С. М. УРИСМАН

Про пари кривих

Дві криві зватимемо парою, якщо між їх точками встановлено якунебудь відповідність. Хай x, y, z і $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ поточні координати відповідних точок такої пари кривих M і N; f, g, h напрямні косинуси прямої L, що проходить через відповідні точки,— тоді рівнання останньої можна написати

$$X=x+ft,\quad Y=y+gt,\quad Z=z+ht. \tag{1}$$

На L лежить відповідна точка $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, а тому

$$\bar{x}=x+f\sigma,\quad y=y+g\sigma,\quad \bar{z}=z+h\sigma, \tag{2}$$

де σ функція дуги s кривої M. Хай напрямні косинуси прямої L відносно дотичної, головної нормалі, бінормалі кривої M будуть a, b, c; косинуси ж останніх відносно осей координат відповідно α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν; в такому разі матимемо співвідношення

$$f\alpha+g\beta+h\gamma=a,\quad fl+gm+hn=b,\quad f\lambda+g\mu+h\nu=c \tag{3}$$

або

$$f=a\alpha+bl+c\lambda,\quad g=a\beta+bm+c\mu,\quad h=a\gamma+bn+c\nu. \tag{4}$$

Нехай далі $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$; $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$; $\bar{\lambda}, \mu, \bar{\nu}$ косинуси осей основного трієдра кривої N відносно осей координат,— A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 косинуси осей того же самого трієдра відносно трієдра кривої M, тоді можна написати співвідношення:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\alpha\bar{\alpha}=A, && \sum l\bar{\alpha}=B, && \sum\lambda\bar{\alpha}=C;\\
&\sum\alpha\bar{l}=A_1, && \sum l\bar{l}=B_1, && \sum\lambda\bar{l}=C_1;\\
&\sum\alpha\bar{\lambda}=A_2, && \sum l\bar{\lambda}=B_2, && \sum\lambda\bar{\lambda}=C_2;
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

з яких виводимо

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\alpha}=A\alpha+Bl+C\lambda, && \bar{l}=A_1\alpha+B_1l+C_1\lambda, && \bar{\lambda}=A_2\alpha+B_2l+C_2\lambda;\\
&\bar{\beta}=A\beta+Bm+C\mu, && \bar{m}=A_1\beta+B_1m+C_1\mu, && \bar{\mu}=A_2\beta+B_2m+C_2\mu;\\
&\bar{\gamma}=A\gamma+Bn+C\nu, && n=A_1\gamma+B_1n+C_1\nu, && \bar{\nu}=A_2\gamma+B_2n+C_2\nu
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

та

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha &= A\bar\alpha + A_1\bar l + A_2\bar\lambda, & l &= B\bar\alpha + B_1\bar l + B_2\bar\lambda, & \lambda &= C\bar\alpha + C_1\bar l + C_2\bar\lambda;\\
\beta &= A\bar\beta + A_1\bar m + A_2\bar\mu, & m &= B\bar\beta + B_1\bar m + B_2\bar\mu, & \mu &= C\bar\beta + C_1\bar m + C_2\bar\mu;\\
\gamma &= A\bar\gamma + A_1\bar n + A_2\bar\nu, & n &= B\bar\gamma + B_1\bar n + B_2\bar\nu, & \nu &= C\bar\gamma + C_1\bar n + C_2\bar\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

Диференціюючи тепер (2), визначмо $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\gamma$ і дугу $\bar s$ кривої N:

$$
\bar\alpha = \frac{ds}{d\bar s}(\alpha + f\sigma' + f'\sigma), \quad \bar\beta = \frac{ds}{d\bar s}(\beta + g\sigma' + g'\sigma), \quad \bar\gamma = \frac{ds}{d\bar s}(\gamma + h\sigma' + h'\sigma); \tag{8}
$$

$$
\left(\frac{d\bar s}{ds}\right)^2 = 1 + \sigma'^2 + \sigma^2\Sigma f'^2 + 2a\sigma' + 2\sigma\Sigma\alpha f'. \tag{9}
$$

