W. BRECKA et J. GUERONIMUS

Sur le polynome monotone qui s'écarte le moins de zéro sur le segment donné dans le cas où les valeurs de ses deux dérivées premières sont données aux extrémités opposées

Nous allons résoudre le problème suivant:

Déterminer l'oscillation minima dans l'intervalle $(-1, +1)$ *d'un polynome non décroissant*

$$y(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$$

de degré non supérieur à n, si $y'(-1) = a^2$, $y''(1) = b^2$.

§ 1

Soit

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, q(x)\, dx$$

où *toutes les racines de* $u(x)$ *se trouvent dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *et* $q(x)$ *n'a pas de racines dans cet intervalle*. On trouve facilement que

$$u'(-1) \neq 0, \quad u(1) > 0, \quad u'(1) > 0.$$

Nous voyons aussi que $q(x)$ *ne peut pas avoir la racine* $x = -1$, car alors on aurait $y'(-1) = 0$. Plus loin, si $q(x) = (1-x)\, s(x)$, alors

$$y''(x) = 2u(x)\, u'(x)\, (1-x)\, s(x) - u^2(x)\, s(x) + u^2(x)\, (1-x)\, s'(x)$$

et pour $x = 1$

$$y''(1) = -u^2(1)\, s(1) < 0$$

dons, $q(x)$ *ne peut non plus avoir la racine* $x = 1$.

Supposons que le degré de $q(x)$ *dépasse l'unité*. Alors on pourrait construire le polynome

$$\overline{y}(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, [q(x) - \lambda^2\, (1+x)\, (c-x)]\, dx$$

où

$$c - 1 = \frac{2u^2(1)}{4u(1)u'(1) + u^2(1)} > 0$$

et λ est choisi de telle manière que

$$q(x) - \lambda^2 (1+x)(c-x) \geqslant 0$$

pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Alors $\bar{y}(x)$ satisfait à toutes les conditions de notre problème et $\bar{y}(1) < < y(1)$. Par conséquent le degré de $q(x)$ ne dépasse pas l'unité et nous avons

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)dx \quad \text{pour} \quad n = 2m+1$$

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(z \pm x)\,dx \quad (z > 1) \quad \text{pour} \quad n = 2m+2.$$

§ 2

Soit $n = 2m+1$. Nous devons donc minimer l'intégrale $L = \int_{-1}^{1} u^2(x)dx$ sous les conditions que

$$u^2(-1) = a^2, \quad u(1)\,u'(1) = \frac{b^2}{2} \cdot$$

Posons

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

où $P_k(x)$ est le polynome de Legendre. Alors nous devons minimer

$$L = \sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1} \tag{1}$$

sous les conditions que

$$\left.\begin{aligned} u(-1) &= \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(-1) = a \\ u(1)\,u'(1) &= \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(1) \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k P_k'(1) = \frac{b^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les conditions d'extremum nous donnent

$$\frac{4a_k}{2k+1} = \lambda P_k(-1) + \mu\,[u'(1)\,P_k(1) + u(1)\,P_k'(1)] \tag{3}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2 \ldots m)$$

d'où

$$2L = \lambda a + \mu b^2 \tag{4}$$

Plus loin

$$4\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k = 4a = \lambda\sum_{k=0}^{m}(2k+1) + \mu\left[u'(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k + \right.$$

$$\left. + u(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k P_k'(1)\right]$$

$$4\sum_{k=0}^{m} a_k = 4u(1) = \lambda\sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k + \mu\left[u'(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1) + \right.$$

$$\left. + u(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k'(1)\right]$$

$$4\sum_{k=0}^{m} a_k P_k'(1) = 4u'(1) = \lambda\sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k P_k'(1) + \mu\left[u'(1)\sum_{k=0}^{m}(2k + \right.$$

$$\left. + 1)P_k'(1) + u(1)\sum_{k=0}^{m}(2k+1)[P_k'(1)]^2\right]$$

ou autrement

$$\left.\begin{aligned} 4a &= \lambda A + \mu[Eu'(1) + Fu(1)] \\ 4u(1) &= \lambda E + \mu[Au'(1) + Bu(1)] \\ 4u'(1) &= \lambda F + \mu[Bu'(1) + Cu(1)] \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

où l'on a posé

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1) = (m+1)^2 \\ B &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k(1)P_k'(1) = \frac{m(m+1)^2(m+2)}{4} \\ C &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)[P_k'(1)]^2 = \frac{m^2(m+1)^2(m+2)^2}{12} \\ F &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)P_k(1)P_k'(-1) = \frac{(-1)^m m(m+1)(m+2)}{2} \\ E &= \sum_{k=0}^{m}(2k+1)(-1)^k = (-1)^m(m+1). \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

