М. К. КУРЕНСЬКИЙ

Про деякі звичайні диференціяльні рівнання

І. У статті Д. М. Синцова „Заметки об уравненіях, аналогичных уравненію Риккати“, Казань, 1894, розглядається декілька типів диференціяльних рівнань. Найбільше уваги звертається на рівнання вигляду

$$y' = Py^2 + Qy + R, \tag{1}$$

для якого Д. М. Синцов подає випадки інтеґрувальности та спочатку вказує й відповідну російську літературу: досліди Лєтнікова, Флорова, Олексієвського, Імшенецького та інших вчених.

Як я зауважив у розвідці цього року у І т. „Записок Київського ІНО“, Летніков випадок інтеґрувальности для (1), користуючись яким Лєтніків, Флоров та Олексієвський прийшли до можливости інтеґрування рівнань

$$y' = Py^2 + Qy - Pe^{2\int Q\,dx}\left(C - \int Pe^{\int Q\,dx}\,dx\right)^{-\frac{4i}{2i\pm 1}};$$

$$z' + Pz^2 = P\left(a + b\int P\,dx\right)^{-\frac{4k}{2k-1}}$$

є частинний випадок Abel'ової умови

$$R = a\,Pe^{2\int Q\,dx}$$

при $a = -1$, а Abel'ова умова є дуже частинний випадок моєї умови

$$\left[k\left(e^{\frac{1}{2}\int Q\,dx} - \frac{1}{2}\int Q\,e^{\frac{1}{2}\int Q\,dx}\,dx\right) + C\right]^4 R = a\,Pe^{2\int Q\,dx}$$

при $k = 0$; $C = \pm 1$.

У розвідці Н. В. Бугаєва за 1893 р. у 17 т. „Матем. Сборн.“ подається випадок інтеґрувальности

$$PQ' - QP' = 2\left(\frac{PQ^2}{4} - RP^2 - cP^3\right); \quad c = \text{const}\,^{1)};$$

1) У тексті Бугаєва замість cP^3 стоїть cP^2. Деякі з інших помилок виправлено у 19 т. Матем. Сборн.

цей випадок відповідає частинному випадкові мого рівнання

$$t' = \frac{1}{2}t^2 + \frac{\mu_1{}'}{\mu_1}t + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^2\right] - \frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)',$$

(Sitzungsberichte d. M. - N. - Aer. S. Sewčenko Gesellschaff in Lemberg. H. X. 1929) що воно володіє частинними інтеґралами

$$t_1 = -\frac{\mu' - \mu_1}{\mu}; \quad t_2 = -\frac{\mu' + \mu_1}{\mu},$$

коли покласти

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \quad \mu_1 = P.$$

11. Звернімо увагу на цікаве розкладання інтеґралу y рівнання (1) у ступанковий дріб, про яке йде мова й у розвідках П. С. Флорова та Д. М. Синцова; він подав влучну ідею будувати інтеґрувальні форми рівнання Ріккаті.

Перевівши рівнання (1) підстановкою

$$y = \frac{Z}{P} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{P}\right)' - \frac{Q}{P}\right] \tag{2}$$

до канонічного виду

$$Z' = Z^2 + J \tag{3}$$

$$\left(J = \frac{1}{4}\left[4PR - Q^2 + 2\left(\frac{P'}{P}\right)' + 2P\left(\frac{Q}{P}\right)' - \left(\frac{P'}{P}\right)^2\right]\right),$$

підстановкою

$$Z = \frac{2J^2}{J' - 2JZ_1},$$

зведемо рівнання (3) до такої саме канонічної форми

$$Z_1{}' = Z_1{}^2 + J_1.$$

Після n подібних операцій рівнання (3) набуде вигляду

$$Z_n{}' = Z_n{}^2 + J_n,$$

де інваріянт J_n зв'язаний буде з інваріянтом J_{n-1} попередньої операції формулою

$$J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2}(\lg J_{n-1})'' - \frac{1}{4}(\lg J_{n-1})'^2.$$

Вводячи скорочення запису

$$(\lg J)'' = \lg{}'' J; \quad (\lg J)'^2 = \lg{}'^2 y,$$

інваріянтів $J_1, J_2, \ldots$ через інваріянт J заданого рівнання (3) матимемо з таких формул:

$$J_1 = J + \frac{1}{2}\lg{}'' J - \frac{1}{4}\lg{}'^2 J;$$

$$J_2 = J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J + \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right);$$

$$J_3 = J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J + \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) + \frac{1}{2}\lg'^2\Big[J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J +$$

$$+\frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) - \frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\lg'^2\Big[\Big[J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J + \frac{1}{2}\lg''\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\lg'^2\left(J + \frac{1}{2}\lg''J - \frac{1}{4}\lg'^2 J\right)\Big]\Big];$$

. . . .