За допомогою (4) співвідношення (8) і (9) перетворюються на

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\frac{ds}{d\bar s}[(1 + a'\sigma + a\sigma' - b\sigma k)\alpha + (b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau)l +\\
&\qquad + (c'\sigma + c\sigma' - b\sigma\tau)\lambda], \quad \bar\beta = \ldots
\end{aligned} \tag{8'}
$$

і

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar s}{ds}\right)^2 &= (1 + a'\sigma + a\sigma' - b\sigma k)^2 + (b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau)^2 +\\
&\quad + (c'\sigma + c\sigma' - b\sigma\tau)^2,
\end{aligned} \tag{9'}
$$

де k і τ перша та друга кривина кривої M

Порівнюючи (8') та (6), виводимо

$$
\left.\begin{aligned}
A &= \frac{ds}{d\bar s}(1 + a'\sigma + a\sigma' - b\sigma k),\\
B &= \frac{ds}{d\bar s}(b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau),\\
C &= \frac{ds}{d\bar s}(c'\sigma + c\sigma' - b\sigma\tau).
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

Диференціюючи ж перше співвідношення (6), дістанемо

$$
\bar l = \frac{ds}{d\bar s}\frac{1}{\bar k}[(A' - Bk)\alpha + (B' + Ak + C\tau)l + (C' - B\tau)\lambda] \tag{11}
$$

і визначмо A_1, B_1, C_1:

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{ds}{d\bar s}\frac{1}{\bar k}(A' - Bk),\\
B_1 &= \frac{ds}{d\bar s}\frac{1}{\bar k}(B' + Ak + C\tau),\\
C_1 &= \frac{ds}{d\bar s}\frac{1}{\bar k}(C' - B\tau).
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

Тепер A_2, B_2, C_2 можна визначити за допомогою відомих співвідношень

$$A_2 = BC_1 - B_1C, \quad B_2 = CA_1 - C_1A, \quad C_2 = AB_1 - A_1B. \tag{13}$$

Диференціюючи ж тепер два інші співвідношення (6) першого рядка, дістанемо

$$-\bar{\alpha}\bar{k} - \bar{\lambda}\bar{\tau} = \frac{ds}{d\bar{s}}\left[(A_1' - B_1k)\,\alpha + (B_1' + A_1k + C_1\tau)\,l + (C_1' - B_1\tau)\,\lambda\right], \tag{14}$$

$$\bar{l} = \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}\left[(A_2' - B_2k)\,\alpha + (B_2' + A_2k + C_2\tau)\,l + (C_2' - B_2\tau)\,\lambda\right], \tag{15}$$

що за допомогою тих самих співвідношень (6) дають:

$$\left.\begin{aligned} A\bar{k} + A_2\bar{\tau} &= -\frac{ds}{d\bar{s}}(A_1' - B_1k), \\ B\bar{k} + B_2\bar{\tau} &= -\frac{ds}{d\bar{s}}(B_1' + A_1k + C_1\tau), \\ C\bar{k} + C_2\bar{\tau} &= -\frac{ds}{d\bar{s}}(C_1' - B_1\tau); \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}(A_2' - B_2k), \\ B_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}(B_2' + A_2k + C_2\tau), \\ C_1 &= \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{\tau}}(C_2' - B_2\tau). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Припустімо тепер, що напрямні косинуси прямої L відносно осей трієдра кривої N є a_1, b_1, c_1, так що

$$\sum f\bar{\alpha} = a_1, \quad \sum f\bar{l} = b_1, \quad \sum f\bar{\lambda} = c_1,$$

тоді за допомогою (4) та (5) дістанемо

$$aA + bB + cC = a_1, \quad aA_1 + bB_1 + cC_1 = b_1, \quad aA_2 + bB_2 + cC_2 = c_1. \tag{18}$$

Перше співвідношення (18) за допомогою (10) перетворюється на

$$\frac{ds}{d\bar{s}}(a + \sigma') = a_1, \tag{19}$$

друге ж співвідношення (18) можна спочатку за допомогою (12) перетворити на

$$\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}\left[aA' + bB' + cC' + (bA - aB)\,k + (bC - cB)\,\tau\right] = b_1,$$

