СОЛОВЙОВ П. О.

Про найкраще накладання двох замкнених кривих

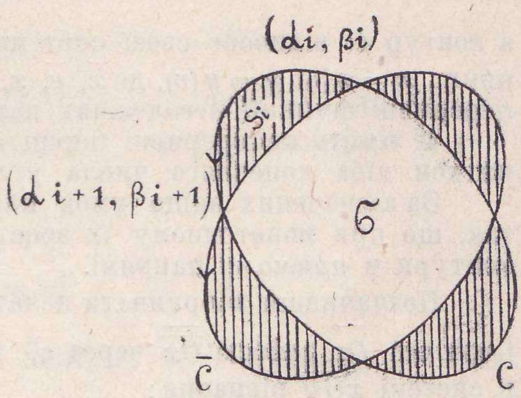
Хай C та $\bar{C}$ плоскі, неперервні замкнені криві, що відділяють одно-в'язні частини S та $\bar{S}$ площини. Можна вважати, що при різноманітних взаємних положеннях обох кривих в одній площині їх площі S та $\bar{S}$ завжди мають спільну частину $\sigma \geqslant 0$.

Позначмо через J суму абсолютних величин тих сеґментів s_i обох площ, що *не є спільні* для S та $\bar{S}$

$$J = \sum |s_i|;$$

маємо також, що

$$J = S + \bar{S} - 2\sigma. \qquad (1)$$



Можна довести, що J є неперервна функція параметрів, що визначають взаємне положення обох кривих, що J існує у всій площині і що також

$$0 \leqslant J \leqslant S + \bar{S}.$$

Отже неперервна, обмежена зліва функція J доходить принаймні один раз свого абсолютного minimum'у $m(J)$ і при тому в конечній часті площини. Назвімо таке взаємне положення двох кривих C та $\bar{C}$, за якого $J = m(J)$, *найкращим накладанням*, криві — *найкраще накладеними* і визначім доконечні умови такого найкращого накладання двох кривих за певних умов щодо цих кривих.

А саме припустімо, що за всякого взаємного положення обох замкнених кривих, принаймні за положень напевне не відмінних від найкращого накладання —

1) їх площі S та $\bar{S}$ мають *одновʼязну* спільну частину σ;

2) їх контури C та $\bar{C}$ мають *конечне* число спільних точок;

3) вони *не вміщаються* одна в другу, тобто не може бути такого взаємного положення обох кривих, за якого всяка точка площі однієї з них була б точкою площі другої.

Замітьмо, що коли б одну з кривих можна було б вмістити в другу, то саме за такого вміщення мали б абсолютний minimum $m(J)$.

Умови 1° та 2° напевне справджуються для безлічі таких двох опуклих кривих, що не містять конґруентних дуг.

1. За зазначених вище умов число точок перетину двох кривих C та $\overline{C}$ (не рахуючи можливих при тому точок дотику) є завжди число паристе $2k$. Число тих сеґментів s_i, що не є спільні для обох площ S та $\overline{S}$, буде також $2k$; в своєму розміщенні відносно кожної з кривих C та $\overline{C}$ зокрема ці сеґменти будуть послідовно то зовнішніми, то внутрішніми. Позначмо координати тих точок перетину обох кривих, що ними визначається сеґмент s_i, через

$$(\alpha_i,\ \beta_i),\quad (\alpha_{i+1},\ \beta_{i+1}),\quad i = 1,\ 2,\ 3 \ldots 2k,$$

за порядком їх розміщення на контурах при прямому їх обході[1]). Хай контур $\overline{C}$ визначається в параметричній формі відносно нерухомої системи Декартових координат x, y рівняннями

$$\bar{x} = \bar{x}(u),\quad \bar{y} = \bar{y}(u),$$

а контур C відносно своєї системи Декартових координат x, y — рівняннями: $x = x(v)$, $y = y(v)$, де $\bar{x}$, $\bar{y}$, x, y є однозначні конечні періодичні й неперервні функції незалежних параметрів u та v і

4° мають неперервні перші похідні вподовж всього контура за винятком хіба конечного числа углових його точок.

За зазначених вище умов параметри u та v завжди можна вибрати так, що при монотонному їх зростанні відповідні точки обігають обидва контури в *прямому* напрямі.

Позначивши координати початку O відносно осей $(\bar{x}\bar{O}\bar{y})$ через ξ та η і кут осі $\overrightarrow{Ox}$ з віссю $\overrightarrow{\bar{O}\bar{x}}$ через φ, маємо для координат точок контура C в системі $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ рівняння:

$$\begin{aligned} X &= \xi + x(v)\cos\varphi - y(v)\sin\varphi \\ Y &= \eta + x(v)\sin\varphi + y(v)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Зміною параметрів ξ, η, φ дістанемо всі можливі взаємні положення обох кривих C та $\overline{C}$.

