

$$F'_{x'}(X-x)+F'_{y'}(Y-y)+F'_{z'}(Z-z)=0, \tag{3}$$

дотичні до конусу конекса і стичні (оскуляційні) площини відповідної кривої конексу, а тому шуканий радіюс скруту визначається такою формулою:

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{F'_{x'}}{T}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{F'_{y'}}{T}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{F'_{z'}}{T}\right)}{ds}\right]^2}, \tag{4}$$

де

$$T^2=F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'}.$$

Отже

$$\frac{d\left(\frac{F'_{x'}}{T}\right)}{ds}=\frac{1}{T}\frac{dF_{x'}}{ds}-\frac{F'_{x'}}{T^2}\frac{dT}{ds}$$

і підкореневий вираз є

$$\frac{1}{T}\left[T^2\sum\left(\frac{dF'_{x'}}{ds}\right)^2-\left(F'_{x'}\frac{dF'_{x'}}{ds}+F'_{y'}\frac{dF'_{y'}}{ds}+F'_{z'}\frac{dF'_{z'}}{ds}\right)^2\right];$$

таким чином

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{\left(F'_{y'}\frac{dF'_{z'}}{ds}-F'_{z'}\frac{dF'_{y'}}{ds}\right)^2+\left(F'_{z'}\frac{dF'_{x'}}{ds}-F'_{x'}\frac{dF'_{z'}}{ds}\right)^2+\left(F'_{x'}\frac{dF'_{y'}}{ds}-F'_{y'}\frac{dF'_{x'}}{ds}\right)^2}}{(F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'_{z'})}.$$

Але під коренем маємо не тільки $x'$ $y'$ $z'$, але і $x''$, $y''$, $z''$. Тому розглядаємо ще далі. Похідні $x''$, $y''$, $z''$ зв'язані для асимптотичної лінії співвідношеннями:

$$x'x''+y'y''+z'z''=0 \tag{5}$$

$$F'_{x'}x''+F'_{y'}y''+F'_{z'}z''=0 \tag{6}$$

та похідна від (2) [інша форма (2)]:

$$x''\left(F'_x+\frac{\partial F'_x}{\partial x'}x'+\frac{\partial F'_y}{\partial x'}y'+\frac{\partial F'_z}{\partial x'}z'\right)+y''\left(F'_y+\frac{\partial F'_x}{\partial y'}x'+\frac{\partial F'_y}{\partial y'}y'+\frac{\partial F'_z}{\partial y'}z'\right)+$$

$$+z''\left(F'_z+\frac{\partial F'_x}{\partial z'}x'+\frac{\partial F'_y}{\partial z'}y'+\frac{\partial F'_z}{\partial z'}z'\right)=-\Delta^2 F,$$

де

$$\Delta F=\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

і

$$\Delta^2 F=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^2F.$$

Розв'язуємо ці рівнання відносно $x''$, $y''$, $z''$

$$\begin{aligned}D_1x''&=-\Delta^2F(y'F'_{z'}-z'F'_{y'})\\ D_1y''&=-\Delta^2F(z'F'_{x'}-x'F'_{z'})\\ D_1z''&=-\Delta^2F(x'F'_{y'}-y'F'_{x'}),\end{aligned} \tag{7}$$

де

$$D_1=\begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & F'_x+x'\frac{\partial F_x'}{\partial x'}+y'\frac{\partial F_y'}{\partial x'}+z'\frac{\partial F_z'}{\partial x'}\\ y' & F'_{y'} & F'_y+x'\frac{\partial F_x'}{\partial y'}+y'\frac{\partial F_y'}{\partial y'}+z'\frac{\partial F_z'}{\partial y'}\\ z' & F'_{z'} & F'_z+x'\frac{\partial F_x'}{\partial z'}+y'\frac{\partial F_y'}{\partial z'}+z'\frac{\partial F_z'}{\partial z'}\end{vmatrix}, \tag{8}$$

що вже обчислили іншим способом.