потім диференціюванням рівности

$$aA + bB + cC = a_1$$

показати за допомогою (10), що

$$aA' + bB' + cC' = a_1' - \frac{ds}{d\bar{s}}[a' + \sigma \Sigma a'^2 + (ab' - a'b)\sigma k + (b'c - c'b)\sigma\tau],$$

і знов таки за допомогою (10) знайти

$$\left.\begin{aligned} bA - aB &= \frac{ds}{d\bar{s}}[b - (ab' - a'b)\sigma - (a^2 + b^2)\sigma k - ac\sigma\tau], \\ cB - bC &= \frac{ds}{d\bar{s}}[(b'c - c'b)\sigma + ac\sigma k + (b^2 + c^2)\sigma\tau], \\ aC - cA &= \frac{ds}{d\bar{s}}[(ac' - a'c)\sigma + bc\sigma k - ab\sigma\tau - c] \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

і кінець-кінцем перетворити друге співвідношення (18) на

$$\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{\bar{k}}\left\{a_1' - \frac{ds}{d\bar{s}}[a' + \sigma\Sigma a'^2 + 2(ab' - a'b)\sigma k + 2(cb' - c'b)\sigma\tau - bk + \right.$$
$$\left. + (a^2 + b^2)\sigma k^2 + (b^2 + c^2)\sigma\tau^2 + 2ac\sigma k\tau]\right\} = b_1. \tag{21}$$

Щодо 3-го співвідношення (18), то його можна переписати так:

$$\begin{vmatrix} a & A & A_1 \\ b & B & B_1 \\ c & C & C_1 \end{vmatrix} = C_1,$$

що за допомогою (12) пертворюється на

$$\begin{vmatrix} a & A & A' \\ b & B & B' \\ c & C & C' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & A & -Bk \\ b & B & Ak + C\tau \\ c & C & -B\tau \end{vmatrix} = \frac{d\bar{s}}{ds}\bar{k}c_1.$$

Диференціювання ж (10) по s дає

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2}\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 A + \frac{ds}{d\bar{s}}[a''\sigma + 2a'\sigma' + a\sigma'' - (b\sigma k)'], \\ B' &= \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2}\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 B + \frac{ds}{d\bar{s}}[b''\sigma + 2b'\sigma' + b\sigma'' + (a\sigma k)' + (c\sigma\tau)'], \\ C' &= \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2}\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 C + \frac{ds}{d\bar{s}}[c''\sigma + 2c'\sigma' + c\sigma'' - b\sigma\tau'), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

а тому в першому детермінанті можна члени третього стовпчику замінити на другі члени правих частин (22), другий же детермінант дорівнює

$$c(A^2+B^2)k-a(B^2+C^2)\tau-C(aA+bB)k+A(bB+cC)\tau,$$

що за допомогою 1-го співвідношення (18) перетворюється на $(c-a_1C)k-(a-a_1A)\tau$, так що 3-ому співвідношенню (18) можна надати виду

$$\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{1}{k}\left[\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\Delta+(c-a_1C)k-(a-a_1A)\tau\right]=c_1, \tag{23}$$

при чому

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1+a'\sigma-b\sigma k & a''\sigma+2a'\sigma'-(b\sigma k)' \\ b & b'\sigma+a\sigma k+c\sigma\tau & b''\sigma+2b'\sigma'+(a\sigma k)'+(c\sigma\tau)' \\ c & c'\sigma-b\sigma\tau & c''\sigma+2c'\sigma'-(b\sigma\tau)' \end{vmatrix}.$$

До цих співвідношень приєднаймо ще рівності

$$\xi-x=-\frac{\Sigma f'\alpha}{\Sigma f'^2}f,\quad \eta-y=-\frac{\Sigma f'\alpha}{\Sigma f'^2}g,\quad \zeta-z=-\frac{\Sigma f'\alpha}{\Sigma f'^2}h, \tag{24}$$