Точки перетину $(\alpha_i \beta_i)$ контурів при даних ξ, η, φ визначаються реальними кореням системи рівнань:

$$\begin{aligned} \bar{x}(u) &= \xi + x(v)\cos\varphi - y(v)\sin\varphi = X(v, \xi, \varphi) \\ \bar{y}(u) &= \eta + x(v)\sin\varphi + y(v)\cos\varphi = Y(v, \eta, \varphi). \end{aligned} \tag{A}$$

Ця система дасть $2k$ пар значінь u, v в функції параметрів ξ, η, φ

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(\xi, \eta, \varphi) \\ v_i &= v_i(\xi, \eta, \varphi) \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \tag{3}$$

---

[1]) Тут і скрізь далі для всіх величин, що залежать від індексів точок перетину, вважаємо:

$$\alpha_{2k+1} = \alpha_1;\quad \beta_{2k+1} = \beta_1 \ldots \text{ і т. д.}$$

за умови, що

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, & \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v}, & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

Остання справджується для всіх систем значінь ξ, η, φ в достатньо малих інтервалах їх зміни:

$$|\xi - \xi_0| < \delta, \quad |\eta - \eta_0| < \delta, \quad |\varphi - \varphi| < \delta,$$

якщо контури C та $\bar{C}$ при даних ξ_0, η_0, φ_0 не мають ні точок дотику (які ми покищо виключаємо), ні спільних дуг (2°).

Упорядковуючи u_i, v_i при даних ξ, η, φ за їх зростанням

$$\left. u_i \leqslant u_{i+1}, \quad v_i \leqslant v_{i+1} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \ldots 2k,$$

що завжди можна зробити за тих умов (4°), що зазначено для параметрів, дістанемо послідовність координат (α_i, β_i) точок перетину контурів C та $\bar{C}$ при прямому їх обході

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{x}(u_i) = X[v_i(\xi, \eta, \varphi), \xi, \varphi] \\ \beta_i &= \bar{y}(u_i) = Y[v_i(\xi, \eta, \varphi), \eta, \varphi] \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \tag{4}$$

Визначмо $|s_i|$. Інтеґруванням по контуру s_i в прямому напрямі дістанемо:

$$|s_i| = \frac{1}{2} \left| \int\limits_{u_i}^{u_{i+1}} (\bar{x} d\bar{y} - \bar{y} d\bar{x}) - \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} (X dY - Y dX) \right|.$$

Зважаючи на те, що за умови 1° сеґменти s_i послідовно будуть то зовнішні, то внутрішні до $\bar{C}$ і що при обході контурів s_i в *прямому* напрямі окремі дуги контурів C та $\bar{C}$, що обмежують s_i, мусимо проходити *послідовно* то в *прямому*, то *в зворотному* напрямі, маємо:

$$|s_i| = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left[\int\limits_{u_i}^{u_{i+1}} (\bar{x} d\bar{y} - \bar{y} d\bar{x}) - \int\limits_{v_i}^{v_{i+1}} (X dY - Y dX) \right], \tag{5}$$

при чому з двох знаків $\pm$ перед виразом для $|s_i|$ треба брати, незалежно від покажчика i, знак $+$, якщо перший сеґмент s_i є внутрішній до $\bar{C}$, і знак $-$, якщо він є зовнішній.

Диференціюванням (5) по параметру ξ маємо:

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial \xi} = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left[-\int_{v_i}^{v_{i+1}} dY + \left(\bar{x}\bar{y}'_{u_{i+1}} - \bar{y}\bar{x}'_{u_{i+1}}\right) \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \xi} - \right.$$

$$\left. -\left(XY'_{v_{i+1}} - YX'_{v_{i+1}}\right) \frac{\partial v_{i+1}(be)}{\partial \xi} - \left(\bar{x}\bar{y}'_{u_i} - \bar{y}\bar{x}'_{u_i}\right) \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \left(XY'_{v_i} - YX'_{v_i}\right) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right] \quad (6)$$

Справді, зважаючи на формули (A), маємо:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} = 0,$$

бо $\bar{x}$, $\bar{y}$ не залежать від ξ явно, і також

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial dX}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial dY}{\partial \xi} = 0.$$

Щождо останніх 4-х члені в формули (6), то, після підстанови замість u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1} їх значінь в функції ξ, вираз можна спростити. Справді, після визначення $u_i = u_i(\xi, \eta, \varphi)$ та $v_i = v_i(\xi, \eta, \varphi)$ з рівнань (A) підстанова цих значінь u_i, v_i знов до тих рівнань перетворює їх на тотожності

$$\begin{aligned} \bar{x}\,[u_i(\xi, \eta, \varphi)] &\equiv X\,[v_i(\xi, \eta, \varphi), \xi, \varphi] = \alpha_i \\ \bar{y}\,[u_i(\xi, \eta, \varphi)] &\equiv Y\,[v_i(\xi, \eta, \varphi), \eta, \varphi] = \beta_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k. \qquad (B)$$

