Я. Л. ГЕРОНІМУС

Про найменше відхилення від нуля монотонного поліному, коли задано значіння одного коефіцієнта

§ 1

Задачу, що тут її подано, зформульовано так: *найти найменше відхилення від нуля в інтервалі $(-1, +1)$ монотонного неспадного поліному*

$$y(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_l x^{n-l} + \ldots + \sigma_n,$$

ступеня не вищого за n, коли дано значіння його коефіцієнта σ_l.

(Задачу розв'язуватимемо асимптотично, вважаючи, що n зростає до безконечности, але l залишається конечним).

Нашому поліномові можемо дати такий вигляд

$$y(x) = \int_{-1}^{x} \varphi(x)\,dx$$

де $\varphi(x) \geqslant 0$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Через те, що перша похідна нашого поліному не неґативна в інтервалі $(-1, +1)$, ясно, що всі корені її, що лежать в інтервалі $(-1, +1)$, можуть бути тільки паристої кратности.

Хай

$$\varphi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x)\, q(x),$$

де кожне з чисел α і β дорівнює або нулеві, або одиниці, $u(x)$ поліном ступеня m, а $q(x)$ не має коренів в інтервалі $(-1, +1)$.

Доведім, що $q(x)$ можна вважати за постійну величину.

Хай

$$\bar{\varphi}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x), \qquad \bar{y}(x) = \int_{-1}^{x} \bar{\varphi}(x)\,dx,$$

$$R(x) = \frac{y(x) - \lambda \bar{y}(x)}{\sigma_l - \lambda \bar{\sigma}_l} \cdot \sigma_l,$$

де через $\bar{\sigma}_l$ зазначено коефіцієнт при x^{n-l} в поліномі $\bar{y}(x)$, а позитивну постійну величину λ вибрано так, щоб $q(x) - \lambda > 0$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $\sigma_l(\sigma_l - \lambda\bar{\sigma}_l) > 0$. Тоді

$$R'(x) \geqslant 0 \qquad \text{для } -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

тобто поліном $R(x)$, ступеня не вищого за n, теж монотонний в інтервалі $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Його коефіцієнт при x^{n-l} дорівнює, очевидячки, σ. Таким чином поліном $R(x)$ задовольняє всі умови нашої задачі.

Хай $\sigma_l > 0$ і $\bar{\sigma}_l > 0$. Тоді

$$\frac{y(1)}{\sigma_l} \leqslant \frac{\bar{y}(1)}{\bar{\sigma}_l}, \tag{1}$$

бо відхилення нашого поліному $y(x)$ в інтервалі $(-1, +1)$ не більш за відхилення якого завгодно іншого монотонного полінома, ступеня не вищого за n, коли їх коефіцієнти при x^{n-l} дорівнюють одиниці.

Але тоді

$$R(1) = \frac{y(1) - \lambda\bar{y}(1)}{\sigma_l - \lambda\bar{\sigma}_l} \cdot \sigma_l \leqslant y(1). \tag{2}$$

Отже, з нерівности

$$\frac{y(1)}{\sigma_l} < \frac{\bar{y}(1)}{\bar{\sigma}_l}$$

виходило б, що $R(1) < y(1)$, а це показує, що форма $u^2(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,q(x)$ не можлива, бо $y(x)$ поліном, який найменше відхиляється від нуля. Коли ж було б

$$\frac{y(1)}{\sigma_l} = \frac{\bar{y}(1)}{\bar{\sigma}_l},$$

то ясно, що досить розглянути форму

$$u^2(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta.$$

Аналогічними міркуваннями можна довести, що *при будь-яких знаках σ_l і $\bar{\sigma}_l$ нашому поліномові можна дати форму*

$$y(x) = \int_{-1}^{x} (1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,u^2(x)\,dx,$$

де $\alpha = 0$, $\beta = 0$, або $\alpha = 1$, $\beta = 1$, коли n непаристе число, і $\alpha = 0$, $\beta = 1$, *або $\alpha = 1$, $\beta = 0$, коли n паристе число.*

§ 2

Отже, нам треба обернути в minimum інтеграл

$$L = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,u^2(x)\,dx$$

при умові, що σ_l має задане значіння. Для цього припустімо

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\,P_k(x),$$

де $P_k(x)$ — нормований поліном Jacobi, тобто

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_k(x)P_s(x)\,dx=\begin{cases}0 & k\neq s\\ 1 & k=s.\end{cases}$$