Коли після n операцій буде

$$2\lg''J_n = \lg'^2 J_n, \tag{4}$$

тоді ми матимемо інтеґрал Z скінченої форми, тому що

$$J_{n+1} = J_n; \quad Z_{n+1} = Z_n;$$

$$Z_n = \frac{2J_n^2}{J_n' - 2J_n Z_n},$$

або

$$Z_n = \frac{J_n' \pm \sqrt{J_n'^2 - 4\,.\,4J_n^3}}{4J_n}.$$

Інтеґрал заданого рівнання знайдеться з формули

$$Z = \cfrac{2J^2}{J' - \cfrac{4JJ_1^2}{J_1' - \cfrac{4J_1J_2^2}{J_2' - \ldots - \cfrac{4J_{n-2}J_{n-1}^2}{J_{n-1}' - 2J_{n-1}Z_n}}}}, \tag{5}$$

яку, користуючись n означеннями

$$-\frac{1}{J} = I; \quad -\frac{1}{J_1} = I_1; \ldots,$$

можна переписати у вигляді:

$$Z=\cfrac{1}{\cfrac{I'}{2}+\cfrac{I}{\cfrac{I_1'}{2}+\cfrac{I_1}{\cfrac{I_2'}{2}+\cdots+\cfrac{I_{n-2}}{\cfrac{I_{n-1}'}{2}+I_{n-1}Z_n}}}}.$$

III. Рівнання (4) можна переписати так:

$$\frac{J_n''}{J_n}-\frac{3}{2}\left(\frac{J_n'}{J_n}\right)^2=0\,; \tag{6}$$

загальний інтеґрал його є

$$J_n=\frac{k_1}{(x+k_2)^2}. \tag{7}$$

Таким чином, коли після скінченого ряду n операцій ми прийдемо до інваріянта (7), тоді інтеґрал рівнань (1), (3) матиме скінчену форму; буде

$$Z_n=\frac{-1\pm\sqrt{1-4k_1}}{2(x+k_2)},$$

а Z та y дістанемо з формул (5), (2).

Для дуже частинного випадку

$$n=0,$$

тобто для інваріянта

$$J=\frac{k_1}{(x+k_2)^2},$$

приходимо до можливости інтеґрувати рівнання Riccati

$$Z'=Z^2+c(x+k)^m \tag{8}$$

тоді, коли $m=0$, або $m=-2$; для такого інваріянта й рівняння (6) задовольняється; з випадку $m=0$, завдяки перетворенню й *незалежного змінного x*, дістанемо клясичний Liouville'ів випадок інтеґрувальности рівнянь 8) для

$$m=\frac{-4i}{2i+1} \tag{9}$$

(i — число ціле дод. або від'ємне).

Другий частинний випадок

$$n=1$$

переводить рівнання (6) у таке рівнання для вирахування інваріянта J рівнання (3) зі скінченим інтеґралом:

$$\frac{J''}{J}-\frac{3}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2+2J=\frac{2k_1}{(x+k_2)^2}. \tag{10}$$

Це рівнання має частинний інтеґрал

$$J = \frac{k_1}{(x+k_2)^2}.$$

Коли б пощастило знайти загальний інтеґрал рівнання (10), тоді, аналогічно тому, як це робиться для випадку $n=0$, завдяки перетворенням ще й незалежного змінного x, можна сподіватись знайти цілу клясу функцій J, яка при $n=0$ відповідає покажчикам m вигляду (9), що вони дають скінчений інтеґрал рівнання (8).

Випадок рівнання (10), для $k_1 = 0$ являє собою рівнання Д. М. Синцова

$$\frac{J''}{J} - \frac{3}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2 + 2J = 0,$$

проінтеґроване Д. М. Синцовим за допомогою функції $Sl(u) = \mathrm{sinus\ lemniscaticus}\ u$, яку дістанемо з функції $\mathrm{sinam}\,(u)$, коли для параметра k цієї функції взяти $k^2 = -1$.

IV. Теорія рівнань

$$y' = Py^3 + Qy^2 + Ry + S \tag{11}$$

почала розвиватись лише за останні часи. Рівнання цього вигляду, за Appell'ем (Journ. de Liouville, 1889), заміною залежного та незалежного змінного, зводяться до канонічної форми

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J, \tag{12}$$

де J є абсолютний інваріянт.

