С. БЕРНШТЕЙН

Про монотонні функції

1. З боку практичного найбільш важливою якісною властивістю функції дійсної змінної навколо завданої точки є характер її змін, що відповідає досить малій зміні незалежної змінної.

Відомо, що сучасна аналіза легко будує функції $\varphi(x)$, що вони не є ні ростучі, ні спадні в усякому інтервалі, який би малий він не був.

Але взагалі ми спостерігаємо не самі значіння функції — припустімо, для визначености, що вони є додатні — а пересічні цих значінь, що відповідають дуже великій кількості значінь навколо x. Отже, наприклад, якщо прийняти закон похибок Гавса з параметром точности σ, функція $f(x)$, що ми її спостерігаємо, замість $\varphi(x)$ матиме вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+\frac{xy}{2\sigma^2}}dy;$$

отже ця функція $f(x)$ є аналітична, визначена добутком експоненціяльної функції Гавса на функцію абсолютно конвексну, тобто таку, що всі її похідні парних порядів будуть додатні.

З другого боку, числені часто вживані функції, зокрема поліноми, що правлять за основу теорії функцій, мають ту властивість, що дійсну вісь можна розкласти на певні інтервали, в яких всі похідні є монотонні.

Ось головні міркування, що вказують на значіння систематичного вивчення тих функцій реальної змінної, послідовні конечні ріжниці яких до $h+1$ включно зберігають незмінним свій знак в даному інтервалі.

Легко показати, що така функція має непереривні похідні включно до $h-1$ порядку та праві та ліві похідні порядку h, при чому всі ці похідні монотонні. В моїй книжці „Sur les propriétés extrémales etc...“ я довожу, що при безконечному h така функція повинна бути аналітичною у відповідному інтервалі; функції такого роду я називаю реґулярно-монотонними Я нагадаю, що, як це встановлено в тій же книжці, коли функція має безліч монотонних похідних, що їх порядки збільшуються не швидше од членів деякої аритметичної проґресії,— то функція буде аналітичною та, крім того, при будь-якому зростанні порядків похідних,— функція належить до кляси quasi-аналітичних функцій P, що вони, як відомо, мають значні аналогії з аналітичними функціями.

2. Але зараз я не маю на меті зупинятись на цих, більш загальних функціях, і обмежуюся лише коротеньким оглядом найбільш істотних моментів теорії реґулярно-монотонних функцій.

Альґебрична база цієї теорії полягає в вивчанні екстремальних властивостей поліномів, кількість послідовних похідних яких зберігає певні знаки в заданому інтервалі. Аналітична частина теорії трактує проблеми збіжности, аналітичного визначення, природу особливостей тощо. Крім того, як на важливе застосування теорії я вкажу ще на задачі сумовання Тейлорових рядів з радіюсом нуль за умови, що функція є реґулярно-монотонна навколо заданої точки.

Реґулярно-монотонні функції, що мають багато загальних властивостей, істотно розрізняються типами, до яких вони належать.

3. З реґулярно-монотонних функцій важливіші в багатьох відношеннях є функції абсолютно-монотонні, що всі їх похідні одного знака; зміною x на $-x$ до цих функцій приводяться також функції з чергуванням знаків послідовних похідних.

Саме цей тип є єдиний, що для нього може зберігатись реґулярна монотонність аж до безконечности. Майже очевидно, що правий кінець b відтинку абсолютної монотонности ab функції $f(x)$ є особлива точка для $f(x)$, між тим як радіюс збіжности в точці a дорівнюється довжині всього відтинку ab. Отже, коли відтинок абсолютної монотонности доходить до $+\infty$, функція буде ціла; якщо ж, навпаки, лівий кінець цього відтинку доходить до $-\infty$, то $f(x)$ буде голоморфна в півплощині, що міститься зліва від перпендикуляра до дійсної осі в точці b. Не зупиняючись на деталях, — зацікавлені знайдуть їх в моєму мемуарі в Acta Mathematica, t. 52, — я зазначу, що тут відограють основну ролю експоненціяльні поліноми з додатніми покажчиками та коефіцієнтами, тому що всі задачі на екстремум, щодо функцій абсолютно-монотонних на від'ємній півосі, розв'язуються за допомогою таких поліномів.