Отже, крім цих тотожностей, маємо також диференціюванням по ξ

$$\begin{aligned} \bar{x}'_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= X'_{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + 1 \\ \bar{y}'_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= Y'_{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \qquad \text{за (A) та (B)}$$

Тому для $\frac{\partial |s_i|}{\partial \xi}$ після перетворень дістанемо

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial \xi} = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left[-Y(v_{i+1}) + Y(v_i) - \bar{y}(v_{i+1}) + \bar{y}(v_i) \right] =$$

$$= \pm (-1)^i \; (\beta_{i+1} - \beta_i),$$

останнє за формулами (B).

Отже для $J = \sum_{i=1}^{2k} |s_i|$ маємо

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \pm 2 \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1} \beta_i \qquad (7)$$

Цілком аналогічними міркуваннями дістанемо також:

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = \pm 2 \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \alpha_i \tag{8}$$

Щоб скоротити обчислення $\frac{\partial J}{\partial \varphi}$ перейдімо до полярних координат. За умови найкраще накладених кривих візьмімо довільний центр повертання кривої C за спільний полюс і довільного напряму прямі, що стало зв'язані одна з кривою C, друга з $\overline{C}$ — за полярні осі.

Хай $\overline{\rho} = \overline{\rho}(u)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(u)$ є параметричні полярні рівнання нерухомої кривої $\overline{C}$ проти нерухомої ж системи координат, а $\rho = \rho(v)$, $\theta = \theta(v)$ є рівнання рухомої кривої C проти рухомої системи; функції хай характеризуються умовами, що зазначено вище в 4°.

Хай φ є кут поміж полярних осей; тоді рівнання кривої C проти нерухомої системи буде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(v) \\ \Phi &= \theta(v) + \varphi. \end{aligned} \tag{2'}$$

Координати точок перетину обох кривих визначаються реальними коренями системи:

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(u) &= \rho(v) \\ \overline{\theta}(u) &= \theta(v) + \varphi, \end{aligned} \tag{A'}$$

що дає $2k$ пар коренів u_i, v_i, $i = 1, 2, 3 \ldots 2k$, в функції параметра φ, а разом з тим і $2k$ пар значінь

$$\begin{aligned} \rho_i &= \overline{\rho}(u_i) = \rho(v_i) \\ \Phi_i &= \overline{\theta}(u_i) = \theta(v_i) + \varphi \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k \tag{4'}$$

— рівності, що після підстановки u_i, v_i в функції φ перетворюються на тотожності:

$$\begin{aligned} \overline{\rho}\,[u_i(\varphi)] &\equiv \rho\,[v_i(\varphi)] \\ \overline{\theta}[u_i(\varphi)] &\equiv \theta\,[v_i(\varphi)] + \varphi = \Phi \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots 2k. \tag{B'}$$

Зважаючи на послідовну змінність внутрішнього та зовнішнього положення сеґментів s_i проти кривої $\overline{C}$, аналогічно тому, як і раніш, для площі s_i маємо:

$$|s_i| = \pm \frac{(-1)^{i+1}}{2} \left(\int_{u_i}^{u_{i+1}} \overline{\rho}^2 d\overline{\theta} - \int_{v_i}^{v_{i+1}} \rho^2 d\Phi \right)$$

з аналогічною умовою щодо знаків $\pm$.

Диференціюванням $|s_i|$ по параметру φ маємо:

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial\varphi} = \pm\frac{(-1)^{i+1}}{2}\left[\left(\bar{\rho}^2_{i+1}\frac{d\bar{\theta}}{du_{i+1}}\cdot\frac{du_{i+1}}{d\varphi} - \rho^2_{i+1}\frac{\partial\Phi}{\partial v_{i+1}}\cdot\frac{dv_{i+1}}{d\varphi}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\bar{\rho}^2_i\frac{d\bar{\theta}}{du_i}\cdot\frac{du_i}{d\varphi} - \rho^2_i\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}\cdot\frac{dv_i}{\partial\varphi}\right)\right]$$

і, за тотожностей (B'), після перетворень аналогічних попередньому

$$\frac{\partial |s_i|}{\partial\varphi} = \pm\frac{(-1)^{i+1}}{2}[\rho^2_{i+1} - \rho^2_i].$$

Для $\dfrac{\partial J}{\partial\varphi}$ маємо:

$$\frac{\partial J}{\partial\varphi} = \pm\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{i+1}[\rho^2_{i+1} - \rho^2_i],$$

і остаточно

$$\frac{\partial J}{\partial\varphi} = \pm\sum_{i=i}^{2k}(-1)^i\rho^2_i. \tag{9}$$

