М. КРАВЧУК

Про наближене розв'язання лінійних диференціяльних рівнань

Нехай лінійне диференціяльне рівнання

$$L[y] = A(x)y^{(k)} + \lambda A_1(x)y^{(k-1)} + \ldots + \lambda A_k(x)y = f(x) \qquad \text{(I)}$$

має на інтервалі (0, 1) за умов

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} y^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} y^{(i)}(1) = 0. \; (j = 1, 2, \ldots k)$$

єдиний інтеграл y. Будемо шукати наближено цей інтеграл у формі

$$y_m = a_0^{(m)} \varphi_0(x) + a_1^{(m)} \varphi_1(x) + \ldots + a_{m-1}^{(m)} \varphi_{m-1}(x),$$

визначаючи сучинники $a_i^{(m)}$ із рівнань

$$\int_0^1 L[y_m] A\theta_i dx = \int_0^1 f A\theta_i dx \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \qquad \text{(II)}$$

Ми доведемо, що коли належно дібрати функції φ_i, θ_i то буде

$$y = \lim_{m \to \infty} y_m$$

Так само, коли система лінійних диференціяльних рівнань

$$L_j[y_1, y_2, \ldots y_k] = A_j(x)y_j' + \lambda_j A_{j1}(x)y_1 + \ldots + \lambda_j A_{jk}(x)y_k = f_j(x)$$
$$(j = 1, 2, \ldots k) \qquad \text{(III)}$$

за граничних умов

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} y_i(0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)} y_i(1) = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots k)$$

має на інтервалі (0, 1) єдиний розв'язок

$$y_1, y_2, \ldots y_k,$$

то можна так дібрати функції φ_{ji}, θ_{ji} що, визначивши сучинники a_{ji} з рівнань

$$\int_0^1 L_j[y_1, y_2, \ldots y_k] A_j\theta_{ji} dx = \int_0^1 f_j A_j \theta_{ji} dx \; (i = 0, 1, \ldots, m-1; j = 1, 2, \ldots k), \; \text{(IV)}$$

де

$$y_{jm}=a_{j0}^{(m)}\varphi_{j0}(x)+a_{j1}^{(m)}\varphi_{j1}(x)+\ldots+a_{j,m-1}^{(m)}\varphi_{j,m-1}(x),$$

матимемо

$$y_j=\lim_{m=\infty} y_{im} \qquad (j=1,\ 2,\ldots k).$$

Іншими словами, для диференціяльного рівнання (I) та (III) маємо довести збіжність способу наближеної інтеграції, визначеного рівнаннями (II) та (IV).

Ми обмежуємося тут випадком, коли розв'язки задач (I) та (III) справджують *однорідні* лінійні умови на кінцях інтервалу (0, 1), бо на нього можна звести й випадок умов неоднорідних, заступивши функції y та y_j відповідно функціями $z+p(x)$, $z_j+p_j(x)$, де $p(x)$ та $p_j(x)$ є многочлени з відповідно дібраними сучинниками.

Деякі висліди цієї розвідки стисло подано в моїй замітці в Comptes Rendus Паризької Академії Наук (Т. 187, p. 411) та в параграфі з артикулу „Про спосіб найменших квадратів та про спосіб моментів у теорії наближеної інтеграції диференціяльних рівнань" (Вісті Київського Політехнічного Інституту, 1928).

Так само визначено праці акад. М. Крилова, що їх автор використав.

1

Далі нам доведеться користуватися з системи функцій

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots, \tag{1}$$

що має наступну властивість.

Розгляньмо на інтервалі (0, 1) збір усіх функцій $F(x)$, що їхні r—і похідні $F^{(r)}(m)$ існують та справджують Lipschitz'ову умову δ-го ступеня, і нехай кожну з функцій $F(x)$ можна наближено представити сумою

$$F_m(x)=f_0^{(m)}\varphi_0(x)+f_1^{(m)}\varphi_1(x)+\ldots+f_{m-1}^{(m)}\varphi_{m-1}(x)$$

зі сталими сучинниками $f_i^{(m)}$ так, що ріжниці

$$E(x)-F_m(x),\ F'(x)-F'_m(x),\ldots F^{(k)}(x)-F_m^{(k)}(x)$$

є відповідно

$$\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}=\frac{M_m(x)}{m^{r-k+\delta}},\quad \varepsilon_{m-1}^{(r-k+\delta)}(x)=\frac{M_{m-1}(x)}{m^{r-k+\delta}},\ldots,\quad \varepsilon_{mk}^{(r-k+\delta)}(x)=\frac{M_{mk}(x)}{m^{r-k+\delta}}, \tag{2}$$

а M_m, $M_{m_1},\ldots M_{mk}$ є обмежені функції від m та від x. Після дослідів С. Бернштейна за таку систему (1) можна взяти, напр.

$$1,\ x,\ x^2,\ldots$$

Подібні системи називатимемо $(r,\ k,\ \delta)$ повними або абсолютно повними. Коли не всі функції $F(x)$ мають зазначену властивість щодо системи (1), а лише ті з них, що справджують лінійні однорідні граничні умови

$$\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{(j)}F^{(i)}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_{k+1}^{(j)}F^{(j)}(1)=0 \quad (j=1,\ 2,\ldots,\ k), \tag{3}$$

то таку систему (1) теж називатимемо (r, k, δ) повною, але *умовно*, за умов (3). Напр., коли з функцій $F(x)$ взяти ті, що мають період 1, то за систему (1) можна взяти

$$1, \ \sin 2\pi x, \ \cos 2\pi x, \ \sin 4\pi x, \ \cos 4\pi x, \ldots$$

Коли обмежитися тими функціями $F(x)$, що справджують умови

$$F(0) = F'(0) = \ldots = F^{(k-1)}(0) = 0,$$

то такою системою буде

$$x^k, \ x^{k+1}, \ x^{k+2}, \ldots$$

Доведімо, що взагалі *за умов* (3) *систему* (1) *можна дібрати так, щоб усі функції* φ_l *справджували ті самі умови* (3):