Хай $$P_n(x)=d_0^{(n)}x^n+d_1^{(n)}x^{n-1}+\ldots+d_n^{(n)}.$$

Нам треба найти асимптотичне значіння $d_s^{(n)}$, вважаючи s за конечне число. Скористуємось з диференціяльного рівнання поліномів Jacobi[1])

$$(1-x^2)P''_n(x)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]P'_n(x)+n(n+\alpha+\beta+1)P_n(x)=0,$$

або

$$(1-x^2)\sum_{s=0}^{n-2}(n-s)(n-s-1)d_s^{(n)}x^{n-s-2}+(\beta-\alpha)\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)d_s^{(n)}x^{n-s-1}-$$

$$-(\alpha+\beta+2)x\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)d_s^{(n)}x^{n-s-1}+n(n+\alpha+\beta+1)\sum_{s=0}^{n}d_s^{(n)}x^{n-s}=0.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при x^{n-s}, ми дістанемо рівнання

$$sd_s^{(n)}(2n-s+\alpha+\beta+1)=-(n-s+2)(n-s+1)d_{s-2}^{(n)}+$$
$$+(\alpha-\beta)(n-s+1)d_{s-1}^{(n)},$$

або, інакше, для великих значінь n

$$2sd_s^{(n)}\sim-nd_{s-2}^{(n)}+(\alpha-\beta)d_{s-1}^{(n)}. \tag{3}$$

Перший коефіцієнт $d_0^{(n)}$ легко написати, користуючись із формули

$$d_0^{(n)}=\frac{(n+\alpha+\beta)!}{2^n.n!(n+\alpha+\beta)!}\sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)n!(n+\alpha+\beta)!}{2^{\alpha+\beta+1}(n+\alpha)!(n+\beta)!}}.\ ^{2)}$$

Коли ми скористуємося з формули Stirling'а[3])

$$n!\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}n^n,$$

то легко найдемо, що $$d_0^{(n)}\sim\frac{2^{n+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Знайдім ще $d_1^{(n)}$. Поліномові Jacobi $P_n(x)$ можна дати такий вигляд[4]):

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1).n!\,(n+\alpha+\beta)!}{2^{\alpha+\beta+1}.(n+\alpha)!(n+\beta)!}}\cdot\frac{(n+\alpha)!}{n!\,\alpha!}F\Big(-n,\ n+$$
$$+\alpha+\beta+1,\ \alpha+1,\ \frac{1-x}{2}\Big),$$

---

1) Pólya und Szegö.— Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. II. S. 293.
2) Ibidem. Bd. II, S. 292.
3) Ibidem. Bd. I. S. 79.
4) Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Tome II, volume 5, p. 231.

де

$$F(a,\ b,\ c,\ z)=1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)\,b\,(b+1)}{1\,.\,2\,.\,c\,(c+1)}z^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

гіпергеометрична функція. Якщо написати в ній тільки два найвищі члени, то найдемо, що

$$d_1^{(n)}=\sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\,n\,!\,(n+\alpha+\beta)\,!}{2^{\alpha+\beta+1}(n+\alpha)\,!\,(n+\beta)\,!}}\,.\,\frac{(2n+\alpha+\beta-1)\,!}{2^n(n-1)\,!\,(n+\alpha+\beta)\,!}(\alpha-\beta).$$

Користуючись знов із формули Stirling'a, ми найдемо, що

$$d_1^{(n)}\sim\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\,d_0^{(n)}. \tag{5}$$

Із (3) легко знайдемо, що

$$d_2^{(n)}\sim-\frac{nd_0^{(n)}}{2^2},\qquad d_3^{(n)}\sim-\frac{nd_1^{(n)}}{2^2}\,. \tag{6}$$

Доведім, що для конечного і існує формула

$$d_{2i}^{(n)}\sim\frac{(-1)^i n^i d_0^{(n)}}{2^{2i}\,.\,i\,!},\qquad d_{2i+1}^{(n)}\sim\frac{(-1)^i n^i d_1^{(n)}}{2^{2i}\,.\,i\,!}\,. \tag{7}$$

Із (6) бачимо, що для $i=1$, формула (7) правдива.
Доведім, що коли вона правдива для $i=1,\ 2,\ 3\ldots s$, то вона правдива також для $i=s+1$. Дійсно,

$$4\,(s+1)\,d_{2s+2}^{(n)}\sim-nd_{2s}^{(n)}+(\alpha-\beta)\,d_{2s+1}^{(n)}\sim\frac{(-1)^{s+1}\,n^{s+1}\,d_0^{(n)}}{2^{2s}\,.\,s\,!}+$$
$$+(\alpha-\beta)\frac{(-1)^s\,.\,n^s\,d_1^{(n)}}{2^{2s}\,.\,s\,!}.$$

