Я. ГЕРОНІМУС

Узагальнення теореми Euler'а про брахістохрони

Хай точка під дією сили, що має силову функцію U, рухається вздовж такої кривої лінії, щоб інтеґрал

$$\int \varphi(U)\, ds$$

мав мінімум (як звичайно $U + h = \frac{mv^2}{2}$; $\varphi(U)$ довільна функція U. Коли $\varphi(U) = \sqrt{2(U+h)}$, маємо вільний рух; коли $\varphi(U) = \frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$ — маємо брахістохрону).

Рівнання Euler — Lagrange'а дають

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\varphi(U)} \cdot \frac{d\varphi(U)}{dU} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{dU}{ds} \cdot \frac{dx}{ds}\right] \tag{1}$$

Хай l, m, n будуть косинуси тих кутів, що їх утворює головна нормаль нашої лінії з координатними осями, l_0, m_0, n_0 косинуси тих самих кутів для вільного руху. Тоді маємо

$$l = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{dU}{ds}\frac{dx}{ds}}{\sqrt{F^2 - \left(\frac{dU}{ds}\right)^2}} = l_0 \qquad \text{де } F = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Ми бачимо, що *в кожній точці нашої кривої лінії радіюс кривини йде вздовж тієї самої прямої, як для траєкторії, що її описала б наша точка, коли б, починаючи з цього моменту, вона рухалась вільним рухом* [1]).

Проєкція нашої сили на бінормаль дорівнює

$$F_b = \varrho \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}$$

Отже F_b — та $N_b = 0$, тобто *нормальна реакція йде вздовж головної нормалі* [2]).

[1]) Appell.—Traité de Mécanique rationnelle. Vol. I. Chap. XV, probl. 10

[2]) Appell.— Ibidem, § 255. Théorème d'Euler.

Радіюс кривини нашої кривої дорівнює

$$\varrho=\frac{\varphi(U)}{\varphi'(U)}\cdot\frac{1}{\sqrt{F^2-\left[\frac{dU}{ds}\right]^2}}$$

а для вільного руху

$$\varrho_0=\frac{2(U+h)}{\sqrt{F^2-\left[\frac{dU}{ds}\right]^2}}$$

звідки

$$\frac{\varrho_0}{\varrho}=\frac{2(U+h)\,\varphi'(U)}{\varphi(U)}. \tag{2}$$

З рівнання

$$N+F_n=\frac{v^2}{\varrho}$$

знаходимо нормальну реакцію

$$N=\left[\frac{2(U+h)\,\varphi'(U)}{\varphi(U)}-1\right]F_n \tag{3}$$

або інакше

$$N=\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}-1\right)F_n. \tag{4}$$

Якщо ми хочемо, щоб радіюси кривини нашої траєкторії та вільної були пропорційні, треба щоб

$$2(U+h)\frac{d\varphi(U)}{dU}=c\varphi(U),\qquad c=\mathrm{const}$$

звідки

$$\varphi(U)=(U+h)^{\frac{c}{2}}$$

тоді $\varrho_0=c\varrho \qquad N=(c-1)\,F_n$

Коли $c=-1$, ми маємо брахістохрону.

Для неї $\varrho_0=-\varrho \qquad N=-2F_n.$

Таким чином ми дістанемо, як окремий випадок, Euler'ову теорему:

Якщо точка рухається вздовж брахістохрони, то нормальна реакція йде вздовж головної нормалі та дорівнює (з оберненим знаком) подвійній нормальній складовій сили.

J. GUERONIMUS

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME d'EULER SUR LES BRACHISTO— CHRONES

Supposons qu'un mobile parcoure sous l'action d'une force dépendant d'une fonction de forces donnée U la courbe qui rend minimum l'intégrale

$$\int\varphi(U)\,ds.$$

où $U+h=\frac{mv^2}{2}$ et $\varphi(U)$ est une fonction arbitraire de U.

Pour $\varphi(U)=\sqrt{2(U+h)}$ nous avons le mouvement libre, et pour $\varphi(U)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}$ le mouvement brachistochrone.

Les équations d'Euler - Lagrange nous donnent

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{\varphi(U)}\cdot\frac{d\varphi(U)}{dU}\left[\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}\right] \tag{1}$$

Désignons par l, m, n les cosinus des angles de la normale principale de notre courbe avec les axes et par l_0, m_0, n_0 ceux de la normale principale de la trajectoire libre. Alors

$$l=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{dU}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}=l_0 \qquad \text{où } F=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Il est clair qu'*en chaque point de notre courbe le rayon de courbure est dirigé suivant la même droite que celui de la trajectoire que le mobile décrirait s'il devenait libre à partir de ce point* [1]).

La projection de notre force sur la binormale est égale à

$$F_b=\varrho\begin{vmatrix}\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z}\\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}$$

Donc $F_b=0$ et par conséquent $N_b=0$; c'est à dire *la réaction normale est dirigée suivant la normale principale* [2]).

Le rayon de courbure de notre courbe est

$$\varrho=\frac{\varphi(U)}{\varphi'(U)}\cdot\frac{1}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}$$

et celui qui correspond à la trajectoire libre est égal à

$$\varrho_0=\frac{2(U+h)}{\sqrt{F^2-\left(\frac{dU}{ds}\right)^2}}$$

d'où

$$\frac{\varrho_0}{\varrho}=\frac{2(U+h)\varphi'(U)}{\varphi(U)} \tag{2}$$

[1]) Comp. Appell. — Traité de Mecanique rationnelle. V. I, chap. XV, probl. 10.
[2]) Comp. Appell. — Ibidem, § 255. Théorème d'Euler.

On trouve la réaction normale au moyen de l'équation

$$N + F_n = \frac{mv^2}{\varrho}$$

d'où

$$N = \left[\frac{2(U+h)\,\varphi'(U)}{\varphi(U)} - 1 \right] F_n. \tag{3}$$

ou autrement

$$N = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \right) F_n. \tag{4}$$

Si nous voulons que les rayons de courbure de notre courbe et de la trajectoire libre soient proportionnels il faut que la relation

$$2(U+h)\,\frac{d\varphi(U)}{dU} = c\varphi(U) \qquad c = \text{const.}$$

soit satisfaite, d'où

$$\varphi(U) = (U+h)^{\frac{1}{2}c}.$$

Alors

$$\varrho_0 = c\varrho \qquad \text{et} \qquad N = (c-1)\,F_n.$$

Pour $c = -1$ nous avons le mouvement brachistochrone.
Alors

$$\varrho_0 = -\varrho \qquad \text{et} \qquad N = -2F_n.$$

Nous avons donc obtenu comme cas particulier le théorème d'Euler: *dans le mouvement brachistochrone la réaction normale est dirigée suivant la normale principale et opposée au double de la composante normale de la force.*