Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome I, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ I.

~~№ 1.~~

1888

ХАРЬКОВЪ.
Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.
1888.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome I.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ I.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.
1889.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать разрѣшается.

Предсѣдатель Общества *К. Андреевъ.*

СОДЕРЖАНІЕ

I-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Мая 1889 года.

A. Распорядительный Комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: В. Л. Кирпичевъ и М. А. Тихомандрицкій.
3. Секретарь, А. П. Грузинцевъ.

B. Почетные члены.

1. Буняковскій Викторъ Яковлевичъ — академики.
2. Имшенецкій Василій Григорьевичъ — академики.
3. Чебышевъ Пафнутій Львовичъ — академики.

C. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. универс.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, б. проф. Харьк. универс.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, препод. Старобѣльск. гимн.
6. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
7. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. Технол. Инст.
8. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, Дирек. Изюмск. Реальн. уч.
9. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
10. Делярю Даніилъ Михайловичъ, б. проф. Харьк. универс.
11. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, препод. Хар. Техн. Инст.
12. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Харьк. Техн. Инст.
13. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, стипенд. Харьк. универс.
14. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
15. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьк. универс.
16. Косенко Михаилъ Семеновичъ, препод. Харьк. прогимн.
17. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. учил. Курск. губ.

18. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.
19. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Харьк. универс.
20. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. Харьк. Инст. благ. дѣвицъ.
21. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. универс.
22. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
23. Михаловскій Болеславъ Григорьевичъ, препод. Харьк. Рельн. уч.
24. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьк. универс.
25. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.
26. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, прив.-доц. Харьк. универс.
27. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
28. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. Техн. Инст.
29. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
30. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьк. Учебн. Окр.
31. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ.
32. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
33. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Харьк. Реальн. уч.
34. Синяковъ Германъ Афанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
35. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, стипенд. Харьк. унив.
36. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
37. Флавицкій Николай Михайловичъ, лабор. Харьк. универс.
38. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Урюпинск. Реальн. уч.
39. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
40. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
41. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьк. Реальн. учил.
42. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
43. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. Техн. Инст.

D. Члены-корреспонденты

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. С.П.Б. унив.
2. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. Кіевск. унив.
3. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московск. унив.
4. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. С.П.Б. унив.
5. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. С.П.Б. унив.
6. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. С.П.Б. унив.
7. Пташицкій Иванъ Львовичъ прив.-доц. С.П.Б. унив.
8. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варшавск. унив.

Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей.

В. Г. Имшенецкаго.

Во II т. Сборника Моск. Матем. Общ. за 1867 г. *П. Л. Чебышевъ* предложилъ доказательство одной общей теоремы *о среднихъ величинахъ*, частнымъ приложеніемъ которой является *законъ большихъ чиселъ* и частный случай этого послѣдняго, *теорема Я. Бернулли*.

Доказательство этого общаго предложенія можетъ быть упрощено, если цѣль его ограничить только выводомъ теоремы Бернулли, какъ это и было показано въ лекціяхъ *В. П. Ермакова*, (изд. въ 1879 г. въ Кіевѣ).

Въ сообщаемой ниже замѣткѣ имѣется въ виду показать, что при надлежащемъ обобщеніи пріема доказательства, которымъ пользовался проф. Ермаковъ, получается прямой и весьма простой выводъ закона большихъ чиселъ.

Пусть нѣкоторый опытъ повторяется m разъ, приводя каждый разъ къ одному изъ двухъ противоположнымъ событій E или F.

Положимъ, что соотвѣтственныя вѣроятности появленія событій E и F будутъ: p_1 и q_1 въ первомъ опытѣ, p_2 и q_2 во второмъ и т. д., такъ что мы будемъ имѣть:

$$p_1 + q_1 = 1\,, \quad p_2 + q_2 = 1\,, \ldots\ p_m + q_m = 1\,.$$

Составивъ цѣлую функцію отъ x,

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)\ \ldots\ (p_m x + q_m) = \\ &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

не трудно заключить, что въ ней вообще коэффиціентъ a_i степени x^i, при всѣхъ значеніяхъ $i=0, 1, \ldots m$, выражаетъ вѣроятность, что въ теченіе m упомянутыхъ опытовъ событіе E произойдетъ i разъ, чередуясь въ какой-либо послѣдовательности съ $m-i$ событіями F.

Слѣдовательно, означая черезъ P вѣроятность, что въ теченіе тѣхъ же m опытовъ событіе E произойдетъ, въ какомъ-либо порядкѣ, не менѣе h разъ и не болѣе $k>h$ разъ, будемъ имѣть

$$P=a_h+a_{h+1}+\ldots+a_{k-1}+a_k.$$

Теперь ясно, что

$$P<\sum_{i=0}^{m} a_i = f(1) = 1,$$

и далѣе имѣется въ виду вывести надлежащее выраженіе низшаго предѣла величины P.

Съ этой цѣлью полагая $h=\alpha-\beta$, $k=\alpha+\beta$, имѣемъ

$$P=\sum_{i=\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} a_i \qquad (2)$$

гдѣ
$$\alpha-\beta \overline{\overline{<}} i \overline{\overline{<}} \alpha+\beta$$
и слѣдовательно
$$-\beta \overline{\overline{<}} i-\alpha \overline{\overline{<}} +\beta.$$

Можно сказать поэтому, что во всѣхъ членахъ суммы (2) указатель i необходимо долженъ удовлетворять одному изъ двухъ условій:

$$\frac{(i-\alpha)^2}{\beta^2} \overline{\overline{<}} 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3)$$

Далѣе, черезъ вычитаніе равенства (2) изъ

$$1=\sum_{i=0}^{m} a_i$$

находимъ

$$1 - P = \sum_{i=0}^{\alpha-\beta-1} a_i + \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{m} a_i \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Въ обѣихъ суммахъ второй части (4) указатель i, очевидно, не выполняетъ условій (3), слѣдовательно въ нихъ число i должно подчиняться противоположному условію

$$\frac{(i-\alpha)^2}{\beta^2} > 1 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Вслѣдствіе же неравенства (5), существующаго вмѣстѣ съ равенствомъ (4), это послѣднее легко превращается въ слѣдующее неравенство

$$1 - P < \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=0}^{\alpha-\beta-1} (i-\alpha)^2 a_i + \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=\alpha+\beta+1}^{m} (i-\alpha)^2 a_i \, .$$

Придавъ сумму

$$\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} (i-\alpha)^2 a_i$$

ко второй большей части послѣдняго неравенства, мы увеличимъ ее еще болѣе и, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$1 - P < \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=0}^{m} (i-\alpha)^2 a_i$$

или

$$1 - P < \frac{1}{\beta^2} \left\{ \alpha^2 \sum_{i=0}^{m} a_i - 2\alpha \sum_{i=0}^{m} i a_i + \sum_{i=0}^{m} i^2 a_i \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Во второй части неравенства (6) одна изъ трехъ входящихъ въ нее суммъ извѣстна, именно

$$\sum_{i=0}^{m} a_i = 1 \, ;$$

остается поэтому найти значенія остальныхъ двухъ суммъ:

$$\sum_{i=0}^{m} ia_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{m} i^2 a_i.$$

Изъ опредѣленія (1) функціи $f(x)$ выводимъ двоякія выраженія ея двухъ послѣдовательныхъ производныхъ:

$$f'(x) = f(x) \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i x + q_i} = \sum_{i=0}^{m} ia_i x^{i-1}$$

и

$$f''(x) = f(x) \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i x + q_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2}{(p_i x + q_i)^2} \right\} = \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\, a_i x^{i-2}$$

Если сдѣлаемъ въ этихъ двухъ равенствахъ перемѣнную $x = 1$, то изъ нихъ легко выведемъ

$$\sum_{i=0}^{m} ia_i = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

и

$$\sum_{i=0}^{m} i^2 a_i = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{m} p_i^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i.$$

Послѣ введенія найденныхъ значеній суммъ Σa_i, $\Sigma i a_i$, $\Sigma i^2 a_i$, неравенство (6) получитъ слѣдующій видъ

$$1 - P < \frac{1}{\beta^2} \left\{ \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} p_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i (1 - p_i) \right\}$$

Отсюда и принимая во вниманіе, что $1 - p_i = q_i$ и $P < 1$, заключаемъ

$$1 > P > 1 - \frac{\left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} p_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i q_i}{\beta^2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Такимъ образомъ получены границы, между которыми заключена величина P вѣроятности, что при m опытахъ событіе E произойдетъ вообще такое число разъ i, которое удовлетворитъ условіямъ

$$\alpha - \beta \leqq i \leqq \alpha + \beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Но, располагая произвольно числами α и β, можно положить

$$\alpha = mp \quad \text{и} \quad \beta = mr,$$

означая черезъ p и $r < p$ правильныя дроби.

Поэтому можно допустить, что p есть средняя ариѳметическая простыхъ вѣроятностей $p_1, p_2, \ldots, p_m$ событія E въ различныхъ опытахъ, т. е. положить

$$p = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_i.$$

Кромѣ того, если положимъ

$$\sum_{i=1}^{m} p_i q_i = q \sum_{i=1}^{m} p_i = mpq,$$

то q будетъ заключаться между наибольшей и наименьшей изъ величинъ $q_1, q_2, \ldots, q_m$, т. е. будетъ нѣкоторой средней изъ простыхъ вѣроятностей событія F въ различныхъ опытахъ.

При упомянутыхъ предположеніяхъ изъ (7) и (8) получимъ:

$$1 > P > 1 - \frac{pq}{mr^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

и

$$-r \leqq \frac{i}{m} - p \leqq r. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Принявъ въ соображеніе, что p и q меньше единицы (какъ соотвѣтственныя среднія величины между $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n$), что r сколько угодно малая, но постоянная, величина и, наконецъ, что число опытовъ m можно предполагать сколько угодно большимъ, мы окончательно заключаемъ:

Неравенства (9) показываютъ, что при достаточно большомъ числѣ опытовъ (m) становится сколько угодно близкой къ единицѣ (достовѣрности) вѣроятность (P) существованіе неравенствъ (10), показывающихъ, что отношеніе числа (i) появленія событія (E) къ числу (m) всѣхъ опытовъ будетъ разниться отъ средней ариѳметической (p) простыхъ вѣроятностей этого событія (E) въ отдѣльныхъ опытахъ, меньше чѣмъ на какую-либо данную малую величину (r).

Это предложеніе и выражаетъ, какъ извѣстно, такъ называемый законъ большихъ чиселъ, который въ частномъ случаѣ, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_m$ и $q_1 = q_2 = \ldots = q_m$, даетъ теорему Я. Бернулли.

О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости.

А. М. Ляпунова.

1. Выводя при извѣстныхъ предположеніяхъ [1]) дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла въ неограниченной жидкости, Кирхгофъ обращаетъ между прочимъ вниманіе на одинъ частный случай движенія, который имѣетъ мѣсто въ предположеніи, что на тѣло и жидкость не дѣйствуютъ силы. А именно, онъ показываетъ, что для всякаго тѣла существуютъ вообще три взаимно перпендикулярныя направленія, по которымъ оно можетъ двигаться поступательно и равномѣрно. Направленія эти опредѣляются, какъ направленія осей нѣкотораго эллипсоида.

Впослѣдствіи замѣчено, что эти постоянныя поступательныя движенія твердаго тѣла въ жидкости суть частные случаи безконечнаго ряда постоянныхъ движеній общаго характера, т. е. винтовыхъ съ неподвижною винтовою осью и съ постоянными угловою скоростью и шагомъ винтоваго движенія. На существованіе этихъ постоянныхъ винтовыхъ движеній было указано между прочимъ Ламбомъ въ его „A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids", гдѣ онъ подробнѣе разбираетъ тотъ частный случай, когда все движеніе происходитъ вслѣдствіе приложенія къ тѣлу нѣкоторой пары импульсовъ.

Предпринимая настоящее изслѣдованіе, мы имѣли въ виду главнымъ образомъ рѣшеніе вопроса объ устойчивости этихъ постоянныхъ движеній, ибо вопросъ этотъ, сколько намъ извѣстно, еще не былъ рѣшенъ

---

[1]) Жидкость предполагается идеальною и при томъ—однородною несжимаемою, а движеніе ея—непрерывнымъ съ однозначнымъ потенціаломъ скоростей. Кромѣ того, предполагается, что, съ безпредѣльнымъ удаленіемъ отъ тѣла по всякому направленію, скорости точекъ жидкости приближаются къ нулю. При этихъ предположеніяхъ движеніе жидкости вполнѣ опредѣляется движеніемъ находящагося въ ней тѣла.

въ достаточно общей формѣ, [1]) а между тѣмъ, представляя хорошій примѣръ для общей теоріи устойчивости движенія, онъ заслуживаетъ, по нашему мнѣнію, нѣкотораго вниманія.

Начнемъ съ вывода формулъ, служащихъ для опредѣленія разсматриваемыхъ движеній.

2. Принимая за координатныя оси какія-либо три взаимно перпендикулярныя направленія, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, назовемъ черезъ u, v, w проэкціи на эти оси скорости начала координатъ, а черезъ p, q, r проэкціи на тѣ-же оси угловой скорости тѣла. Тогда въ предположеніи, что на тѣло и жидкость не дѣйствуютъ силы, дифференціальныя уравненія движенія тѣла будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

гдѣ T живая сила въ совмѣстномъ движеніи твердаго тѣла и жидкости. Это есть однородная цѣлая функція второй степени величинъ u, v, w, p, q, r, въ которой коэффиціенты зависятъ отъ плотности жидкости, отъ вида поверхности тѣла и отъ распредѣленія въ немъ матеріи. Для послѣдующаго полезно поставить на видъ, что функція эта сохраняетъ положительныя значенія для всякихъ вещественныхъ значеній ея аргументовъ, обращаясь въ нуль, только когда послѣдніе одновременно обращаются въ нуль; и при общемъ изслѣдованіи мы должны ее предполагать функціей этого рода самаго общаго вида.

Легко убѣдиться, что уравненіямъ (1) всегда можно удовлетворить постоянными вещественными величинами u, v, w, p, q, r. Въ самомъ

[1]) Сколько намъ извѣстно, вопросъ этотъ рѣшенъ только для постоянныхъ поступательныхъ движеній, и при томъ—только для тѣлъ, имѣющихъ три взаимно перпендикулярныя плоскости симметріи.

дѣлѣ, вводя двѣ новыя неизвѣстныя l и m, представимъ условія, которымъ должны удовлетворять эти постоянныя, подъ видомъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial T}{\partial u}=lp\,, & \dfrac{\partial T}{\partial v}=lq\,, & \dfrac{\partial T}{\partial w}=lr\,, \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial p}=lu+mp\,, & \dfrac{\partial T}{\partial q}=lv+mq\,, & \dfrac{\partial T}{\partial r}=lw+mr\,. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Уравненія-же эти суть тѣ самыя, которыя получаются при разысканіи условій minimum'а или maximum'а функціи T при данныхъ величинахъ

$$p^2+q^2+r^2 \quad \text{и} \quad up+vq+wr\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Но вслѣдствіе упомянутаго выше свойства функціи T существованіе minimum'а ея при этихъ условіяхъ несомнѣнно, а потому не подлежитъ сомнѣнію и возможность удовлетворить уравненіямъ (2) вещественными величинами u, v, w p, q, r, l и m, при чемъ еще могутъ быть заданы произвольно величины (3).

Этимъ доказывается возможность постоянныхъ винтовыхъ движеній произвольнаго шага и съ произвольною угловою скоростью.

Геометрическимъ мѣстомъ винтовыхъ осей всѣхъ этихъ движеній вообще будетъ нѣкоторая поверхность, ибо между пятью отношеніями величинъ u, v, w, p, q, r къ одной изъ нихъ уравненія (2) даютъ 4 соотношенія.

Всѣ эти движенія, какъ мы только-что видѣли, получаются при рѣшеніи нѣкоторой задачи о minimum'ѣ T. Теперь мы обратимъ вниманіе на другую подобную-же задачу, которая также приводитъ къ разсматриваемымъ движеніямъ.