Але відношення другого члена цієї суми до першого члена простує до нуля, коли зростає n. Через це

$$d_{2s+2}^{(n)}\sim\frac{(-1)^{s+1}\,n^{s+1}\,d_0^{(n)}}{2^{2(s+1)}\,(s+1)\,!}\,.$$

Так саме

$$2\,(2s+3)\,d_{2s+3}^{(n)}\sim-nd_{2s+1}^{(n)}+(\alpha-\beta)\,d_{2s+2}^{(n)}\sim\frac{(-1)^{s+1}\,n^{s+1}\,d_1^{(n)}}{2^{2s}\,.\,s\,!}+$$
$$+\frac{(-1)^{s+1}\,n^{s+1}\,d_1^{(n)}}{2^{2s+1}\,(s+1)\,!}=\frac{(-1)^{s+1}\,n^{s+1}\,d_1^{(n)}(2s+3)}{2^{2s+1}\,(s+1)\,!}\,.$$

Звідсіль виходить, що

$$d_{2s+3}^{(n)}\sim\frac{(-1)^{s+1}\,n^{s+1}\,d_1^{(n)}}{2^{2(s+1)}\,(s+1)\,!},$$

що й треба було довести. *Отже, остаточно, користуючись з формул* (4) *й* (5), *ми знаходимо, що*

$$d_{2s}^{(n-i)} \sim \frac{(-1)^s n^s \cdot 2^{n-i-2s+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot s!}, \qquad d_{2s+1}^{(n-i)} \sim \frac{(-1)^s n^s \cdot 2^{n-i-2s-1+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot s!}(\alpha-\beta), \quad (8)$$

де i та s конечні числа.

§ 3

Тепер ми можемо підійти до розв'язання нашої задачі. *Припустімо спочатку* $l=2k$. Ми маємо

$$\sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_{2k} x^{n-2k} + \ldots + \sigma_n = \int_{-1}^{x} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x) dx.$$

Зазначім через A коефіцієнт при $x^{2m-2k+\alpha+\beta}$ у виразі

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x)$$

(через m зазначено ступінь $u(x)$ і $n=2m+\alpha+\beta+1$).

Тоді $(n-2k)\sigma_{2k}=A$.

Знайдемо вираз для A в залежності від коефіцієнтів розкладу $u(x)$ за поліномами Jacobi. Маємо

$$A=(-1)^\alpha \sum_{i,\,j=0}^{i+j\leqslant 2k} C_{ij} a_{m-i} a_{m-j} + (-1)^\alpha (\beta-\alpha) \sum_{i,\,j=0}^{i+j\leqslant 2k-1} D_{ij} a_{m-i} a_{m-j} +$$
$$+(-1)^{\alpha-1}\alpha\beta \sum_{i,\,j=0}^{i+j\leqslant 2k-2} E_{ij} a_{m-i} a_{m-j},$$

де C_{ij}, D_{ij}, E_{ij} мають таке значіння:

1. *Для i та j однієї паристости:*

$$C_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1}^{(m-j)},$$

$$D_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1}^{(m-j)} + \sum_{s=}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)}^{(m-j)},$$

$$E_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)}^{(m-j)} + \sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-2} d_{2s+1}^{(m-i)} d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-2\right)+1}^{(m-j)}.$$

Користуючись із формули (8), найдемо, що

$$C_{ij}\sim\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}}\frac{(-m)^s\cdot 2^{m-i-2s+\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot(-m)^{k-s-\frac{i+j}{2}}\cdot 2^{m-j-2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\pi\cdot s!\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)!}+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1}\frac{(-m)^s\cdot 2^{m-i-2s-1+\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot(-m)^{k-s-\frac{i+j}{2}-1}\cdot 2^{m-j-2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)-1+\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\pi\cdot s!\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)!}\sim$$

$$\sim\frac{(-m)^{k-\frac{i+j}{2}}\cdot 2^{2m-2k+\alpha+\beta}}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}}\frac{1}{s!\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)!}.$$

Ми обмежились лише першим членом, бо другий член суми буде порядку $m^{k+\frac{i+j}{2}-1}$ і через це його відношення до першого члена простує до нуля, коли зростає m.