Отже

$$x'y'' - y'x'' = D_1\Delta^2 F\,[y'(y'F'_{z'} - z'F'_{y'}) - x'(z'F'_{x'} - x'F'_{z'})] = D_1\Delta^2 F\,.\,F'_{z'}$$

за

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad \sum x'F'_{x'} = rF = 0.$$

Також

$$z'x'' - x'z'' = D_1\Delta^2 F\,.\,F'_{y'}$$
$$y'z'' - z'y'' = D_1\Delta^2 F\,.\,F'_{z'}.$$

Диференціюємо ці вирази і маємо:

$$x'y''' - y'x''' = \frac{dD_1}{ds}\Delta^2 F\,.\,F'_{z'} + D_1\frac{dF'_{z'}}{ds}\Delta^2 F + D_1 F'_{z'}\frac{d\Delta^2 F}{ds} \text{ і т. д.}$$

Множимо на $x''$, $y''$, $z''$ і додаємо.

$$-(x'y''z''') = \frac{dD_1}{ds}\Delta^2 F\sum x''F'_{x'} + D_1\Delta^2 F\sum x''\frac{dF'_{x'}}{ds} + D_1\frac{d\Delta^2 F}{ds}\sum z''F'_{z'}.$$

Перша та третя суми дорівнюють 0 за (6), і тому

$$-(x'y''z''') = D_1\Delta^2 F\sum x''\frac{dF'_{x'}}{ds}.$$

Але

$$\sum x''\frac{dF'_{x'}}{ds} = -\frac{1}{D_1}\Delta^2 F\sum\left(x'F'_{y'} - y'F'_{x'}\right)\frac{dF'_{z'}}{ds}.$$

Таким чином

$$+\frac{1}{\rho} = D_1^2\,(F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'})\begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & \frac{dF'_{x'}}{ds} \\ y' & F'_{y'} & \frac{dF'_{y'}}{ds} \\ z' & F'_{z'} & \frac{dF'_{z'}}{ds} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

але похідні $x''$, $y''$, $z''$ ще є в 3 стовпці. Дійсно

$$\frac{dF'_{x'}}{ds} = \Delta F'_{x'} + F''_{x'x'}x'' + F''_{x'y'}y'' + F''_{x'z'}z'' = \Delta F'_{x'} - \frac{\Delta^2 F}{D_1}L$$

$$\frac{dF'_{y'}}{ds} = \Delta F'_{y'} + F''_{x'y'}x'' + F''_{y'y'}y'' + F''_{y'z'}z'' = \Delta F'_{y'} - \frac{\Delta^2 F}{D_1}M$$

$$\frac{dF'_{z'}}{ds} = \Delta F'_{z'} + F''_{x'z'}x'' + F''_{y'z'}y'' + F''_{z'z'}z'' = \Delta F'_{z'} - \frac{\Delta^2 F}{D_1}N,$$

де

$$L=\begin{vmatrix} F''_{x'x'} & x' & F'_{x'} \\ F''_{x'y'} & y' & F'_{y'} \\ F''_{x'z'} & z' & F'_{z'} \end{vmatrix}, \quad M=\begin{vmatrix} F''_{x'y'} & x' & F'_{x'} \\ F''_{y'y'} & y' & F'_{y'} \\ F''_{y'z'} & z' & F'_{z'} \end{vmatrix}, \quad N=\begin{vmatrix} F''_{x'z'} & x' & F'_{x'} \\ F''_{y'z'} & y' & F'_{y''} \\ F''_{z'z'} & z' & F'_{z'} \end{vmatrix}.$$

За допомогою цих виразів можна записати:

$$\frac{1}{\rho}=D_1{}^2+(F'^2_{x'}+F'^2_{y'}+F'^2_{z'})\begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & \Delta F'_{x'} \\ y' & F'_{y'} & \Delta F'_{y'} \\ z' & F'_{z'} & \Delta F'_{z'} \end{vmatrix} - D_1 \sum F'^2_{x'} \Delta^2 F \begin{vmatrix} x' & F'_{x'} & L \\ y' & F'_{y'} & M \\ z' & F'_{z'} & N \end{vmatrix}.$$