що визначають стрикційну криву лінійчатої поверхні з твірною L, якщо вважати криву M за її (напрямну) провідну криву. Диференціюючи (4), дістанемо

$$\left.\begin{aligned} f'&=(a'-bk)\alpha+(b'+ak+c\tau)l+(c'-b\tau)\lambda,\\ g'&=(a'-bk)\beta+(b'+ak+c\tau)m+(c'-b\tau)\mu,\\ h'&=(a'-bk)\gamma+(b'+ak+ct)n+(c'-b\tau)\nu, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

за допомогою яких (24) перетворюється на (24')

$$\left.\begin{aligned} \xi-x&=-\frac{(a'-bk)(a\alpha+bl+c\lambda)}{(a'-bk)^2+(b'+ak+c\tau)^2+(c'-b\tau)^2},\\ \eta-y&=-\frac{(a'-bk)(a\beta+bm+c\mu)}{(a'-bk)^2+(b'+ak+c\tau)^2+(c'-b\tau)^2},\\ \zeta-z&=-\frac{(a'-bk)(a\gamma+bn+c\nu)}{(a'-bk)^2+(b'+ak+c\tau)^2+(c'-b\tau)^2}, \end{aligned}\right\}$$

КРИВІ З ПАРАЛЕЛЬНИМИ ГОЛОВНИМИ НОРМАЛЯМИ

Застосуймо попередні співвідношення до випадку, коли криві M і N мають у відповідних точках паралельні головні нормалі. За (6) та (7) матимемо тепер

$$A_1=C_1=B=B_2=0,\quad B_1=E=\pm1, \tag{26}$$

а за (12) $A'=C'=0$, тобто A та C є сталі.

Із (13) виводимо

$$A_2=-EC,\quad C_2=EA, \tag{27}$$

отже осі основного трієдра одної кривої утворюють сталі кути з осями основного трієдра другої кривої. Залежності (18) тепер перетворюються на

$$b_1 = Eb, \quad a_1 = aA + cC, \quad c_1 = E(cA - aC). \tag{28}$$

Друге ж співвідношення (10) та залежності (20) дозволяють визначити залежність поміж першою та другою кривиною кривої M, в яку не входять $\frac{d\bar{s}}{ds}$, σ, σ'. Дійсно на підставі (26) друга залежність (10) дає

$$b'\sigma + b\sigma' + a\sigma k + c\sigma\tau = 0, \tag{29}$$

а два перші співвідношення (20) дають

$$\frac{A}{C} = \frac{\sigma[(a^2 + b^2)k + ac\tau + (ab' - a'b)] - b}{\sigma[ack + (b^2 + c^2)\tau + (b'c - c'b)]} \tag{30}$$

або

$$\sigma = -\frac{bC}{Pk + Q\tau + R}, \tag{31}$$

де

$$P = acA - (a^2 + b^2)C, \quad Q = (b^2 + c^2)A - acC,$$
$$R = (b'c - c'b)A - (ab' - a'b)C.$$

Взявши тепер із (31) логаритмічну похідну від σ по s та підставивши значіння $\frac{\sigma'}{\sigma}$ в (29), дістанемо

$$ak + c\tau + b' = \frac{b(P'k + Q'\tau + R' + Pk' + Q\tau') - b'(Pk + Q\tau + R)}{Pk + Q\tau + R}. \tag{32}$$

В окремому випадку, коли a, b, c є сталі,

$$a' = b' = c' = R = R' = P' = Q' = 0$$

і (32) зводиться до простішої залежности

$$\frac{ak + c\tau}{b} = \frac{Pk' + Q\tau'}{Pk + Q\tau}, \tag{33}$$

яку дає Співак Jahresber. Math. Ver. 32 H. 9 — 12.

Щодо першої та другої кривини кривої N, то їх виводимо за (26) безпосередньо із середніх співвідношень (12) і (17).

