W. GONTCHAROFF

Note sur les moyennes carrées du module des dérivées successives d'une fonction holomorphe dans le cercle-unité

En désignant par $f(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x| < 1$ et continue avec toutes ses dérivées sur la circonférence elle-même, posons

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(e^{i\theta})|^2\, d\theta, \qquad I_n^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 |f^{(n)}(\varrho e^{i\theta})|^2\, \varrho\, d\varrho\, d\theta \tag{1}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

où I_n est le carré de la moyenne carrée des valeurs que $|f^{(n)}(x)|$ prend sur le cercle $|x| = 1$ et I_n^* la même chose relativement à l'intérieur du cercle considéré. On peut dire aussi que I_n^* $(n \geqslant 1)$ est l'aire du domaine riemannien engendré par la $n-1$-ième dérivée $f^{(n-1)}(x)$ et correspondant au cercle-unité.

Nous nous proposons ici d'établir une inégalité qui lie entre eux trois nombres I_0, I_p et I_q $(0 < p < q)$ ainsi que celle qui lie les nombres I_0^*, I_p^* et I_q^* [1]).

Quel que soit le nombre entier positif n, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\begin{aligned}\Psi_n \equiv (q-p)(2n+q-p)\,[(n+q)\,!]^2\, I_0 - q\,(2n+q)[(n+q-p)\,!]^2\, I_p\, + \\ + p\,(2n+2q-p)\,.\,[n\,!]^2\, I_q \geqslant 0\end{aligned} \tag{2}$$

Posons, pour abréger,

$$\Gamma_\nu = |c_\nu|^2 \geqslant 0 \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

On trouve aisément

$$I_0 = \sum_0^\infty \Gamma_\nu, \qquad I_p = \sum_0^\infty \lambda^2(\nu)\Gamma_\nu, \qquad I_q = \sum_0^\infty \mu^2(\nu)\Gamma_\nu,$$

1) Quelques autres problèmes du même genre ont été étudiés par M. Bernstein („Sur les fonctions absolument monotones", „Acta Mathematica, t. 52; „Sur une propriété de la fonction exponentielle", „Annales Scientifiques des Institutions Savantes de l'Ukraïne", t. 3; „Sur la croissance des polynomes", CR, le 1 octobre 1928).

où l'on a posé

$$\lambda(\nu) = (\nu - p + 1)(\nu - p + 2) \dots \nu, \qquad \mu(\nu) = (\nu - q + 1)(\nu - q + 2) \dots \nu.$$

Donc, il s'ensuit

$$\Phi_n \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_n(\nu) \Gamma_\nu \quad ,$$

où $\psi_n(\nu)$ est défini par l'égalité

$$\psi_n(\nu) = A_n - B_n \lambda^2(\nu) + C_n \mu^2(\nu),$$

avec

$$A_n = (q-p)(2n+q-p)[(n+q)!]^2, \quad B_n = q(2n+q)[(n+q-p)!]^2,$$
$$C_n = p(2n+2q-p)[n!]^2.$$

J'affirme que $\psi_n(\nu)$ est positif pour toutes les valeurs entières de ν ($\nu \geqslant 0$) sauf les valeurs $\nu = n+q$ et $\nu = n+q-1$; dans ce dernier cas, on vérifie immédiatement que l'on a

$$\psi_n(n+q) = \psi_n(n+q-1) = 0. \tag{3}$$

Tout d'abord, on obtient, pour $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$,

$$\psi_n(\nu) = A_n > 0.$$

Ensuite, si $p \leqslant \nu \leqslant q-1$, $\psi_n(\nu)$ se réduit à $A_n - B_n \lambda^2(\nu)$, donc $\psi_n(\nu)$ décroît lorsque ν parcourt ces valeurs en croissant. Par suite,

$$\psi_n(\nu) \geqslant \psi_n(q-1).$$

Or, il vient:

$$\psi_n(q-1) =$$
$$= (q-p)(2n+q-p)\left[\frac{(n+q-p)!(q-1)!}{(q-p-1)!}\right]^2 \left\{\left[\frac{(n+q-p+1)\dots(n+q)}{(q-p)\dots(q-1)}\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{q(2n+q}{(q-p)(2n+q-p)}\right\}.$$

La quantité entre parenthèses figurées étant une fonction croissante de n, elle atteint le minimum pour $n=0$, et ce minimum étant zéro, on a $\psi_n(q-1) > 0$ pour $n > 0$ et $\psi_0(q-1) = 0$. Donc, pour $p \leqslant \nu \leqslant q-1$, on obtient

$$\psi_n(\nu) \geqslant 0,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que dans le cas où $n = 0$, $\nu = q-1$.