Коли мінори матиці

$$\left\|\begin{matrix} x' & y' & z' \\ F'_{x'} & F'_{y'} & F'_{z'} \end{matrix}\right\|$$

назвемо $a, b, c$, так що

$$ax'+by'+cz'=0,$$
$$F'_{x'}a+F'_{y'}b+F'_{z'}c=0,$$

перший детермінант дорівнює

$$a\Delta F'_{x'}+b\Delta F'_{y'}+c\Delta F'_{z'},$$

а другий

$$La+Mb+Nc,$$

де

$$L=F''_{x'x'}a+F''_{x'y'}b+F''_{x'z'}c$$
$$M=F''_{x'y'}a+F''_{y'y'}b+F''_{y'z'}c$$
$$N=F''_{x'z'}a+F''_{y'z'}b+F''_{z'z'}c;$$

можна позначити

$$F''_{x'x'}=A_{11}, \quad F''_{x'y}=A_{12}=A_{21} \quad \text{і т. д.}$$

і тому

$$La+Mb+Nc=A_{11}a^2+A_{22}b^2+A_{33}c^2+2A_{12}ab+2A_{13}ac+2A_{23}bc.$$

Величини $x'$, $y'$, $z'$ треба обчислити з рівнань

$$F(x,y,z;\ x',y',z')=0$$
$$F_{x}'x'+F_{y}'y'+F_{z}'z'=0$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

## § 5. ЛІНІЙЧАТИЙ КОМПЛЕКС НЕ ЛІНІЙНИЙ

S. Lie b Geometrie d. Berührungstransformationen, B. I., S. 308, дає Satz 27 про те, що *інтегральні криві лінійчатого комплексу, які мають спільну точку та спільну відповідну дотичну, мають і спільну стичну площину.* Але він доводить, крім того, що вони мають ще й *однаковий скрут.* Перше твердження цілком певне, бо за однорідністю Монжевого рівнання відносно $x'$, $y'$, $z'$ маємо:

$$F'_{x'}x' + F'_{y'}y' + F'_{z'}z' = 0 \tag{1}$$

та для лінійчатого комплексу, крім того:

$$F'_{x'}x'' + F'_{y'}y'' + F'_{z'}z'' = 0. \tag{2}$$

Тому косинуси напряму бінормалі $\lambda$, $\mu$, $\nu$ пропорціональні $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{z'}$, і не залежать від $x''$, $y''$, $z''$.

Але для доказу другої половини теореми S. Lie диференціює по незалежній змінній $s$ рівність (2), що не є тотожність. На це звернув увагу, як каже Gambier, перший Laîné (Nouv. Ann. (5) III, 1925[1]), Gambier[2]) вивів на підставі диференціяльно-геометричних міркувань цікаву формулу для скруту $\tau$ кривої комплексу

$$\tau = \theta \pm \rho r,$$

де $\theta$ є скрут в тій самій точці $P(x, y, z)$ лінійного комплексу, дотичного до даного вздовж твірної $PT$ конуса комплексу, $\rho$ — конічна кривина конусу комплексу точки $P$, $r$ — кривина кривої. Аналітичний доказ дав H. Liebmann[3]) в червні 1928 р. Його треба трохи обміркувати. Справа в тім, що Gambier та Liebmann говорять про дотичний комплекс як про цілком визначений. Але лінійчатий комплекс ранґу $r \geqslant 2$ має не єдиний дотичний комплекс, але безліч дотичних комплексів. Справді рівнання комплексу

$$F(p_{12} \dots p_{34}) = 0$$

можна писати ще так

$$F(p_{12}, p_{13}, \dots p_{34}) + (p, p)\varphi(p_{12} \dots p_{34}) = 0, \tag{3}$$

де

$$(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

і $\varphi = 0$ довільний комплекс $(r-2)$ ранґу. Тому за рівнання дотичного комплексу не можна взяти

$$\sum_{ik} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} q_{ik} = 0, \tag{4}$$

---

[1]) F. Engel в примітках до т. III Gesammelte Abhandlungen von S. Lie, S. 770, каже, що перший це зробив Demoulin (C. R. Paris 124, p. 1077—1079, 1897. Див. ще Zindler. Ueber Complexcurven ein Theorem von Lie. Jahresb. D. M. V. VIII. 1900. S. 199).