[Le calcul de A et E ne présente aucune difficulté. Pour calculer B et C nous utilisons la formule

$$\sum_{k=0}^{m}(2k+1)\,P_k^{(i)}(\xi)\,P_k^{(j)}(\xi)=$$

$$=\frac{(m+j+1)(m+i+1)\,P_m^{(i)}(\xi)\,P_m^{(j)}(\xi)+(1-\xi^2)\,P_m^{(i+1)}(\xi)\,P_m^{(j+1)}(\xi)}{i+j+1}$$ [1]

Enfin pour déterminer F on prend la formule de Christoffel

$$\sum_{k=0}^{m}(2k+1)\,P_k(x)\,P_k(y)=(m+1)\,\frac{P_{m+1}(x)\,P_m(y)-P_m(x)\,P_{m+1}(y)}{x-y}$$ [2]

En la differentiant par rapport à x et en posant ensuite $x=1$, $y=-1$, nous obtenons le résultat voulu].

Nous avons

$$u(1)=\frac{[\mu\,(AF-BE)+4E]\lambda}{\mu^2\,(B^2-AC)-8B\mu+16} \tag{7}$$

$$u'(1)=\frac{[\mu\,(CE-BF)+4F]\lambda}{\mu^2(B^2-AC)-8B\mu+16} \tag{8}$$

En faisant le produit de (7) et (8) nous trouvons

$$\lambda^2=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{[\mu^2\,(B^2-AC)-8B\mu+16]^2}{[\mu\,(AF-BE)+4E]\,[\mu\,(CE-BF)+4F]} \tag{9}$$

En substituant $u(1)$ et $u'(1)$ dans la première équation (5) nous trouvons

$$\lambda=-\frac{4a\,[\mu^2\,(B^2-AC)-8B\mu+16]}{\mu^2\begin{vmatrix}A & E & F\\ E & A & B\\ F & B & \end{vmatrix}+8\,(AB-EF)\,\mu-16A} \tag{10}$$

De (9) et (10) nous obtenons l'équation pour μ:

$$8\,\frac{[\mu(AF-BE)+4E]\,[\mu(CE-BF)+4F]}{\left\{\mu^2\begin{vmatrix}A & E & F\\ E & A & B\\ F & B & C\end{vmatrix}+8\,(AB-EF)-16A\right\}^2}=\frac{b^2}{a^2} \tag{11}$$

---

[1] J. Gueronimus.— Sur l'écart minimal quadratique d'un polynome de zéro dans un intervalle donné.
Communications de la Société Mathématique de Kharkow. Série 4, tome II, p. 17.

[2] Journal für Mathematik.— Band 55. Seite 73.

Pour les grandes valeurs de m nous avons

$$A \sim m^2 \qquad B \sim \frac{1}{4} m^4 \qquad C \sim \frac{1}{12} m^6 \qquad E \sim (-1)^m m \qquad F \sim \frac{(-1)^m}{2} m^3$$

$$AF - BE \sim \frac{(-1)^m}{4} m^5 \qquad CE - BF \sim \frac{(-1)^{m+1}}{24} m^7 \qquad AB - FE \sim -\frac{m^6}{4}$$

$$\begin{vmatrix} A & E & F \\ E & A & B \\ F & B & C \end{vmatrix} \sim \frac{m^{10}}{48}$$

Alors l'équation (11) prend la forme

$$\frac{8\left(\frac{z}{4}+4\right)\left(2-\frac{z}{24}\right)}{\left(\frac{z^2}{48}+2z-16\right)^2} = \frac{b^2}{a^2} \tag{12}$$

où $z = \mu m^4$. De (10) nous trouvons $\lambda = \frac{4a}{m^2}$.
Donc

$$2L \sim \frac{4a^2}{m^2} + \frac{z_0 b^2}{m^4} \tag{13}$$

où z_0 est la plus petite racine positive de (12).