Ось, наприклад, якщо задано будь-яку парну (для визначености) кількість $2h$ додатніх констант $f(0), f'(0), \dots f^{(2h-1)}(0)$, то доконечна й достатня умова існування функції, абсолютно-монотонної до $-\infty$, полягає в тому, щоб 1) детермінанти Вронського

$$A_{2k}(0) = \begin{vmatrix} f(0), & f'(0) \dots f^{(k)}(0) \\ \dots & \dots \\ f^{(k)}(0), & f^{(k+1)}(0) \dots f^{(2k)}(0) \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad A_{2k+1}(0) = \begin{vmatrix} f'(0) \dots f^{(k+1)}(0) \\ \dots \\ f^{(k+1)}(0) \dots f^{(2k+1)}(0) \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad (1)$$

були б не від'ємні для будь-якого $k < h$ та 2) коли $A_n = 0$, то було б також $A_{n'} = 0$ для всіх $n' > n$.

Саме за цих умов диференціяльне рівнання $A_{2h}(x) = 0$, загальний інтеґрал якого є експоненціяльний поліном, має за частинний розв'язок такий експоненціяльний поліном $\varphi_{2h}(x)$ з додатніми коефіцієнтами та покажчиками, який набирає заданих початкових значінь. Цей поліном $\varphi_{2h}(x)$ для $x \geqq 0$ є найменший серед всіх абсолютно-монотонних до $-\infty$ функцій, що відповідають тим саме початковим значінням. Крім того, якщо $A_{2h-1} = 0$, тобто, коли підстанова $f(0) - \varepsilon$ замість $f(0)$ порушує рівності (1) за будь-якого малого $\varepsilon > 0$, тоді $\varphi_{2h}(x)$ є єдина абсолютно-монотонна функція, що відповідає заданим початковим значінням. Ці властивості зберігаються, коли h необмежно зростає. І легко пересвідчитись, що які б не задати константи, аби вони вдовольняли безліч нерівностей (1), завжди існує абсолютно-монотонна функція з заданими похідними. Крім того, вибираючи такі $f(0)$, щоб $f(0)-\varepsilon$ вже не задовольняли б ці нерівності за довільно малого $\varepsilon > 0$, ця сукупність умов визначає єдину абсолютно-монотонну функцію, як би швидко не зростали послідовні похідні $f^{(n)}(0)$.

4. Якщо $f(0), f'(0)\ldots f^{(n)}(0)$ не вдовольняють зазначеним нерівностям, завжди можна, й притому безліччю способів, добрати такі числа $F_1^{(n)}(0)$ та $F_2^{(n)}(0)$, що вони, задовольняючи умови абсолютної монотонности до $-\infty$, задовольняють також і рівності $F_1^{(n)}(0)-F_2^{(n)}(0)=f^{n}(0)$ (для $n=1,2\ldots$).

Таким чином, оскільки експоненціяльні поліноми, що ми їх розглядали вище, мають за границю інтеґрали Stieltjes'а

$$\int_0^\infty e^{zx}d\varphi(z),$$

де $\psi(z)$ є монотонна функція, то будь-який Тейльорів ряд з конечним або нулевим радіюсом можна визначити в формі такого інґеґрала, де $\psi(t)$ повинна бути функцією обмеженої варіяції. Щоб зробити задачу визначеною, можна дбати про мінімалізацію суми $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k F_1^{(k)}(0)$, де додатні константи a_k будуть, наприклад, більші за $\frac{1}{k^{2k}}$; якщо цей мінімум одночасно з $\sum a_k f^{(k)}(x)$ наближається до певної границі, коли $n\to\infty$, то таким способом дістанемо цілком певну функцію $F_1(x)-F_2(x)$, незалежну від констант a_k.

5. Не зупиняючись на зв'язку проблем, що ми їх розглядали, з проблемою моментів та іншими питаннями аналізи, я б хтів дещо зауважити про абсолютно-монотонні функції на деякому обмеженому відтинку. Підставляючи $\log(x_1+c)$ замісць x з (1), можна безпосередньо дістати умови доконечні та достатні для того, щоб задані для $x=0$ значіння похідних могли б правити за початкові значіння похідних від поліномів виду $\sum A_i(x+c)^{a_i}$, де $A_i \geqslant 0$, $a_i \geqslant 0$. Але для того, щоб функція була абсолютно-монотонна на відтинку $(-c, 0)$, треба й досить, щоб до того a_i були б ще й цілі.

