# Sur la variation minimale du polynome $P_n(x)$ monotone dans l'intervalle $(-1,+1)$ dont les derivées $P_n'(1)=a^2=a$, $P_n''(1)=b$ sont donnés

(Resultat du travail collectif de la Section de mathématiques appliquées de l'Institut des sciences Mathématiques d'Ukraine, effectué par *M. M. S. Bernstein, W. Brecka, B. Rymarenko*)

Il est connu, que chaque polynôme monotone du degré impair $n = 2m+1$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ peut être présenté sous la forme

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]dx, \tag{1}$$

ou $U(x)$ est un polynôme de degré $m$, $V(x)$ un polynome de degré $m-1$, en supposant, sans restreindre la généralité, que $P_n(-1) = 0$, car tout polynome non négatif dans l'intervalle $(-1, +1)$ de degré pair $2m$ peut être mis sous la forme [1])

$$U^2(x) + (1-x^2)\,V^2(x).$$

Ainsi le problème consiste dans la recherche du minimum de

$$P_n(1) = \int_{-1}^{+1} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]dx, \tag{2}$$

que nous pouvons désigner par $L_n$ sous la condition, que

$$U^2(1) = a = a^2,\ 2U'(1).a - 2V^2(1) = b. \tag{3}$$

Nous introduisons une variable auxiliaire $U'(1) = d$, qui doit satisfaire seulement aux conditions, que

$$2d.a - b = 2V^2(1) \geqslant 0.$$

En cherchant le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} U'(x)\,dx$$

sous les conditions, que $U(1) = a$, $U'(1) = d$, nous trouvons que ce minimum est

$$I_n = \frac{8}{m^2(m+1)^2(m+2)^2}[a^2m^2(m+2)^2 - 6adm(m+2) + 12d^2]. \tag{4}$$

---

[1]) Pólya und Szegö.— Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. B. II. Seite 82, Aufg. № 47.

D'autre part le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)\, V^2(x)dx,$$

sous la condition $V^2(1) = ad - \frac{b}{2}$, a pour valeur

$$G_n = \frac{8\,(2ad-b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}. \tag{5}$$

Ainsi

$$L_n = min\, \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[a^2m\,(m+2) - 4ad + \frac{12d^2}{m\,(m+2)} - b\right], \tag{6}$$

si nous prenons pour $d$ seulement des valeurs, qui satisfont à la condition, que $2ad - b \geqslant 0$.

Mais

$$L_n = min\, \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[\frac{12}{m\,(m+2)}\left(d - \frac{am\,(m+2)}{6}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2a^2m\,(m+2)}{3} - b\right]. \tag{7}$$

Donc

$$L_n = \frac{16}{3\,(m+1)^2}\left[a^2 - \frac{3b}{2m\,(m+2)}\right], \tag{8}$$

si la valeur $d = \frac{am\,(m+2)}{6}$ est acceptable, c'est à dire, si

$$b \leqslant \frac{a^2m\,(m+2)}{3}.$$

Au contraire, si $b > \frac{a^2m\,(m+2)}{3}$, alors

$$L_n = \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}\left[a^2m\,(m+2) + \frac{3\frac{b^2}{a^2}}{m\,(m+2)} - 3b\right] \tag{9}$$

que nous recevons en prenant la plus petite valeur $d = \frac{b}{2a}$ qui conduit a

$$G_n = V(x) = 0.$$

Les formules indiquées ne sont pas valables seulement pour $a = 0$. Pourtant dans ce cas nous trouvons directement, que

$$L_n = \frac{8(b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \tag{10}$$

qui rentre comme cas particulier dans la formule (8).

En passant aux formules asymptotiques, nous voyons, que si $\frac{b}{a} = k = Am^\delta$, alors

$$L_n \sim \frac{16a}{3(m+1)^2}\left[1 - \frac{3k}{2m^2}\right] \tag{11}$$

si $\delta < 2$, ou $\delta = 2$ et $A \leqslant \frac{1}{3}$, ou si $A \leqslant 0$.