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} \varphi_l^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} \varphi_l^{(i)}(1) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1, \ l = 0, 1, 2, \ldots) \quad (4)$$

Справді, є безліч многочленів, що додержують умов (4); візьмімо за φ_0 один із них, найнижчого можливого ступеня l_0, за φ_1 — другий, дальшого вищого ступеня l_1, і т. д. Очевидно почавши з певного значка $v \leqslant 2k$, ці многочлени можна, напр., вибрати так:

$$\varphi_v(x) = x^p(1-x)^p, \ \varphi_{v+1}(x) = x^{p+1}(1-x)^p, \ \varphi_{v+2}(x) = x^{p+2}(1-x)^p, \ldots,$$

де число p є напевно не більше за k. Долучивши до так утвореної системи функцій φ_i, ще

$$1, \ x, \ldots, \ x^{l_0-1}, \ x^{l_0+1}, \ldots, \ x^{l_1-1}, \ x^{l_1+1}, \ldots,$$

дістанемо очевидно абсолютно повну систему. Отже існує функція

$$F_m(x) = g_0^{(m)} + g_1^{(m)} x + \ldots + g_{l_0-1}^{(m)} x^{l_0-1} + g_{l_0+1}^{(m)} x^{l_0+1} + \ldots + g_{l_1-1}^{(m)} x^{l_1-1} +$$
$$+ g_{l_1+1}^{(m)} x^{l_1+1} + \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)} \varphi_i(x),$$

що справджує умови

$$F - F_m = \varepsilon_m^{(r-k+\delta)}, \ \ F' - F'_m = \varepsilon_{m1}^{(r-k+\delta)}, \ldots, \ F^{(k)} - F_m^{(k)} = \varepsilon_{mk}^{(r-k+\delta)},$$

де функції

$$\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}, \ \varepsilon_{m1}^{(r-k+\delta)}, \ldots, \ \varepsilon_{mk}^{(r-k+\delta)} \ \text{є типу (2).}$$

З цього висновок, що з похибкою типу (2) многочлен

$$g_m(x) = g_0^{(m)} + g_1^{(m)} x + \ldots + g_{l_0-1}^{(m)} x^{l_0-1} + g_{l_0+1}^{(m)} x^{l_0+1} + \ldots + g_{l_1-1}^{(m)} x^{l_1-1} +$$
$$+ g_{l_1+1}^{(m)} x^{l_1+1} + \ldots$$

справджує умови (3). Тимчасом система рівнань

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} g_m^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} g_m^{(i)}(1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots k)$$

справджується, з огляду на добір функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, лише нулевими вартостями сучинників $g_i^{(m)}$; отже всі вони в суми $F_m(x)$ є малі типу (2), а сума

$$F_m(x) - g_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

є теж наближення функції $F(x)$ з похибкою типу (2).

Так само можна утворити k систем функцій

$$\varphi_{j0}(x),\ \varphi_{j1}(x),\ \varphi_{j2}(x), \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{5}$$

відповідно повних щодо функцій

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots,\ F_k(x), \tag{6}$$

з похідними

$$F_1^{(r)}(x),\ F_2^{(r)}(x), \ldots,\ F_k^{(r)}(x)$$

що справджують Lipschitz'ові умови δ-го ступеня, за умов

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} F_j(0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+1}^{(j)} F_j(1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{7}$$

Інакше кажучи, k систем функцій (5) даються дібратись так, напр., у формі многочленів, що всякий збір функцій F_j' можна представити відповідно сумами

$$F_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} f_{ji}^{(m)} \varphi_{ji}'(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

з похибками типу

$$\varepsilon_{jm}^{(r-1+\delta)} = \frac{M_{jm}(x)}{m^{r-1+\delta}},$$

де M_{jm} обмежені функції від x та від m.

Далі скрізь уважатимемо функції φ_i та φ_{ji} за многочлени.

2

Доведімо теорему, що далі матиме основне значіння.

Теорема 1. Коли p-та похідна функції $\Gamma(\xi)$ є скінчена на інтервалі (0,1) та справджує Lipschitz'ову умову на інтервалах $(0,x)$, $(x,1)$, а функції

$$\theta_0(x),\ \theta_1(x),\ \theta_2(x), \ldots$$

творять абсолютно повну систему, то є таке наближення

$$\Gamma_m(\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m)} \theta_i(\xi)$$

цієї функції, що

$$\int_0^1 (\Gamma - \Gamma_m)^2 \, d\xi = \frac{M_m}{m^{\frac{2}{3}(p+1)}} \quad \text{або} \quad \frac{M_m}{m^{2p}} \tag{8}$$

де M_m є обмежена функція від m.