[2]) Courbure et torsion des courbes d'un complexe linéaire ou non linéaire. Bull. Sc.. Math. 1926.

[3]) Die Sätze von S. Lie u. Gambier über Kurven eines Liniencomplexes — Sitzungsber Heidelberger Akad. 1928. Abh 9.

як роблять Gambier та Liebmann, але

$$\sum_{i,k} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} q_{ik} + (p, q)\varphi(p_{12} \ldots p_{34}) = 0, \tag{5}$$

де $\varphi$ — довільна функція ранґу $r-2$. *А проте всі ці лінійні комплекси мають те саме Пфафове рівнання.*

Справді (5) можна детальніше так писати

$$\sum_{i,k} \left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \varphi \cdot p_{34}\right) q_{12} = 0 \tag{5'}$$

і в неоднорідних координатах

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= xy' - yx', & p_{13} &= xz' - zx', & p_{23} &= yz' - zy' \\ p_{14} &= -x', & p_{24} &= -y', & p_{34} &= -z' \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тому відповідне Пфафове рівнання є

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \varphi \cdot p_{34}\right)\left(y\,dx - x\,dy\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p'_{13}} + \varphi \cdot p_{42}\right)\left(z\,dx - x\,dz\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial p_{23}} + \varphi \cdot p_{14}\right)\left(z\,dy - y\,dz\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{14}} + \varphi \cdot p_{23}\right)dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial p_{24}} + \varphi \cdot p_{31}\right)dy + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \varphi \cdot p_{12}\right)dz = 0$$

або

$$dx\left(y\frac{\partial F}{\partial p_{12}} + z\frac{\partial F}{\partial p_{13}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}}\right) + dy\left(x\frac{\partial F}{\partial p_{21}} + z\frac{\partial F}{\partial p_{31}} + \frac{\partial F}{\partial p_{41}}\right) +$$
$$+ dz\left(\frac{\partial F}{\partial p_{31}} + y\frac{\partial F}{\partial p_{32}} + \frac{\partial F}{\partial p_{42}}\right) + \varphi\Big[(yp_{34} + zp_{42} + p_{23})\,dx +$$
$$+ (xp_{43} + zp_{14} + p_{31})\,dy + (xp_{24} + yp_{41} + p_{12})\,dz\Big] = 0.$$

Коли підставимо замість $p_{ik}$ їх значіння за (6), маємо тотожно 0, бо коефіцієнти диференціялів $dx$, $dy$, $dz$ є не що інше, як умови інцидентного положення точки та прямої. Тому Пфафове рівнання й усі висновки, що з нього зроблено, є вірні.

Для інтеґральних кривих комплексу (лінійчатого або нелінійного) з (1) та (2) маємо:

$$\frac{F'_{x'}}{\lambda} = \frac{F'_{y'}}{\mu} = \frac{F'_{z'}}{\nu} = \pm\sqrt{F'^2_{x'} + F'^2_{y'} + F'^2_{z'}}.$$

За допомогою позначень

$$x' = \alpha, \quad y' = \beta, \quad z' = \gamma, \quad x'' : y'' : z'' = l : m : n$$

замість (1) та (2) можна писати:

$$\alpha F_\alpha' + \beta F_\beta' + \gamma F_\gamma' = 0 \tag{7}$$

$$l F_\alpha' + m F_\beta' + n F_\gamma' = 0. \tag{8}$$

Liebmann диференціює (8)

$$-\sum\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \sum l \frac{d(F'_\alpha)}{ds} = 0,$$

але за допомогою (7)

$$-\frac{1}{\rho}\sum \lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \sum l \frac{dF_\alpha'}{ds} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\sum l \frac{\partial F_\alpha'}{ds}}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}}, \tag{9}$$

але

$$\frac{dF'_\alpha}{ds} = y\frac{dF'_{p_{13}}}{ds} + z\frac{dF'_{p_{23}}}{ds} + \frac{dF'_{p_{14}}}{ds} + \beta\frac{\partial F}{\partial p_{23}} + \gamma\frac{\partial F}{\partial p_{13}}.$$