Остаточно
$$C_{ij}\sim\frac{(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}\cdot 2^{n-2k-1}}{\pi\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!}. \tag{9}$$

Легко бачити, що D_{ij} й E_{ij} порядку не вищого за $m^{k-\frac{i+j}{2}-1}$.

II. *Хай тепер і та ј неоднакової паристости.* Тоді

$$C_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}}d_{2s}^{(m-i)}d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)+1}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}}d_{2s+1}^{(m-i)}d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)}^{(m-j)},$$

$$D_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}}d_{2s}^{(m-i)}d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}}d_{2s+1}^{(m-i)}d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)+1}^{(m-j)},$$

$$E_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}}d_{2s}^{(m-i)}d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)+1}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}}d_{2s+1}^{(m-i)}d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)}^{(m-j)}.$$

Користуючись знов з формули (8), найдемо:

$$C_{ij}\sim\frac{(-n)^{k-\frac{i+j+1}{2}}\cdot 2^{n-2k}}{\pi\left(k-\frac{i+j+1}{2}\right)!}(\alpha-\beta),\qquad D_{ij}\sim\frac{(-n)^{k-\frac{i+j+1}{2}}\cdot 2^{n-2k}}{\pi\left(k-\frac{i+j+1}{2}\right)!};$$

E_{ij} — порядку $m^{k-\frac{i+j+3}{2}}$.

Зазначивши через i та j числа однакової паристости, та через i_1 та j_1 числа різної паристости, ми можемо написати:

$$n\sigma_{2k} \sim (-1)^a \sum_{i,\, j=0}^{i+j\leq 2k} \frac{(-n)^{k-\frac{i+j}{2}} \cdot 2^{n-2k-1}\, a_{m-i}\, a_{m-j}}{\pi\left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!} +$$

$$+(-1)^a \sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1\leq 2k} \frac{(-n)^{k-\frac{i_1+j_1+1}{2}} \cdot 2^{n-2k}\, (\alpha-\beta)\, a_{m-i_1}\, a_{m-i_1}}{\pi\left(k-\dfrac{i_1+j_1+1}{2}\right)!} +$$

$$+(-1)^a (\beta-\alpha) \sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1\leq 2k-1} \frac{(-n)^{k-\frac{i_1+j_1+1}{2}} \cdot 2^{n-2k}\, a_{m-i_1}\, a_{m-j_1}}{\pi\left(k-\dfrac{i_1+j_1+1}{2}\right)!}$$

Через те що при i_1 та j_1 різної паристости умова $i_1+j_1\leq 2k$ еквівалентна умові $i_1+j_1\leq 2k-1$, то другий та третій член скорочуються. Остаточно

$$\sum_{i,\, j=0}^{i+j\leq 2k} \frac{a_{m-i}\, a_{m-j}}{\left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!\,(-n)^{\frac{i+j}{2}}} \sim \frac{(-1)^{k+a} \cdot \pi\sigma_{2k}}{n^{k-1} \cdot 2^{n-2k-1}}. \tag{10}$$

Отже нам треба обернути в minimum

$$L = \sum_{r=0}^{m} a_r^2,$$

користуючись формулою (10). Умови extremum'а дають

$$\lambda a_{m-i} = \sum_{i} \frac{a_{m-j}}{(-n)^{\frac{i+j}{2}}\left(k-\dfrac{i+j}{2}\right)!}, \tag{11}$$

де $i\equiv j \ (mod\, 2)$ та $i+j\leqslant 2k$. Звідсіль ми бачимо, що $a_r=0$ при $r<m-\,-2k$. Помножаючи (11) на a_{m-i} та підсумовуючи по i, найдемо

$$\lambda L \sim \frac{(-1)^{k+a}\, \pi\sigma_{2k}}{n^{k-1} \cdot 2^{n-2k-1}},$$

звідкіля

$$L \sim \frac{(-1)^{k+a} \cdot \pi\sigma_{2k}}{\lambda n^{k-1} \cdot 2^{n-2k-1}}.$$

Із лінійних однорідних рівнань (11) знаходимо рівняння, щоб найти λ:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{k!}-\lambda & 0 & \frac{1}{(-n)(k-1)!} & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{(-n)^k.0!} \\ 0 & \frac{1}{(-n)(k-1)!}-\lambda & 0 & \frac{1}{(-n)^2(k-2)!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(-n)^k!0} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

У цьому детермінанті $(2k+1)^{го}$ порядку елемент

$$C_{ij}=\frac{1}{(-n)^{\frac{i+j}{2}}\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!},$$