Прежде всего преобразуемъ дифференціальныя уравненія (1) къ нѣсколько иному виду, который будетъ удобнѣе для изслѣдованія устойчивости. Для этого положимъ

$$\frac{\partial T}{\partial u}=x\,,\quad \frac{\partial T}{\partial v}=y\,,\quad \frac{\partial T}{\partial w}=z\,,\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\xi\,,\quad \frac{\partial T}{\partial q}=\eta\,,\quad \frac{\partial T}{\partial r}=\zeta$$

и примемъ за неизвѣстныя функціи вмѣсто u, v, w, p, q, r эти величины x, y, z, ξ, η, ζ. Такое преобразованіе всегда возможно по свойству T, какъ всегда положительной квадратичной функціи. При томъ, выражая T въ функціи x, y, z. ξ, η, ζ, найдемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=u\,,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=v\,,\quad \frac{\partial T}{\partial z}=w\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \xi}=p\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \eta}=q\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \zeta}=r\,.$$

Вслѣдствіе этого преобразованія уравненій (1) будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y\,\frac{\partial T}{\partial \zeta} - z\,\frac{\partial T}{\partial \eta}, \\
\frac{dy}{dt} &= z\,\frac{\partial T}{\partial \xi} - x\,\frac{\partial T}{\partial \zeta}, \\
\frac{dz}{dt} &= x\,\frac{\partial T}{\partial \eta} - y\,\frac{\partial T}{d\xi}, \\
\frac{d\xi}{dt} &= y\,\frac{\partial T}{\partial z} - z\,\frac{\partial T}{\partial y} + \eta\,\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \zeta\,\frac{\partial T}{\partial \eta}, \\
\frac{d\eta}{dt} &= z\,\frac{\partial T}{\partial x} - x\,\frac{\partial T}{\partial z} + \zeta\,\frac{\partial T}{\partial \xi} - \xi\,\frac{\partial T}{\partial \zeta}, \\
\frac{d\zeta}{dt} &= x\,\frac{\partial T}{\partial y} - y\,\frac{\partial T}{\partial x} + \xi\,\frac{\partial T}{\partial \eta} - \eta\,\frac{\partial T}{\partial \xi}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Къ такому виду преобразовываетъ разсматриваемыя уравненія Клебшъ въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ о движеніи твердаго тѣла въ жидкости [1]).

Замѣтимъ, что величины $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ имѣютъ слѣдующее механическое значеніе. Движеніе, которымъ обладаютъ твердое тѣло и жидкость въ какой-либо моментъ времени, можетъ быть произведено мгновенно приложеніемъ къ покоившемуся тѣлу нѣкоторой системы импульсовъ. Величины x, y, z представляютъ проэкціи на координатныя оси вектора этихъ импульсовъ, а ξ, η, ζ — проэкціи главнаго момента ихъ, взятаго относительно начала координатъ.

Разыскивая постоянныя величины $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, удовлетворяющія уравненіямъ (4), получаемъ для опредѣленія ихъ вмѣстѣ съ двумя новыми неизвѣстными λ и μ слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \xi} = \lambda x, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \lambda y, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \lambda z, \\
&\frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \xi + \mu x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \eta + \mu y, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \zeta + \mu z,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

которую легко получить также и преобразованіемъ уравненій (2). Система-же эта та самая, которая получается при рѣшеніи задачи о minimum'ѣ или maximum'ѣ функціи T при данныхъ величинахъ

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{и} \quad x\xi + y\eta + z\zeta.$$

---

[1]) Mathematische Annalen, B. III, 1871.

Эта вторая задача приводитъ къ заключенію о возможности постоянныхъ винтовыхъ движеній, производимыхъ приложеніемъ къ тѣлу нѣкоторой системы импульсовъ, векторъ которыхъ и проэкція главнаго момента на направленіе вектора имѣютъ данныя величины.

Замѣтимъ, что уравненія (2) или (5) суть выраженія того обстоятельства, что винтовая ось искомаго движенія должна совпадать съ центральною осью производящихъ его импульсовъ.

3. Для разысканія всѣхъ постоянныхъ винтовыхъ движеній твердаго тѣла въ жидкости мы остановимся на уравненіяхъ (5).

T, какъ однородная цѣлая функція второй степени шести аргументовъ $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ самаго общаго вида, заключаетъ въ себѣ 21 коэффиціентъ. Но надлежащимъ выборомъ координатной системы число этихъ коэффиціентовъ можетъ быть уменьшено до 15, что мы и сдѣлаемъ прежде всего для упрощенія дальнѣйшихъ вычисленій.

Во первыхъ очевидно, что надлежащимъ выборомъ направленій координатныхъ осей при прежнемъ началѣ можно обратить въ нуль коэффиціенты при $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ и $\xi\eta$ въ выраженіи T. Положимъ поэтому:

$$2T = \mathbf{S}a'_{11}\,x^2 + 2\mathbf{S}a'_{23}\,yz + 2\mathbf{S}(b_{11}\,x\xi + b'_{23}\,y\zeta + b'_{32}\,z\eta) + \mathbf{S}c_1\,\xi^2,$$

гдѣ $\mathbf{S}$ означаетъ суммированіе трехъ членовъ, получаемыхъ изъ находящагося подъ знакомъ $\mathbf{S}$ круговою перестановкой буквъ $x\ y\ z$, $\xi\ \eta\ \zeta$ и значковъ $1, 2, 3$. При томъ $a'_{23} = a'_{32}$, $a'_{31} = a'_{13}$ и $a'_{12} = a'_{21}$.

Если мы перенесемъ теперь начало координатъ въ точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, оставляя направленія осей прежними, то отъ этого x, y, z не измѣнятся, а ξ, η, ζ обратятся въ

$$\xi' = \xi + \alpha_3 y - \alpha_2 z, \qquad \eta' = \eta + \alpha_1 z - \alpha_3 x, \qquad \zeta' = \zeta + \alpha_2 x - \alpha_1 y.$$

Поэтому выраженіе $2T$ для новаго начала приметъ видъ:

$$2T = \mathbf{S}a_{11}\,x^2 + 2\mathbf{S}a_{23}\,yz + 2\mathbf{S}b_{11}\,x\xi' + \mathbf{S}c_1\,\xi'^2 +$$
$$+ 2\mathbf{S}\,[(b'_{23} + \alpha_1 c_3)\,y\zeta' + (b'_{32} - \alpha_1 c_2)\,z\eta'],$$

гдѣ a_{ij} суть функціи второй степени величинъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ съ коэффиціентами, зависящими отъ всѣхъ коэффиціентовъ прежняго выраженія $2T$.

Мы можемъ теперь распорядиться выборомъ новаго начала такъ, что въ преобразованномъ выраженіи $2T$ коэффиціенты при $y\zeta'$ и $z\eta'$, $z\xi'$ и $x\zeta'$, $x\eta'$ и $y\xi'$ будутъ равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, для этого должно положить

$$\alpha_1 = \frac{b'_{32} - b'_{23}}{c_2 + c_3}, \qquad \alpha_2 = \frac{b'_{13} - b'_{31}}{c_3 + c_1}, \qquad \alpha_3 = \frac{b'_{21} - b'_{12}}{c_1 + c_2},$$

а такое опредѣленіе новаго начала всегда будетъ возможно, ибо c_1, c_2, c_3 нулями быть не могутъ и при томъ необходимо положительны.

Такимъ образомъ мы можемъ принять для $2T$ слѣдующее выраженіе

$$2T = \mathrm{S}a_{11}\,x^2 + 2\mathrm{S}a_{23}\,yz + 2\mathrm{S}b_{11}\,x\xi + 2\mathrm{S}b_{23}\,(y\zeta + z\eta) + \mathrm{S}c_1\,\xi^2,$$

гдѣ вообще $a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$.

Вслѣдствіе этого уравненія (5) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
(b_{11} - \lambda)\,x + b_{12}\,y + b_{13}\,z + c_1\,\xi &= 0, \\
b_{21}\,x + (b_{22} - \lambda)\,y + b_{23}\,z + c_2\,\eta &= 0, \\
b_{31}\,x + b_{32}\,y + (b_{33} - \lambda)\,z + c_3\,\zeta &= 0, \\
(a_{11} - \mu)\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + (b_{11} - \lambda)\,\xi + b_{12}\,\eta + b_{13}\,\zeta &= 0, \\
a_{21}\,x + (a_{22} - \mu)\,y + a_{23}\,z + b_{21}\,\xi + (b_{22} - \lambda)\,\eta + b_{23}\,\zeta &= 0, \\
a_{31}\,x + a_{32}\,y + (a_{33} - \mu)\,z + b_{31}\,\xi + b_{32}\,\eta + (b_{33} - \lambda)\,\zeta &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

Внося въ послѣднія три уравненія величины ξ, η, ζ, слѣдующія изъ первыхъ трехъ, и полагая для сокращенія

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11} - \frac{(b_{11} - \lambda)^2}{c_1} - \frac{b_{12}{}^2}{c_2} - \frac{b_{13}{}^2}{c_3}, \\
A_{22} &= a_{22} - \frac{b_{21}{}^2}{c_1} - \frac{(b_{22} - \lambda)^2}{c_2} - \frac{b_{23}{}^2}{c_3}, \\
A_{33} &= a_{33} - \frac{b_{31}{}^2}{c_1} - \frac{b_{32}{}^2}{c_2} - \frac{(b_{33} - \lambda)^2}{c_3}, \\
A_{23} &= a_{23} - \frac{b_{12}\,b_{13}}{c_1} - \frac{(b_{22} - \lambda)\,b_{23}}{c_2} - \frac{b_{32}\,(b_{33} - \lambda)}{c_3}, \\
A_{31} &= a_{31} - \frac{b_{13}\,(b_{11} - \lambda)}{c_1} - \frac{b_{23}\,b_{21}}{c_2} - \frac{(b_{33} - \lambda)\,b_{31}}{c_3}, \\
A_{12} &= a_{12} - \frac{(b_{11} - \lambda)\,b_{12}}{c_1} - \frac{b_{21}\,(b_{22} - \lambda)}{c_2} - \frac{b_{31}\,b_{32}}{c_3},
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned}(A_{11}-\mu)\,x+A_{12}\,y+A_{13}\,z=0\,,\\ A_{21}\,x+(A_{22}-\mu)\,y+A_{23}\,z=0\,,\\ A_{31}\,x+A_{32}\,y+(A_{33}-\mu)\,z=0\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

Отсюда находимъ слѣдующее уравненіе третьей степени относительно μ:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu\,, & A_{12}\,, & A_{13} \\ A_{21}\,, & A_{22}-\mu\,, & A_{23} \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33}-\mu \end{vmatrix}=0\,,\quad\ldots\quad(9)$$

всѣ три корня котораго, при всякомъ вещественномъ λ, вещественны и вообще различны. Для каждаго-же изъ этихъ корней уравненія (8) опредѣлятъ отношенія между величинами x, y, z, послѣ чего изъ уравненій (6) найдутся отношенія ξ, η, ζ къ одной изъ нихъ.

Такимъ образомъ опредѣлятся всѣ движенія разсматриваемаго рода. При томъ, найдя какое-либо изъ нихъ, въ которомъ u, v, w, p, q, r или ξ, η, ζ, x, y, z имѣютъ какія-либо опредѣленныя величины, получимъ непрерывный рядъ такихъ-же движеній, измѣняя эти величины въ одномъ и томъ-же отношеніи. Всѣ эти винтовыя движенія будутъ имѣть общую ось и общую величину шага, и каждый такой непрерывный рядъ мы условимся разсматривать, какъ одно винтовое движеніе.

Такимъ образомъ видимъ, что для полученія всевозможныхъ постоянныхъ винтовыхъ движеній можно давать параметру λ произвольныя вещественныя значенія. Каждому изъ этихъ значеній будетъ соотвѣтствовать вообще три винтовыхъ движенія, оси которыхъ взаимно перпендикулярны. Послѣднее слѣдуетъ изъ того, что направленія этихъ осей опредѣляются тѣми-же уравненіями (8), какъ и направленія осей поверхности втораго порядка

$$\mathbf{S}A_{11}\,x^2+2\mathbf{S}A_{23}\,yz=\text{Const.}\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

При томъ движенія эти будутъ обращать функцію

$$\frac{\mathbf{S}A_{11}\,x^2+2\mathbf{S}A_{23}\,yz}{x^2+y^2+z^2}$$

въ minimum, minimum-maximum или maximum, а три корня уравненія (9) будутъ такими значеніями этой функціи.

Только въ частныхъ случаяхъ, когда коэффиціенты въ выраженіи T удовлетворяютъ нѣкоторымъ соотношеніямъ, будутъ существовать значенія λ, которымъ соотвѣтствуетъ болѣе трехъ, и въ такомъ случаѣ — непремѣнно безчисленное множество винтовыхъ движеній. Значенія эти должны удовлетворять уравненіямъ:

$$A_{11}-\frac{A_{12}\,A_{13}}{A_{23}}=A_{22}-\frac{A_{23}\,A_{21}}{A_{31}}=A_{33}-\frac{A_{31}\,A_{32}}{A_{12}},$$

при которыхъ поверхность (10) дѣлается поверхностью вращенія, и каждому изъ этихъ значеній λ кромѣ винтовой оси, параллельной оси вращенія этой поверхности, будетъ соотвѣтствовать безчисленное множество винтовыхъ осей, направленія которыхъ могутъ быть какими угодно перпендикулярными къ ней.

Замѣтимъ, что вообще три винтовыя оси, соотвѣтствующія данному λ, не пересѣкаются.

Изъ уравненій (5) слѣдуетъ, что λ есть отношеніе угловой скорости винтоваго движенія къ вектору производящихъ его импульсовъ, взятое со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, одинаковы или прямопротивоположны направленія этой угловой скорости и этого вектора. Поэтому указанныя Кирхгофомъ поступательныя движенія получаются изъ нашихъ формулъ при $\lambda=0$, а винтовыя движенія, производимыя приложеніемъ къ тѣлу пары импульсовъ, получаются изъ нихъ, какъ предѣльные случаи при $\lambda=\pm\infty$.

Чтобы опредѣлить эти послѣднія движенія, положимъ

$$\lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\right)=-k.$$

Тогда, замѣчая, что первыя три изъ уравненій (6) даютъ

$$\lim\lambda x=c_1\xi,\quad \lim\lambda y=c_2\eta,\quad \lim\lambda z=c_3\zeta,$$

и что

$$\lim\frac{A_{11}}{\lambda^2}=-\frac{1}{c_1},\quad \lim\frac{A_{22}}{\lambda^2}=-\frac{1}{c_2},\quad \lim\frac{A_{33}}{\lambda^2}=-\frac{1}{c_3},$$

$$\lim\frac{A_{23}}{\lambda^2}=\lim\frac{A_{31}}{\lambda^2}=\lim\frac{A_{12}}{\lambda^2}=0,$$

получимъ изъ уравненій (8) слѣдующія предѣльныя уравненія:

$$\left(k-\frac{1}{c_1}\right)\xi=0,\quad \left(k-\frac{1}{c_2}\right)\eta=0,\quad \left(k-\frac{1}{c_3}\right)\zeta=0.$$

Такимъ образомъ, полагая k поочередно равнымъ $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{c_2}$, $\frac{1}{c_3}$, получаемъ три винтовыхъ движенія:

$$1)\quad \eta=\zeta=0\,,\qquad 2)\quad \zeta=\xi=0\,,\qquad 3)\quad \xi=\eta=0\,.$$

Отсюда видно, что выбранныя нами направленія координатныхъ осей параллельны осямъ трехъ постоянныхъ винтовыхъ движеній, происходящихъ вслѣдствіе приложенія къ тѣлу нѣкоторыхъ паръ импульсовъ.