§ 3

Soit

$$\frac{b^2}{a^2} \sim cm^a \qquad \frac{8\left(\frac{z}{4}+4\right)\left(2-\frac{z}{24}\right)}{\left(\frac{z^2}{48}+2z-16\right)^2} \sim cm^a. \tag{14}$$

Alors, il faut distinguer trois cas.

$$\text{I. } a > 0. \quad z_0 = 16(\sqrt{12}-3) + \frac{k}{m^{a/2}}$$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\, ca^2}{m^{4-a}}.$$

Si $0 < a < 2$, alors le rapport du second membre au premier tend vers zéro. Par conséquent

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}$$

$$\text{Si} \quad a = 2 \quad L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\, ca^2}{m^2} \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12}-3)\, b^2}{m^4}.$$

Si $a > 2$, $4 - a < 2$, alors le rapport du deuxième membre au premier tend vers zéro et

$$L \sim \frac{8(\sqrt{12} - 3)\, ca^2}{m^{4-a}} \sim \frac{8(\sqrt{12} - 3)\, b^2}{m^4}.$$

II. $a = 0$. Alors de (14) nous trouvons z_0 (un nombre fini), et

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}$$

puisque le rapport du deuxième membre au premier tend vers zéro.

III. *Soit enfin* $a < 0$. Alors de (14) $z_0 = 48 - km^a$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{24ca^2}{m^{4-a}}.$$

Donc

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}.$$

Finalement pour $a < 2$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} \tag{15}$$

pour $a = 2$

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2} + \frac{8(\sqrt{12} - 3)\, b^2}{m^4} \tag{16}$$

pour $a > 2$

$$L \sim \frac{8(\sqrt{12} - 3)\, b^2}{m^4} \tag{17}$$

Comparons notre problème avec celui de M. S. Bernstein où la derivée première seule est donnée [1]) (pour x = — 1) et avec le problème de M. W. Brecka où la derivée seconde est donnée [2]) (pour $x = 1$). Le calcul montre que dans le problème de M. S. Bernstein

$$\frac{b^2}{a^2} \sim 1$$

donc $a = 0$ et $L \sim \frac{2a^2}{m^2}$ selon (15)

Dans le problème avec la derivée seconde le calcul montre que

$$\frac{b^2}{a^2} \sim C\, m^4$$

donc $a = 4$ et $L \sim \frac{8(\sqrt{12} - 3)\, b^2}{m^4}$ selon (17)

---

[1]) „Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle", professées à la Sorbonne par S. Bernstein., p. 47 — 50.

[2]) Comptes Rendus, t. 186, p. 1187.

§ 5

Supposons maintenant que

$$y'(-1)=0, \quad y''(+1)=b^2.$$

On prouve aisément que

$$y(x)=\int_{-1} u^2(x)\,dx \quad u(-1)=0, \text{ pour } \quad n=2m+1.$$

$$y(x)=\int_{-1}^{x} u^2(x)(1+x)\,dx \quad \text{pour} \quad n=2m+2.$$

Posons $n=2m+1$. Il faut minimer

$$L=\int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx$$

sous la condition que

$$u(-1)=0, \quad u(1)\,u'(1)=\frac{b^2}{2}.$$

Posons

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

où $P_k(x)$ est le polynome de Legendre.
Nous devons, donc, minimer

$$L=\sum_{k=0}^{m}\frac{2a_k{}^2}{2k+1}$$

sous les conditions que

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^k=0, \quad \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k P_k'(1)=\frac{b^2}{2}.$$

Nous trouvons facilement que

$$L=\frac{\mu b^2}{2}$$

et

$$\left.\begin{aligned} 0&=\lambda A+\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)] \\ 4u(\mathrm{i})&=\lambda E+\mu\,[Au'(1)+Bu(1)] \\ 4u'(1)&=\lambda F+\mu\,[Bu'(1)+Cu(1)] \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

où A, B, C, E, F ont les mêmes valeurs qne précédemment.
De (18) nous truuvons

$$\lambda=-\frac{\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)]}{A} \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned} 4Au(1)&=-\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)]\,E+A\mu\,[Au'(1)+Bu(1)] \\ 4Au'(1)&=-\mu\,[Eu'(1)+Fu(1)]\,F+A\mu\,[Bu'(1)+Cu(1)] \end{aligned} \tag{20}$$