Plus loin, on s'assure queela dérivée $\psi_n(\nu)$ (ν étant considéré comme une variable susceptible de prendre toutes les valeurs réelles) ne possède qu'un seul zéro réel plus grand que $q-1$. En effet, on trouve

$$\psi'_n(\nu) = 2C_n \lambda(\nu) \lambda'(\nu) \left[\frac{\mu(\nu)}{\lambda(\nu)} \frac{\mu'(\nu)}{\lambda'(\nu)} - \frac{B_n}{C_n}\right]. \tag{4}$$

Le rapport $\frac{\mu(\nu)}{\lambda(\nu)}$ est un polynome en ν qui croît d'une manière monotone avec ν, si $\lambda \geqslant q-1$. Comme on a

$$\frac{\mu'(\nu)}{\lambda'(\nu)} = \frac{q}{p} \frac{\prod_{1}^{q-1}(\nu-\mu_i)}{\prod_{1}^{p-1}(\nu-\lambda_i)} = \frac{q}{p} \prod_{1}^{p-1} \frac{\nu-\mu_i}{\nu-\lambda_i} \cdot \prod_{p}^{q-1}(\nu-\mu_i) \;,$$

où les ν_i et les μ_i vérifient les inégalités

$$q-1 > \mu_1 > q-2 > \mu_2 > \ldots > q-i > \mu_i > q-i-1 > \ldots > 1 > \mu_{q-1} > 0,$$
$$p-1 > \lambda_1 > p-2 > \lambda_2 > \ldots > p-i > \lambda_i > p-i-1 > \ldots > 1 > \lambda_{p-1} > 0,$$

il en résulte que le rapport $\frac{\mu'(\nu)}{\lambda'(\nu)}$ croît aussi avec ν, si $\nu \geqslant q-1$ (car ceci est vrai pour le produit $\prod_{p}^{q-1}(\nu-\mu_i)$ ainsi que pour chacun des facteurs $\left.\frac{\nu-\mu_i}{\nu-\lambda_i}\right)$. Par conséquent, d'après (4), $\psi'_n(\nu)$ ne s'annule qu'une seule fois pour $\nu > q-1$; soit $\bar{\nu}_n$ la racine de l'équation $\psi_n'(\nu) = 0$ $(\bar{\nu}_n > q-1)$ (cette racine existe car l'expression en parenthèses dans le second membre de (4) croît de 0 à ∞ lorsque ν parcourt toutes les valeurs plus grandes que $q-1$). En vertu des égalités (3), on a $n+q-1 < \bar{\nu}_n < n+q$, donc

$$\psi'_n(\nu) < 0 \quad \text{pour} \quad q-1 \leqslant \nu \leqslant q+n-1,$$
$$\psi'_n(\nu) > 0 \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant q+n.$$

Par conséquent, on obtient

$$\psi_n(\nu) > \psi_n(q+n-1) = 0 \quad \text{pour} \quad q-1 \leqslant \nu < q+n-1,$$
$$\psi_n(\nu) > \psi_n(q+n) = 0 \quad \text{pour} \quad \nu > q+n.$$

L'inégalité (2) est par suite démontrée. L'égalité n'est atteinte, dans (2), que dans le cas où l'on a $\Gamma_\nu = 0$ pour toutes les valeurs de ν sauf $\nu = n+q-1$ et $\nu = n+q$, donc pour les binomes de la forme

$$f(x) = c_{n+q-1}\, x^{n+q-1} + c_{n+q}\, x^{n+q}. \tag{5}$$

Admettons maintenant que, les valeurs de I_0 et de I_q étant données, on cherche à déterminer le maximum des valeurs possibles de I_p ainsi que les fonctions $f(x)$ pour lesquelles ce maximum est atteint $(0 < p < q)$.