Довід. У всякій точці інтервалів $(0,\ x-h)$ та $(x,\ 1-h)$ можна представити $\Gamma(\xi)$ функцією

$$F(\xi) = \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} \Gamma(\xi) \, d\xi \tag{9}$$

з похибкою $hP_m(\xi)$, де P_m величина обмежена. З другого боку, на інтервалі $(0,1)$ функцію $F(\xi)$ можна представити лінійною комбінацією $\Gamma_m(\xi)$ з функцій

$$\theta_0(\xi),\ \theta_1(\xi), \ldots,\ \theta_{m-1}(\xi)$$

з похибкою типу $h^{-1} m^{-p-1} Q_m(\xi)$, де Q_m є величина обмежена. Отже й різниця $\Gamma - \Gamma_m$ на інтервалі $(0,1)$ за винятком хіба проміжок $(x-h,\ x)$ та $(1-h,\ 1)$ є величина типу

$$h\, P_m(\xi) + h^{-1}\, m^{-p-1}\, Q_m(\xi),$$

а тоді

$$\int_0^1 (\Gamma - \Gamma_m)^2 \, d\xi = (p_m h + q_m h^{-1} m^{-p-1})^2 + r_m h,$$

де p_m, q_m, r_m є обмежені функції від m. Взявши тут $m^{\frac{2}{3}(p+1)}$ за h, дістанемо перший вислід теореми. Другий просто випливає з існування такої $\Gamma_m(\xi)$, що

$$\Gamma - \Gamma_m = \frac{M_m(\xi)}{m^p}$$

Зауважмо, що коли

$$\Gamma(\xi) = \frac{d^l}{dx^l} G(x, \xi) \qquad (l = 0,\ 1, \ldots,\ k-1),$$

де $G(x, \xi)$ є Green'ова функція лінійного диференціяльного рівнання k-го $(k > 1)$ порядку, то напевно за p можна взяти 0, а коли $G(x, \xi)$ є ще й симетрична, то при $l = 0$ можна взяти $p = k - 1$.

3

Очевидно, систему функцій φ_i можна заступити системою функцій

$$\psi_l(x) = \sum_{i=0}^{l-1} k_i^{(l)} \varphi_i(x) + \varphi_l(x) \quad (l = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{10}$$

де $k^{(l)}$ є сталі числа, що визначаються з рівнань:

$$\int_0^1 L[\psi_m]\, A\, \varphi_i^{(k)}\, dx = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ m = 1,\ 2 \ldots) \tag{11}$$

цілком, коли

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 L[\varphi_0]\, A\varphi_0^{(k)}\, dx, & \int_0^1 L[\varphi_1]\, A\varphi_0^{(k)}\, dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}]\, A\varphi_0^{(k)}\, dx \\ \int_0^1 L[\varphi_0]\, A\varphi_1^{(k)}\, dx, & \int_0^1 L[\varphi_1]\, A\varphi_1^{(k)}\, dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}]\, A\varphi_1^{(k)}\, dx \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^1 L[\varphi_0]\, A\varphi_{m-1}^{(k)}\, dx, & \int_0^1 L[\varphi_1]\, A\varphi_{m-1}^{(k)}\, dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}]\, A_{m-1}^{(k)}\, dx \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12}$$

для всіх вартостей m. Повна система функцій

$$\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2, \ldots \tag{13}$$

має властивість:

$$\int_0^1 L[\psi_m]\, A\, \psi_l^{(k)}\, dx = 0 \qquad (l = 0,\ 1, \ldots m-1) \tag{14}$$

Так само систему функцій (5) можна заступити системами з функцій

$$\psi_{jl}(x) = \sum_{i=0}^{l-1} k_{ji}^{(l)} \varphi_{ji}(x) + \varphi_{jl}(x) \qquad (l = 0,\ 1.\ 2, \ldots,\ j = 1,\ 2, \ldots k) \tag{15}$$

теж повними, що справджують рівності

$$\int_0^1 L_j[\psi_{1m},\ \psi_{2m}, \ldots \psi_{km}]\, A_j \psi_{j\,je}^{(k)} dx = 0, \quad (l = 0, 1, \ldots,\ m-1) \tag{16}$$

якщо система лінійних рівнань щодо $k_{ji}^{(m)}$

$$\int_0^1 L_j[\psi_{1m},\ \psi_{2m}, \ldots,\ \psi_{km}]\, A_j\, \varphi_{ji}^{(k)}\, dx = 0 \qquad (i = 0,\ 1, \ldots m-1) \tag{17}$$

має один і лише один розв'язок для всіх вартостей m.

Щодо нерівности (12), то при неозначенім чиннику λ вона справджується напевно, коли функції $\varphi_i^{(k)}$ лінійно незалежні, бо тоді, як відомо,

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 A^2 \varphi_0^{(k)} \varphi_0^{(k)} dx, & \int_0^1 A^2 \varphi_1^{(k)} \varphi_0^{(k)} dx, \ldots & \int_0^1 A^2 \varphi_{m-1}^{(k)} \varphi_0^{(k)} dx \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_0^1 A^2 \varphi_0^{(k)} \varphi_{m-1}^{(k)} dx, & \int_0^1 A^2 \varphi_1^{(k)} \varphi_{m-1}^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 A^2 \varphi_{m-1}^{(k)} \varphi_{m-1}^{(k)} dx \end{vmatrix} > 0 \qquad (18)$$

Цей випадок напр., маємо, коли функції φ_i справджують граничні умови

$$\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = \ldots = \varphi_i^{(l-1)}(0) = 0$$
$$\varphi_i(1) = \varphi_i'(1) = \ldots \varphi_i^{(k-l-1)}(1) = 0$$

Нехай в загальнім випадку,

$$\varphi_0^{(k)}(x) = \varphi_1^{(k)}(x) = \ldots = \varphi_{v-1}^{(k)}(x) = 0\,; \;\; \varphi_v^{(k)}(x) \neq 0 \qquad (19)$$

тоді функції

$$\varphi_v^{(k)},\ \varphi_{v+1}^{(k)},\ \varphi_{v+2}^{(k)}, \ldots$$

є, очевидно, лінійно незалежні і при неозначенім λ

$$\begin{vmatrix} \int_0^1 L[\varphi_v] A\varphi_v^{(k)} dx, & \int_0^1 L[\varphi_{v+1}] A\varphi_v^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}] A\varphi_v^{(k)} dx \\ \int_0^1 L[\varphi_v] A\varphi_{v+1}^{(k)} dx, & \int_0^1 L[\varphi_{v+1}] A\varphi_{v+1}^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}] A\varphi_{v+1}^{(k)} dx \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_0^1 L[\varphi_v] A\varphi_{m-1}^{(k)} dx, & \int_0^1 L[\varphi_{v+1}] A\varphi_{m-1}^{(k)} dx, \ldots, & \int_0^1 L[\varphi_{m-1}] A\varphi_{m-1}^{(k)} dx \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (20)$$