коли $i\equiv j \pmod 2$ та $i+j\leqslant 2k$. Коли ж $i\equiv j-1 \pmod 2$, або $i+j>2k$, то $C_{ij}=0$. Ми мусимо найги найбільший за модулем корінь цього рівнання. Розгортаючи цей детермінант за ступенями λ, ми можемо написати:

$$\lambda^{2k+1}-\frac{1}{k!}\lambda^{2k}+0\left(\frac{1}{n}\right)=0,$$

де через $0\left(\frac{1}{n}\right)$ зазначено сукупність членів, в яких в знаменнику є n. Таким чином для значінь n, що безконечно зростають

$$\lambda\sim\frac{1}{k!}$$

та

$$L\sim\frac{\pi k!\,|\sigma_{2k}|}{n^{k-1}.2^{n-2k-1}}. \tag{12}$$

(Очевидно $\alpha=0$, коли σ_{2k} має знак $(-1)^k$, та $\alpha=1$, коли знак σ_{2k} однаковий зі знаком $(-1)^{k+1}$).

§ 4

Розгляньмо тепер другий можливий випадок **$l=2k+1$. Так саме, як і раніш, ми найдемо, що**

$$n\sigma_{2k+1}\sim(-1)^\alpha\sum_{i,\,j=0}^{i+j\leq 2k+1}C'_{ij}\,a_{m-i}\,a_{m-j}+(-1)^\alpha(\beta-\alpha)\sum_{i,\,j=0}^{i+j\leq 2k}D'_{ij}\,a_{m-i}\,a_{m-j}+$$

$$+(-1)^{\alpha-1}\alpha\beta\sum_{i,\,j=0}^{i+j\leq 2k-1}E'_{ij}\,a_{m-i}\,a_{m-j}\,.$$

1. *Хай спочатку i та j однієї паристости.*
Тоді

$$C'_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)+1}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)}^{(m-j)},$$

$$D'_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}} d_{2s}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}\right)}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1}^{(m-j)},$$

$$E'_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)+1}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j}{2}-1} d_{2s+1}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j}{2}-1\right)}^{(m-j)}.$$

Користуючись із формули (8), ми найдемо, що

$$C'_{ij}\sim\frac{2^{n-2k-1}.(\alpha-\beta).(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi.\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!},\quad D'_{ij}\sim\frac{2^{n-2k-1}(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!},$$

а E'_{ij} **порядку** $n^{k-\frac{i+j}{2}-1}$.

II. *Хай тепер i та j неоднакової паристости. Тоді*

$$C'_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j-1}{2}} d_{2s}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j-1}{2}\right)}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)+1}^{(m-j)},$$

$$D'_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)+1}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)}^{(m-j)},$$

$$E'_{ij}=\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+1}{2}} d_{2s}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j+1}{2}\right)}^{(m-j)}+\sum_{s=0}^{k-\frac{i+j+3}{2}} d_{2s+1}^{(m-i)}\, d_{2\left(k-s-\frac{i+j+3}{2}\right)+1}^{(m-j)},$$

звідкіля

$$C'_{ij}\sim\frac{2^{n-2k-2}.(-n)^{k-\frac{i+j-1}{2}}}{\pi\left(k-\frac{i+j-1}{2}\right)!},$$

а D'_{ij} **та** E'_{ij} **порядку** $n^{k-\frac{i+j+1}{2}}$.

Отже ми маємо

$$n\sigma_{2k+1} \sim (-1)^{\alpha} \sum_{i,\, j=0}^{i+j\leq 2k+1} \frac{(\alpha-\beta)\,.\,2^{n-2k-1}\,.\,(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!} a_{m-i}\, a_{m-j} +$$

$$+(-1)^{\alpha}(\beta-\alpha) \sum_{i,\, j=0}^{i+j\leq 2k} \frac{2^{n-2k-1}\,.(-n)^{k-\frac{i+j}{2}}}{\pi\left(k-\frac{i+j}{2}\right)!} a_{m-i}\, a_{m-j} +$$

$$+(-1)^{\alpha} \sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1\leq 2k+1} \frac{2^{n-2k-2}\,.(-n)^{k-\frac{i_1+j_1-1}{2}}}{\pi\left(k-\frac{i_1+j_1-1}{2}\right)!} a_{m-i_1}\, a_{m-j_1},$$

або простіше

$$\sum_{i_1,\, j_1=0}^{i_1+j_1\leq 2k+1} \frac{a_{m-i_1}\, a_{m-j_1}}{(-n)^{\frac{i_1+j_1-1}{2}}\left(k-\frac{i_1+j_1-1}{2}\right)!} \sim \frac{(-1)^{\alpha+k}\,.\,\pi\sigma_{2k+1}}{2^{n-2k-2}\,.\,n^{k-1}}, \qquad (13)$$

де i_1 та j_1 різної паристости.