L' inégalité (2) nous fournit

$$I_p \leqslant K_n = A_n I_0 + B_n I_q, \tag{6}$$

où l'on a posé

$$A_n = \frac{(q-p)(2n+q-p)}{q(2n+q)} \left[\frac{(n+q)!}{(n+q-p)!}\right]^2,$$

$$B_n = \frac{p(2n+2q-p)}{q(2n+q)} \left[\frac{n!}{(n+q-p)!}\right]^2 \tag{7}$$

Le nombre n étant susceptible de prendre toutes les valeurs $n=0$, 1, 2, ..., il s'agit de le déterminer de telle manière que K_n soit aussi petit que possible. Les A_n forment une suite croissante et les B_n une suite décroissante; on déduit de $(6-7)$ que l'on a

$$K_{n+1} \gtreqless K_n$$

suivant que

$$\frac{I_q}{I_0} \gtreqless \frac{A_{n+1}-A_n}{B_n-B_{n+1}}$$

Or, le second membre de l'inégalité précédente peut être écrit sous la forme

$$\frac{q-p}{p}\left[\frac{(n+q)!}{n!}\right]^2 \frac{\left(1+\frac{p}{n+q-p+1}\right)^2\left(1-\frac{p}{2n+q+2}\right)-\left(1-\frac{p}{2n+q}\right)}{\left(1+\frac{q-p}{2n+q}\right)-\left(1-\frac{q-p}{n+q-p+1}\right)^2\left(1+\frac{q-p}{2n+q+2}\right)},$$

et cette expression se réduit à $[(n+1)(n+2)\ldots(n+q)]^2$. Soit N la valeur de n définie par

$$[N(N+1)\ldots(N+q-1)]^2 \leq \frac{I_q}{I_0} < [(N+1)(N+2)\ldots(N+q)]^2\,; \qquad (8)$$

alors on obtient

$$K_0 > K_1 > \ldots > K_{N-1} \geqslant K_N < K_{N+1} < K_{N+2} < \ldots$$

Donc, c'est la valeur $n=N$ qu'il faut prendre dans l'inégalité (6) pour obtenir le maximum possible de I_p (ou bien $n=N-1$ dans le cas où le signe d'égalité a lieu dans (8). Le maximum est atteint pour les binomes de la forme (5), où il faudra poser $n=N$ (ou $n=N-1$ respectivement).

Inversement, supposons que, trois nombres I_0, I_p et I_q étant donnés, l'égalité (6) a lieu lorsqu'on donne à n la valeur N tirée de (8). Alors, il est possible de construire une fonction $f(x)$ telle que les carrés des moyennes carrées du module de la fonction elle-même et de ses dérivées d'ordre p et q $(0<p<q)$ soient respectivement égaux à I_0, I_p, I_q. Toutes ces fonctions sont comprises dans la formule

$$f(x) = x^{N+q-1}(\varepsilon\sqrt{\Gamma_{N+q-1}} + \eta x\sqrt{\Gamma_{N+q}}),$$

où l'on a

$$\Gamma_{N+q-1} = \frac{1}{q(2N+q)}\left[(N+q)^2 I_0 - \frac{I_q}{[(N+1)\ldots(N+q-1)]^2}\right],$$

$$\Gamma_{N+q} = \frac{1}{q(2N+q)}\left[\frac{I_q}{[(N+1)\ldots(N+q-1)]^2} - N^2 I_0\right],$$

et ε et η sont des nombres complexes arbitraires de module 1.

En particulier, soit $p=1$, $q=2$. Alors

$$A_n = \frac{(2n+1)(n+2)^2}{4(n+1)}, \qquad B_n = \frac{2n+3}{4(n+1)^3}.$$

Par exemple, si $I_2 \leqslant 4I_0$, on a $I_1 \leqslant I_0 + \frac{3}{4} I_2$; si $4I_0 \leqslant I_2 \leqslant 36I_0$, on a $I_1 \leqslant \frac{27}{8} I_0 + \frac{5}{32} I_1$; si $36I_0 \leqslant I_2 \leqslant 144I_0$, on a $I_1 \leqslant \frac{20}{3} I_0 + \frac{7}{108} I_2$ etc.