Ті ж самі операції з Пфафовим рівнянням дотичного комплексу дають

$$-\frac{1}{\rho_0}\sum \lambda \left\{y\left(\frac{\partial F}{\partial p_{21}}\right) + z\left(\frac{\partial F}{\partial p_{31}}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{41}}\right)\right\} + \left[l\left(\frac{\partial F}{\partial p_{21}}\beta + \frac{\partial F}{\partial p_{31}}\gamma\right) + \right.$$

$$\left. + m\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}}\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_{32}}\beta\right) + n\left(\frac{\partial F}{\partial p_{13}}\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_{23}}\beta\right)\right] = 0.$$

Коефіцієнт при $-\frac{1}{\rho_0}$ є

$$\sum \lambda \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\sum F_\alpha'^2}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2}} = \sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}.$$

Отже

$$-\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \pm \frac{\sum l\left(y\frac{dF_{p_{12}}}{ds} + z\frac{dF_{p_{13}}}{ds} + \frac{dF_{p_{14}}}{ds}\right)}{\sqrt{F_\alpha'^2 + F_\beta'^2 + F_\gamma'^2}}. \tag{10}$$

Праву частну цього рівнання можна зв'язати з конічною кривиною конусу комплексу.

Хай маємо конус

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{11}$$

з вершком в точці $(x, y, z)$, тобто геометричне місце прямих

$$\frac{X-x}{\alpha} = \frac{Y-y}{\beta} = \frac{Z-z}{\gamma}.$$

Кут $v$ двох прямолінійних твірних $\alpha, \beta, \gamma$ та $\alpha + d\alpha,\ \beta + d\beta,\ \gamma + d\gamma$ визначається формулою

$$\cos v = \frac{\alpha(\alpha + d\alpha) + \beta(\beta + d\beta) + \gamma(\gamma + d\gamma)}{\sqrt{(\alpha + d\alpha)^2 + (\beta + d\beta)^2 + (\gamma + d\gamma)^2}},$$

звідкіль

$$\sin v = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \sum d\alpha^2}} = \frac{\sqrt{\sum d\alpha^2}}{\sqrt{1 + \sum d\alpha^2}} = \sqrt{\sum d\alpha^2} = \frac{1}{R} ds \cdot$$

Цей $\sin v$, або краще $v$ (як відкинули члени 2-го степеня, є елемент дуги сферичної індикатриси.

Дотичні площини до конусу (11) вздовж $(\alpha, \beta, \gamma)$ та $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$ є:

$$F_\alpha'(X-x) + F_\beta'(Y-y) + F'_\gamma(Z-z) = 0$$

$$F'_{\alpha + d\alpha}(X-x) + F'_{\beta + d\beta}(Y-y) + F'_{\gamma + d\gamma}(Z-z) = 0.$$

Відкіль для кута $w$ між цими площинами маємо:

$$\cos w = \frac{F_\alpha'\left(F_\alpha' + \sum \frac{\partial F_\alpha'}{\partial \alpha} d\alpha\right) + F_\beta'\left(F_\beta' + \sum \frac{\partial F_\beta'}{\partial \alpha} d\alpha\right) + F_\gamma'\left(F_\gamma' + \sum \frac{\partial F_\gamma'}{\partial \alpha} d\alpha\right)}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2} \times \sqrt{\sum F_{\alpha + d\alpha}'^2}} \therefore$$

$$\sin w = \frac{\sqrt{\left\| \begin{matrix} F_\alpha' & F_\beta' & F_\gamma' \\ dF_\alpha' & dF_\beta' & dF_\gamma' \end{matrix} \right\|^2}}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2}}.$$

Відношення

$$\frac{\sin w}{\sin v} = \frac{dw}{dv} = \frac{\sqrt{\sum (F_\beta' dF_\gamma' - F_\gamma' dF_\beta')^2}}{\sqrt{\sum d\alpha^2}\sqrt{\sum F_\alpha'^2}}$$