Отже, *доконечні* умови extremum'у функції J є

$$\sum_{i=1}^{2k}(-1)^i\alpha_i = 0 \tag{7a}$$

$$\sum_{i=1}^{2k}(-1)^i\beta_i = 0 \tag{8a}$$

$$\sum_{i=1}^{2k}(-1)^i\rho^2{}_i = 0, \tag{9a}$$

рівнання, що разом з рівнаннями (4) та (4') дають взагалі *достатнє число умов* для визначення тих параметрів ξ, η, φ, за яких $J(\xi, \eta, \varphi)$ доходить extremum'у. Серед цих значінь параметрів ξ, η, φ є обов'язково й ті, в конечному або безконечному числі, за яких J доходить *абсолютного minimum'у*, і, значить, криві C та $\bar{C}$ буде *найкраще накладено*.

Вибрати серед них трійку значінь ξ, η, φ, що саме вдовольняють поставленій задачі, можна після спеціяльного дослідження відповідної квадратичної форми, складеної з других похідних функції $J(\xi, \eta, \varphi)$. Замітьмо, що формули (7), (8), (9) можна дістати, й досить легко, з цілком геометричних міркувань.

Ми обминули при доведенні дослідити випадки дотику кривих C та $\bar{C}$. Але за умови, що число таких точок є конечне і криві є аналітичні, ми дістали б ті ж саме результати, лише припускаючи для окремих пар

$$\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad \beta_j = \beta_{j+1}, \quad \text{і} \quad \rho_j = \rho_{j+1};$$

тому в рівнаннях (7*a*), (8*a*), (9*a*) ці члени взаємно б знищились.

Отже *умови найкращого накладання аналітичних кривих формулюється, не зважаючи на можливість трапитись при такому накладанні точкам дотику в конечному числі; в остаточне формулювання входять лише точки перетину.*

2. Формулюймо зазначені вище умови найкращого накладання кривих геометрично.

Будемо називати точки перетину кривих *точками паристими,* якщо номер їх *i — паристий,* і *точками непаристими,* якщо номер їх *непаристий.*

Запишімо рівнання (7а), (8а), (9а) так

$$\sum_{t=1}^{k} \alpha_{2t} = \sum_{t=1}^{k} \alpha_{2\,t-1} \tag{7b}$$

$$\sum_{t=1}^{k} \beta_{2t} = \sum_{t=1}^{k} \beta_{2\,t-1} \tag{8b}$$

$$\sum_{t=1}^{k} \rho_{2t}^2 = \sum_{t=1}^{k} \rho_{2\,t-1}^2 \tag{9b}$$

Позначмо далі:

$$\sum_{t=1}^{k} \alpha_{2t} = k\,.\,X_p\,; \quad \sum_{t=1}^{k} \alpha_{2\,t-1} = k\,.\,X_{im}\,; \quad \sum_{t=1}^{k} \beta_{2t} = kY_p\,; \quad \sum_{t=1}^{k} \beta_{2\,t-1} = kY_{im}\,;$$

$$k\sum_{t=1}^{k} \rho_{2t}^2 = M_p\,; \quad k\sum_{t=1}^{k} \rho_{2t+1}^2 = M_{im}.$$

Тоді X_p, Y_p можна вважати за координати центру *паристих* точок, а M_p за момент тих точок відносно вибраного початку; аналогічні значіння мають X_{im}, Y_{im} та M_{im} для *непаристих* точок, (— маси = 1).

В нових позначеннях рівності (7*b*), (8*b*), (9*b*) можна записати так:

$$X_p = X_{im} \tag{7c}$$

$$Y_p = Y_{im} \tag{8c}$$

$$M_p = M_{im}. \tag{9c}$$

Замітьмо також, що за рівностей (7*c*) та (8*c*) рівність (9*c*) є правильною не лише відносно вибраного початку, але відносно довільної точки площини.

Наведені формули виявляють, що для *найкращого накладання двох неперервних замкнених аналітичних кривих таких, що*

а) за всякого *взаємного положення їх площі мають одновʼязну спільну частину* [1]),

[1]) Можна уникнути вимоги одновʼязности спільної части σ площ S та $\bar{S}$ *за всякого* взаємного положення обох кривих, якщо додатковими міркуваннями можна встановити, що для тієї части площини, в якій може відбутися найкраще накладання, σ скрізь одновʼязна.

b) *можуть мати лише конечне число спільних точок і*

c) *не вміщаються одна в одну, треба, щоб*

1) центри паристих їх точок перетину і непаристих зливалися і

2) моменти паристих їх точок перетину і непаристих були проміж себе рівні.