Опредѣлимъ элементы этихъ винтовыхъ движеній. Принимая въ разсчетъ, что для нихъ $x=y=z=0$, находимъ:

$$p=\frac{\partial T}{\partial \xi}=c_1\xi\,,\quad q=\frac{\partial T}{\partial \eta}=c_2\eta\,,\quad r=\frac{\partial T}{\partial \zeta}=c_3\zeta\,,$$

$$u=\frac{\partial T}{\partial x}=b_{11}\xi+b_{12}\eta+b_{13}\zeta\,,$$

$$v=\frac{\partial T}{\partial y}=b_{21}\xi+b_{22}\eta+b_{23}\zeta\,,$$

$$w=\frac{\partial T}{\partial z}=b_{31}\xi+b_{32}\eta+b_{33}\zeta\,.$$

Поэтому для трехъ разсматриваемыхъ движеній будетъ:

$$1)\quad q=r=0\,,\quad u=\frac{b_{11}}{c_1}p\,,\quad v=\frac{b_{21}}{c_1}p\,,\quad w=\frac{b_{31}}{c_1}p\,,$$

$$2)\quad r=p=0\,,\quad u=\frac{b_{12}}{c_2}q\,,\quad v=\frac{b_{22}}{c_2}q\,,\quad w=\frac{b_{23}}{c_2}q\,,$$

$$3)\quad p=q=0\,,\quad u=\frac{b_{13}}{c_3}r\,,\quad v=\frac{b_{23}}{c_3}r\,,\quad w=\frac{b_{33}}{c_3}r\,.$$

Винтовыя оси этихъ движеній опредѣляются уравненіями:

$$1)\quad Y=-\frac{b_{13}}{c_1}\,,\quad Z=\frac{b_{12}}{c_1}\,,$$

$$2)\quad Z=-\frac{b_{21}}{c_2}\,,\quad X=\frac{b_{23}}{c_2}\,,$$

$$3)\quad X=-\frac{b_{32}}{c_3}\,,\quad Y=\frac{b_{31}}{c_3}\,.$$

Отсюда видно, что пересѣкаться въ одной точкѣ эти оси будутъ только при условіяхъ $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$.

Замѣтимъ, что въ числѣ разсматриваемыхъ движеній будутъ вращательныя, только когда между величинами b_{11}, b_{22}, b_{33} есть равныя нулю.

Въ случаѣ равенства двухъ изъ величинъ c_1, c_2, c_3 получается безчисленное множество винтовыхъ движеній разсматриваемаго рода. Но въ особенности обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда $c_1 = c_2 = c_3 = c$. При этомъ *всякая* пара импульсовъ сообщаетъ тѣлу постоянное винтовое движеніе, ось котораго параллельна оси пары. Угловыя скорости всѣхъ этихъ движеній находятся въ постоянномъ отношеніи c къ моментамъ производящихъ ихъ паръ импульсовъ, а характеризующіе ихъ элементы связаны уравненіями

$$cu = b_{11}\,p + b_{12}\,q + b_{13}\,r\,,$$

$$cv = b_{21}\,p + b_{22}\,q + b_{23}\,r\,,$$

$$cw = b_{31}\,p + b_{32}\,q + b_{33}\,r\,.$$

Въ заключеніе резюмируемъ найденные результаты:

Всѣ постоянныя винтовыя движенія твердаго тѣла въ жидкости получаются при рѣшеніи задачи о minimum'ѣ или maximum'ѣ живой силы движенія тѣла и жидкости или при данныхъ величинахъ угловой скорости и шага винтового движенія, или при данныхъ величинахъ вектора и наименьшаго главнаго момента импульсовъ, производящихъ движеніе. При этомъ всякой данной величинѣ отношенія угловой скорости къ вектору импульсовъ соотвѣтствуютъ двѣ группы винтовыхъ движеній, изъ которыхъ въ одной угловая скорость и этотъ векторъ одинаковаго направленія, а въ другой—противоположнаго. Движенія каждой группы вполнѣ опредѣляются направленіями соотвѣтствующихъ имъ угловыхъ скоростей, а послѣднія находятся, какъ направленія осей нѣкоторой поверхности второго порядка, зависящей какъ отъ величины отношенія угловой скорости къ вектору импульсовъ, такъ и отъ того, къ которой группѣ принадлежатъ эти движенія. Поэтому вообще каждая группа заключаетъ въ себѣ по три движенія, винтовыя оси которыхъ взаимно перпендикулярны.

4. Когда для дифференціальныхъ уравненій движенія какой-либо системы найдено нѣкоторое число интеграловъ, независящихъ отъ времени, и когда въ числѣ этихъ интеграловъ существуетъ такой, который можетъ имѣть minimum или maximum при данныхъ величинахъ остальныхъ интеграловъ, обращаясь въ этотъ minimum или maximum для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеній входящихъ въ него перемѣнныхъ, то эти значенія будутъ соотвѣтствовать вообще одному изъ дѣйствительныхъ движенiй системы, и при томъ движенiе это будетъ устойчиво по отношенiю къ этимъ перемѣннымъ [1]) по крайней мѣрѣ для возмущенiй, не измѣняющихъ величинъ остальныхъ интеграловъ. Если-же разсматриваемый интегралъ имѣетъ minimum или maximum также и при всякихъ достаточно близкихъ къ даннымъ величинахъ послѣднихъ, и если значенiя перемѣнныхъ, обращающiя его въ minimum или maximum, суть непрерывныя функцiи величинъ этихъ интеграловъ, то разсматриваемое движенiе будетъ устойчиво въ сказанномъ смыслѣ для всякихъ возмущенiй [2]).

Эту теорему мы можемъ приложить къ разсматриваемому случаю, ибо для дифференцiальныхъ уравненiй (4) извѣстны три интеграла, обладающiе требуемыми свойствами.

Въ самомъ дѣлѣ, функцiи T, $x^2+y^2+z^2$ и $x\xi+y\eta+z\zeta$ представляютъ, очевидно, интегралы этихъ уравненiй, и при томъ мы знаемъ, что существуютъ движенiя, обращающiя первый изъ нихъ въ minimum при всякихъ данныхъ величинахъ двухъ послѣднихъ. Поэтому, пока эти минимальныя значенiя T соотвѣтствуютъ опредѣленнымъ значенiямъ перемѣнныхъ x, y, z, ξ, η, ζ, послѣднiя будутъ давать винтовыя движенiя, устойчивыя по отношенiю къ этимъ перемѣннымъ.

Если-бы существовали движенiя, обращающiя T при тѣхъ-же условiяхъ въ maximum, то они также были-бы устойчивыми въ сказанномъ смыслѣ. Но такихъ движенiй, какъ увидимъ, существовать не можетъ.

Вездѣ далѣе мы будемъ разсуждать объ устойчивости постоянныхъ винтовыхъ движенiй только по отношенiю къ перемѣннымъ x, y, z ξ, η, ζ или, что все равно — по отношенiю къ u, v, w, p, q, r.

Начнемъ съ опредѣленiя тѣхъ устойчивыхъ движенiй, которыя даетъ возможность найти разсматриваемая теорема въ приложенiи къ упомянутымъ тремъ интеграламъ.

5. Положимъ

$$x^2+y^2+z^2=h^2, \qquad x\xi+y\eta+z\zeta=g.$$

Пусть δx, δy, δz, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ какiя-либо приращенiя величинъ x, y и т. д., не измѣняющiя h и g. Тогда будемъ имѣть:

---

[1]) Пусть $q_1, q_2, \ldots q_n$ какiя-либо величины, зависящiя отъ координатъ и скоростей точекъ системы, и пусть $q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0$ тѣ функцiи времени, въ которыя онѣ обращаются для нѣкотораго движенiя. Послѣднее мы называемъ *устойчивымъ по отношенiю къ перемѣннымъ* $q_1, q_2, \ldots q_n$, если послѣ безконечно-малыхъ возмущенiй система приходитъ въ такое движенiе, во время котораго $q_1-q_1^0$, $q_2-q_2^0, \ldots q_n-q_n^0$ всегда остаются безконечно-малыми.

[2]) См. *Routh*. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 4 edition, 1884; p. 52, 53.

$$\left.\begin{aligned}&2(x\delta x+y\delta y+z\delta z)+(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2=0,\\&\xi\delta x+\eta\delta y+\zeta\delta z+x\delta\xi+y\delta\eta+z\delta\zeta+\delta x\delta\xi+\delta y\delta\eta+\delta z\delta\zeta=0.\end{aligned}\right\}.\ (11)$$

Соотвѣтствующее приращеніе T назовемъ черезъ δT. Это будетъ функція второй степени величинъ δx, δy и т. д., изъ которой члены первой степени относительно нихъ могутъ быть исключены при помощи уравненій (11), принимая въ разсчетъ уравненія (5). Для этого стоитъ только уравненія (11), умноженныя соотвѣтственно на μ и 2λ, вычесть изъ выраженія $2\delta T$. Тогда найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}2\delta T=&\mathop{\mathrm{S}}(a_{11}-\mu)(\delta x)^2+2\mathop{\mathrm{S}}a_{23}\,\delta y\delta z+2\mathop{\mathrm{S}}(b_{11}-\lambda)\,\delta x\delta\xi+\\&+2\mathop{\mathrm{S}}b_{23}\,(\delta y\delta\zeta+\delta z\delta\eta)+\mathop{\mathrm{S}}c_1\,(\delta\xi)^2\end{aligned}\right\}.\ (12)$$

Отсюда уже видно, что T не можетъ быть maximum, ибо полагая $\delta x=\delta y=\delta z=0$, находимъ $\delta T>0$.

Для того, чтобы T было minimum, выраженіе (12) не должно получать отрицательныхъ значеній при безконечно-малыхъ величинахъ δx, δy и т. д., удовлетворяющихъ уравненіямъ (11). При томъ minimum этотъ будетъ соотвѣтствовать опредѣленной системѣ величинъ $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, если равенство $\delta T=0$ имѣетъ необходимымъ слѣдствіемъ равенства

$$\delta x=\delta y=\delta z=\delta\xi=\delta\eta=\delta\zeta=0.$$

Разыскивая условія этого minimum'а, мы сначала исключимъ случай $\lambda=\pm\infty$, для котораго самая постановка вопроса должна быть нѣсколько измѣнена.

Положимъ

$$\delta\xi=\delta\xi_0-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}\delta x-\frac{b_{12}}{c_1}\delta y-\frac{b_{13}}{c_1}\delta z,$$

$$\delta\eta=\delta\eta_0-\frac{b_{21}}{c_2}\delta x-\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}\delta y-\frac{b_{23}}{c_2}\delta z,$$

$$\delta\zeta=\delta\zeta_0-\frac{b_{31}}{c_3}\delta x-\frac{b_{32}}{c_3}\delta y-\frac{b_{33}-\lambda}{c_3}\delta z.$$

Тогда выраженіе (12) приметъ видъ:

$$2\delta T=\mathop{\mathrm{S}}(A_{11}-\mu)(\delta x)^2+2\mathop{\mathrm{S}}A_{23}\,\delta y\delta z+\mathop{\mathrm{S}}c_1\,(\delta\xi_0)^2,\quad .\quad .\ (13)$$

а условія (11) обратятся въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}&2\mathbf{S}x\delta x+\mathbf{S}(\delta x)^2=0\,,\\ &\mathbf{S}X\delta x-\mathbf{S}x\delta\xi_0-\mathbf{S}\delta x\delta\xi_0+\mathbf{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}(\delta x)^2+\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\delta y\delta z=0,\end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x+\left(\frac{b_{12}}{c_1}+\frac{b_{12}}{c_2}\right)y+\left(\frac{b_{13}}{c_1}+\frac{b_{13}}{c_3}\right)z=X,\\ &\left(\frac{b_{21}}{c_2}+\frac{b_{21}}{c_1}\right)x+2\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}y+\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)z=Y,\\ &\left(\frac{b_{31}}{c_3}+\frac{b_{31}}{c_1}\right)x+\left(\frac{b_{32}}{c_3}+\frac{b_{32}}{c_2}\right)y+2\frac{b_{33}-\lambda}{c_3}z=Z.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;(15)$$

Разсмотримъ различные случаи, которые могутъ представиться соотвѣтственно тремъ корнямъ уравненія (9).

Если μ есть наименьшій корень этого уравненія, то изъ выраженія (13) непосредственно видно, что δT не можетъ быть отрицательнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, уже было замѣчено, что c_1, c_2, c_3 необходимо положительны. Кромѣ того, мы знаемъ, что наименьшій корень μ есть minimum значеній функціи

$$\frac{\mathbf{S}A_{11}\xi^2+2\mathbf{S}A_{23}\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Поэтому квадратичная функція величинъ δx, δy, δz, входящая въ выраженіе (13), въ случаѣ наименьшаго корня не можетъ быть отрицательной. Къ этому прибавимъ, что когда этотъ корень не кратный, она можетъ обращаться въ нуль только при условіяхъ:

$$\frac{\delta x}{x}=\frac{\delta y}{y}=\frac{\delta z}{z}. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

Такимъ образомъ видимъ, что движеніе, соотвѣтствующее наименьшему корню μ, обращаетъ T въ minimum, и не только по отношенію къ смежнымъ значеніямъ T, но по отношенію ко всякимъ, соотвѣтствующимъ даннымъ величинамъ h и g. При томъ, если этотъ наименьшій корень простой, разсматриваемый minimum соотвѣтствуетъ опредѣленнымъ значеніямъ x, y, z, ξ, η, ζ, ибо изъ равенства $\delta T=0$ въ этомъ случаѣ необходимо слѣдуетъ во первыхъ, что $\delta\xi_0=\delta\eta_0=\delta\zeta_0=0$, и во вторыхъ—что δx, δy, δz должны удовлетворять уравненіямъ (16).

Послѣднимъ-же вмѣстѣ съ уравненіями (14) при безконечно-малыхъ δx, δy, δz можно удовлетворить не иначе, какъ полагая $\delta x = \delta y = \delta z = 0$.

Когда наименьшій корень μ кратный, возможенъ случай minimum'a T, соотвѣтствующаго нѣкоторому непрерывному ряду системъ величинъ x, y, z, ξ, η, ζ. Этотъ случай всегда будетъ имѣть мѣсто, коль скоро всѣ три корня уравненія (9) равны между собою, ибо при этомъ

$$A_{11} - \mu = A_{22} - \mu = A_{33} - \mu = A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0,$$

и слѣдовательно δT обращается въ нуль для $\delta\xi_0 = 0$, $\delta\eta_0 = 0$, $\delta\zeta_0 = 0$, при всякихъ δx, δy, δz, удовлетворяющихъ уравненіямъ (14). Когда-же наименьшій корень μ двукратный, этотъ случай будетъ имѣть мѣсто только при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами функціи T. Соотношенія эти получимъ, выражая, что

$$\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\mathbf{S}\dfrac{b_{11} - \lambda}{c_1}x^2 + \mathbf{S}\left(\dfrac{b_{23}}{c_2} + \dfrac{b_{23}}{c_3}\right)yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

остается постояннымъ при всякихъ величинахъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненіямъ (8), которыя въ случаѣ двукратнаго корня μ приводятся къ одному.

И такъ, абсолютный minimum T при данныхъ h и g соотвѣтствуетъ всегда наименьшему корню μ. Но кромѣ этого, T можетъ имѣть еще minimum'ы по сравненію съ безконечно-близкими значеніями. Послѣдніе однако не могутъ имѣть мѣста въ случаѣ наибольшаго корня μ, когда онъ простой.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ выраженіи (13)

$$\delta\xi_0 = \delta\eta_0 = \delta\zeta_0 = 0,$$

найдемъ, что δT обратится въ квадратичную функцію величинъ δx, δy, δz, которая при наибольшемъ корнѣ μ не можетъ быть положительной. При томъ, когда этотъ корень простой, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, она можетъ обращаться въ нуль не иначе, какъ при условіяхъ (16). Послѣднія-же вмѣстѣ съ условіями (14), какъ уже было замѣчено, требуютъ, чтобы безконечно-малыя величины δx, δy, δz были равны нулю. Поэтому, если $\delta\xi_0 = \delta\eta_0 = \delta\zeta_0 = 0$, а δx, δy, δz одновременно не равны нулю, то въ разсматриваемомъ случаѣ всегда будетъ $\delta T < 0$.

Намъ остается теперь изслѣдовать случай средняго корня. Такъ какъ при этомъ мы будемъ разсматривать только безконечно-малыя значенія величинъ δx, δy и т. д., то уравненія (14) замѣняемъ слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned} x\delta x+y\delta y+z\delta z=0 \\ X\delta x+Y\delta y+Z\delta z-x\delta\xi_0-y\delta\eta_0-z\delta\zeta_0=0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . (17)$$

Для полученія условій, которыя были-бы необходимы и вообще достаточны для minimum'а T, будемъ искать minimum квадратичной функціи (13) при условіяхъ (17) и при условіи

$$(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2=C^2,$$

гдѣ C^2 какая-либо положительная постоянная. Такъ какъ $c_1>0$, $c_2>0$, $c_3>0$, то очевидно, что такой minimum всегда будетъ существовать. Выражая, что этотъ minimum не долженъ быть отрицательнымъ, получимъ необходимыя условія, а прибавляя къ нимъ условіе, что онъ можетъ быть нулемъ только при $C=0$, получимъ условія, достаточныя для minimum'а T.