Таким чином матимемо для N

$$\bar{k} = E\frac{ds}{d\bar{s}}(Ak + C\tau), \quad \bar{\tau} = \frac{ds}{d\bar{s}}(A\tau - Ck), \tag{34}$$

де за формулами (20) і (31) можна $\frac{d\bar{s}}{ds}$ виключити, якщо лише внести a, b, c

та їх перші похідні. (34) дає просту залежність між кривинами обох кривих

$$\frac{\bar{k}}{\bar{\tau}} = E\,\frac{A\frac{k}{\tau}+C}{-C\frac{k}{\tau}+A}, \tag{35}$$

подібну залежність

$$\frac{k}{\tau} = \frac{A\frac{\bar{k}}{\bar{\tau}}-EC}{C\frac{\bar{k}}{\bar{\tau}}+EA} \tag{35'}$$

можна дістати із (16) за формулами (26) та (27). Якщо a, b, c є сталі величини, то залежність (19) можна проінтеґрувати і дістати конечне співвідношення між дугами s, $\bar{s}$ обох кривих та віддаленням σ їх кінців:

$$a_1\bar{s} - as = \sigma - \sigma_0, \tag{36}$$

де σ_0 віддалення між початками дуг, якщо їх взято в двох якихнебудь відповідних точках.

Якщо $a = c = 0$, $b = 1$, тоді на підставі (28) також $a_1 = c_1 = 0$, $b_1 = E$ і пряма L стає спільною головною нормалею кривих M і N, тобто M і N стають Бертрановими кривими.

Співвідношення (9) або (19) тепер дає $\sigma' = 0$, тобто σ є стала.

Внутрішнє рівнання (natürliche Gleichung) Бертранових кривих можна дістати із (33) або із 1-го та 3-го співвідношення (10), а саме:

$$\frac{A}{C} = \frac{1-\sigma k}{-\sigma\tau},$$

або

$$Ck - A\tau = \frac{C}{\sigma}.$$

На підставі ж 3-го співвідношення (9) (34) дає $\bar{\tau}\tau = \frac{C^2}{\sigma^2}$, тобто $\bar{\tau}$ і τ одного знака.

ПАРАЛЕЛЬНІ КРИВІ

Дослідімо тепер випадок, коли криві M і N мають у відповідних точках паралельні дотичні, тобто M і N паралельні. (6) і (7) тепер дають

$$B = C = A_1 = A_2 = 0, \qquad A = E = \pm 1, \tag{37}$$

а на підставі (12) і (13) тепер маємо

$$C_1 = B_2 = 0. \tag{38}$$

Із $A_1 = C_1 = 0$ виходить $B_1^2 = 1$, а тому на підставі другої залежности (12) буде $B_1 = E$, а на підставі третьої залежности (13) $C_2 = 1$, тобто завжди бінормалі двох паралельних кривих направлені однаково.

Далі, другі залежності (12) та (17) дають

$$r : \bar{r} = ds : d\bar{s}, \qquad E(\rho : \bar{\rho}) = ds : d\bar{s} \tag{39}$$

та

$$r : \bar{r} = E(\rho : \bar{\rho}) \tag{39'}$$

де r, ρ радіюси 1-ої та другої кривини. Умови (18) тепер перетворюються на

$$a_1 = Ea, \quad b_1 = Eb, \quad c_1 = c, \tag{40}$$

а (19) тепер дає

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{Ea}{a + \sigma'}, \tag{41}$$

а тому із (10) на підставі (37) дістанемо

$$\frac{a(a' - bk)}{a^2 - 1} = \frac{b' + ak + c\tau}{b} = \frac{c' - b\tau}{c} = -\frac{\sigma'}{\sigma}. \tag{42}$$

Звідсіль виводимо, що лінійчата поверхня, яку утворює твірна L, є розвивна; дійсно детермінант

$$\begin{vmatrix} \alpha & f & f' \\ \beta & g & g' \\ \gamma & h & h' \end{vmatrix}$$

з-за (25) перетворюється на

$$\begin{vmatrix} \alpha & b\lambda + c\lambda & (b' + ak + c\tau)\, l + (c' - b\tau)\, \lambda \\ \beta & bm + c\mu & (b' + ak + c\tau)\, m + (c' - b\tau)\, \mu \\ \gamma & bn + c\nu & (b' + ak + c\tau)\, n + (c' - b\tau)\, \nu \end{vmatrix}$$