Запишімо доконечні умови (7*a*) й (8*a*) найкращого накладання кривих ще й так:

$$\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t}-\alpha_{2t-1})=\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t-1}-\alpha_{2t}) \tag{7d}$$

$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t}-\beta_{2t-1})=\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t-1}-\beta_{2t}); \tag{8d}$$

$\alpha_{i+1}-\alpha_i$ та $\beta_{i+1}-\beta_i$ є проєкції на осі $\overline{x}$ та $\overline{y}$ тієї дуги c_i контура C (або дуги $\overline{c}_i$ контура $\overline{C}$), що належить сеґментові s_i. Називаймо c_i дугою *паристою*, якщо індекс її i є *паристий*, і *непаристою* в іншому випадку. Тоді умову 1 можна висловити ще й так:

1. Для найкращого накладання кривих зазначеного вище типу треба, щоб сума проєкцій їх дуг паристих дорівнювала сумі проєкцій їх дуг непаристих на кожну з двох взаємно-перпендикулярних (або довільних) осей.

Але проєкція замкненої кривої на довільну вісь дорівнює нулеві; тому

$$\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t}-\alpha_{2t-1})+\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t-1}-\alpha_{2t})=0.$$

$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t}-\beta_{2t-1})+\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t-1}-\beta_{2t})=0.$$

Порівнявши останні формули з попередніми, дістанемо:

$$\sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t}-\alpha_{2t-1})=0,\quad \sum_{t=1}^{k}(\alpha_{2t-1}-\alpha_{2t})=0,$$

$$\sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t}-\beta_{2t=1})=0,\quad \sum_{t=1}^{k}(\beta_{2t-1}-\beta_{2t})=0,$$

тобто за найкращого накладання обох кривих мусять дорівнювати нулеві зокрема як суми проєкцій на довільну вісь паристих дуг, так і суми проєкцій дуг непаристих, а це значить, що при *найкращому накладанні криві взаємно розбиваються на такі дуги — паристі й непаристі, що з дуг паристих зокрема і з дуг непаристих зокрема можна утворити замкнені контури лише паралельним їх перенесенням.*

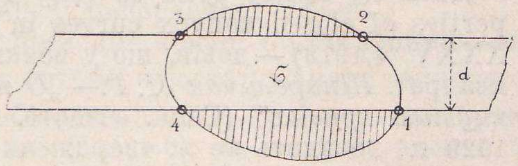
Застосуймо попередні умови до окремих випадків. Замітьмо, що для кривих того типу, що ми беремо на увагу, найкраще накладання *не може* *відбутися за наявности лише двох точок перетину*, хоча б при цьому криві ще мали довільне, але конечне число точок дотику; бо одна з тих точок перетину була б паристою, друга непаристою і, значить, доконечна умова перша не справджувалася б. Отже найменше число точок перетину кривих за їх найкращого накладання є *чотири*.

Якщо маємо такі дві криві зазначеного в умовах $1^\circ - 4^\circ$ типу, що за всякого взаємного положення вони перетинаються не більш як у чотирьох точках, то для найкращого їх накладання треба, щоб ці точки перетину містилися на вершинах прямокутника, і таке положення їх відбудеться принаймі один раз[1]).

Справді, чотири точки перетину утворюють 4-кутник; за найкращого накладання кривих центри паристих й непаристих точок мусять зливатися; отже діягоналі 4-кутника $2\rho_1$ та $2\rho_2$ перетинаються пополам і, значить, 4-кутник є *паралелограм*; але за другою умовою мусить бути $2\rho_1^2 = 2\rho_2^2 \therefore 2\rho_1 = 2\rho_2$; отже паралелограм має рівні діягоналі, тобто він є *прямокутник*. Остання частина попередньої теореми очевидна, бо положення найкращого накладання неодмінно існує.

З зазначеного виходить, що *у такі дві криві, як то вказано вище, можна завжди вписати принаймі одну пару конґруентних прямокутників*.

Розгляньмо ще частинніший випадок.



Хай $\overline{C}$ є неперервна, замкнена, *скрізь* опукла крива, тобто контур її не має прямолінійних часток. Тоді кожна пара паралельних прямих може перетинати $\overline{C}$ не більш як у 4-х точках. Хай віддалення цих паралельних є стала величина d. Найдімо доконечні умови такого положення цієї смуги ширини d, за якого вона вирізає з площі кривої найбільшу частину σ.

Хай $d < D$ — найменшого з *опорних* діяметрів $\overline{C}$ (відтинка, що сполучує точки дотику опорних прямих,— Stützgerade). Дві паралельні, якщо з'єднати їх довільними кривими (досить далеко за кривою $\overline{C}$), можуть правити за криву C. Тоді з формули (1)

$$2\sigma = (S + \overline{S}) - J$$

маємо

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\eta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial\varphi},$$

тобто для extremum'у σ будемо мати ті ж самі умови (7*a*), (8*a*), (9*a*), що й для функції J.