В цьому виявляється аритметична природа задачі. Я не знайшов ще остаточної форми тих доконечнихт а достатніх за будь-якого n_i нерівностей, яким повинні вдовольняти послідовні похідні для того, щоб існували функції абсолютно-монотонні на відтинку $(-c, 0)$. В вищезазначеному мемуарі в Acta Mathematica я даю лише алгоритм, для якого треба тільки аритметичні операції, і який дозволяє в кожному окремому випадку поступово вирішити, чи припустимо введення подальшої похідної, а також визначити поліном, який розв'язує відповідну екстремальну задачу. Крім того, я даю також методу визначення найбільшого відтинку, що на ньому функція може бути абсолютно-монотонною. Цікаво зауважити, що тимчасом як при $c=\infty$ нові визначення коефіцієнтів та покажчиків зазначених вище експоненціяльних поліномів приводять нас до альґебричних рівнань все вищого та вищого степеня,— для c конечного треба розв'язати деяку систему лінійних рівнань, з яких можна було б скористатися для наближеного розв'язання алґебричних рівнань вищого степеня відповідних $c=\infty$.

В тому напрямі ідей я ще зазначу низку альґебричних проблем про екстремальні властивості многократно-монотонних поліномів порядку $h+1$, тобто з першими $h+1$ додатніми похідними. Цікаво, наприклад, побудувати поліном виду

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n$$

многократно-монотонний порядку $h+1$, що найбільш відхиляється від нуля. Розв'язавши цю задачу та дослідивши її (для випадку $h=0$ цю задачу дослідив ще Чебишов), я знайшов співвідношення між максимумом (M) полінома та мінімумом (N) його похідної. а саме я знайшов, що

$$\frac{N}{M}=o\left(\frac{n^2}{h}\right).$$

При розв'язанні цих питань виразно визначається роля Якобієвих полиномів, і мої учні Бржечка та Геронімус з успіхом застосували мої методи до розв'язання інших питань з цієї галузі.

7. В загальному випадку, функція реґулярно-монотонна на (a, b) характеризується безліччю типових чисел $\lambda_1, \lambda_2\ldots\lambda_n\ldots$, що мають властивість:

$$f^{(i-1)}(x)\,.\,f^{(i)}(x)\geqslant 0,\ \text{коли}\ i\leqslant\lambda_1,$$
$$f^{(i-1)}(x)\,.\,f^{(i)}(x)\leqslant 0,\ \text{коли}\ \lambda_1<i\leqslant\lambda_1+\lambda_2=\sigma_2$$

і т. д. Послідовність похідних зі спільним знаком зватимемо permanence, а послідовність з чергуванням знаків похідних зватимемо alternance. Отже походні permanance'у зростають на абсолютне значчіння зліва направо, тимчасом як абсолютні значіння похідних alternance'у спадають. Поклавши

$$P_{2k-1}=P_{2k}=\lambda_1+\lambda_3+\ldots+\lambda_{2k-1},$$
$$Q_{2k}=Q_{2k+1}=\lambda_2+\lambda_4+\ldots+\lambda_{2k},$$

так що

$$P_m+Q_m=\sigma_m=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m$$

за будь-якого m, легко довести, що

$$|f^{(\sigma_m)}(x)|<\frac{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!}{(x-a)^{P_m}(b-x)^{Q_m}}|f(x)|. \tag{2}$$

Ці нерівності стосуються тільки до похідних порядку σ_m, що вони стоять з початку permanence'у або alternance'у. Для похідних інших порядків є правильні аналогічні нерівності

$$|f^{(m)}(x)|<\frac{\lambda_1!\lambda_2\ldots\lambda_m!k!}{(y-a)^{P_m}(b-y)^{Q_m}(y-x)}|f(y)|, \tag{2 bis}$$

де $0<k<\lambda_{m+1}$, а y береться довільно з інтервалу (a, x) або (b, x) залежно від того, чи належить $f^{(m)}(x)$ до alternance'у, чи до permanence'у. Відсіль виходить, що функція реґулярно-монотонна на відтинку (a, b) буде не тільки аналітичною на ньому, але й цілою, якщо тільки зростання чисел λ_m не буде дуже швидким, і, зокрема, досить щоб $\frac{\lambda_n}{\sigma_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

8. Розгляд нерівности (2) наводить на думку, що тип монотонности, який найдужче обмежує зростання послідовних похідних, відповідає випадку, коли всі $\lambda_i=1$. Тоді при періодичності знаків послідовних похід-

них такий саме, як у $\sin x$ на відтинку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — решта нерівностей (2 bis) вже буде зайва. Далі ми ще повернемось до точнішого дослідження цієї кляси функцій (я називаю їх циклічно - монотонними); ця кляса функцій, що є до певної міри антиподом до кляси абсолютно - монотонних функцій,— містить в собі тільки цілі функції роду не вище першого; в цій клясі розв'язок найважливіших екстремальних задач здійснюють тригонометричні функції. Але раніш я хочу вказати на деякі загальні результати щодо розташування особливостей будь - якої реґулярно - монотонної функції. Перш за все функція реґулярно - монотонна на (ab), до якого б типу вона не належала, буде голоморфна внутрі кола, для якого (ab) править за діяметр.