що дорівнює нулеві на підставі (42). Якщо в рівнанні (2) кривої N замінити σ на $p\sigma$, де p довільна стала, то крива N перетвориться на криву N_p, що лежатиме також на поверхні (L). Із виразів (10) для напрямних косинусів B та C видно, що коли $B = C = 0$, то також $B_p = C_p = 0$, а тому криві N_p також паралельні до кривої M, яку можна вважати за одну з кривих N_p, коли $p = 0$. Формула (41) та 1-ша (39) для кривих N_p матимуть вид

$$\frac{ds}{d\bar{s}_p} = \frac{E_p a}{a + p\sigma'} \quad \text{і} \quad r : \bar{r}_p = ds : d\bar{s}_p, \tag{43}$$

так що для цих кривих вірно буде

$$\bar{r}_p = E_p r\left(1 + \frac{\sigma' p}{a}\right), \tag{44}$$

а тому для визначання центрів кривини N_p матимемо

$$\xi = x + pf\sigma + rl + p\frac{\sigma'}{a}rl, \quad \eta = y + pg\sigma + rm + p\frac{\sigma'}{a}rm,$$

$$\zeta = z + ph\sigma + rn + p\frac{\sigma'}{a}rn.$$

Звідси робимо висновок, що центри кривини відповідних точок кривих N_p лежать на прямій

$$\frac{\xi - x - rl}{f\sigma + \frac{\sigma'}{a}rl} = \frac{\eta - y - rm}{g\sigma + \frac{\sigma'}{a}rm} = \frac{\zeta - z - rn}{h\sigma + \frac{\sigma'}{a}rn} = p, \tag{45}$$

що перетинає поворотний руб поверхні (L), тому що рівнання останнього, яке виводимо з $(24')$ на підставі (42), має вид:

$$\xi - x = -af\frac{\sigma}{\sigma'}, \quad \eta - y = -ag\frac{\sigma}{\sigma'}, \quad \zeta - z = -ah\frac{\sigma}{\sigma'}.$$

В окремому випадку, коли крива M плоска і $\tau = 0$, друге співвідношення (17) дає $\bar{\tau}_p = 0$, тобто всі криві N_p також плоскі.

Якщо також $a = 0$ і, значить, на підставі (40) також $a_1 = 0$, а на підставі (19) і (42) $\sigma' = b' = c' = 0$, тоді перше співвідношення (10) дає

$$\frac{ds}{d\bar{s}_p} = \frac{E_p}{1 - bp\sigma k} \tag{46}$$

і друга формула (43) перетворюється на

$$\bar{r}_p = E_p r(1 - bp\sigma k). \tag{47}$$

За таких умов рівнання поворотного руба $(24')$ перетворюються на

$$\xi - x = \frac{bl + c\lambda}{bk}, \quad \eta - y = \frac{bm + c\mu}{bk}, \quad \zeta - z = \frac{bn + c\nu}{bk},$$

рівнання кривих N_p матимуть вид:

$$\bar{x}_p - x = (bl + c\lambda)\sigma p, \quad \bar{y}_p - y = (bm + c\mu)\sigma p, \quad \bar{z}_p - z = (bn + c\nu)\sigma p,$$

такщо віддалення відповідних точок N_p і поворотного руба

$$d_p = \left| \frac{1 - bp\sigma k}{\sqrt{bk}} \right|,$$

а тому маємо

$$\bar{r}_p = |b|\, d_p. \tag{48}$$

Нехай тепер s_0, r_0, ρ_0 дуга, радіюси першої та другої кривини поворотного руба, α_0, β_0, γ_0; l_0, m_0, n_0; λ_0, μ_0, ν_0 напрямні косинуси осей його основного трієдра відносно осей координат; тоді

$$f = \alpha_0, \quad g = \beta_0, \quad h = \lambda_0.$$

Диференціювання останніх рівностей дає

$$-bk\alpha\frac{ds}{ds_0}=l_0k_0 \tag{49}$$

та дві інші такі ж рівності; відсіля маємо висновок

$$l_0=\pm\alpha,\ldots,\quad k_0=\frac{ds}{ds_0}|b|k, \tag{50}$$

так що

$$\lambda_0=\pm(cl-b\lambda)\quad \text{і}\quad \lambda_0'=\mp\frac{ds}{ds_0}c\alpha k,$$