Ми мусимо знов обернути в minimum

$$L = \sum_{r=0}^{m} a_r^2$$

при умові (13). Умови extremum'а дають

$$\lambda a_{m-i_1} \sim \sum_{j_1} \frac{a_{m-j_1}}{(-n)^{\frac{i_1+j_1-1}{2}}\left(k-\frac{i_1+j_1-1}{1}\right)!},$$

де i_1 та j_1 різної паристости. Звідсіль

$$L \sim \frac{(-1)^{\alpha+k}\,\pi\sigma_{2k+1}}{\lambda n^{k-1}\, 2^{n-2k-2}},$$

де λ буде найбільший за модулем корінь детермінанту

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{k!} & 0 & \frac{1}{(-n)(k-1)!} & \cdots\cdots & \frac{1}{(-n)^k\, 0!} \\ \frac{1}{k!} & -\lambda & \frac{1}{(-n)(k-1)!} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(-n)^k\, 0!} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

У цьому детермінанті $(2k+2)^{го}$ порядку елемент

$$C_{ij} = \frac{1}{(-n)^{\frac{i+j-1}{2}} \left(k - \frac{i+j-1}{2}\right)!}$$

для $i \equiv j-1 \pmod 2$ та $i+j \leqslant 2k+1$. Коли $i \equiv j \pmod 2$, або $i+j > 2k+1$, то $C_{ij}=0$. Ми можемо записати наше рівняння так

$$\lambda^{2k+2} - \frac{1}{k!^2}\lambda^{2k} + 0\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

відкіля асимптотично $\lambda \sim \frac{1}{k!}$. Тоді

$$L \sim \frac{\pi \,|\, \sigma_{2k+1} \,|\, k!}{2^{n-2k-2} \cdot n^{k-1}}. \tag{14}$$

Формули (12) та (14) можна з'єднати в одну, а саме

$$L \sim \frac{\pi \,|\, \sigma_e \,|\, k!}{2^{n-l-1} \cdot n^{k-1}} \qquad k = \left[\frac{l}{2}\right]. \tag{15}$$

При $l=0$ ми дістанемо відому формулу Чебишова [1])

$$L \sim \frac{\pi n \,|\, \sigma_0 \,|}{2^{n-1}}.$$

При $l=1$ ми дістанемо формулу

$$L \sim \frac{\pi n \,|\, \sigma_1 \,|}{2^{n-2}}, \tag{16}$$

яку можна дістати розв'язуючи загальнішу задачу, а саме *находження мінімального відхилення від нуля многократно-монотонного поліному* $(h+1)$*-го порядку, коли відомо значіння його другого коефіцієнта* [2]).

Відхилення дорівнює

$$L \sim \frac{\pi \,|\, \sigma_1 \,| \cdot n^{h+1}}{2^{n-2} \cdot h!\left(h+\sqrt{h^2+1}\right)}. \tag{17}$$

Коли у (17) $h=0$ (що відповідає монотонному поліномові), ми дістанемо формулу (16).

J. GUERONIMUS

SUR LE POLYNOME MONOTONE QUI S'ÉCARTE LE MOINS DE ZÉRO DONT UN COEFFICIENT EST DONNÉ

Résumé

Le but de ce travail est de résoudre le problème suivant:

Trouver l'oscillation minima dans l'intervalle $(-1, +1)$ *du polynome non décroissant*

$$y(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + \sigma_l x^{n-l} + \ldots + \sigma_n$$

de degré $\leqslant n$, *si son coefficient* σ_l *est donné.*

[1]) П. Л. Чебышев. — О функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Собрание сочинений, т. II, стр. 210.

[2]) W. Břečka and J. Geronimus. — On a problem concerning the polynomials monotonic of $h+1$ order. Tôhoku Mathematical Journal.

(*On suppose que* n *augmente infiniment tandis que* l *reste fini*). L'oscillation minima cherchée est donnée par la formule

$$L \sim \frac{\pi \mid \sigma_l \mid . k!}{2^{n-l-1} . n^{k-1}} \qquad k = \left[\frac{l}{2}\right]$$

Pour $l = 0$ on obtient la formule connue de Tchebycheff

$$L \sim \frac{\pi \mid \sigma_0 \mid . n}{2^{n-1}}$$