За першої умови найкращого накладання смуги ширини d і кривої $\overline{C}$ — накладання, що неодмінно відбувається, маємо, що точки перетину їх 1, 2, 3, 4 принаймні один раз міститимуться на вершинах паралелограма, і цього дійдемо лише паралельними пересуваннями смуги (в напрямі перпендикулярному до меж смуги; пересування смуги вздовж самої себе не впливає на

[1]) Можна стверджувати, що, коли цей прямокутник не є квадрат, а ні одна з даних кривих не є коло, існує завжди *парисre* число таких прямокутників, тобто принаймні *два*; при одному з цих прямокутників матимемо абсолютний minimum, при другому — відносний maximum.

величину σ). Отже, *у всяку скрізь опуклу замкнену криву можна вписати принаймі один паралелограм даної ширини d з боками паралельними даному напряму.*

Залишаючи одну пару боків паралелограма паралельною даному напряму ω, будемо змінювати ширину його d від нуля до того найбільшого його значіння, за якого межі смуги 23, 41 дотикатимуться $\overline{C}$. Легко пересвідчитись, що через те, що $\overline{C}$ є *скрізь опукла* крива, віддалення d_1 іншої пари боків паралелограма буде неперервною фунціею d, $d_1 = f(d)$ і притому такою, що, коли d *зростає* від $0 \ldots d$, $f(d)$ *монотонно спадає* від $d_1 \ldots 0$; тому завжди існує одне й лише одне значіння d, таке, що $d = f(d) \therefore d = d_1$, тобто *у всяку скрізь опуклу криву можна вписати один і лише один ромб так, що одна пара його боків буде певного даного напряму ω.*

Припустивши крім паралельного пересування смуги ширини d ще й її повертання, дістанемо, що за найкращого накладання точки 1, 2, 3, 4 міститимуться на вершинах прямокутника. *Отже, у всяку скрізь опуклу криву можна вписати прямокутник даної ширини d принаймні одним способом* [1]).

Можливість вписати прямокутник певного типу, зокрема квадрат, в замкнену криву була за тему декількох мемуарів. *A. Emch* — „Some properties of closed convex curves in a plane" (Amer. Journal of Math. Voll.). XXXV, 4,1913) — довів, що у всякий овал можна вписати принаймні один квадрат. *Шнирельман Л. Г.* — *„О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых"* (Секц. естеств. и точн. Наук Коммунист. Акад., Москва, 1929 г. доводить те ж твердження (а разом і інші) для довільної замкненої аналітичної кривої. *S. Kakeya* — *„On the inscribed rectangles of a closed convex curve"* (the Tôhoku Math. Journ., Vol. 9,1916) — довів, що у всяку опуклу замкнену криву можна вписати принаймні *два* прямокутники, подібних довільному даному, якщо останній не є квадрат, і принаймні *один* квадрат. Почасти тієї ж теми стосуються й дві замітки Miss Raku Makita в Tôh. Math. Journ. І попередні висновки, досить обмеженого характеру, наводилося лише для того, щоби підкреслити той зв'язок, що існує в окремих випадках поміж задачею про найкраще накладання кривих і можливістю вписати в них прямокутник певного типу. Цей зв'язок можна висловити так: *якщо дві замкнені криві є такі, що за всякого їх положення (напевне не відмінного від найкращого) вони перетинаються не більш як у чотирьох точках і не вміщаються одна в одну, то вершини однієї пари конґруентних прямокутників, що до них можна вписати, містяться в точках перетину цих кривих за умови їх найкращого накладання.*

Припустімо тепер, що число точок перетину двох кривих в положенні близькому до найкращого їх накладання є *шість*. Застосовуючи до цього випадку загальні умови найкращого накладання, дістанемо, що:

1. Центри $\triangle\triangle$-ків із непаристих точок перетину і паристих зливаються і що:

2. $a^2 + b^2 + c = a'^2 + b'^2 + c'^2$, де a, b, c, a', b', c' є боки двох зазначених $\triangle\triangle$-ків.

---

[1]) Навіть за певних умов не менш як двома способами, тобто у двох різних положеннях відносно кривої, див. примітку на стор. 169.

3. Введімо ще один параметр у формулювання попередньої задачі, а саме: шукаймо серед сімейства кривих:

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= x(s) - nx'(s) \\ \bar{y}(s) &= y(s) + ny'(s) \end{aligned} \qquad (C_n)$$

паралельних до C $[x(s), y(s)]$ ту, що з даною кривою $\bar{C}$ $[\bar{x}s), \bar{y}(s)]$ буде в найкращому накладанні, тобто дасть найменше значіння для $J(\xi, \eta, \varphi, n)$, тепер уже функції ще й параметра n.

Нагадаймо, що всі криві сімейства C_n мають спільну еволюту і що відтинки нормалей (Δ_n) проміж кожної пари кривих сімейства є величини сталі.