можна називати *конічною кривиною конусу*. Прикладемо цю формулу до конусу, що належить точці $(x, y, z)$ конексу

$$F(x, p) = 0$$

в його головній коінциденції

$$F(x, y, z;\ X-x,\ Y-y,\ Z-z) = 0.$$

Тоді треба покласти

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \gamma = z'$$

$$\varkappa = \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{\sum\left(F'_{y'}\frac{dF'_{z'}}{dv} - F'_{z'}\frac{dF'_{y'}}{dv}\right)^2}}{\sum F'^2_{x'}\sqrt{\sum\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2}}$$

або

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\sum F'^2_\alpha \cdot \sum\left(\frac{dF'_\alpha}{ds}\right)^2 - \left(\sum F'_\alpha \frac{dF'_\alpha}{ds}\right)^2}}{\left(\sum F'^2_\alpha\right)^{3/2}} \tag{12}$$

**Коли візьмемо на увагу, що за переміщенням вдовж сферичної індикатриси точка** $(x, y, z)$ **залишається нерухомою, тобто** $dx = dy = dz = 0$, **можна покласти, як то й зробив** H. Liebmann, **що**

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) = R\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) = k\left\{y\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{12}}\right) + z\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{13}}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p_{14}}\right)\right\}$$

$$dx = dy = dz = 0,$$

тобто

$$y\frac{dF'_{p_{12}}}{ds} + z\frac{dF'_{13}}{ds} + \frac{dF'_{p_{14}}}{ds} = \frac{1}{R}\frac{d}{dv}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{d\alpha}\right).$$

**Отже чисельник формули (10) за** $l = \gamma\beta - \mu\nu$ **дорівнює**

$$N = \begin{vmatrix} \frac{dF'_\alpha}{ds} & \frac{dF'_\beta}{ds} & \frac{dF'_\gamma}{ds} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

і тому

$$N^2 = \begin{vmatrix} \sum\left(\frac{dF'_\alpha}{ds}\right)^2 & \sum \alpha\frac{dF'_\alpha}{ds} & \sum \lambda\frac{dF'_\alpha}{ds} \\ \sum \alpha\frac{dF'_\alpha}{ds} & 1 & 0 \\ \sum \lambda\frac{dF'_\alpha}{ds} & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum\left(\frac{dF'_\alpha}{ds}\right)^2 - \left(\sum \lambda\frac{dF'_\alpha}{ds}\right)^2 - \left(\sum \alpha\frac{dF'_\alpha}{ds}\right)^2,$$

але

$$\sum \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \sum l \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

і тому

$$\sum \alpha \frac{dF_\alpha'}{ds} = 0 \qquad \lambda = \frac{F_\alpha'}{\sqrt{\sum F_\alpha'^2}} = RF'_\alpha .$$

Отже

$$N^2 = \left[\sum \left(\frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2 \cdot \sum F_\alpha' - \left(\sum F_\alpha' \frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2\right] R^2,$$

тобто

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{\sqrt{\sum \left(\frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2 \cdot \sum F_\alpha'^2 - \left(\sum F_\alpha' \frac{dF_\alpha'}{ds}\right)^2}}{\sum F_\alpha'^2}.$$

За допомогою (12) маємо:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \pm \frac{\varkappa}{R}.$$


## RÉSUMÉ

Wie in der vorangehenden Abhandlung, hat d. Verf. sich die Aufgabe gestellt die Torsion der haupttangenten Kurven zu betimmen und zwar 1° im Fall einer Fläche, 2° für das System der Integralkurven der Pfaff'schen Gleichung, 3° speciell für den linearen Linien-complex, 4° für das System der Integralkurven einer Mongischen Gleichung u. 5° für deren Ausnahmefall — den nichtlinearen Linien-complex. Für d. letzteren wird der Beweis von H. Liebmann der Formel von Gambier in etwas geänderter Form wiedergegeben. Die betreff. Resultate wurden an den Versammlungen des Seminars der wissensch. Katheder der Geometrie und der Charkower mathemat. Gesellschaft während des ak. Jahres 1927/28 mitgeteilt.