Отже й за умови (20) функції (13) дібрати можна згідно з рівняннями (11). Справді, ці рівняння не суперечні, бо серед них є якраз стільки лінійно незалежних, скільки серед функцій

$$\varphi_0^{(k)},\ \varphi_1^{(k)}, \ldots,\ \varphi_{m-1}^{(k)}. \qquad (21)$$

4

Нехай лінійне диференціяльне рівнання

$$L(y) = A(x)\, y^{(k)} + \lambda A_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + \lambda A_k(x)\, y = f(x) \qquad (22)$$

порядку $k > 1$ має на інтервалі $(0, 1)$ при $\lambda = 1$ єдиний інтеґрал, що справджує умови (23)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(j)} y^{(j)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{k+i}^{(j)} y^{(i)}(1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots k) \tag{23}$$

Пошукаймо його наближений вираз у формі

$$y_m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m)} \varphi_i, \tag{24}$$

припускаючи, що існують і справджують Lipschitz'ові умови δ-го ступеня функції

$$A^{(r-k)},\ A_1^{(r-k)}, \ldots,\ A_k^{(r-k)},\ f^{(r-k)}$$

і що функції φ_i творять (r, k, δ) — повну систему за умов (23). Не фіксуючи зразу вартости параметра λ, доберемо сучинники $a_i^{(m)}$ згідно з рівнаннями

$$\int_0^1 L[y_m]\, A\, \varphi_i^{(k)}\, dx = \int_0^1 f \varphi_i^{(k)}\, dx \qquad (0, 1, \ldots, m-1) \tag{25}$$

що можливо з огляду на умови (19) та (20).

Теорема II. Коли функції $\varphi_i^{(k)}$ творять абсолютно повну систему, то вираз (24), де сучинники $a_i^{(m)}$ справджують рівнання (25), відрізняється від інтеґрала y цього рівнання для вартостей параметра близьких до 1 на величину ступеня мализни меншого, як

$$\varepsilon_m^{r-k+\delta}(x) = \frac{M_m}{m^{r-k+\delta}}, \tag{26}$$

де M_m є функція, обмежена від m, λ та x, залежна від A, $A_1, \ldots A_k$ та f.

Довід. Впровадивши зазначення

$$u_m = y_m - y, \tag{27}$$

можемо, очевидно, дібрати такі сучинники $b_i^{(m)}$, що буде

$$u_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{m-1} b_i^{(m)} \varphi_i^{(k)} - \frac{1}{A} \varepsilon_m^{r-k+\delta} \tag{28}$$

Тоді систему рівнань (25) можна заступити такою:

$$\int_0^1 L[u_m]\, A\, \varphi_i^{(k)}\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots m-1) \tag{29}$$

Завдяки рівності (28), можемо утворити з рівностей (29) наступну лінійну комбінацію:

$$\int_0^1 L[u_m]\, (A u_m^{(k)} + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})\, dx = 0 \tag{30}$$

Зазначивши через η ріжницю $L[u_m] - Au_m^{(k)}$, перепишемо рівність (30) так:

$$\int_0^1 (Au_m^{(k)} + \eta_m)\,(Au_m^{(k)} + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})\,dx = 0,$$

звідки, за допомогою нерівности Буняковського, дістанемо:

$$\int_0^1 A^2 (u_m^{(k)})^2\,dx - 2\mu \sqrt{\int_0^1 A^2 (u_m^{(k)})^2\,dx \int_0^1 (\eta_m + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})^2\,dx} +$$

$$+ \int_0^1 \eta_m\,\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\,dx = 0,$$

де

$$|\,\mu\,| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$\sqrt{\int_0^1 (Au_m^{(k)})^2\,dx} = \mu \sqrt{\int_0^1 (\eta_m + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})^2\,dx} \pm$$

$$\pm \sqrt{\mu^2 \int_0^1 (\eta_m + \varepsilon_m^{(r-k+\delta)})^2\,dx - \int_0^1 \eta_m\,\varepsilon_m^{(v-k+\delta)}\,dx}$$

отже

$$\int_0^1 (Au_m^{(k)})^2\,dx \leqslant \int_0^1 (|\eta_m| + |\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}/)^2\,dx \tag{31}$$

Зазначивши Green'ову функцію виразу

$$L[y(x)] = A(x)\,y^{(k)} + A_1 x y^{(k-1)} \ldots + A(x)\,y$$

за умов (23) через $G(x, \xi)$, матимемо:

$$\left.\begin{aligned}
u_m(x) &= \int_0^1 G(x,\xi)\,.\,L[u_m(\xi)]\,\xi d \\
u_m'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\,.\,L[u_m(\xi)]\,d\xi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_m^{(k-1)}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial^{k-1} G(u,\xi)}{\partial x^{k-1}}\,.\,L[u_m(\xi)]\,d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

де в сучинниках $A_1 A_1 \dots A_k$, f узято ξ замість x. Взявши тепер за функцію $\Gamma(\xi)$ теореми I параграфу 2 ступнево функції

$$\Gamma^{(1)}(x,\xi) = \frac{1}{A(\xi)} G(x,\xi),\ \xi^{(2)}(x,\xi) = \frac{1}{A(\xi)} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}, \dots, \Gamma^{(k)}(x,\xi) = \frac{1}{A(\xi)} \frac{\partial G^{k-1}(x,\text{-})}{\partial x^{k-1}}$$