Au contraire si $\delta = 2$ et $A \geqslant \frac{1}{3}$, ou $\delta > 2$ et $A > 0$, alors

$$L_n \sim \frac{8a}{(m+1)^2}\left(1 - \frac{3k}{m^2} + \frac{3k^2}{m^4}\right). \tag{11bis}$$

## ПРО НАЙМЕНШУ ВАРІЯЦІЮ МОНОТОННОГО ПОЛІНОМА $P_n(x)$ В ІНТЕРВАЛІ $(-1, 1)$, ПОХІДНІ ЯКОГО ($P_n(1) = a = a^2$, $P_n''(1) = b$)

(Результат колективної праці С. Н. Бернштейна, В. Ф. Бржечки та Б. О. Римаренка на відділі прикладної математики Українського Інституту Математичних Наук)

Відомо, що всякий монотонний поліном непарного степеня $n = 2m+1$ в інтервалі $(-1, 1)$ можна написати так:

$$P_n(x) = \int_{-1}^{x} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]\,dx, \tag{1}$$

де $U(x)$ є поліном степеня $m$, а $V(x)$ — поліном степеня $m-1$, з додатком умови, яка не порушує загальности, що $P_n(-1) = 0$, бо кожний, не від'ємний в інтервалі $(-1, 1)$ поліном степеня $2m$ можна написати в формі[1]):

$$U^2(x) + (1-x^2)V^2(x).$$

Отже задача зводиться на те, щоб знайти найменше значіння

$$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} [U^2(x) + (1-x^2)V^2(x)]\,dx, \tag{2}$$

позначмо його через $L_n$, за умов, що

$$U^2(1) = a = a^2;\; 2U'(1)a - 2V^2(1) = b. \tag{3}$$

Уведімо допоміжний параметр $U'(1) = d$,— хай він лише вдовольняє умову

$$2ad - b = 2V^2(1) \geqslant 0$$

Обертаючи в мінімум интеґрал

$$\int_{-1}^{+1} U^2(x)\,dx$$

за умов, що $U(1) = a$, $U'(1) = d$, знайдемо, що цей мінімум

$$I_n = \frac{8}{m^2(m+1)^2(m+2)^2}\left[a^2m^2(m+2)^2 - 6adm(m+2) + 12d^2\right]. \tag{4}$$

---

1) Polya u. Szegö.— Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis. B. II. S. 82, Aufg. № 47.

З другого боку, мінімум інтеґрала

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)\, V^2(x)\, dx$$

за умови, що $V^2(1) = ad - \frac{b}{2}$ дорівнює

$$G_n = \frac{8\,(2ad - b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)}. \tag{5}$$

Отже

$$L_n = \min \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[ a^2 m\,(m+2) - 4ad + \frac{12d^2}{m(m+2)} - b \right], \tag{6}$$

якщо для $d$ брати лише ті значіння, що справджують умову $2ad - b \geqslant 0$. Але

$$L_n = \min \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[ \frac{12}{m\,(m+2)} \left( d - \frac{am\,(m+2)}{6} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2a^2\,m\,(m+2)}{3} - b \right] \tag{7}$$

А тому

$$L_n = \frac{16}{3\,(m+1)^2} \left[ a^2 - \frac{3b}{2m\,(m+2)} \right], \tag{8}$$

якщо значіння для $d = \frac{am\,(m+2)}{6}$ є можливе, тобто коли

$$b \leqslant \frac{a^2 m\,(m+2)}{3}.$$

Навпаки, якщо $b > \frac{a^2 m\,(m+2)}{3}$, то

$$L_n = \frac{8}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \left[ a^2 m\,(m+2) + \frac{3\frac{b^2}{a^2}}{m\,(m+2)} - 3b \right] \tag{9}$$

яке дістанемо, взявши найменше з припустимих значінь $d = \frac{b}{2a}$, що відповідає $G_n = V(x) = 0$.

Зазначені формули не годяться лише для $a = 0$, але в цьому разі безпосередньо знаходимо, що

$$L_n = \frac{-8\,(b)}{m\,(m+1)^2\,(m+2)} \tag{10}$$

Наведену формулу дістанемо як окремий випадок формули (8). Перейшовши до асимптотичних формул, пересвідчуємось, що коли $\frac{b}{a} = k = Am^{\delta}$, то

$$L_n \sim \frac{16a}{(m+1)^2} \left( 1 - \frac{3k}{2m^2} \right) \tag{11}$$

при $\delta < 2$ а також при $\delta = 2$, $A \leqslant \frac{1}{3}$, а також при $k < 0$;

коли ж $\delta = 2$ і $A \geqslant \frac{1}{3}$, а також, коли $\delta > 2$ і $A > 0$, то

$$L_n \sim \frac{8a}{(m+1)^2}\left[1 - \frac{3k}{m^2} + \frac{3k^2}{m^4}\right].$$