Разыскивая этотъ minimum, приходимъ къ системѣ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &(A_{11}-\mu-k)\,\delta x+A_{12}\,\delta y+A_{13}\,\delta z+xm+Xl=0\,, \\ &A_{21}\,\delta x+(A_{22}-\mu-k)\,\delta y+A_{23}\,\delta z+ym+Yl=0\,, \\ &A_{31}\,\delta x+A_{32}\,\delta y+(A_{33}-\mu-k)\,\delta z+zm+Zl=0\,, \\ &c_1\delta\xi_0-xl=0\,,\quad c_2\delta\eta_0-yl=0\,,\quad c_3\delta\zeta_0-zl=0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (18)$$

гдѣ k, l и m неопредѣленные множители, соотвѣтствующіе нашимъ условнымъ уравненіямъ.

Внося слѣдующія отсюда величины $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ во второе уравненіе (17) и полагая для сокращенія

$$\frac{x^2}{c_1}+\frac{y^2}{c_2}+\frac{z^2}{c_3}=H,$$

получимъ:

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z-Hl=0\,.$$

Тогда система пяти уравненій, состоящая изъ трехъ первыхъ уравненій (18), изъ перваго уравненія (17) и изъ этого послѣдняго, будетъ линейною и однородною относительно пяти неизвѣстныхъ δx, δy, δz, m и l, а потому дастъ для опредѣленія k слѣдующее квадратное уравненіе:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu-k, & A_{12}, & A_{13}, & x, & X \\ A_{21}, & A_{22}-\mu-k, & A_{23}, & y, & Y \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}-\mu-k, & z, & Z \\ x, & y, & z, & 0, & 0 \\ X, & Y, & Z, & 0, & H \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

принадлежащее къ извѣстному классу детерминантныхъ уравненій, всѣ корни которыхъ вещественны.

Такъ какъ изъ уравненій (18), если ихъ умножить соотвѣтственно на δx, δy, δz, $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ и результаты сложить, принимая въ разсчетъ всѣ условныя уравненія, находимъ

$$2\delta T = kC^2,$$

то minimum δT будетъ опредѣляться меньшимъ корнемъ k, имѣя всегда знакъ этого корня.

Отсюда слѣдуетъ, что для minimum'а T корни уравненія (19) не должны быть отрицательными, и что T будетъ несомнѣнно minimum, если при томъ эти корни не равны нулю.

Раскрывая опредѣлитель, приводимъ уравненіе (19) къ виду:

$$Hh^2k^2 - Pk + R = 0,$$

гдѣ

$$P = \mathbf{S}(yZ - zY)^2 + H\mathbf{S}(A_{22}-\mu+A_{33}-\mu)\,x^2 - 2H\mathbf{S}A_{23}\,yz,$$

$$R = \mathbf{S}(A_{11}-\mu)\,(yZ-zY)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}\,(zX-xZ)\,(xY-yX) +$$

$$+ H\mathbf{S}[(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu)-A_{23}{}^2]x^2 + 2H\mathbf{S}[A_{12}A_{13}-(A_{11}-\mu)A_{23}]yz.$$

Принимая въ разсчетъ уравненія (8), можно привести выраженія этихъ коэффиціентовъ къ нѣсколько болѣе простому виду. Такъ, замѣчая, что

$$\mathbf{S}(A_{11}-\mu)\,x^2 + 2\mathbf{S}A_{23}\,yz = 0,$$

приводимъ выраженіе P къ виду:

$$P = \mathbf{S}(yZ - zY)^2 + Hh^2\mathbf{S}(A_{11}-\mu),$$

а замѣчая, что коэффиціентъ при H въ выраженіи R можетъ быть представленъ такъ:

$$\mathbf{S}\left\{\begin{vmatrix} A_{22}-\mu\,, & A_{23} \\ A_{32}\,, & A_{33}-\mu \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A_{31}\,, & A_{33}-\mu \\ A_{12}\,, & A_{32} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} A_{23}\,, & A_{22}-\mu \\ A_{31}\,, & A_{21} \end{vmatrix} z \right\} x\,,$$

и что

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} A_{22}-\mu\,, & A_{23} \\ A_{32}\,, & A_{33}-\mu \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} A_{31}\,, & A_{33}-\mu \\ A_{12}\,, & A_{32} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_{23}\,, & A_{22}-\mu \\ A_{31}\,, & A_{21} \end{vmatrix}}\,,$$

приводимъ его къ виду:

$$h^2\mathbf{S}[(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu)-A_{23}{}^2]\,.$$

При томъ, если корни уравненія (9) обозначимъ черезъ μ_1, μ_2, μ_3, то будемъ имѣть:

$$\mathbf{S}\mu_1=\mathbf{S}A_{11}\,,\quad \mathbf{S}\mu_2\mu_3=\mathbf{S}(A_{22}A_{33}-A_{23}{}^2)\,,$$

и слѣдовательно

$$\mathbf{S}[(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu)-A_{23}{}^2]=\mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu)\,.$$

Такимъ образомъ находимъ:

$$P=\mathbf{S}(yZ-zY)^2+Hh^2\mathbf{S}(\mu_1-\mu)\,,$$

$$R=\mathbf{S}(A_{11}-\mu)(yZ-zY)^2+2\mathbf{S}A_{23}(zX-xZ)(xY-yX)+$$

$$+Hh^2\mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu)\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (20)$$

гдѣ μ есть одна изъ величинъ μ_1, μ_2, μ_3.

Такъ какъ намъ извѣстно, что корни уравненія (19) не могутъ быть мнимыми, то условія, что они должны быть положительными, выразятся двумя слѣдующими неравенствами

$$P>0\,,\quad R>0\,,$$

которыя и будутъ условіями minimum'а T.

Должно замѣтить, что для средняго корня μ первое изъ этихъ условій есть слѣдствіе второго. Въ самомъ дѣлѣ, если $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, то каковы-бы ни были ξ, η, ζ, будемъ имѣть:

$$\mu_1(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \leqq \mathbf{S} A_{11}\xi^2 + 2\mathbf{S} A_{23}\eta\zeta \leqq \mu_3(\xi^2+\eta^2+\zeta^2).$$

Поэтому для $\mu = \mu_2$

$$(\mu_3-\mu_2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \geqq \mathbf{S}(A_{11}-\mu)\xi^2 + 2\mathbf{S} A_{23}\eta\zeta,$$

и слѣдовательно

$$(\mu_3-\mu_2)P - R \geqq Hh^2(\mu_3-\mu_2)^2 > 0,$$

откуда при $R > 0$ необходимо слѣдуетъ и $P > 0$.

Такимъ образомъ для того, чтобы движеніе, соотвѣтствующее среднему корню μ, обращало T въ minimum, вообще должно быть удовлетворено одно только условіе

$$R > 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

При $R = 0$ также возможенъ minimum T, но дополнительныхъ условій, относящихся къ этому случаю, выводить не будемъ.

Покажемъ, что условіе (21) дѣйствительно можетъ быть удовлетворено для средняго корня μ.

Для этого разсмотримъ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты въ выраженіи T.

Замѣняя въ функціи T перемѣнныя ξ, η, ζ перемѣнными p, q, r при помощи уравненій

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = p, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = q, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = r,$$

находимъ:

$$2T = \mathbf{S} A_{11}{}^0 x^2 + 2\mathbf{S} A_{23}{}^0 yz + \mathbf{S}\frac{p^2}{c_1},$$

гдѣ A_{ij}^0 суть значенія функцій (7) при $\lambda = 0$.

Единственныя условія, которымъ мы должны подчинить коэффиціенты въ этомъ выраженіи при общемъ изслѣдованіи, суть условія для коэффиціентовъ всегда положительной квадратичной функціи, которая можетъ обращаться въ нуль только при одновременномъ равенствѣ нулю всѣхъ ея аргументовъ. Поэтому условія эти будутъ:

$$\begin{vmatrix} A_{11}^0, & A_{12}^0, & A_{13}^0 \\ A_{21}^0, & A_{22}^0, & A_{23}^0 \\ A_{31}^0, & A_{32}^0, & A_{33}^0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{22}^0, & A_{23}^0 \\ A_{32}^0, & A_{33}^0 \end{vmatrix} > 0, \; A_{33}^0 > 0, \; c_1 > 0, \; c_2 > 0, \; c_3 > 0,$$

и всякія величины коэффиціентовъ a_{ij}, b_{ij}, c_i, удовлетворяющія этимъ условіямъ, должны быть разсматриваемы, какъ возможныя.

Отсюда видно, что для полученія какой-либо возможной системы значеній этихъ коэффиціентовъ, мы можемъ выбрать произвольныя положительныя значенія для величинъ c_1, c_2, c_3 и задать совершенно произвольно шесть величинъ b_{ij}, ибо имѣемъ еще въ распоряженіи шесть величинъ a_{ij}, надлежащимъ выборомъ которыхъ можно сдѣлать величины A_{ij}^0 какими угодно.

Основываясь на этомъ, можно показать, что по крайней мѣрѣ для поступательнаго движенія возможенъ minimum T въ случаѣ средняго корня. Для этого замѣчаемъ, что x, y, z зависятъ только отъ величинъ A_{ij}, и слѣдовательно при $\lambda = 0$ — только отъ величинъ A_{ij}^0, а съ другой стороны, разсматривая выраженія (15), приходимъ къ заключенію, что при всякихъ данныхъ x, y, z, одновременно не равныхъ нулю (что всегда будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ конечнаго λ), выборомъ коэффиціентовъ b_{ij} можно сдѣлать величины X, Y, Z какими угодно. Отсюда слѣдуетъ, что при $\lambda = 0$ въ выраженіи (20) можно разсматривать величины X, Y, Z, какъ совершенно произвольныя, для всякихъ данныхъ значеній остальныхъ входящихъ въ него величинъ, а потому это будетъ выраженіе слѣдующаго типа

$$R = \mathbf{S}(A_{11} - \mu)\, x_1{}^2 + 2\mathbf{S} A_{23}\, x_2 x_3 + Hh^2 \mathbf{S}(\mu_2 - \mu)(\mu_3 - \mu)\,,$$

гдѣ x_1, x_2, x_3, какія-либо величины, удовлетворяющія условію

$$x x_1 + y x_2 + z x_3 = 0\,.$$

Но въ случаѣ средняго корня для этихъ величинъ будутъ возможны значенія, дѣлающія квадратичную функцію

$$\mathbf{S}(A_{11} - \mu)\, x_1{}^2 + 2\mathbf{S} A_{23} x_2 x_3$$

положительной, а коль скоро такая система значеній будетъ найдена, то пропорціональнымъ увеличеніемъ x_1, x_2, x_3 можно достигнуть и того, что удовлетворится условіе $R > 0$.

Такимъ образомъ оказывается, что для достаточно малыхъ значенiй λ вообще возможенъ minimum T и въ случаѣ средняго корня μ.

Слѣдуетъ обратить вниманiе на одинъ частный случай, когда для средняго корня minimum T невозможенъ ни при какихъ значенiяхъ λ. Это тотъ случай, когда при $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$ всѣ коэффиценты b_{ij} равны нулю, что будетъ имѣть мѣсто напримѣръ для тѣла, обладающаго тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрiи. Въ этомъ случаѣ двѣ изъ величинъ x, y, z, а также соотвѣтствующiя имъ величины X, Y, Z вообще будутъ равны нулю, а потому выраженiе (20) приводится къ виду:

$$R = Hh^2 \mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu),$$

и слѣдовательно для средняго корня всегда $R<0$.

Разберемъ теперь предѣльный случай $\lambda=\pm\infty$.

Расматриваемая задача о minimum'ѣ T, очевидно, тожественна съ задачей о minimum'ѣ T при условiяхъ:

$$x=\alpha h,\quad y=\beta h,\quad z=\gamma h,\quad \xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=f,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

гдѣ h и f данныя величины. Постановка-же этой послѣдней задачи возможна и для предѣльнаго случая $\lambda=\pm\infty$ или $h=0$. Въ этомъ случаѣ вопросъ приводится къ разысканiю minimum'а выраженiя

$$2T=c_1\xi^2+c_2\eta^2+c_3\zeta^2$$

при условiяхъ

$$\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=f,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Рѣшая эту задачу, находимъ:

$$2\delta T=\frac{f^2}{k^2}\mathbf{S}\left(k-\frac{1}{c_1}\right)(\delta\alpha)^2+\mathbf{S}\frac{1}{c_1}\left(c_1\delta\xi-\frac{f}{k}\,\delta\alpha\right)^2,$$

гдѣ ξ, η, ζ и k должны удовлетворять уравненiямъ

$$\left(k-\frac{1}{c_1}\right)\xi=0,\ \left(k-\frac{1}{c_2}\right)\eta=0,\ \left(k-\frac{1}{c_3}\right)\zeta=0,\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=f^2,$$

а $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ — уравненiямъ:

$$2\mathbf{S}\xi\delta\alpha + f\,\mathbf{S}(\delta\alpha)^2 = 0\,,$$

$$\mathbf{S}\xi\delta\xi + f\,\mathbf{S}\xi\delta\alpha + f\,\mathbf{S}\delta\alpha\,\delta\xi = 0\,.$$

Отсюда видно, что когда c_1, c_2, c_3 различны, изъ трехъ возможныхъ движеній

$$1)\qquad k = \frac{1}{c_1}\,,\quad \eta = \zeta = 0\,,$$

$$2)\qquad k = \frac{1}{c_2}\,,\quad \zeta = \xi = 0\,,$$

$$3)\qquad k = \frac{1}{c_3}\,,\quad \xi = \eta = 0\,,$$

только одно будетъ обращать T въ minimum — для котораго k имѣетъ наибольшую величину. Такъ-какъ $k = -\lim \frac{\mu}{\lambda^2}$, то это будетъ то движеніе, въ которое въ предѣлѣ обращается соотвѣтствующее наименьшему корню μ.

На основаніи результатовъ предыдущаго изслѣдованія можно дѣлать какія-либо заключенія объ устойчивости только по отношенію къ возмущеніямъ, не измѣняющимъ h и g. Для распространенія-же этихъ заключеній на случаи какихъ угодно возмущеній необходимо еще предварительно изслѣдовать непрерывность измѣненій въ зависимости отъ h и g тѣхъ движеній, которыя обращаютъ T въ minimum при условіяхъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2\,,\quad x\xi + y\eta + z\zeta = g\,.$$

Къ этому изслѣдованію теперь и обращаемся.

6. Два движенія [1]), для которыхъ соотвѣтственныя величины x, y, z, ξ, η, ζ безконечно-мало разнятся между собою, мы будемъ называть безконечно-близкими. При этомъ, если въ числѣ движеній, соотвѣтствующихъ величинамъ h и g, безконечно-близкимъ къ тѣмъ, которыя опредѣляются разсматриваемымъ движеніемъ, существуетъ безконечно-близкое къ послѣднему, то мы будемъ говорить, что это движеніе измѣняется непрерывно съ измѣненіемъ h и g [2]).

[1]) Подъ словомъ движеніе мы будемъ разумѣть вездѣ въ этомъ и въ слѣдующемъ параграфѣ одно изъ разсматриваемыхъ постоянныхъ винтовыхъ движеній.

[2]) Во избѣжаніе недоразумѣній, считаемъ нужнымъ замѣтить, что по самому смыслу дѣла здѣсь говорится только о вещественныхъ величинахъ x, y и т. д., а потому разсматриваемая непрерывность вообще не будетъ слѣдствіемъ той, которою могутъ обладать x, y и т. д., какъ алгебраическія функціи h и g.

Будемъ искать условія такой непрерывности.

Случай $\lambda = \pm\infty$ или $h = 0$ сначала исключимъ. При этомъ будетъ достаточно изслѣдовать непрерывность по отношенію къ измѣненію одного g, ибо изъ того обстоятельства, что въ разсматриваемыхъ движеніяхъ величины x, y, z, ξ, η, ζ можно измѣнять въ одномъ и томъ-же произвольномъ отношеніи, не трудно усмотрѣть, что всякое движеніе, измѣняющееся непрерывно съ измѣненіемъ g при постоянномъ отличномъ отъ нуля h, будетъ способно и къ непрерывному измѣненію вмѣстѣ съ h и g или съ однимъ только h.