Sans entrer dans les détails des calculs qui d'aileurs ne diffèrent pas essentiellement de ceux qui ont été développés plus haut, je vais indiquer les inégalités qui se rapportent aux moyennes carrées à l'intérieur du cercle-unité. On trouve, pour $0 < p < q$,

$$I_p^* \leqslant K_n^* \equiv A_n^* I_0^* + B_n^* I_q^*, \tag{9}$$

où

$$A_n^* = \frac{(q-p)(2n+q-p+1)(n+q+1)}{q(2n+q+1)(n+q-p+1)} \left[\frac{(n+q)!}{(n+q-p)!}\right]^2$$

$$B_n^* = \frac{p(2n+2q-p+1)(n+1)}{q(2n+q+1)(n+q-p+1)} \left[\frac{n!}{(n+q-p)!}\right]^2, \tag{10}$$

n étant susceptible de prendre les valeurs 0, 1, 2, ... Les moyennes I_0^* et I_q^* étant données, la valeur $n = N$ qui rend minimum le second membre de (9) est définie par l'inégalité

$$N[(N+1)\ldots(N+q-1)]^2(N+q) \leqslant \frac{I_q^*}{I_0^*} \leqslant (N+1)[(N+2)\ldots(N+ \\ +q)]^2(N+q+1) \tag{11}$$

Inversement, si les nombres I_0^*, I_p^* et I_q^* vérifient l'égalité (9), les fonctions auxquelles il correspondent sont comprises dans la formule

$$f(x) = x^{N+q-1}(\varepsilon\sqrt{\Gamma_{N+q-1}} + \eta x\sqrt{\Gamma_{N+q}}),$$

où

$$\Gamma_{N+q-1} = \frac{(N+q)^2}{q(2N+q+1)}\left[(N+q+1)I_0^* - \frac{I_q^*}{(N+1)[(N+2)\ldots(N+q)]^2}\right],$$

$$\Gamma_{N+q} = \frac{(N+1)(N+q+1)}{q(2N+q+1)}\left[\frac{I_q^*}{[(N+1)\ldots(N+q-1)]^2(N+q)} - NI_0^*\right],$$

et ε et η sont des nombres complexes arbitraires de module 1.

En particulier, soit $p = 1$, $q = 2$. Alors

$$A_n^* = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n+3}, \qquad B_n^* = \frac{1}{(n+1)(2n+3)}.$$

Par exemple, si $I_2^* \leqslant 12I_0^*$, on a $I_1^* \leqslant 2I_0^* + \frac{1}{3} I_2^*$; si $12I_0^* \leqslant I_2^* \leqslant 72I_0^*$, on a $I_1^* \leqslant \frac{24}{5} I_0^* + \frac{1}{10} I_2^*$; si $72I_0^* \leqslant I_2^* \leqslant 240I_0^*$, on a $I_1^* \leqslant \frac{60}{7} I_0^* + \frac{1}{21} I_2^*$ etc.

В. Л. ГОНЧАРОВ

НОТАТКА ПРО КВАДРАТИЧНІ ПЕРЕСІЧНІ МОДУЛЯ ПОСЛІДОВНИХ ПОХІДНИХ ОД ФУНКЦІЙ, ГОЛОМОРФНИХ В КОЛІ-ОДИНИЦЯ

Резюме

В цій нотатці доводимо, що величини I_0, I_p та I_q ($0<p<q$), що їх визначено рівністю (1), при довільному цілому $n\geqslant 0$ задовольняють нерівностям (6). Навпаки, які б ні були числа I_0, I_p та I_q, коли тільки задоволено нерівності (8) та (для $n=N$) (6), то можна визначити таку функцію $f(x)$, щоб вона задовольняла рівностям (1) (для $n=0$, p і q).

Подібні до цих твердження, що до величин I_0^*, I_p^* і I_q^* (див. (1)).