Це твердження постає у наслідок більш загальної теореми, в формулювання якої входить одне ґрунтовне поняття з загальної теорії Тейльорових рядів, що його я повинен поперва нагадати.

За клясичною теоремою Hadamard'а радіюс збіжности $R(x)$ в точці x для функції $f(x)$ визначається формулою

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Кажуть, що похідні утворюють характеристичну послідовність, коли

$$\lim \sqrt[P_n]{\left|\frac{f^{P_n}(x)}{P_n\,!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Після цього, використовуючи, з одного боку, формулу [1]) з теорії найкращих наближень, аналогічну до зазначеної вище формули Hadamard'а, а з другого боку, з нерівности [2]) щодо найкращих наближень функції зі сталим знаком її похідної $n+1$ - го порядку поліномами n - го степеня — легко дістаємо таку теорему:

Теорема. Якщо можна утворити в точці x характеристичний ряд з похідних таких, що вони всі належать до pertnanance'ів, то коло збіжности в цій точці проходить через одну дійсну особливу точку $z \geqslant b$ функції $f(x)$; якщо ж можна утворити характеристичну послідовність тільки з похідних, що належать до alternance'ів, то коло збіжности для точки x проходить через дійсну особливу точку $z_1 \leqslant a$.

Отже коли функція реґулярно - монотонна на деякому заданому відтинку не буде цілою, то вона має принаймні одну дійсну особливу

---

[1])
$$\sqrt[n+1]{E_n(f(x))} = \frac{b-a}{\varrho},$$

де ϱ є сума осей еліпса, що для нього кінці відтинку b та a правлять за фокуси, та який проходить найближче до особливої точки функції $f(x)$.

Дивись вищеназвану мою книжку, стор. 113.

[2])
$$\frac{2N}{(n+1)\,!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} < E_n\left(f(x)\right) < \frac{2M}{(n+1)\,!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

де

$0 < N < f(x) < M$, коли $a \leqslant x \leqslant b$ (Ibid., стор. 10).

точку. Тоді на відтинку ab завжди існує точка ξ така, що її коло збіжности C містить в своїй середині всі кола збіжности, відповідні всім точкам ab. Коли ξ є внутрішня точка,— функція неминуче має дві дійсних особливі точки. Крім того, реґулярну монотонність функції $f(x)$ очевидно не можна порушити приєднанням довільних особливостей поза максимальним колом збіжности (C). Отже, не можна нічого сказати про особливості реґулярно-монотонної функції поза цим колом. Я ще зауважу, що правий кінець b відтинку монотонности може бути особливою точкою лише тоді, коли permanence'и становляться остільки довгими, що

$$\lim \frac{\lambda_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} = 1\,; \tag{3}$$

так само й точка a може бути особливою лише тоді, коли

$$\lim \frac{\lambda_{2k}}{\sigma_{2k}} = 1. \tag{3 bis}$$

Отже, видно, що крім випадку абсолютної монотонности, що його ми розглянули вище, — типи реґулярної монотонности, припустимі навколо особливої точки, дуже обмежені; і коли для визначености візьмемо за особливу точку т-ку b, то для того, щоб проблема сумовання відповідного розбіжного Тейльорового ряду реґулярно-монотонними функціями могла мати розв'язок, треба, щоб знаки послідовних похідних вдовольняли закону (3).

Крім того, в цьому випадку майже абсолютної монотонности, сумовання, коли воно можливе, можна провести звичайним групуванням членів Тейльорового ряду в точці b, а саме таким, щоб кожна група починалась деяким членом alternance'у.

За цих умов, користуючись з залишка $R(x)$ в Lagrange'вій формі, видно, що, коли існує функція реґулярно-монотонна на ab, то після зазначеного групування

$$\left|R(x)\right| < \frac{(b-x)^n}{n!}\left|f^{(n)}(x)\right| < \frac{(b-x)^n}{n!}\left|f^{(n)}\!\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|; \tag{3}$$

отже цей залишок наближається до нуля для $\frac{a+b}{2} < x < b$, а ряд збігається в цьому інтервалі так само, як і всі його похідні. Ясно, що в цьому випадку не можна мати більш як одну реґулярно-монотонну функцію, яка б мала задані похідні в точці b; крім того, тут доцільно зауважити, що функція $f(x)$ буде quasi-аналітичною на всьому відтинку ab, включаючи кінці.

9. Раніш, ніж закінчити, я б хтів зупинитися ще на деяких типових екстремальних задачах, зв'язаних з нашою теорією.