Изъ уравненій (8) находимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія между x, y, z, μ и λ:

$$\left.\begin{aligned} (A_{11}-\mu)\,dx + A_{12}dy + A_{13}dz - x d\mu + X d\lambda = 0\,, \\ A_{21}dx + (A_{22}-\mu)\,dy + A_{23}dz - y d\mu + Y d\lambda = 0\,, \\ A_{31}dx + A_{32}dy + (A_{33}-\mu)\,dz - z d\mu + Z d\lambda = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (22)$$

При томъ, предполагая перемѣннымъ одно только g, имѣемъ:

$$x dx + y dy + z dz = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz + x d\xi + y d\eta + z d\zeta = dg$$

Если-же въ послѣднее уравненіе подставимъ вмѣсто $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ихъ величины, получаемыя дифференцированіемъ первыхъ трехъ уравненій (6), то приведемъ его къ виду:

$$X dx + Y dy + Z dz - H d\lambda = -dg\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

Уравненія (22), (23) и (24) дадутъ возможность найти опредѣленныя вещественныя величины производныхъ

$$\frac{dx}{dg},\ \frac{dy}{dg},\ \frac{dz}{dg},\ \frac{d\mu}{dg},\ \frac{d\lambda}{dg},$$

и слѣдовательно, непрерывность разсматриваемаго движенія по отношенію къ g будетъ несомнѣнна, пока опредѣлитель этихъ уравненій не обращается въ нуль. Опредѣлитель-же этотъ, очевидно, есть уже разсмотрѣнная нами величина R, опредѣляемая формулой (20).

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что непрерывность измѣненій въ зависимости отъ g всякаго изъ разсматриваемыхъ движеній не можетъ подлежать сомнѣнію, пока соотвѣтствующая этому движенію величина R не обращается въ нуль.

Что касается движеній, обращающихъ R въ нуль, то въ особенности обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда для λ возможны значенія, при которыхъ по крайней мѣрѣ два корня μ дѣлаются равными. Съ приближеніемъ λ къ одному изъ такихъ значеній, движенія, соотвѣтствующія этимъ корнямъ, будутъ приближаться къ нѣкоторымъ *предѣльнымъ* движеніямъ, и послѣднія непремѣнно обратятъ R въ нуль.

Это очевидно для случая равенства всѣхъ трехъ корней, ибо при этомъ

$$A_{11}-\mu=A_{22}-\mu=A_{33}-\mu=A_{23}=A_{31}=A_{12}=0\,.$$

Въ этомъ случаѣ R будетъ нулемъ не только для предѣльныхъ, но и для всякихъ другихъ движеній, соотвѣтствующихъ равнымъ корнямъ.

Если-же только два корня дѣлаются равными, то, разумѣя подъ μ кратный корень, будемъ имѣть:

$$\mu=A_{11}-\frac{A_{12}\,A_{13}}{A_{23}}=A_{22}-\frac{A_{23}\,A_{21}}{A_{31}}=A_{33}-\frac{A_{31}\,A_{32}}{A_{12}}\,, \quad . \quad (25)$$

при чемъ одна изъ величинъ $A_{11}-\mu$, $A_{22}-\mu$, $A_{33}-\mu$ навѣрно нулемъ не будетъ. Вслѣдствіе этого, предполагая $A_{11}-\mu$ отличнымъ отъ нуля, найдемъ, что квадратичная функція величинъ $yZ-zY$, $zX-xZ$, $xY-yX$, входящая въ выраженіе R, обратится въ

$$\frac{1}{A_{11}-\mu}\Big[(A_{11}-\mu)\,(yZ-zY)+A_{12}\,(zX-xZ)+A_{13}\,(xY-yX)\Big]^2.$$

Съ другой стороны, если предѣльныя значенія производныхъ $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$, когда μ дѣлается кратнымъ корнемъ, конечны, что и будетъ доказано въ слѣдующемъ параграфѣ, то умножая уравненія (22) соотвѣтственно на $yZ-zY$, $zX-xZ$, $xY-yX$, складывая результаты и переходя къ предѣлу, вслѣдствіе тѣхъ-же равенствъ (25) находимъ:

$$\Theta[(A_{11}-\mu)(yZ-zY)+A_{12}\,(zX-xZ)+A_{13}\,(xY-yX)]=0\,,$$

гдѣ

$$\Theta=\frac{dx}{d\lambda}+\frac{A_{12}}{A_{11}-\mu}\,\frac{dy}{d\lambda}+\frac{A_{13}}{A_{11}-\mu}\,\frac{dz}{d\lambda} \quad . \quad . \quad (26)$$

Отсюда если Θ не равенъ нулю, слѣдуетъ:

$$(A_{11}-\mu)(yZ-zY)+A_{12}(zX-xZ)+A_{13}(xY-yX)=0.$$

То-же будетъ и въ случаѣ $\Theta=0$, ибо при этомъ уравненія (22) обращаются въ предѣлѣ въ слѣдующія:

$$X-x\frac{d\mu}{d\lambda}=0, \quad Y-y\frac{d\mu}{d\lambda}=0, \quad Z-z\frac{d\mu}{d\lambda}=0,$$

которыя даютъ:

$$yZ-zY=zX-xZ=xY-yX=0.$$

И такъ, разсматриваемая квадратичная функція, а слѣдовательно и R въ предѣлѣ обращаются въ нуль.

Замѣтимъ, что для движеній, соотвѣтствующихъ наибольшему и среднему корню μ, R можетъ обращаться въ нуль и въ другихъ случаяхъ. Для движенія-же, соотвѣтствующаго наименьшему корню, равенство нулю R возможно только при условіи, что этотъ корень кратный.

Условіе, что R должно быть отличнымъ отъ нуля, будучи достаточнымъ, конечно не необходимо для разсматриваемой непрерывности. Послѣдняя можетъ сохраняться и при $R=0$, если удовлетворены нѣкоторыя добавочныя условія. Далѣе подробнѣе будетъ разсмотрѣнъ въ этомъ отношеніи случай кратнаго корня μ. Теперь-же замѣтимъ, что когда R обращается въ нуль для какого-либо значенія λ при простомъ корнѣ μ, то соотвѣтствующее движеніе будетъ терять свою непрерывность по отношенію къ g только въ томъ случаѣ, когда R при переходѣ λ черезъ это значеніе мѣняетъ свой знакъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только замѣтить, что изъ уравненій (22), (23) и (24) слѣдуетъ:

$$Rd\lambda=Hh^2 \mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu)\,dg\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Разсмотримъ теперь ближе движенія, соотвѣтствующія кратному корню μ. При этомъ будемъ предполагать, что равенство между корнями не имѣетъ мѣста для всякаго λ.

7. Покажемъ, какъ опредѣляются предѣльныя движенія для движеній, соотвѣтствующихъ корнямъ μ, стремящимся къ равенству.

Для этой цѣли вообще могутъ служить уравненія (22). Но чтобы можно было выводить изъ нихъ какія-либо заключенія, необходимо предварительно доказать конечность предѣльныхъ значеній производныхъ x', y', z' отъ x, y, z по λ [1]). Съ этого и начнемъ.

[1]) Вообще производныя различныхъ порядковъ отъ какой-либо функціи F по λ будемъ означать черезъ F', F'' и т. д.

До сихъ поръ мы разсматривали только вещественныя значенія λ. Будемъ теперь разсматривать также и комплексныя значенія его, изображая ихъ точками на нѣкоторой плоскости.

Уравненіе (9) опредѣляетъ μ, какъ трехзначную алгебраическую функцію λ, которая можетъ обращаться въ безконечность только для безконечнаго λ. Пусть μ_1, μ_2, μ_3 три значенія этой функціи для какого-либо λ. Послѣднее будемъ измѣнять такъ, чтобы μ_1, μ_2, μ_3 не дѣлались равными, разсматривая случай равенства между ними только какъ предѣльный.

Тогда величины x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ (8) въ связи съ уравненіемъ

$$x^2+y^2+z^2=h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

(гдѣ h по прежнему будемъ предполагать отличною отъ нуля вещественною постоянною), опредѣлятся, какъ шестизначныя алгебраическія функціи λ, совокупныя значенія которыхъ образуютъ шесть системъ, по двѣ для каждаго изъ трехъ значеній функціи μ. Системы-же эти будутъ таковы, что если x_i, y_i, z_i есть одна изъ двухъ, соотвѣтствующихъ $\mu=\mu_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, то $-x_i$, $-y_i$, $-z_i$ будетъ другою, при чемъ девять величинъ x_i, y_i, z_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ будутъ связаны уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=0\,, \\ x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1=0\,, \\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Послѣднія весьма легко получаются изъ уравненій (8) и въ случаѣ вещественнаго λ выражаютъ перпендикулярность винтовыхъ осей въ трехъ движеніяхъ, соотвѣтствующихъ данному λ.

На основаніи сказаннаго нетрудно показать, что только тѣ точки плоскости комплексной перемѣнной λ будутъ особенными для функцій x, y, z, въ которыхъ по крайней мѣрѣ двѣ изъ нихъ дѣлаются безконечными (случай, когда *только одна* дѣлается безконечною вслѣдствіе уравненія (28), невозможенъ).

Для этой цѣли замѣчаемъ, что всякая точка развѣтвленія [1]) одной изъ функцій x, y, z необходимо будетъ таковою-же и для двухъ остальныхъ. Поэтому если-бы существовала точка развѣтвленія, въ которой всѣ значенія x, y, z оставались-бы конечными, то въ такой точкѣ двѣ

[1]) Такая точка, при обходѣ которой по замкнутому контуру функція непрерывно измѣняется изъ одного значенія въ другое.

изъ шести системъ совокупныхъ значеній этихъ функцій дѣлались-бы тожественными. Но это невозможно для системъ, соотвѣтствующихъ одному и тому-же значенію функціи μ, потому, что при этомъ было-бы $x=0$, $y=0$, $z=0$, что противорѣчило-бы уравненію (28), а для системъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ этой функціи, потому, что при этомъ изъ уравненій (29) слѣдовало-бы.

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

что также противорѣчило-бы уравненію (28).

И такъ, всякая точка, въ которой всѣ значенія x, y, z остаются конечными, будетъ обыкновенною для этихъ функцій.

Мы знаемъ, что для всякаго вещественнаго λ всѣ значенія x, y, z вещественны, а слѣдовательно въ силу уравненія (28) конечны. Поэтому всякая точка вещественной оси будетъ обыкновенною для функцій x, y, z.

Отсюда слѣдуетъ, что производныя отъ x, y, z по λ какого угодно порядка будутъ имѣть конечныя опредѣленныя величины для всякаго вещественнаго λ.

Предыдущее доказательство позволяетъ заключить также, что и функція μ не имѣетъ особенныхъ точекъ на вещественной оси (конечно—кромѣ безконечно-удаленныхъ), хотя-бы на ней и были точки, въ которыхъ значенія этой функціи дѣлаются равными. Поэтому и производныя отъ μ по λ будутъ конечными для вещественныхъ конечныхъ λ.

Чтобы включить въ разсмотрѣніе случай $\lambda=\infty$, полагаемъ

$$\frac{x}{h}=\alpha,\quad \frac{y}{h}=\beta,\quad \frac{z}{h}=\gamma,\quad \frac{\mu}{\lambda^2}=-k,\quad \frac{1}{\lambda}=\varepsilon\,. \quad . \quad . \quad (30)$$

Тогда разсматривая α, β, γ, k, какъ функціи комплексной перемѣнной ε, такимъ же путемъ придемъ къ заключенію, что точка $\varepsilon=0$ есть обыкновенная для этихъ функцій.

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Предположимъ сначала, что для разсматриваемаго значенія λ равными дѣлаются только два корня μ.

Вслѣдствіе (25) уравненія (22) обратятся въ предѣлѣ въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X-\mu' x+(A_{11}-\mu)\Theta&=0,\\ Y-\mu' y+\quad A_{12}\Theta\quad&=0,\\ Z-\mu' z+\quad A_{13}\Theta\quad&=0,\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ Θ имѣетъ прежнее значеніе (26).

Внося въ эти уравненія вмѣсто X, Y, Z ихъ выраженія (15), и присоединяя къ нимъ уравненія

$$\left.\begin{aligned}(A_{11}-\mu)\,x+A_{12}y+A_{13}z=0\,,\\ x^2+y^2+z^2=h^2,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(32)$$

получимъ систему пяти уравненій, вообще достаточную для опредѣленія пяти входящихъ въ нихъ неизвѣстныхъ x, y, z, μ' и Θ.

Если изъ уравненій (31) и перваго уравненія (32) исключимъ x, y, z и Θ, то придемъ къ уравненію второй степени относительно μ', оба корня котораго будутъ вещественны. Каждому изъ этихъ корней, когда они различны, что и будетъ имѣть мѣсто вообще, будетъ соотвѣтствовать по одному движенію [1]), которыя и будутъ искомыми предѣльными. При томъ очевидно, что движеніе съ большей величиною μ' будетъ предѣльнымъ для движенія, соотвѣтствующаго меньшему изъ двухъ корней μ, стремящихся къ равенству, когда мы подходимъ къ предѣлу, увеличивая λ, и для движенія, соотвѣтствующаго большему изъ нихъ, когда предѣлъ достигается уменьшеніемъ λ.

Слѣдуетъ замѣтить, что уравненія (31) тѣ самыя, которыя получаются при разысканіи величинъ x, y, z, обращающихъ функцію

$$g=-\mathbf{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x^2-\mathbf{S}\Big(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\Big)yz\quad\ldots\ldots(33)$$

въ minimum или maximum при условіяхъ (32), ибо нетрудно убѣдиться, что

$$X=-\frac{\partial g}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial g}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial g}{\partial z}\,.\;\ldots\ldots(34)$$

При томъ величины μ', удовлетворяющія упомянутому квадратному уравненію, представляютъ наименьшее и наибольшее значенія $-\frac{2g}{h^2}$ при этихъ условіяхъ [2]). Поэтому при равенствѣ двухъ корней μ ихъ производныя μ' тогда только могутъ сдѣлаться равными, когда g сохраняетъ постоянную величину при всякихъ x, y, z, удовлетворяющихъ условіямъ (32).

[1]) Мы уже условились движенія

$$(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)\quad\text{и}\quad(-x,\,-y,\,-z,\,-\xi,\,-\eta,\,-\zeta)$$

разсматривать, какъ одно (пар. 3).

[2]) По поводу этого замѣтимъ, что вообще $\frac{d\mu}{d\lambda}=-\frac{2g}{h^2}$, какъ то нетрудно найти изъ уравненій (22).

Такимъ образомъ видимъ, что вообще, т. е. за исключеніемъ только-что упомянутаго частнаго случая, уравненія (31) и (32) будутъ достаточны для нахожденія предѣльныхъ движеній, и послѣднія будутъ таковы, что для одного изъ нихъ $\frac{g}{h^2}$ будетъ имѣть наименьшее, а для другаго наибольшее изъ непрерывнаго ряда значеній, возможныхъ для этого отношенія при величинѣ λ, дѣлающей два корня μ равными. При томъ, переходя къ предѣлу отъ меньшихъ значеній λ, найдемъ, что движеніе съ наименьшей величиною $\frac{g}{h^2}$ будетъ предѣльнымъ для соотвѣтствующаго меньшему изъ корней μ, а движеніе съ наибольшей величиной $\frac{g}{h^2}$ — для соотвѣтствующаго большему изъ нихъ. Обратное получится при переходѣ къ предѣлу отъ бóльшихъ значеній λ.

Оси предѣльныхъ движеній будутъ параллельны осямъ коническаго сѣченія, по которому поверхность втораго порядка

$$\mathrm{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x^2+\mathrm{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)yz=\mathrm{Const} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

пересѣкается съ экваторіальною плоскостью поверхности вращенія (10).

Что касается всѣхъ остальныхъ движеній, соотвѣтствующихъ равнымъ корнямъ μ, то каждому значенію $\frac{g}{h^2}$, промежуточному между его maximum'омъ и minimum'омъ, будутъ соотвѣтствовать два движенія, опредѣляемыхъ уравненіями

$$\frac{g}{h^2}(x^2+y^2+z^2)+\mathrm{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x^2+\mathrm{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)yz=0\,,$$

$$(A_{11}-\mu)\,x+A_{12}y+A_{13}z=0\,.$$

Оба эти движенія сливаются въ одно, когда $\frac{g}{h^2}$ достигаетъ своего maximum'а или minimum'а.