і додавши до рівностей (32) належно дібрані лінійні комбінації з рівностей (29), дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} u_m(x) &= \int_0^1 \gamma_m^{(1)}(x,\xi) \,.\, L[u_m(\xi)]\, d\xi, \\ u'_m(x) &= \int_0^1 \gamma_m^{(2)}(x,\xi) \,.\, L[u_m(\xi)]\, d\xi, \\ \dots\dots\dots\quad & \\ u_m^{(k-1)}(x) &= \int_0^1 \gamma_m^{(k)}(x,\xi) \,.\, L[u_m(\xi)]\, d\xi, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

де в зазначеннях згаданої теореми

$$\gamma_m^{(i)} = \Gamma^{(i)} - \Gamma_m^{(i)} \qquad (i = 1,\ 2, \dots, k).$$

Отже, з огляду на відомі властивості Green'обої функції, маємо:

$$\int_0^1 (\gamma_m^{(i)})^2\, d\xi = \frac{M_m^{(i)}}{m^{\frac{2}{3}}} = \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Далі, використавши знов нерівність Буняковського, дістанемо з (33)

$$\left.\begin{aligned} u_m^2(x) &\leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 L^2[u_m(\xi)]\, d\xi \\ [u'_m(x)]^2 &\leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 L^2[u_m(\xi)]\, d\xi \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \left[u_m^{(k-1)}(x)\right]^2 &\leqslant \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 L^2[u_m(\xi)]\, d\xi \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ці нерівності, по використанні залежности (31) та нерівности Cauchy, перетворяться в наступні:

$$\left[u_m^{(i)}(x)\right]^2 \leqslant 4\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 \left(\left|\eta_m\right| + \left|\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right|\right)^2 dx \qquad (i = 0_1,\ 1, \dots k-1),$$

звідки

$$\left[u_m^{(i)}(x)\right]^2 \leqslant 4\,(k+1)\,M^2\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)} \int\limits_0^1 \left[\left(u_m^{(k-1)}\right)^2 + \ldots + u_m^2 + \left(\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right)^2\right] d\xi, \qquad (35)$$

де M максимум модулів функцій

$$1,\ \lambda A_1,\ \lambda A_2, \ldots \lambda A_k.$$

Із нерівностей (35) легко виводимо:

$$\left[u_m^{(i)}(x)\right]^2 \leqslant \frac{4(k+1)\,M^2\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1-4(k+1)\,M^2\,\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \left[\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right]^2 \qquad (i = 0_1,\ 1, \ldots, k-1), \qquad (36)$$

якщо число m дібрано таке велике, щоб знаменник цього виразу був додатній.

Цим показано, що для всіх вартостей λ близьких до 1 ріжниці

$$y_m - y,\ y'_m - y',\ y_m^{(k-1)} - y^{(k-1)}$$

мають ступені мализни відповідно не слабші від ступеня мализни виразу

$$\varepsilon_m^{\left(r-k+\delta+\frac{1}{3}\right)} = M_m\, m^{-\left(r-k+\delta+\frac{1}{3}\right)}.$$

Коли система функції $\varphi_i^{(k)}$ не є абсолютно повна, то, щоб висліди цього параграфу лишилися правдиві, досить в рівнаннях (25) *заступити* $\varphi_i^{(k)}$ *функцією* x^i.

Ясно, що в основному подані висліди не порушуються, коли припустити, що функції A_1, $A_1 \ldots A_k$, f мають перерви; слід тільки подані вище міркування застосувати до рівнання, де замість тих функцій узято

$$\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} A\,dx,\quad \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} A_1\,dx, \ldots,\quad \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} A_k\,dx,\quad \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f\,dx$$

і зменшувати h належним робом разом із $\frac{1}{m}$.

5

Коли

$$G(x,\ \xi) = G((\xi,\ x), \qquad (37)$$

то на підставі *теореми I* параграфу 2 можна першу з рівностей (34) заступити такою:

$$u_m^2(x) \leqslant \varepsilon_m^{(2k-2)} \int\limits_0^1 L^2\left[u_m(\xi)\right] d\xi,$$

або такою

$$u_m^2(x) \leqslant 4(k+1)\, M^2\, \varepsilon_m^{(2k-2)} \int\limits_0^1 \Big[\left(u_m^{(k-1)}\right)^2 + \ldots + u_m^2 + \left(\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right)^2\Big] d\xi,$$

що з допомогою нерівностей (36) для $i = 1, 2, \ldots k-1$ дає

$$u_m^2(x) \leqslant N_m\, \varepsilon_m^{(2k-2)} \left(\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}\right)^2,$$

де N_m — обмежена функція від m. Отож бачимо, що ріжниця $y_m - y$ має в цьому випадку ступінь мализни не слабший за ступінь мализни числа $m^{-(r+\delta-1)}$; звідси, на підставі загальної теорії наближення функцій многочленами, виводимо, що ступінь мализни ріжниці $y_m^{(h)} - y^{(h)}$ є не слабший від ступеня мализни числа $m^{-(r+\delta-1-h)}$.

Розберемо докладніше випадок рівнання

$$y'' - A(x)\, y = f(x) \tag{38}$$

за умов

$$y(0) = y(1) = 0,$$

що якраз справджує вимогу (37).

В цьому випадку та й у деяких загальних поданий вище спосіб є тотожний в істоті за Ritz'овим варіяційним алгоритмом і доводить його збіжність усякий раз, коли шукана функція y існує. Досліди М. Крилова дали дуже точні визначення похибок наближених інтеґралів у Ritz'овім способі для різних важливих випадків. Тому застосування наших загальних міркувань до цієї задачі подаємо без подробиць.