Залишаючи обмеження 1°, 2° та 4° попередньої задачі щодо характеру кривих, додаймо до них ще такі:

5° серед кривих сімейства C_n є принаймні хоч одна C_{n0} — для параметра дилатації $n = n_0$ — така, що *вміщається* в криву $\bar{C}$;

6° ця крива C_{n0} — опукла; тоді і всі криві C_n для $n_0 \leqslant n$ будуть також опуклі.

Замітьмо, що за умов 5° та 6° (які обумовлюють наявність у кривих сімейства C_n такої спільної еволюти, що напевне вміщається в криву $\bar{C}$) ми можемо зняти з кривих C_n обмеження 3° попередньої задачі.

Справді $J(n)$ не може бути найменшим для кривої C_n, що вміщається в $\bar{C}$, бо зміною n на $n + \Delta n$, де $\Delta n > 0$ при потребі є достатньо мала величина, ми лише зменшили б J. Так само для $C_{n'}$, що вміщає $\bar{C}$, J не може бути найменшим, бо лише зміною n' на $n' - \Delta n'$ $(\Delta n' > 0)$ ми завжди змогли б також зменшити J.

Отже найкраще накладання кривої $\bar{C}$ з однією з кривих C_n відбувається лише за умови, що C_n й $\bar{C}$ взаємно не вміщаються (і звичайно не зовні одна одної), тобто за умови взаємного перетину кривої C та $\bar{C}$.

В такому разі, за їх найкращого накладання, завжди існують дуги c_{ni} $(i = 1, 2, 3 \ldots 2к)$ кривої C_n, що будуть послідовно то внутрішні, то зовнішні до кривої $\bar{C}$ і що обмежують відповідно то внутрішні, то зовнішні сеґменти s_{ni}.

Найдімо приріст Δs_{ni} — площі сеґмента s_{ni} на кожній частинній дузі c_{ni} контура C_n при зростанні n на $n + \Delta n$. Як відомо, площа смуги, обмеженої двома паральними дугами c_{ni}, $c_{n+\Delta n, i}$ та спільними їх нормалями в кінцях c_{ni}, визначається формулою:

$$c_{ni} \,.\, \Delta n + \frac{1}{2}(\Delta n)^2 (\alpha_{i+1} - \alpha_i),$$

де c_{ni} — довжина відповідної дуги кривої, а $\alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}$ — кути, що утворюють дотичні до дуги c_{ni} в її кінцях, з додатнім напрямом осі x.

Взявши на увагу зміну точок перетину C_n з $\bar{C}$ при зростанні n на Δn, маємо:

$$\Delta s_{ni} = \pm(-1)^{i+1} \left\{ c_{ni}\,\Delta n + \frac{1}{2}(\Delta n)^2 (\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\Delta n \,.\, \Delta c_{ni} + \frac{1}{2}\Delta n \,.\, \Delta c_{n, i+1} \right\};$$

Δc_{ni}, $\Delta c_{n,\,i+1}$ — прирости дуги c_{ni} від i-тої та від $(i+1)$-ої точок перетину при зміні n, при чому для двох послідовних сеґментів s_{ni}, $s_{n,\,i+1}$ $\Delta c_{n,\,i+1}$ має завжди протилежні знаки. Роля передніх знаків $\pm$ така, як і при виразах для $\frac{\partial J}{\partial \xi}, \frac{\partial J}{\partial \eta} \cdots$ (7), (8), (9).

Отже

$$\Delta J(n) = \pm \Delta n \left\{ \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1}\, c_{ni} + \pi \Delta n + \sum_{i=1}^{2k} \Delta c_{ni} \right\}$$

і

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \pm \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1}\, c_{ni}, \tag{10}$$

бо за умови конечного числа $(2k)$ спільних точок у обох кривих

$$\sum_{i=1}^{2k} \Delta c_{ni} \underset{\Delta n \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Доконечна умова найкращого накладання кривої $\bar{C}$ з однією з кривих C_n визначається рівнянням

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{i+1}\, c_{ni} = 0; \tag{10a}$$

геометрично вона визначає, що

для найкращого накладання кривої $\bar{C}$ з однією з кривих сімейства паралельних C_n треба, щоб сума паристих дуг кривої C_n дорівнювала сумі її дуг непаристих, тобто щоб кожна така сума зокрема складала половину довжини контура C_n.