Очевидно, что каждое изъ этихъ непредѣльныхъ движеній способно къ непрерывному измѣненію вмѣстѣ съ $\frac{g}{h^2}$. Чтобы то-же было справедливо и для предѣльныхъ движеній, отношеніе $\frac{g}{h^2}$, какъ функція λ, не должно обращаться въ maximum для предѣльнаго движенія съ большей величиною $\frac{g}{h^2}$ и въ minimum—для предѣльнаго движенія съ меньшей величиною $\frac{g}{h^2}$.

Условіе это удовлетворено, если равными дѣлаются наименьшій и средній корни μ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (27) видно, что для наименьшаго корня g при постоянномъ h, а слѣдовательно и $\frac{g}{h^2}$ есть возрастающая функція λ, ибо для наименьшаго корня R не можетъ быть отрицательнымъ. Поэтому для этого корня предѣльное движеніе съ меньшей величиною $\frac{g}{h^2}$ достигается при возрастаніи $\frac{g}{h^2}$, а съ большей—при убываніи.

Такимъ образомъ видимъ, что то изъ движеній, обращающихъ T въ minimum, которое соотвѣтствуетъ наименьшему корню μ, вообще измѣняется непрерывно съ измѣненіемъ g и h, не теряя своей непрерывности даже при равенствѣ этого корня среднему, если только при этомъ не является безчисленнаго множества движеній, соотвѣтствующихъ одной и той-же парѣ значеній g и h.

Мы видѣли, что можетъ быть возможно еще другое движеніе, обращающее T въ minimum, которое соотвѣтствуетъ среднему корню. Для этого движенія напротивъ всегда существуютъ значенія λ, при которыхъ непрерывность его нарушается.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только замѣтить, что въ случаѣ средняго корня minimum T невозможенъ ни для достаточно большихъ положительныхъ или отрицательныхъ значеній λ, ни для значеній послѣдняго, достаточно близкихъ къ одному изъ тѣхъ, при которыхъ наименьшій корень дѣлается равнымъ среднему. Справедливость-же послѣдняго будетъ непосредственно слѣдовать изъ формулы (27) если докажемъ, что для такихъ значеній λ величина g, соотвѣтствующая среднему корню, при постоянномъ h есть возрастающая функція λ.

Что это имѣетъ мѣсто для достаточно большихъ значеній λ^2, видно изъ того, что при всякомъ данномъ h для $\lambda = -\infty$ и $g = -\infty$, а для $\lambda = +\infty$ и $g = +\infty$, и изъ того, что g, какъ алгебраическая функція λ, не можетъ имѣть безконечно-большаго числа maximum'овъ и minimum'овъ.

Что же касается значеній λ, достаточно близкихъ къ тому, при которомъ средній корень дѣлается равнымъ наименьшему, то это будетъ слѣдовать изъ выраженія, которое мы сейчасъ выведемъ, для предѣльнаго значенія производной g', когда корень, которому соотвѣтствуетъ разсматриваемая величина g, дѣлается кратнымъ.

Изъ формулы (33), принимая въ разсчетъ (34), находимъ:

$$g' = \frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} - Xx' - Yy' - Zz',$$

откуда вслѣдствіе уравненій (31) и условія

$$xx' + yy' + zz' = 0,$$

выражающаго неизмѣняемость h, и получается упомянутое выраженіе:

$$g' = \frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} + (A_{11} - \mu)\Theta^2.$$

Такъ-какъ при равенствѣ наименьшаго корня среднему, $A_{11} - \mu$ не можетъ быть отрицательнымъ, то отсюда и слѣдуетъ $g' > 0$.

Когда при равенствѣ двухъ корней, отношеніе $\frac{g}{h^2}$ сохраняетъ постоянную величину для всѣхъ движеній, соотвѣтствующихъ равнымъ корнямъ, уравненія, которыми мы пользовались будутъ недостаточны для нахожденія предѣльныхъ движеній. Но присоединяя къ нимъ уравненія, получаемыя дифференцированіемъ по λ уравненій (22), будемъ имѣть систему, вообще достаточную для этой цѣли.

Въ этомъ случаѣ всегда будутъ существовать движенія, для которыхъ непрерывное измѣненіе вмѣстѣ съ g и h невозможно.

Когда всѣ три корня μ дѣлаются равными, уравненія (22) обращаются въ слѣдующія:

$$X - \mu' x = 0, \quad Y - \mu' y = 0, \quad Z - \mu' z = 0,$$

которыя того-же вида, какъ и получаемыя при разысканіи minimum'a или maximum'a $\frac{g}{h^2}$ или при разысканіи осей поверхности втораго порядка (35).

Поэтому направленія осей предѣльныхъ движеній найдутся въ этомъ случаѣ, какъ направленія осей этой поверхности, а предѣльныя величины производныхъ μ' — какъ minimum, maximum и minimum-maximum функціи $-\frac{2g}{h^2}$. При томъ движеніе, для котораго $\frac{g}{h^2}$ есть minimum-maximum, всегда будетъ предѣльнымъ для соотвѣтствующаго среднему корню. Движенія-же съ наименьшею и наибольшею величиною $\frac{g}{h^2}$ будутъ соотвѣтственно предѣльными для движеній съ наименьшимъ и наибольшимъ изъ корней μ, когда предѣлъ достигается увеличеніемъ λ, и — для движеній съ наибольшимъ и наименьшимъ изъ нихъ, когда предѣлъ достигается уменьшеніемъ λ.

Въ заключеніе разсмотримъ движенія, для которыхъ $h = 0$ и слѣдовательно $\lambda = \pm\infty$.

Введемъ обозначенія (30) и кромѣ того положимъ:

$$\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=\frac{g}{h}=f.$$

Уравненія (8) обратятся тогда въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}(B_{11}+k)\,\alpha+B_{12}\beta+B_{13}\gamma=0\,,\\ B_{21}\alpha+(B_{22}+k)\,\beta+B_{23}\gamma=0\,,\\ B_{31}\alpha+B_{32}\beta+(B_{33}+k)\,\gamma=0\,,\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad (36)$$

гдѣ

$$B_{11}=A_{11}{}^0\varepsilon^2+2\frac{b_{11}}{c_1}\varepsilon-\frac{1}{c_1},$$

$$B_{23}=A_{23}{}^0\varepsilon^2+\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\varepsilon\,,$$

и т. д.,

а A_{ij}^0 суть значенія функцій A_{ij} для $\lambda=0$.

Изъ этихъ уравненій, присоединяя къ нимъ слѣдующее

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,,\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

найдемъ шесть системъ совокупныхъ значеній α, β, γ, которыя будутъ непрерывными функціями ε, послѣ чего изъ первыхъ трехъ уравненій (6) найдутся ξ, η, ζ въ функціяхъ h и ε. Выражая затѣмъ h въ функціи f и ε, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}Gc_1\xi&=f[\alpha-\varepsilon(b_{11}\alpha+b_{12}\beta+b_{13}\gamma)],\\ Gc_2\eta&=f[\beta-\varepsilon(b_{21}\alpha+b_{22}\beta+b_{23}\gamma)],\\ Gc_3\zeta&=f[\gamma-\varepsilon(b_{31}\alpha+b_{32}\beta+b_{33}\gamma)],\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$Gh\;=f\varepsilon\,,$$

гдѣ

$$G=\mathbf{S}\frac{\alpha^2}{c_1}-\varepsilon\left[\mathbf{S}\frac{b_{11}}{c_1}\alpha^2+\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\beta\gamma\right].$$

Отсюда видно, что для достаточно малыхъ значеній ε величины ξ, η, ζ и h будутъ непрерывными функціями ε и f, при чемъ для всякаго даннаго f при $\varepsilon=0$ и только при $\varepsilon=0$ будетъ $h=0$.

Поэтому для достаточно малыхъ значеній h разсматриваемыя движенія будутъ измѣняться непрерывно вмѣстѣ съ h и f. Для $h=0$ онѣ сольются съ нѣкоторыми предѣльными движеніями. Если всѣ величины c_1, c_2, c_3 различны, то послѣднія будутъ таковы, что для нихъ двѣ изъ величинъ ξ, η, ζ будутъ равны нулю. Въ противномъ случаѣ для нахожденія этихъ предѣльныхъ движеній можемъ поступить слѣдующимъ образомъ.

Мы знаемъ, что для достаточно малыхъ значеній ε функціи α, β, γ и k разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε. Пусть эти ряды суть:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$k = k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

гдѣ α_i, β_i, γ_i, k_i не зависятъ отъ ε. Внося ихъ въ уравненія (36) и (37) и затѣмъ приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ ε, получимъ уравненія, достаточныя для опредѣленія α_0, β_0, γ_0. Эти послѣднія величины и будутъ предѣльными значеніями α, β, γ. Послѣ этого найдутся и предѣльныя значенія ξ, η, ζ по формуламъ (38).

Кромѣ этихъ предѣльныхъ движеній, въ случаѣ равенства двухъ или всѣхъ трехъ величинъ c_1, c_2, c_3 будетъ существовать безчисленное множество другихъ, соотвѣтствующихъ тому-же f при $h=0$. Всѣ эти движенія будутъ способны къ непрерывному измѣненію вмѣстѣ съ f. Но изъ нихъ только предѣльныя будутъ способны измѣняться непрерывно вмѣстѣ съ h.

Замѣтимъ, что разсматриваемая здѣсь величина f представляетъ взятый съ тѣмъ или другимъ знакомъ наименьшій моментъ импульсовъ, производящихъ движеніе.

8. Предыдущій анализъ приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ относительно устойчивости разсматриваемыхъ движеній:

Изъ трехъ постоянныхъ винтовыхъ движеній, которыми можетъ обладать движущееся въ жидкости твердое тѣло при данной величинѣ λ, когда корни μ уравненія (9) различны, соотвѣтствующее наименьшему корню этого уравненія обращаетъ T въ абсолютный minimum при данныхъ величинахъ h и g или, что все равно, при данныхъ величинахъ h и f, и несомнѣнно устойчиво для всякихъ возмущеній. Движеніе, соотвѣтствующее среднему корню, при нѣкоторомъ условіи также можетъ обращать T въ minimum при данныхъ h и f, хотя только въ относительный, и при этомъ несомнѣнно устойчиво для всякихъ возмущеній, пока не служитъ предѣльнымъ для движеній, обращающихъ T въ этотъ minimum. Наконецъ, когда при равенствѣ наименьшаго корня среднему *каждой величинѣ $\frac{g}{h^2}$, заключающейся между извѣстными предѣлами, соотвѣтствуетъ только два движенія, то каждое изъ нихъ обращаетъ T при тѣхъ-же условіяхъ въ абсолютный minimum и несомнѣнно устойчиво для всякихъ возмущеній.*

Случай, когда при равенствѣ наименьшаго корня среднему одной и той-же величинѣ $\frac{g}{h^2}$ соотвѣтствуетъ безчисленное множество движеній, а также случай равенства всѣхъ трехъ корней остаются сомнительными. Впрочемъ въ послѣднемъ случаѣ движенія, служащія предѣльными для соотвѣтствующихъ наименьшему и наибольшему корню, несомнѣнно устойчивы, если поверхность (35) не есть поверхность вращенія.

Что касается движенія, соотвѣтствующаго наибольшему корню, то для него, какъ мы видѣли, minimum T при данныхъ h и g невозможенъ. Тѣмъ не менѣе увидимъ далѣе, что и это движеніе при извѣстныхъ условіяхъ можетъ быть устойчивымъ.

Для болѣе полнаго рѣшенія вопроса объ устойчивости разсматриваемыхъ движеній обращаемся теперь къ составленію и интегрированію дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

9. Прежде чѣмъ перейти къ занимающему насъ вопросу, считаемъ необходимымъ остановиться на нѣкоторыхъ пунктахъ общей теоріи устойчивости, которые обыкновенно оставляются въ сторонѣ.

Ограничимся случаемъ, когда въ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія время t не входитъ явнымъ образомъ. Кромѣ того, называя черезъ x, y, z и т. д. величины, опредѣляющія движеніе системы и обращающіяся въ нуль для невозмущеннаго движенія, предположимъ, что эти уравненія имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A_1x + A_2y + A_3z + \ldots + f(x, y, z, \ldots),\\
\frac{dy}{dt} &= B_1x + B_2y + B_3z + \ldots + \varphi(x, y, z, \ldots),\\
\frac{dz}{dt} &= C_1x + C_2y + C_3z + \ldots + \psi(x, y, z, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (39)$$

гдѣ A_i, B_i, C_i и т. д. суть постоянныя, а f, φ, ψ и т. д. раціональныя *цѣлыя* функціи отъ x, y, z и т. д., не содержащія членовъ нулеваго и перваго измѣреній относительно послѣднихъ.

Такого именно типа будутъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія въ разсматриваемомъ вопросѣ.

Когда функціи x, y и т. д., удовлетворяющія уравненіямъ (39), таковы, что при всякихъ достаточно малыхъ начальныхъ значеніяхъ онѣ остаются на сколько угодно малыми для всякаго t, то невозмущенное движеніе устойчиво. Если-же существуетъ хотя одно частное рѣшеніе уравненій (39), при которомъ начальныя значенія функцій x, y и т. д. могутъ быть выбраны на сколько угодно малыми, но которое такого свойства, что для достаточно большихъ значеній t функціи x, y и т. д. принимаютъ значенія, бо̀льшія нѣкотораго даннаго предѣла, какъ-бы малы ни были ихъ начальныя значенія, то это движеніе неустойчиво.

Интегрируя уравненія (39) по общему способу послѣдовательныхъ приближеній, основанному на предположеніи, что начальныя возмущенія весьма малы, получимъ для x, y, z и т. д. выраженія подъ видомъ безконечныхъ рядовъ. Покажемъ, что вычисленія всегда можно вести такимъ образомъ, что ряды эти по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ предѣлахъ будутъ сходящимися.

Пусть $t=0$ есть начальный моментъ времени, и a, b, c и т. д. начальныя значенія x, y, z и т. д.

Такъ-какъ вторыя части уравненій (39) суть синектичныя функціи отъ x, y и т. д. для всякихъ значеній этихъ перемѣнныхъ, то на основаніи извѣстной теоремы заключаемъ, что функціи x, y и т. д., удовлетворяющія этимъ уравненіямъ и обращающіяся въ a, b и т. д. для $t=0$, разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ t, a, b, c и т. д., которые будутъ абсолютно сходящимися для всякихъ комплексныхъ значеній t, модули которыхъ не превосходятъ извѣстнаго предѣла. Предѣлъ-же этотъ будетъ зависѣть отъ a, b, c и т. д. такимъ образомъ, что выборомъ достаточно малыхъ значеній для модулей этихъ величинъ можетъ быть сдѣланъ на сколько угодно большимъ.

Тѣ-же самые ряды мы можемъ получить и по упомянутому способу послѣдовательныхъ приближеній, при чемъ коэффиціенты при произведеніяхъ различныхъ степеней a, b, c и т. д. получатся непосредственно въ конечномъ видѣ. Для этого полагаемъ

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+x_2+x_3+\ldots, \\ y&=y_1+y_2+y_3+\ldots, \\ z&=z_1+z_2+z_3+\ldots, \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

и разсматриваемъ величины x_n, y_n и т. д. какъ безконечно-малыя n-аго порядка. Тогда для опредѣленія x_n, y_n и т. д. получимъ систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами, не зависящими отъ значка n, и съ послѣдними членами, которые будутъ функціями времени, извѣстнымъ образомъ зависящими отъ всѣхъ величинъ x_s, y_s и т. д., для которыхъ $s<n$. При томъ для x_1, y_1 и

т. д. получатся уравненія безъ послѣднихъ членовъ. Изъ этихъ уравненій найдемъ послѣдовательно $x_1, y_1, \ldots, x_2, y_2, \ldots$ и т. д., опредѣляя постоянныя, вводимыя каждымъ интегрированіемъ, по какому-либо закону такъ, чтобы x, y и т. д. обращались въ a, b и т. д. для $t = 0$. Проще всего достигнуть этой цѣли такимъ опредѣленіемъ постоянныхъ, при которомъ для $t = 0$ x_1, y_1 и т. д. обращаются въ a, b и т. д., а x_s, y_s и т. д. при $s > 1$ — въ нуль. При такомъ опредѣленіи постоянныхъ ряды (40) будутъ тожественны съ упомянутыми выше, а слѣдовательно все сказанное относительно послѣднихъ будетъ справедливо и по отношенію къ рядамъ (40).