De (20) nous trouvons

$$\mu = \frac{4A}{AB - EF + \sqrt{(A^2 - E^2)(AC - F^2)}}$$

et en substituant les valeurs de A, B, C, E, F, on trouve finalement l'oscillation cherché

$$L = \frac{24b^2}{m(m+2)\left[3(m^2+2m-1)+2\sqrt{3(m^2+2m-2)(m^2+2m)}\right]}.$$

Pour $n = 2m+2$ on trouve

$$L = \frac{24b^2}{(m+1)(m+2)\left[3(m^2+3m+1)+\sqrt{3(2m^2+6m+1)(2m^2+6m+3)}\right]}.$$

Pour les grandes valeurs de m on a

$$L \sim 8b^2 \frac{\sqrt{12}-3}{m^4}.$$

On peut obtenir cette formule de (16) en y posant $\alpha > 2$.

§ 6

Supposons maintenant que

$$y'(-1) = a^2, \quad y''(1) = 0.$$

Soit

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x) q(x)\, dx.$$

Il est clair que $u(1) = 0$ parce que $y''(1) = 0$.
Plus loin $q(-1) \neq 0$ parce que $y'(-1) = a^2 \neq 0$.
On démontre aisément que

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, dx, \quad u(1) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 2m+1$$

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)\, dx, \quad u(1) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 2m+2.$$

Supposons le contraire. Alors on peut construire le polynome

$$y_n(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)^a \left[q(x) - \lambda(1+x)\right] dx$$

où $\lambda > 0$ est choisi de telle manière que

$$q(x) - \lambda(1+x) > 0$$

pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Alors $\overline{y}_n(x)$ satisfait à toutes les conditions de notre problème, mais

$$\overline{y}_n(1) < y_n(1)$$

ce qui est impossible

Nous devons donc minimer l'intégrale (en posant $n = 2m + 1$)

$$L = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx$$

sous les conditions que

$$u(-1) = a \quad u(1) = 0.$$

Alors

$$L = \sum_{k=0}^{m} \frac{2a_k^2}{2k+1} \quad \left[u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x) \right].$$

Les conditions d'extremum nous donnent

$$\frac{4a_k}{2k+1} = \lambda P_k(-1) + \mu P_k(1)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots m)$$

d'où

$$L = \frac{\lambda a}{2} \tag{21}$$

Plus loin

$$\begin{aligned} 4a &= \lambda \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k^2(-1) + \mu \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k(1) P_k(-1). \\ 0 &= \lambda \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k(1) P_k(-1) + \mu \sum_{k=0}^{m} (2k+1) P_k^2(1). \end{aligned} \tag{22}$$

Si on trouve λ de (22) on obtient de (21)

$$L = \frac{2a^2}{m^2 + 2m}.$$

Pour $n = 2m + 2$ on trouve

$$L = \frac{2a^2}{m^2 + 3m}.$$

Pour les grandes valeurs de m on trouve la formule asymptotique

$$L \sim \frac{2a^2}{m^2}$$

On peut obtenir cette formule de (15) en posant $\alpha < 2$.

В цій статті ми розв'язуємо таку задачу:

Знайти найменше відхилення від нуля в інтервалі $(-1, +1)$ *монотонного поліному, що не спадає*

$$y(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$$

ступня не вищого за n, *якщо дано*

$$y'(-1) = a^2, \quad y''(+1) = b^2.$$

Ми показуємо, що $y(x)$ має вид

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\,dx, \qquad n = 2m + 1;$$

$$y(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\,(z \pm x)\,dx, \qquad n = 2m + 2$$

Припускаючи, що $\dfrac{b^2}{a^2} \sim cm^{\alpha}$, та $n = 2m + 1$, ми знаходимо:

$$\text{при } \alpha < 2 \quad \text{відхилення} \quad L \sim \frac{2a^2}{m^2} \tag{1}$$

$$\text{„ } \alpha = 2 \quad \text{„} \quad L \sim \frac{2a^2}{m^2} + 8\,\frac{\sqrt{12} - 3}{m^4}\,b^2 \tag{2}$$

$$\text{„ } \alpha > 2 \quad \text{„} \quad L \sim \frac{8(\sqrt{12} - 3)\,b^2}{m^4} \tag{3}$$

Далі, припускаючи, що $y'(-1) = 0$ та $y''(1) = b^2$, ми показуємо, що матиме місце формула (2).

Коли $y'(-1) = a^2$, та $y''(1) = 0$, ми доводимо, що має місце формула (1).