З задачею інтеґрування рівнання (12) є, між іншим, зв'язана, як я вже вказував у розвідці 1926 р., „Известия Казанского Физ.-Мат. О-ва", задача про троє тіл на одній простій: рівнання руху я привів до вигляду більш простого, ніж вигляд Euler'ів, або Jacobi'їв; тоді умова інтеґрувальности рівнань визначається моїм альґебричним рівнанням 4-го ступеня, другий, Euler'ів випадок, що він належить Jacobi, приводить до рівнання вигляду (12).

Для рівнання вигляду

$$yy' + py' + qy^2 = ry + s = 0, \tag{13}$$

канонічною формою є, за Кояловичем („Изследованія о диф. ур. $ydy - ydx = Rdx$". Диссерт., Спб., 1894 р.) така:

$$YY' - Y = R(X). \tag{14}$$

Підстановка $Y = \frac{1}{Z}$ переводить Кояловичове рівнання (14) до вигляду

$$Z' + Z^2 + R(X)Z^3 = 0\,; \tag{15}$$

це є один з типів рівнання (11); а саме: випадок рівнання (24), що на його вказав Д. М. Синцов, коли $M_1 = 1$ (друге рівнання Синцова (23) можна було б теж написати у Appell'овому вигляді (12).

Найбільш повне дослідження про форму інтеґралу рівнання

$$(T + Uy)\,y' = Py^3 + Qy^2 + Ry + S \tag{16}$$

та рівнання (11)[1]) зробив E. Häntschel (Crelle Journ., Bd. 112, 1893); частинними випадками його результатів є результати дослідів Güntsche[2]), Elliot (Ann. de l'Ec. Norm, 1890) та інших вчених.

Частинний випадок рівнання (16), коли $P=0$ є рівнання вигляду (13). Це саме можна сказати й про рівнання (11), (12), (14), (15).

Зупинімось лише на одному частинному випадкові рівнання (13), інакше — рівнання (16): залежність

$$(y-\omega_1)^m C+\omega_3 y=\omega_2\omega_3 \tag{17}$$

дає інтеґрал рівнання вигляду (13) при такій умові для коефіцієнтів:

$$\left[\frac{mpp'+(m-1)p^2q+pr-(m+1)s}{2pq+p'-r}\right]'+q\left[\frac{mpp'+(m-1)p^2q+pr-(m+1)s}{2pq+p'-r}\right]=$$

$$=\frac{m}{m+1}\left[r+mp'+(m-1)pq\right];$$

функції ω_1, ω_2, ω_3, легко дістанемо через p, q, r, s квадратурами.

Рівнання (17) при

$$m=1$$

дає загальний інтеґрал рівнання Riccati (1), а саме

$$y=\frac{C\omega_1+\omega_2\omega_3}{C+\omega_3},$$

де $\omega_1 \equiv y_2$ та $\omega_2 \equiv y_1$ — це частинні інтеґрали рівнання Riccati, а ω_3 визначається через частинні інтеґрали y_1, y_2, y_3 з формули

$$\omega_3=\frac{y_3-y_2}{y_1-y_3},$$

а для рівнання канонічної форми (3) задовольняє Schwarz'овому рівнанню[3])

$$\frac{\omega_3'''}{\omega_3'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\omega_3'''}{\omega_3'}\right)^2=2J, \quad \text{або} \quad \{\tilde{\omega}_3,\ x\}=2J.$$

Загальний інтеґрал рівнання Riccati (1) можна написати ще за такою моєю формулою:

$$y=\Omega_1+\Omega_2\operatorname{tg}(\Omega_3+C);$$

тоді між функціями ω та Ω матимемо залежності вигляду:

$$\omega_1=\Omega_1+i\Omega_2;\quad \omega_2=\Omega_1-i\Omega_2;\quad \omega_3=e^{2i\Omega_3}.$$

29/II 1929,
м. Київ

---

[1]) Це треба мати на увазі для моєї розвідки 1926 р., при розшукуванні форми інтеґралу рівнання (12).

[2]) Diss., Jena, 1891: *R. Güntsche*.— Beitrag zur Integration d. Differentialgleichung $\frac{dY}{dZ}=$ $=P_0+P_1y+P_2y^2+P_3y^3$, Berlin, 1893.

[3]) *M. Kourensky*. — Proceedings of the London Math. Soc., vol. 24, 1925; pp. 205, 498. *M. Kourensky*. — Sitzungsberichte der M.-N.-Är. S. Sewcenko Ges. in Lemberg, H. X, 1929.