Хотя послѣдовательное вычисленіе членовъ въ рядахъ (40) и не представляетъ никакихъ серьезныхъ затрудненій, но съ каждымъ новымъ приближеніемъ вычисленія на столько осложняются, что мы не въ состояніи подмѣтить закона, которому слѣдуютъ члены этихъ рядовъ. Мы можемъ опредѣлить только общій характеръ функцій, при помощи которыхъ выражаются эти члены, и въ этомъ отношеніи можемъ сказать слѣдующее:

Каждая изъ величинъ x_n, y_n и т. д. будетъ однородною цѣлою функціей n-ой степени отъ a, b и т. д. Въ то-же время это будетъ цѣлая функція n-ой степени величинъ

$$e^{k_1 t}, \quad e^{k_2 t}, \quad e^{k_3 t} \ldots\ldots, \qquad (41)$$

гдѣ k_1, k_2 и т. д. суть корни алгебраическаго уравненія

$$\begin{vmatrix} A_1 - k, & A_2, & A_3, \ldots \\ B_1, & B_2 - k, & B_3, \ldots \\ C_1, & C_2, & C_3 - k, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0, \qquad (42)$$

степень котораго одинакова съ числомъ уравненій въ системѣ (39). Если корни этого уравненія таковы, что уравненіямъ вида

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots = k_i \qquad (43)$$

нельзя удовлетворить цѣлыми положительными или равными нулю числами m_1, m_2 и т. д. иначе, какъ полагая $m_i = 1$ и $m_j = 0$ для $j \gtrless i$, то коэффиціенты въ упомянутыхъ цѣлыхъ функціяхъ величинъ (41) будутъ постоянными. Въ противномъ случаѣ они будутъ вообще цѣлыми функціями t съ постоянными коэффиціентами. При томъ, если n есть наименьшая не равная нулю величина суммы $m_1 + m_2 + \ldots$, при которой условію (43) можно удовлетворить сказаннымъ способомъ, то

x_n, y_n и т. д. будутъ первыми членами въ рядахъ (40), въ которые могутъ войти степени t. Такъ, когда уравненіе (42) имѣетъ кратные корни, то уже x_1, y_1 и т. д, могутъ содержать степени t. Когда всѣ корни уравненія (42) простые, но одинъ изъ нихъ равенъ нулю, то x_2, y_2 и т. д. будутъ первыми членами въ рядахъ (40) такого вида. Когда уравненіе (42) содержитъ только четныя степени k, то первыми членами такого вида будутъ вообще x_3, y_3 и т. д. Таково именно будетъ уравненіе (42) въ занимающемъ насъ вопросѣ.

Замѣтимъ, что всегда могутъ быть найдены частныя рѣшенія уравненій (39), содержащія только нѣкоторыя изъ показательныхъ функцій (41). По отношенію къ этимъ частнымъ рѣшеніямъ будетъ справедливо все сказанное относительно общаго интеграла, если только въ условіи (43) положимъ равными нулю тѣ изъ чиселъ m_s, которые служатъ коэффиціентами при корняхъ k_s, не входящихъ въ эти частныя рѣшенія. Между прочимъ можно найти частное рѣшеніе съ одною постоянною произвольною, зависящее только отъ одной изъ этихъ показательныхъ функцій. При томъ, если соотвѣтствующій послѣдней корень k таковъ, что mk при цѣломъ m, большемъ единицы, не можетъ быть корнемъ уравненія (42), то величины x_n, y_n и т. д. для этого частнаго рѣшенія будутъ цѣлыми функціями n-ой степени отъ e^{kt} съ постоянными коэффиціентами.

Если въ рядахъ (40) отбросимъ всѣ члены, слѣдующіе за n-ымъ, то получимъ такъ-называемое n-ое приближеніе, хотя въ дѣйствительности оно можетъ служить для приближеннаго вычисленія функцій x, y и т. д. только при достаточно малыхъ значеніяхъ t. Обыкновенно въ вопросахъ разсматриваемаго рода ограничиваются изслѣдованіемъ перваго приближенія, и по нему судятъ объ устойчивости невозмущеннаго движенія. Поэтому когда между корнями уравненія (42) нѣтъ такихъ, вещественныя части которыхъ положительны, и когда при томъ въ выраженія x_1, y_1 и т. д. показательныя функціи, соотвѣтствующія тѣмъ изъ этихъ корней, вещественныя части которыхъ равны нулю, входятъ съ постоянными коэффиціентами, то невозмущенное движеніе считается устойчивымъ; въ противномъ-же случаѣ—неустойчивымъ.

Конечно движенія устойчивыя или неустойчивыя въ первомъ приближеніи могутъ не быть такими въ дѣйствительности. Такъ напр. въ разсматриваемомъ вопросѣ о постоянныхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости легко убѣдиться, что для предѣльныхъ движеній, соотвѣтствующихъ равенству двухъ корней μ, величины x_1, y_1, и т. д. содержатъ линейныя функціи t, и слѣдовательно эти движенія въ первомъ приближеніи неустойчивы, а между тѣмъ мы знаемъ, что въ дѣйствительности всякія движенія, соотвѣтствующія равенству наименьшаго корня μ среднему, вообще устойчивы.

Тѣмъ не менѣе изслѣдованіе уравненія (42) въ нѣкоторыхъ случаяхъ дѣйствительно рѣшаетъ вопросъ объ устойчивости. Чтобы показать это, разсмотримъ ближе тѣ частныя рѣшенія уравненій (39), въ которыя t входитъ не иначе, какъ при посредствѣ показательныхъ функцій (41).

Пусть между корнями уравненія (42) существуетъ нѣкоторая група корней k_1, $k_2, \ldots$ такихъ, для которыхъ выраженія вида

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots$$

при цѣлыхъ положительныхъ или равныхъ нулю m_i, удовлетворяющихъ условію

$$m_1 + m_2 + \ldots > 1,$$

не могутъ быть корнями уравненія (42), не имѣя этихъ корней также и предѣлами, когда числа m_i безпредѣльно возрастаютъ по какому-либо закону.

Покажемъ, что для уравненій (39) можетъ быть найдено частное рѣшеніе, въ которомъ x, y и т. д. будутъ опредѣлятся безконечными рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ

$$u_1 = \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad u_2 = \alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots,$$

гдѣ α_1, $\alpha_2, \ldots$ произвольныя постоянныя, и абсолютно сходящимися для всѣхъ значеній u_1, $u_2, \ldots$, модули которыхъ не превосходятъ извѣстнаго предѣла.

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum L_{m_1, m_2, \ldots}\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots, \\ y &= \sum M_{m_1, m_2, \ldots}\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots, \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

гдѣ суммы распространены на всѣ цѣлыя положительныя или равныя нулю значенія чиселъ m_1, $m_2, \ldots$, удовлетворяющія условію $m_1 + m_2 + \ldots \geqq 1$.

Внося эти ряды въ уравненія (39) и приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ степеней u_1, $u_2, \ldots$, получимъ уравненія такого свойства, что изъ нихъ опредѣлятся однозначнымъ образомъ всѣ коэффиціенты L, M и т. д., для которыхъ сумма $m_1 + m_2 \ldots$ имѣетъ какую-либо данную величину, по тѣмъ изъ этихъ коэффиціентовъ, для которыхъ эта сумма имѣетъ меньшія величины. А именно, для опредѣленія коэффиціентовъ L, M и т. д., соотвѣтствующихъ какой-либо комбинаціи чиселъ $m_1, m_2, \ldots$, для которой $m_1 + m_2 + \ldots > 1$, получится система линейныхъ уравненій, опредѣлитель которой будетъ равенъ значенію первой части уравненія (42) при $k = m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots$, и слѣд. по сдѣланному допущенію, не будетъ равенъ нулю. Такимъ образомъ опредѣлятся однозначно всѣ коэффиціенты L, M и т. д., если будутъ извѣстны тѣ изъ нихъ, для которыхъ $m_1 + m_2 + \ldots = 1$. Для опредѣленія-же послѣднихъ получатся системы однородныхъ линейныхъ уравненій, опредѣлители которыхъ будутъ равны нулю, а потому изъ нихъ найдутся отношенія между коэффиціентами L, M и т. д. Вообще для этихъ отношеній получатся вполнѣ опредѣленныя величины. Въ частныхъ-же случаяхъ нѣкоторыя изъ нихъ могутъ оставаться произвольными. Во всякомъ случаѣ мы можемъ остановиться на какой-либо опредѣленной системѣ этихъ коэффиціентовъ, удовлетворяющей упомянутымъ уравненіямъ, что и будемъ предполагать далѣе.

Предполагая всѣ коэффиціенты L, M и т. д. для которыхъ $m_1 + m_2 + \ldots = 1$, извѣстными, мы можемъ для опредѣленія всѣхъ остальныхъ поступить слѣдующимъ образомъ.

Пусть $f(k)$ представляетъ первую часть уравненія (42). Тогда изъ уравненій (39) путемъ дифференцированія и исключенія могутъ быть выведены слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{d}{dt}\right) x &= F(x, y, z, \ldots), \\ f\left(\frac{d}{dt}\right) y &= \Phi(x, y, z, \ldots), \\ f\left(\frac{d}{dt}\right) z &= \Psi(x, y, z, \ldots), \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

гдѣ символическія обозначенія первыхъ частей равенствъ не требуютъ дальнѣйшихъ разъясненій, и гдѣ F, Φ и т. д. суть означенія цѣлыхъ функцій отъ x, y и т. д., не заключающихъ членовъ ниже втораго измѣренія относительно послѣднихъ.

Внося ряды (44) въ уравненія (45) и приравнивая между собою коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ степеней $u_1, u_2, \ldots$ въ обѣихъ частяхъ равенствъ, получимъ уравненія слѣдующаго типа:

$$\left.\begin{aligned} f(m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots) L_{m_1, m_2, \ldots} &= P, \\ f(m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots) M_{m_1, m_2, \ldots} &= Q, \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (46)$$

гдѣ P, Q и т. д. полиномы, составленные изъ коэффиціентовъ функцій F, Φ и т. д. и изъ коэффиціентовъ L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ менѣе $m_1 + m_2 + \ldots$, *съ положительными коэффиціентами.* Поэтому, путемъ послѣдовательнаго исключенія, изъ уравненій вида (46) найдемъ $L_{m_1, m_2, \ldots}$, $M_{m_1, m_2, \ldots}$ и т. д. подъ видомъ полиномовъ, составленныхъ изъ коэффиціентовъ функцій F, Φ и т. д., изъ коэффиціентовъ L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ равна 1, и изъ величинъ

$$\frac{1}{f(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots)}$$

для которыхъ цѣлыя положительныя или равныя нулю числа $\mu_1, \mu_2, \ldots$ удовлетворяютъ условію:

$$1 < \mu_1 + \mu_2 + \ldots \leqq m_1 + m_2 + \ldots$$

При томъ полиномы эти будутъ съ положительными коэффиціентами.

Изъ этого послѣдняго обстоятельства слѣдуетъ, что мы получимъ высшіе предѣлы для модулей $L_{m_1, m_2, \ldots}$, $M_{m_1, m_2 \ldots}$ и т. д., замѣняя въ этихъ полиномахъ: коэффиціенты, входящіе въ функціи F, Φ и т. д. при одинаковыхъ произведеніяхъ степеней x, y и т. д., наибольшими изъ ихъ числовыхъ значеній, коэффиціенты L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ равна 1, наибольшимъ изъ ихъ модулей, и величины $f(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots)$ низшимъ предѣломъ, менѣе котораго не могутъ дѣлаться модули этихъ величинъ, когда $\mu_1, \mu_2, \ldots$ принимаютъ какія-либо цѣлыя положительныя или равныя нулю значенія, удовлетворяющія условію

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots > 1 .$$

Вслѣдствіе сдѣланныхъ предположеній такой низшій предѣлъ, отличный отъ нуля, всегда будетъ существовать.

Послѣ такой замѣны ряды (44) обратятся въ одинъ и тотъ-же нѣкоторый новый рядъ, модули членовъ котораго будутъ болѣе или равны модулямъ соотвѣтственныхъ членовъ рядовъ (44). Поэтому послѣдніе будутъ абсолютно сходящимися для всякихъ значеній $u_1, u_2, \ldots$, для которыхъ этотъ новый рядъ есть абсолютно сходящійся. Условія-же сходимости этого новаго ряда можно вывести изъ слѣдующихъ соображеній.

Пусть $\Theta(x)$ есть функція, въ которую обращается каждая изъ функцій F, Φ и т. д. при указанной замѣнѣ коэффиціентовъ, сопровождаемой замѣною y, z и т. д. черезъ x; l — наибольшій изъ модулей коэффиціентовъ L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ равна 1, и λ — упомянутый низшій предѣлъ для модулей $f(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots)$.

Очевидно, что разсматриваемый новый рядъ представляетъ разложеніе по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $v = l(u_1 + u_2 + \ldots)$ корня алгебраическаго уравненія

$$\lambda(x - v) = \Theta(x),$$

обращающагося въ нуль для $v = 0$, а потому будетъ абсолютно сходящимся, пока этотъ корень есть синектичная функція v. Послѣднее-же очевидно имѣетъ мѣсто для всякихъ достаточно малыхъ значеній модуля v.

И такъ, разсматриваемый рядъ, а слѣдовательно и ряды (44) суть абсолютно сходящіеся для всякихъ значеній u_1, $u_2, \ldots$, модули которыхъ достаточно малы.

Такимъ образомъ для достаточно малыхъ значеній модулей $\alpha_1 e^{k_1 t}$ $\alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots$ находимъ слѣдующее частное рѣшеніе уравненій (39):

$$\left.\begin{array}{l} x = X(\alpha_1 e^{k_1 t},\ \alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots), \\ y = Y(\alpha_1 e^{k_1 t},\ \alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots), \\ \qquad \text{и т. д.,} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

гдѣ вторыя части суть синектичныя функціи отъ $\alpha_1 e^{k_1 t}$, $\alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots$ для всякихъ достаточно малыхъ значеній ихъ модулей, обращающіяся въ нуль, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$.

При достаточно малыхъ значеніяхъ модулей α_1, $\alpha_2, \ldots$ уравненія (47) будутъ имѣть мѣсто и для $t = 0$. Тогда найдемъ изъ нихъ слѣдующія выраженія для начальныхъ значеній функцій x, y и т. д.:

$$a = X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

$$b = Y(\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

и т. д.

При безконечно-малыхъ α_1, $\alpha_2, \ldots$ эти начальныя значенія также будутъ безконечно-малыми.

Мы выходили изъ предположенія, что разсматриваемые корни k_1, $k_2, \ldots$ удовлетворяютъ нѣкоторому условію. Если *всѣ* корни уравненія (42) удовлетворяютъ этому условію, и если всѣ эти корни приняты въ разсчетъ при составленіи уравненій (47), то послѣднія представятъ общій интегралъ уравненій (39). Положимъ, что при этомъ между корнями уравненія (42) нѣтъ такихъ, вещественныя части которыхъ положительны. Тогда модули величинъ $\alpha_1 e^{k_1 t}$, $\alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots$ для всякаго положительнаго t будутъ на сколько угодно малыми, если только модули α_1, $\alpha_2, \ldots$ достаточно малы. Поэтому при достаточно малыхъ значеніяхъ модулей α_1, $\alpha_2, \ldots$ или, что все равно, при достаточно малыхъ начальныхъ значеніяхъ функцій x, y и т. д., уравненія (47) опредѣлятъ общій интегралъ уравненій (39) для всякаго положительнаго t, и изъ этого общаго интеграла будетъ слѣдовать, что невозмущенное движеніе устойчиво.