Як відомо, коли η_1 та η_2 є інтеґрали однорідного рівнання

$$\eta'' - A(\xi)\, \eta = 0$$

и справджують вимоги

$$\eta_1(0),\ \eta_2(1) = 0,$$

то Green'ова функція задачі (38) є

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\eta_1(\xi)\, \eta_2(x)}{\eta'_1(0)\, \eta_2(0)} & \text{для } \xi < x \\[2ex] \dfrac{\eta_2(\xi)\, \eta_1(x)}{\eta'_1(0)\, \eta_2(0)} & \text{для } \xi > x. \end{cases} \tag{39}$$

Способом ступеневих наближень знайдемо

$$\eta_1(x) = \eta'_1(0)\, \upsilon(x), \qquad \eta_2(x) = \eta_2'(0)\, \upsilon(1-x),$$

де

$$\upsilon(x) = x + \int\limits_0^x \int\limits_0^x A(x)\, dx^2 + \int\limits_0^x \int\limits_0^x A\left(\int\limits_0^x \int\limits_0^x A(x)\, dx^2\right) dx^2 + \ldots$$

Отже

$$|G'(v_\xi)| \leqslant \frac{max\,|\upsilon|\, max\,|\upsilon'|}{|\upsilon(1)|} \leqslant \frac{e^M + e^{-M}}{4\,|\upsilon(1)|\,\sqrt{M}},$$

де

$$M = max\,|\,A(x)\,|,$$

а $|\,\upsilon(x)\,|$ можна взяти наближено з недостачею.

Величина, що в формулах (34) зазначена через $\varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}$, тепер буде, як відомо з теореми I та з теорії наближення функцій многочленами, ступеня мализни не слабшого за ступінь мализни числа m^{-2}, а саме не перевищуватиме

$$\varepsilon_m^2 = Q \cdot \frac{e^M - e^{-M}}{4m^2|\upsilon(1)|\sqrt{M}} \geqslant Q \cdot \frac{max\,|G_\xi'|}{m^2} \tag{40}$$

де Q не залежить ні від m, ні від функцій A та f.

Поклавши $r=2$, $\delta=1$, матимемо так само, що

$$\left|\varepsilon_m^{(r-k+\delta)}{}_{(x)}\right| = \left|\varepsilon_m^{(\delta)}\right| \leqslant k \cdot \frac{|\,y'''\,|}{m} \leqslant k\,\frac{N\,max\,|\,y\,| + P}{m}, \tag{41}$$

де k не залежить ні від m, ні від функцій A та f, а

$$N = max\,|\,A'(x)\,| + [max\,|\,A(x)\,|\,]^2,\ P = max\,|\,f'(x)\,| + max\,|\,A\,|\,max\,|\,f(x)\,|.$$

Замість рівностей (35) матимемо:

$$u_m^2(x) \leqslant 8\varepsilon_m^{(2)} \int_0^1 \left[M^2 u_m^2 + \left(\varepsilon_m^{\delta}\right)^2\right] d\xi$$

або

$$u_m^2 \leqslant \frac{8\varepsilon_m^{(2)}\left(\varepsilon_m^{(\delta)}\right)^2}{1 - 8M^2\varepsilon_m^{(2)}} = \eta_m^2 \cdot \left(\varepsilon_m^{(\delta)}\right)^2, \tag{42}$$

звідки

$$|\,y_m - y\,| \leqslant k\,\eta_m\,\frac{N\,max\,(y) + P}{m}, \tag{43}$$

Отже

$$|\,y\,| \leqslant \left[max\,|\,y_m\,| + \frac{k\,\eta_m P}{m}\right] : \left[1 - \frac{k\,\eta_m N}{n}\right], \tag{44}$$

якщо

$$\frac{k\,\eta_m N}{m} < 1.$$

Підставивши (44) в праву сторону нерівности (43), дістанемо:

$$|\,y_m - y\,| \leqslant k\eta_m \cdot \frac{N\,max\,|\,y_m\,| + P}{m - k\,\eta_m N} =$$

$$= k\sqrt{\frac{8\varepsilon_m^{(2)}}{1 - 8M^2\varepsilon_m^{(2)}}} \cdot \frac{N\,max\,|\,y_m\,| + P}{m - kN\sqrt{\dfrac{8\varepsilon_m^{(2)}}{1 - 8M^2\varepsilon_m^{(2)}}}}, \tag{45}$$

що й дає похибку наближеного інтеґралу y_m, коли взяти під увагу рівність (40).

В загальнім випадку буде

$$\left|\varepsilon_{m\ (x)}^{(r-k+\delta)}\right| \leq \frac{k \max |y^{(r)}|}{m^{r-k+\delta}}, \tag{46}$$

де k є стала величина, незалежна ні від m, ні від $A_1, A_1, \ldots A_k, f$.

З другого боку, наше диференціяльне рівнання визначає $y^{(r)}$ як лінійну функцію від $y, y', \ldots y^{(k-1)}$. Отже з (36) маємо:

$$\left|y_m^{(i)} - y^{(i)}\right| \leq L_i \frac{\rho + |y| + |y'| + \ldots + |y^{(k-1)}|}{m^{r-k-\delta}} \cdot \eta_i, \tag{47}$$

де L_i та ρ легко визначити через k й через модулі функції $A_1, A_1, \ldots A_k, f$ та їхніх похідних, а

$$\eta_i = \sqrt{\frac{4(k+1) M^2 \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{1 - 4(k+1) M^2 \varepsilon_m^{\left(\frac{2}{3}\right)}}}. \tag{48}$$

Взявши m таке велике, щоб було

$$L = \sum \frac{|L_i \eta_i}{m^{r-k+\delta}} < 1,$$

бачимо з (47), що

$$\rho + |y| + |y'| + \ldots + |y^{(k-1)}| < \frac{\rho + |y_m| + |y'_m| + \ldots + |y_m^{(k-1)}|}{1 - L}.$$