тобто

$$l_0\tau_0=\mp\frac{ds}{ds_0}c\alpha k,$$

або на підставі (50)

$$\tau_0=-\frac{ds}{ds_0}ck.$$

Припустімо тепер, що віддалення d кривої M від поворотного руба дорівнює r_0, тоді на підставі (50) матимемо

$$\frac{ds}{ds_0}=\frac{r}{|b|d},$$

що з-за (48) дає

$$\frac{ds}{ds_0}=1,$$

а тому

$$\tau_0=-ck$$

і в випадку

$$c=\pm1,\quad \tau_0=\mp k.$$

Отже коли площина кривої, ортогональної до розвивної поверхні є перпендикулярна до якоїнебудь твірної, то на останній 1-ша кривина нашої кривої дорівнює абсолютному значінню 2-ої кривини поворотного руба на тій самій твірній.

RESUMÉ

Zwei Kurven M, N, die irgendwie sich einander punctweise zugeordnet sind, nennen wir allgemein nach Salkowski ein Curvenpaar. Seien x, y, z; $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die laufenden Koordinaten zweier entsprechenden Punktendes Kurvenpaares, σ ihr Abstand, f, g, h die Richtungskosinus der verbindender Gerade L, so ist die letztere durch die Gleichungen I., also die Kurve N durch 2 gegeben.

Bezeichnen a, b, c, die Kosinus der Winkel der Gerade L mit der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurve M, α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν; ds, k, τ

der Reihe nach die Richtungskosinus der letzteren, das Bogenelement, die Krümmung und Torsion der Kurve M, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$; . . . ; $\bar{k}$, $\bar{\tau}$ dieselben Grössen für die Kurve N; A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; der Reihe nach die Kosinus der Winkel der Tangente, Haupt- und Binormale der letzten Kurve mit denselben der Kurve M, so gelten die Gleichungen 3. 4. 5. 6. und 7. Die Ableitungen von 2. nach $\bar{S}$ liefern die Gleichungen (8′) und (9), die $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ und das Bogenelement $d\bar{s}$ bestimmen Die Vergleichung von (8′) mit (6) liefert die Gleichungen 10, durch welche A, B, C; — die Apleitungen von 6. nach S liefern 11. und 17. durch welche A_1, B_1, C_1 bestimmt werden. A_2, B_2, C_2 werden jetzt durch 13 bestimmt. Bedeuten jetzt a_1, $\bar{b}_1$, c_1 die Kosinus der Winkel der Geraden L mit der Tangente, Haupt- und Binormale der Kurve N, so gelten die Gleichungen 18. die, nach Umformung, nach 19. 21. und 23. führen. Aus diesen Gleichungen und 10. kann man allgemein $\frac{ds}{d\bar{s}}$ $\bar{k}$, σ, σ' eliminieren und zur natürlichen Gleichung der Kurve M kommen.

Man kann die Punktzuordnung der Kurven auf verschiedene Arten angeben und zu verschiedenen Kurvenpaaren gelangen.

So kann man annehmen, dass die Kurven M und N in entsprechenden Punkten 1) parallele Hauptnormalen, oder 2) parallele Tangenten besitzen oder 3) die verbindende Gerade L bildet mit den Kanten beider Dreikanten von Frenet konstante Winkel, die Gerade L sei die Schnittgerade, 4) der Schmiegungsebenen, 5) der Normalebenen, 6) rektifizierenden Ebenen entsprechender Punkten.

Im ersten Falle kann man zur natürlichen Gleichung 32. der Kurve M gelangen, oder zur Gleichung 33. wenn ausserdem a, b, c und also a_1, b_1, c_1 konstant sind, im zweiten Falle gelangt man zu ähnliher Gleihung 42.

Окремий відбиток з Записок Харківського Математичного Товариства та Українського Інституту Математичних Наук. Серія 4, т. III. Харків — 1929

Extrait des „Comm. Soc. Math. Kharkow", série 4, t. 3, 1929