Розглянемо спочатку дві такі альґебричні задачі протилежної природи, що мають за розв'язок поліноми, аналогічні Bernoulli'євим та Euler'овим поліномам, при чому за границі цих полиномів правлять тригонометричні функції.

1. Визначити поліном:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n \tag{4}$$

що найбільш відхиляється від нуля на відтинку (0, 1) коли він, а також і кожна з його похідних до ($n-1$)-го порядку включно, обертаються на нуль на відтинку (0, 1) принаймні один раз.

2. Визначити циклічно-монотонний на відтинку (0, 1) поліном виду (4), що він найменш відхиляється від нуля на цьому відтинку.

Легко переконатись в тотожності поліномів, що розв'язують ці обидві задачі; обидва полінома визначено тим, що їх послідовні похідні дорівнюють нулеві то на одному, то на другому кінці відтинку (0, 1). Отже розв'язок першої задачі здійснюється так само циклічно-монотонним поліномом.

І от поліноми, що ми їх шукаємо, будуть такі:

$$P_1 = x,\ P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

та взагалі

$$P_{2k}(x) + \int_1^x P_{2k-1}(x)\,dx,\ P_{2k+1}(x) = \int_1^x P_{2k}(x)\,dx;$$

відсіль легко виявити, що

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \ldots + \frac{E_{n-h}\,x^n}{(n-\lambda)!\,h!} + \ldots + \frac{E_n}{n!} = \frac{1}{n!}(x+E)^n,$$

де E_n є Euler'ові числа, що дорівнюються нулеві, коли n парне; тому $P_n(x)$ завжди є функція або парна, або непарна. Коли n парне, $n = 2k$, максимальний ухил, що його шукаємо, є

$$L_n - \left|\frac{E_{2k}}{2k!}\right| \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}.$$

Зазначу, що знайдені поліноми дуже просто зв'язані з Euler'овими поліномами, бо вони справджують рівняння

$$\frac{1}{2}\left[P_n(x+1) + P_n(x-1)\right] = \frac{x^n}{n!}$$

Отже з Euler'овиx поліномів $E_n(x)$ дістанемо наші за формулою

$$P_n(x) = \frac{2^n}{n!}\,E_n\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Якщо $n = 2k+1$, маємо

$$L_n = \frac{2}{(2k+1)!}(1+E)^{2k+1} = \frac{E_{2k}}{2k!} + \frac{E_{2k-2}}{3!(2k-2)!} + \ldots \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\Big[1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \ldots\Big] = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}$$

10. Поліноми $P_n(x)$ тепер дають змогу розв'язати аналогічну задачу не тільки для поліномів, але й для довільних циклічно-монотонних функцій.

А саме, можна довести такі теореми.

Якщо функція та всі її похідні принаймні один раз обертаються на нуль на відтинку (0, 1) а сама функція на відтинку (0, 1) досягає значіння, то її похідна заданого порядку m неминуче доходить $\left(\frac{\pi}{2}\right)^m$, на абсолютне значіння, і лише похідні функцій $\sin\frac{\pi x}{2}$ та $\cos\frac{\pi x}{2}$ не переходять цього значіння. Також, коли циклічно-монотонна функція не переходить на цьому відтинку одиниці, її похідні порядку, для визначености непарного, $m = 2k - 1$, не переходять $\frac{(m+1)!}{E_{m+1}}$, і цього значіння (що асимптотично дорівнює $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+2}$) дійсно доходять лише $f(x) = P_{m+1}(x)$. Отже тепер цілком чітко визначається, що з усіх типів реґулярної монотонности саме циклічна монотонність найдужче обмежує модулі послідовних похідних, при чому з останнього результату виходить, що функція циклічно-монотонна на відтинку (0, 1) мусить бути цілою і степеня не вище $\frac{e\pi}{2}$.

Крім того, легко довести, що довільну цілу функцію степеня p завжди можна визначити ріжницею двох циклічно-монотонних функцій на будь-якому відтинку, коротшому за $\frac{2p}{e\pi}$, але на відтинку довшому цього вже зробити не можна.

Закінчуючи, я додам, що поняття про тип в заданій точці, що ми його вище запровадили, відограє значну ролю й тоді, коли немає певного інтервалу реґулярної монотонности: множина нулів послідовних похідних має задану точку за граничну. Згущення нулів цієї множини, яка зростає разом з модулями послідовних похідних, залежить також від їх знаків; це згущення зменшується, коли збільшуються типові числа.

RÉSUMÉ

Le présent travail est la traduction de la conférence faite au Congrès nternational des Mathématiciens à Bologne au mois de septembre 1928 sous e titre „Sur les Fonctions monotones“.