Тоді нерівність (47) можна заступити такою:

$$\left|y_m^{(i)} - y^{(i)}\right| < \frac{L_i \eta_i}{1 - L} \cdot \frac{\rho + |y_m| + |y'_m| + \ldots + |y_m^{(k-1)}|}{m^{r-k+\delta}} \qquad (i = 0,\ 1, \ldots, (k-1),$$

що й дає похибку наближеного інтеґралу y_m та його $k-1$ похідних, коли відомі, хоч би дуже наближено, з перевишкою середні квадратичні вартості величини

$$G - G_m,\quad \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G_m}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} - \frac{\partial^{k-1} G_m}{\partial x^{k-1}}.$$

6

Інтеґрація системи

$$L_j[y_1, y_2, \ldots y_k] = A_j(x) y_j' + \lambda_j \sum_{i=1}^{k} A_{ji}(x) y_i = f_j(x) \quad (j = 1,\ 2, \ldots k) \tag{49}$$

за граничних умов

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)} y_i(0) + \sum_{i=k}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)} y_i(1) = 0 \quad (j = 1,\ 2, \ldots k) \tag{50}$$

є рівноважна з задачею інтеґрації одного лінійного рівнання k-го порядку, що її розібрано вище. Тому задачу (49) розглянемо коротко. Припустивши, що для $\lambda_j = 1$, і за умов (50) вона має єдиний розв'язок:

$$y_1, \ y_2, \ldots y_k,$$

шукаємо його в формі сум

$$y_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ji}^{(m)} \varphi_{ji} \qquad (j = 1, \ 2, \ldots k), \tag{51}$$

де функції φ_{ji} узято з системи (5) параграфу 1, визначаючи сучинники $a_{ji}^{(m)}$ із системи рівнань:

$$\int_0^1 L_j [y_{1m}, \ y_{2m}, \ldots y_{km}] \, A_j x_i \, dx = \int_0^1 f_j \, A_j x^i \, dx \quad (j = 1, \ 2, \ldots k; \ i = 0, \ 1, \ldots, m-1) \tag{52}$$

Як і у випадку одного диференціяльного рівнання k-го порядку, можна довести, що ця система не суперечна. Впровадивши зазначення

$$u_{jm} = y_{jm} - y_j \qquad (j = 1, \ 2 \ldots k),$$

перепишемо (52) так:

$$\int_0^1 L_j [u_{1m}, u_{2m}, \ldots, u_{km}] \, A_j x^i \, dx = 0 \quad (j = 1, \ 2 \ldots k; \ i = 0, \ 1, \ldots m-1). \tag{53}$$

Коли всі функції A_{ji} та f_j мають похідні r-го порядку, що справджують Lipschitz'ові умови δ-го ступеня, то знайдуться такі сучинники $b_{ji}^{(m)}$, що буде

$$u'_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} b_{ji}^{(m)} x^i - \frac{1}{A_j} \varepsilon_{jm \ (x)}^{r-1+\delta}.$$

Отже з рівностей (53) можна утворити такі лінійні комбінації:

$$\int_0^1 L_j [u_{1m}, \ u_{2m}, \ldots u_{km}] \, [A_j u_j'{}_m + \varepsilon_{jm}^{r-1+\delta}] \, dx = 0 \quad (j = 1, \ 2, \ldots k).$$

Звідси легко виводимо:

$$\int_0^1 \left(A_j u'_{jm}\right)^2 dx = \mu_j \int_0^1 \left[u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + \ldots + u_{km}^2 + (\varepsilon^{r-1+\delta})^2\right] dx, \tag{54}$$

де μ_j є обмежені функції від m.

З другого боку, зазначивши через

$$\begin{array}{l} G_{11}(x, \xi), \ G_{12}(x, \xi), \ldots, \ G_{1k}(x, \xi) \\ G_{21}(x, \xi), \ G_{22}(x, \xi), \ldots, \ G_{2k}(x, \xi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{k1}(x, \xi), \ G_{k2}(x, \xi), \ldots, \ G_{kk}(x, \xi), \end{array}$$

Green'ову матицю системи (49), матимемо:

$$u_{jm}(x) = \int_0^1 \sum_{l=1}^{k} G_j(x, \xi)\, L_l\,[u_{1m}(\xi), u_{2m}(\xi), \ldots u_{km}(\xi)]\, d\xi, \tag{55}$$

де в функціях A_j, A_{ji}, f_j замість x поставлено ξ. Так само, як у параграфі 4 функцію G_{il} можна представити лінійною комбінацією з функцій

$$A_j(\xi)\,\xi^l \qquad (l = 0, 1, \ldots, m-1)$$

з середньою квадратичною похибкою γ_{jm}, яка йде до нуля разом із $\frac{1}{m}$, і виявити ступінь мализни цієї похибки. Тоді з допомогою рівностей (53) дістаємо з (55):

$$u_{jm}^2(x) \leqslant \gamma_{jm}^2 \int_0^1 L_j^2\,[u_{1m}(\xi), u_{2m}(\xi), \ldots u_{km}(\xi)]\, d\xi \quad (j = 1, 2 \ldots k), \tag{56}$$

а звідси

$$u_{jm}^2(x) \leqslant \eta_{jm} \int_0^1 \left[u_{1m}^2 + u_{2m}^2 + \ldots + u_{km}^2 + \left(\varepsilon_m^{r-1+\delta}\right)^2\right] d\xi \quad (j = 1, 2, \ldots k), \tag{57}$$

де

$$\lim_{m \to \infty} \eta_{jm} = 0.$$

Рівності (57), як подібні рівності в параграфі 4, доводять, що ріжниці

$$u_{jm} = y_{jm} - y_j$$

мають ступінь мализни вищий за ступінь мализни числа $m^{-(r-1+\delta)}$. Докладніший розбір цих похибок наближених вартостей y_{jm} функцій y_j ми опускаємо, бо в міркуваннях не було б нічого принципово відмінного від того, що подано в параграфі 5.