Припустімо, що крива C_{n0} є коло; тоді сімейство C_n є сімейство кіл; хай крива $\bar{C}$ є такою, що за всякого положення її проти кола довільного радіюсу (за винятком хіба положень, *напевне відмінних* від найкращого накладання) вона перетинається з кожним з них не більш як у *чотирьох* точках; тоді, *для того щоб коло було в найкращому накладанні з кривою $\bar{C}$, треба, щоби точки перетину кола з кривою містилися на вершинах квадрату.*

Справді, за умов (7a) та (8a) чотирикутник 1234 є паралелограм; він вписаний у коло, тому 1234 є прямокутник і значить

$$\breve{12} = \breve{34}, \quad \breve{23} = \breve{41};$$

але за умови (10a) мусить бути

$$\breve{12} + \breve{34} = \breve{23} + \breve{41} \;\therefore\; \breve{12} = \breve{34} = \breve{23} = \breve{41},$$

тобто прямокутник 1234 є квадрат.

На можливість такого результату для кола й для опуклої кривої зазначеного типу вказував мені також С. Н. Бернштейн.

Замітьмо, що зазначену теорему можна поширити й на такі криві $\bar{C}$, що при чотирьох точках перетину можуть мати з одним або з декількома колами певних радіюсів б зліч спільних точок в формі конґруентних дуг; але треба, щоб ні одне з тих кіл не зливалося з дугами кривої $\bar{C}$ так, щоби сума циx дуг перевищувала півобвід взятого кола.

Якщо крива $\bar{C}$ зверх зазначених вище рис має ту властивість, що до неї можна вписати *лише один квадрат*, то, очевидно, зазначена вище *доконечна* умова найкращого накладання кола з кривою *є разом* з тим і *достатньою*.

Задача, що ми тут її розв'язували, є лише одна з багатьох, зв'язаних з проблемою екстремального розположення двох геометричних образів. Але про них, а також про поширення цієї на простор — іншим разом.

SOLOWIOV, P.

SUR LA SUPERPOSITION MEILLEURE DE DEUX COURBES FERMÉES

Résumé

Parmi les différentes positions relatives de deux courbes planes fermées C et $\bar{C}$, situées dans le même plan, il en existe telle, pour laquelle la partie commune σ de l'aire de la première et de la seconde courbe atteint *le maximum*. Soit S et $\bar{S}$ les aires des courbes, C et $\bar{C}$ respectivement, s_i les segments de S ou de $\bar{S}$; alors si σ est le *maximum*, $J = \Sigma\,|s_i| = S + \bar{S} - 2\sigma$ est le *minimum*.

Cette position pour laquelle J atteint effectivement le minimum on peut appeler *la meilleure superposition* de ces courbes.

Dans cette note est posé le problème suivant: pour quelle position relative des courbes C et $\bar{C}$ la fonction $J\,(\xi, \eta, \varphi,)$ a la valeur minimume, ξ, η, φ étant les paramètres de position de la courbe C?

Au n°1 on démontre le théorème suivante: si les courbes $C\,[x(v), y(v)]$ et $\bar{C}\,[\bar{x}(u), \bar{y}(u)]$ sont telles que pour tous les déplacements dans le même plan relatifs: 1° la partie commune σ des S et $\bar{S}$ est toujours simplement connexe, 2° les contours C et $\bar{C}$ se coupent dans les points discrets en nombre fini ($2k$), 3° une de deux courbes n'est jamais la partie toute entière de l'autre, 4° les courbes C et $\bar{C}$ sont les courbes *ordinaires*, alors *les conditions nécessaires du minimum de J sont*

$$\sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \rho_i^2 = 0,$$

α_i, β_i étant les coordonnées des points d'intersection des courbes C et $\bar{C}$, ρ — leurs rayons-vecteurs correspondants au point quelconque du plan. Géometriquement: pour que C et $\bar{C}$ aient une superposition meilleure il faut 1° que *les centres des points d'intersections pairs* $(\alpha_{2t}, \beta_{2t})$ *des ces courbes et ceux d'intersections impairs* $(\alpha_{2t+1}\ \beta_{2t+1})$ *soient confondus,* 2° *le moment des points d'intersections pairs et le moment des ceux d'intersections impairs soient égaux.*

Particulièrement, si le nombre des points d'intersection de courbes C et $\overline{C}$ est égal à *quatre*, pour la superposion meilleure des ces courbes il faut que les points d'intersection sont des sommets d'un rectangle. On déduit de ce dernière théorème quelques conséquences sur la possibilité d'inscrire un rectangle dans la courbe convexe fermée.

Au n° 3 on étudit le problème un peu plus générale: quelles sont les conditions nécessaires pour que la courbe $\overline{C}$ ait la superposition meilleure avec une des courbes parallèles à la courbe C_{no}?

Pour cela il faut par dessus les conditions précedents, que la somme des arcs pairs (c_{2t}) et celle des arcs impairs (c_{2t+1}) soient égaux.

Particulièrement, soit la courbe convexe fermée ait coupé par chacune des cercles pas plus que dans les quatre points. Alors, pour la superposition meilleure cettene courbe avec un des cercles, il faut que les points d'intersection du cercle et de la courbe soient des sommets d'un carré.