Зауважмо тут ще, що практично можна, утворюючи наближені інтеґрали y_m та y_{jm}, брати функції φ_{ji} з абсолютно повних систем. Але тоді доводиться в системах (25) та (52) відкидати по стільки рівнань, щоб сучинники $a_i^{(m)}$ та $a_{ji}^{(m)}$ могли справдити, крім решти цих рівнань, ще й граничні умови. Так можна визначати поблизено й загальний розв'язок, коли лишити серед тих сучинників k неозначених. Другим разом застосуємо подані засоби до розв'язання рівнань інтеґральних.

7

Заступивши в рівності (24) функції φ_i функціями ψ_i з параграфу 3, отже шукаючи наближений інтеґрал рівнання (22) у формі лінійної комбінації з функцій ψ_i, дістанемо інтеґрал y у формі ряду:

$$y = a_0\psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots,$$

що збігатиметься з огляду на доведене в параграфі 4 і що кожен його сучинник a_i визначатиметься в залежності лише від попередніх сучинників $a_0\, a_1 \ldots a_{i-1}$.

У випадку, коли функції $\psi_i^{(k)}$ творять абсолютно повну систему, обчислення зводиться на розв'язання системи нескінченного числа лінійних рівнань щодо a_0, a_1, $a_2, \ldots$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 f A \psi_0^{(k)} dx = a_0 \int_0^1 L[\psi_0] A \psi_0^{(k)} dx \\
&\int_0^1 f A \psi_1^{(k)} dx = a_0 \int_0^1 L[\psi_0] A \psi_1^{(k)} dx + a_1 \int_0^1 L[\psi_1] A \psi_1^{(k)} dx \\
&\int_0^1 f A \psi_2^{(k)} dx = a_0 \int_0^1 L[\psi_0] A \psi_2^{(k)} dx + a_1 \int_0^1 L[\psi_2] A \psi_2^{(k)} dx + \\
&\qquad\qquad + a_2 \int_0^1 L[\psi_2] A \psi_2^{(k)} x \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Зосібна, коли

$$\int_0^1 L[\psi_i] A \psi_j^{(k)} dx = \int_0^1 L[\psi_j] A \psi_i^{(k)} dx$$

для всякої пари значків i, j, то система рівнань (58) переводиться на простішу:

$$a_i \int_0^1 L[\psi_i] A \psi_i^{(k)} dx = \int_0^1 f A \psi_i^{(k)} dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Такий випадок маємо, напр., коли сучинники A_1, $A_1 \ldots$, A_k диференціяльного рівнання є сталі, а граничні умови є

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(h-1)}(0) = 0$$

$$y(1) = y'(1) = \ldots = y^{(k-h-1)}(1) = 0.$$

Коли система функцій $\psi_i^{(k)}$ не є абсолютно повна, то перші k з рівнань (58) можуть мати складніший вигляд, на чому тут не спиняємось. Щоправда, утворення функцій ψ_i є, з практичного погляду, не завжди виправдане, але, напр., у випадку, коли сучинники диференціяльного рівнання, мають вигляд

$$\sum \alpha x^\beta,$$

то воно обходиться легкими квадратурами та розв'язанням систем лінійних рівнань. Подібні ж міркування можна розвинути для систем звичайних лінійних диференціяльних рівнань та для лінійних рівнань з частинними похідними.

Коли закінчувалася ця розвідка, з'явилася праця E. Trefftz'а „Konvergenz und Fehlerschätzung beim Ritz'schen Verfahren" (Math. Ann., Bd 100, Hefte 4—5), де теж використовується Green'ову функцію, але іншим способом і лише для доводу збіжности Ritz'ового способу в застосуванні до лінійних рівнань із частинними похідними 2 порядку еліптичного типу. Вся трудність цих проблем, з погляду поданого тут способу, є в доборі функцій φ_i, що мають бути тут функціями двох змінних і справджувати граничні умови задачі. Тут ці функції, загалом кажучи, не можна взяти в форми многочленів. Але, коли згори вважати їх за дані, то наші міркування, без принципових одмін, можна застосувати до дуже загальних рівнань із частинними похідними, до чого автор має звернутися іншим разом.

M. KRAWTCHOUK

SUR L'IHTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Entre autres résultats l'auteur démontre le théorème suivant:

Soit $y_1, y_2, \ldots y_k$ la solution unique du système des équations différentielles

$$L_j[y_1, y_2 \ldots, y_k] = A_j(x)\, y_j' + A_{j1}(x)\, y_1 + A_{j2}(x)\, y_2 + \ldots + A_{jk}(x)\, y_k = \\ = f_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots k)$$

vérifiant les conditions frontières suivantes:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(j)}\, y_i(0) + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)}\, y_i(1) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots k);$$

soit encore

$$\varphi_{j0}(x),\ \varphi_{j1}(x),\ \varphi_{j2}(x), \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots k)$$

k systèmes complets de polynomes vérifiant les mêmes conditions

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(j)}\, \varphi_{im}(0) + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k+i}^{(j)}\, \varphi_{im}(1) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k;\ m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Alors les sommes

$$y_{jm} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{ji}^{(m)}\, \varphi_{ji}(x),$$

déterminées par les équations

$$\int_0^1 [L(y_{1m}, y_{2m}, \ldots y_{km}) - f_j]\, x^i\, dx = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots m-1;\ j = 1, 2, \ldots k)$$

remplissent les conditions suivantes:

$$y_j = \lim_{m \to \infty} y_{jm} \quad (j = 1, 2 \ldots k)$$