Замѣтимъ однако, что въ разсматриваемомъ случаѣ вещественныя части корней $k_1, k_2, \ldots$ не должны быть равны нулю, и слѣдовательно должны быть всѣ отрицательными. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе того, что коэффиціенты въ уравненіи (42) предполагаются вещественными, это уравненіе можетъ имѣть только четное число мнимыхъ корней, по парно сопряженныхъ. Поэтому если-бы существовалъ корень $k_1 = q\sqrt{-1}$ (гдѣ q вещественная величина), то существовалъ-бы также и корень $k_2 = -q\sqrt{-1}$, а эти два корня, очевидно, не удовлетворяютъ условію, послужившему намъ исходною точкой.

Поэтому когда уравненіе (42) содержитъ только четныя степени k, что и будетъ имѣть мѣсто въ занимающемъ насъ вопросѣ, то предыдущими разсужденіями не можетъ быть доказана устойчивость невозмущеннаго движенія.

Изъ уравненій (47) можно вывести еще другія заключенія, справедливыя для всякаго типа уравненія (42). А именно, можно доказать, что *невозмущенное движеніе несомнѣнно неустойчиво, если въ числѣ корней уравненія (42) есть такіе, вещественныя части которыхъ положительны.*

Допустимъ сначала, что уравненіе (42) имѣетъ вещественные положительные корни. Пусть k наибольшій изъ этихъ корней. Такъ-какъ корень этотъ, будетъ-ли онъ простой или кратный, очевидно, удовлетворяетъ условію, изъ котораго мы исходили, то можетъ быть найдено частное рѣшеніе уравненій (39) съ одною постоянною произвольною α слѣдующаго типа:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(\alpha e^{kt}), \\ y &= Y(\alpha e^{kt}), \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

(гдѣ α и функціи X, Y и т. д. для вещественнаго t можно предполагать вещественными).

Пусть уравненія (48) справедливы, пока

$$\operatorname{Mod} \alpha e^{kt} \leq K,$$

и пусть ε означаетъ числовое значеніе α.

При этомъ оказывается, что какъ-бы мало ни было ε, а слѣдовательно и начальныя значенія функцій x, y и т. д., удовлетворяющія условіямъ:

$$a = X(\alpha), \quad b = Y(\alpha) \text{ и т. д.,}$$

въ нѣкоторый моментъ времени

$$t=\frac{1}{k}\log\frac{K}{\varepsilon}$$

функціи эти примутъ значенія

$$X(\pm K),\ Y(\pm K) \text{ и т. д.,}$$

не зависящія отъ α и которыя, очевидно, можно предполагать не равными нулю; а это обстоятельство служитъ признакомъ неустойчивости невозмущеннаго движенія.

Совершенно такъ-же докажется неустойчивость и въ случаѣ, когда уравненіе (42) имѣетъ комплексные корни съ положительными вещественными частями. Выбираемъ изъ этихъ корней два сопряженныхъ съ наибольшими вещественными частями. Пусть эти корни суть

$$k_1=p+q\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad k_2=p-q\sqrt{-1}\,.$$

Такъ-какъ они, очевидно, удовлетворяютъ извѣстному условію, то можно найти частное рѣшеніе уравненій (39) съ двумя постоянными α_1 и α_2 слѣдующаго типа:

$$\left.\begin{aligned} x&=X(\alpha_1 e^{k_1 t},\ \alpha_2 e^{k_2 t})\\ y&=Y(\alpha_1 e^{k_1 t},\ \alpha_2 e^{k_2 t})\\ &\text{и т. д.,}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (49)$$

гдѣ функціи X, Y и т. д. можемъ предполагать вещественными для вещественныхъ t, выбирая для α_1 и α_2 мнимыя сопряженныя значенія.

Пусть ε есть общій модуль постоянныхъ α_1 и α_2, такъ-что можно положить

$$\alpha_1=\varepsilon e^{\beta\sqrt{-1}}\,,\quad \alpha_2=\varepsilon e^{-\beta\sqrt{-1}}\,.$$

Предполагая, что уравненія (49) справедливы, пока

$$\text{Mod}\ \alpha_1 e^{k_1 t}\leqq K \quad \text{и} \quad \text{Mod}\ \alpha_2 e^{k_2 t}\leqq K\,,$$

назовемъ черезъ τ вещественное значеніе t, удовлетворяющее уравненію

$$\varepsilon e^{pt}=K,$$

и затѣмъ опредѣлимъ β такимъ образомъ, чтобы $q\tau + \beta$ имѣло какую-либо данную величину γ.

Тогда окажется, что какъ-бы ε ни было мало, а слѣдовательно и начальныя значенія функцій x, y и т. д., удовлетворяющія условіямъ

$$a = X(\alpha_1,\ \alpha_2),$$
$$b = Y(\alpha_1,\ \alpha_2)$$

и т. д.,

всегда наступитъ моментъ

$$t = \tau = \frac{1}{p} \log \frac{K}{\varepsilon},$$

когда эти функціи примутъ значенія

$$X\left(Ke^{\gamma\sqrt{-1}},\ Ke^{-\gamma\sqrt{-1}}\right),\quad Y\left(Ke^{\gamma\sqrt{-1}},\ Ke^{-\gamma\sqrt{-1}}\right) \text{ и т. д.,}$$

не зависящія отъ ε, и которыя можно предполагать не равными нулю; а этимъ и обнаруживается неустойчивость невозмущеннаго движенія.

Такимъ образомъ для устойчивости необходимо, чтобы корни уравненія (42) не имѣли положительныхъ вещественныхъ частей.

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

10. Пусть величины x, y, z, ξ, η, ζ, сохранявшія постоянныя значенія въ невозмущенномъ движеніи, обращаются въ какой-либо моментъ t возмущеннаго движенія въ $x + \delta x$, $y + \delta y$ и т. д. Тогда для опредѣленія функцій δx, δy и т. д. получимъ изъ (4) слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \zeta}\,\delta y - \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\delta z + (y + \delta y)\,\delta\,\frac{\partial T}{\partial \zeta} - (z + \delta z)\,\delta\,\frac{\partial T}{\partial \eta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\delta \xi}{dt} = \frac{\partial T}{\partial z}\,\delta y - \frac{\partial T}{\partial y}\,\delta z + (y + \delta y)\,\delta\,\frac{\partial T}{\partial z} - (z + \delta z)\,\delta\,\frac{\partial T}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial T}{\partial \zeta}\,\delta \eta - \frac{\partial T}{\partial \eta}\,\delta \zeta + (\eta + \delta \eta)\,\delta\,\frac{\partial T}{\partial \zeta} - (\zeta + \delta \zeta)\,\delta\,\frac{\partial T}{\partial \eta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

гдѣ $\delta\frac{\partial T}{\partial x}$, $\delta\frac{\partial T}{\partial y}$ и т. д. означаютъ результаты подстановки въ $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ и т. д. величинъ δx, δy и т. д. вмѣсто x, y и т. д.

Если внесемъ въ эти уравненія вмѣсто $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ и т. д. ихъ выраженія изъ уравненій (5) и замѣтимъ, что

$$\delta\frac{\partial T}{\partial \xi} - \lambda\delta x = \frac{\partial \delta T}{\partial \delta \xi},$$

$$\delta\frac{\partial T}{\partial x} - \mu\delta x - \lambda\delta\xi = \frac{\partial \delta T}{\partial \delta x}$$

и т. д.,

гдѣ δT опредѣляется формулой (12), а затѣмъ, ограничиваясь первымъ приближеніемъ, отбросимъ члены второго измѣренія относительно безконечно-малыхъ величинъ δx, δy и т. д., то приведемъ наши уравненія къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\delta x}{dt} = y\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\zeta} - z\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\eta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d\delta\xi}{dt} = y\frac{\partial\delta T}{\partial\delta z} - z\frac{\partial\delta T}{\partial\delta y} + \eta\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\zeta} - \zeta\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\eta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (50)$$

Эти уравненія можно еще нѣсколько упростить преобразованіемъ перемѣнныхъ.

Положимъ

$$\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\xi} = \omega_1, \quad \frac{\partial\delta T}{\partial\delta\eta} = \omega_2, \quad \frac{\partial\delta T}{\partial\delta\zeta} = \omega_3$$

и вмѣсто функцій $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ введемъ функціи ω_1, ω_2, ω_3.

Вслѣдствіе этого выраженіе для $2\delta T$ приведется къ виду:

$$2\delta T = 2A + \frac{{\omega_1}^2}{c_1} + \frac{{\omega_2}^2}{c_2} + \frac{{\omega_3}^2}{c_3},$$

гдѣ

$$2A = \mathbf{S}(A_{11} - \mu)(\delta x)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}\delta y \delta z\,.$$

При томъ имѣемъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \delta x} = b_{11} - \lambda\,, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \delta x} = b_{21}\,, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \delta x} = b_{31}$$

и т. д.,

вслѣдствіе чего

$$\frac{\partial \delta T}{\partial \delta x} = \frac{\partial A}{\partial \delta x} + (b_{11} - \lambda)\frac{\omega_1}{c_1} + b_{21}\frac{\omega_2}{c_2} + b_{31}\frac{\omega_3}{c_3}$$

и т. д.,

а уравненія (50) принимаютъ видъ:

$$\frac{d\delta x}{dt} = y\omega_3 - z\omega_2$$

и т. д.,

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = y\frac{\partial A}{\partial \delta z} - z\frac{\partial A}{\partial \delta y} + \left(\frac{b_{13}}{c_1}y - \frac{b_{12}}{c_1}z\right)\omega_1 +$$

$$+ \left(\frac{b_{23}}{c_2}y - \frac{b_{22} - \lambda}{c_2}z - \zeta\right)\omega_2 - \left(\frac{b_{32}}{c_3}z - \frac{b_{33} - \lambda}{c_3}y - \eta\right)\omega_3$$

и т. д.

Но съ другой стороны

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{b_{11} - \lambda}{c_1}\frac{d\delta x}{dt} - \frac{b_{12}}{c_1}\frac{d\delta y}{dt} - \frac{b_{13}}{c_1}\frac{d\delta z}{dt} =$$

$$= \frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt} + \left(\frac{b_{13}}{c_1}y - \frac{b_{12}}{c_1}z\right)\omega_1 - \left(\frac{b_{13}}{c_1}x - \frac{b_{11} - \lambda}{c_1}z\right)\omega_2 +$$

$$+ \left(\frac{b_{12}}{c_1}x - \frac{b_{11} - \lambda}{c_1}y\right)\omega_3\,,$$

такъ-что будемъ имѣть:

$$\frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt}=y\frac{\partial A}{\partial \delta z}-z\frac{\partial A}{\partial \delta y}+\left(\frac{b_{13}}{c_1}x+\frac{b_{23}}{c_2}y-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}z-\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}z-\zeta\right)\omega_2-$$

$$-\left(\frac{b_{12}}{c_1}x+\frac{b_{32}}{c_3}z-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}y-\frac{b_{33}-\lambda}{c_3}y-\eta\right)\omega_3$$

и т. д.

Внося сюда вмѣсто ξ, η, ζ ихъ выраженія, слѣдующія изъ первыхъ трехъ уравненій (6), вводя затѣмъ прежнія обозначенія (15) и полагая кромѣ того

$$\sigma=\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}+\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}+\frac{b_{33}-\lambda}{c_3},$$

получимъ окончательно слѣдующія преобразованія уравненій (50):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\delta x}{dt}&=y\omega_3-z\omega_2,\\ \frac{d\delta y}{dt}&=z\omega_1-x\omega_3,\\ \frac{d\delta z}{dt}&=x\omega_2-y\omega_1,\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ (51)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt}&=y\frac{\partial A}{\partial \delta z}-z\frac{\partial A}{\partial \delta y}+(Z-\sigma z)\omega_2-(Y-\sigma y)\omega_3,\\ \frac{1}{c_2}\frac{d\omega_2}{dt}&=z\frac{\partial A}{\partial \delta x}-x\frac{\partial A}{\partial \delta z}+(X-\sigma x)\omega_3-(Z-\sigma z)\omega_1,\\ \frac{1}{c_3}\frac{d\omega_3}{dt}&=x\frac{\partial A}{\partial \delta y}-y\frac{\partial A}{\partial \delta x}+(Y-\sigma y)\omega_1-(X-\sigma x)\omega_2.\end{aligned}\right\}\ .\ (52)$$

Эти уравненія, очевидно, всегда будутъ допускать частное рѣшеніе, въ которомъ δx, δy, δz, ω_1, ω_2, ω_3 имѣютъ постоянныя значенія, зависящія отъ *двухъ* постоянныхъ произвольныхъ, ибо таковы значенія этихъ величинъ, опредѣляющія переходъ отъ одного постояннаго винтоваго движенія къ другому такому-же. Вслѣдствіе этого детерминантное уравненіе (42), которое въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ 6-ой степени, должно имѣть два равныхъ нулю корня, и если остальные корни этого уравненія не равны нулю, то въ общемъ интегралѣ уравненій (51) и (52) не будетъ членовъ вида at^m, гдѣ a постоянная и m отличное отъ нуля цѣлое число.

Для составленія уравненія (42), ищемъ частное рѣшеніе уравненій (51) и (52) слѣдующаго типа:

$$\delta x = \alpha_1\, e^{kt}\,, \qquad \delta y = \alpha_2\, e^{kt}\,, \qquad \delta z = \alpha_3\, e^{kt}\,,$$

$$\omega_1 = \beta_1\, e^{kt}\,, \qquad \omega_2 = \beta_2\, e^{kt}\,, \qquad \omega_3 = \beta_3\, e^{kt}\,,$$

гдѣ α и β постоянныя.

При этомъ уравненія (51) даютъ:

$$k\alpha_1 = y\beta_3 - z\beta_2\,, \quad k\alpha_2 = z\beta_1 - x\beta_3\,, \quad k\alpha_3 = x\beta_2 - y\beta_1\,. \quad . \; (53)$$

Если-же замѣтимъ, что въ результатѣ подстановки въ функціи

$$y\frac{\partial A}{\partial \delta z} - z\frac{\partial A}{\partial \delta y}, \qquad z\frac{\partial A}{\partial \delta x} - x\frac{\partial A}{\partial \delta z}, \qquad x\frac{\partial A}{\partial \delta y} - y\frac{\partial A}{\partial \delta x}$$

вмѣсто δx, δy, δz величинъ $y\beta_3 - z\beta_2$, $z\beta_1 - x\beta_3$, $x\beta_2 - y\beta_1$ получаются выраженія:

$$-\frac{\partial B}{\partial \beta_1}, \qquad -\frac{\partial B}{\partial \beta_2}, \qquad -\frac{\partial B}{\partial \beta_3},$$

гдѣ

$$B = \mathbf{S}(A_{11} - \mu)(y\beta_3 - z\beta_2)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}(z\beta_1 - x\beta_3)(x\beta_2 - y\beta_1)\,,$$

или полагая

$$B_{11} = (A_{22} - \mu)z^2 + (A_{33} - \mu)y^2 - 2A_{23}yz\,,$$

$$B_{23} = A_{12}xz + A_{13}xy - A_{23}x^2 - (A_{11} - \mu)\, yz\,,$$

и т. д.,

$$B = \mathbf{S}B_{11}\beta_1{}^2 + 2\mathbf{S}B_{23}\beta_2\beta_3\,,$$

то изъ уравненій (52) послѣ исключенія α_1, α_2, α_3 при помощи (53) найдемъ:

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_1} + \frac{k^2}{c_1}\beta_1 + (Y - \sigma y)k\beta_3 - (Z - \sigma z)k\beta_2 = 0\,,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_2} + \frac{k^2}{c_2}\beta_2 + (Z - \sigma z)k\beta_1 - (X - \sigma x)k\beta_3 = 0\,,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_3} + \frac{k^2}{c_3}\beta_3 + (X - \sigma x)k\beta_2 - (Y - \sigma y)k\beta_1 = 0\,.$$

Исключая отсюда β_1, β_2, β_3, и получаемъ искомое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} B_{11}+\frac{k^2}{c_1}, & B_{12}-(Z-\sigma z)k, & B_{13}+(Y-\sigma y)k \\ B_{21}+(Z-\sigma z)k, & B_{22}+\frac{k^2}{c_2}, & B_{23}-(X-\sigma x)k \\ B_{31}-(Y-\sigma y)k, & B_{32}+(X-\sigma x)k, & B_{33}+\frac{k^2}{c_3} \end{vmatrix}=0 \ . \quad (54)$$

Что это уравненіе дѣйствительно имѣетъ два равныхъ нулю корня, видно изъ того, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} B_{11}, & B_{12}, & B_{13} \\ B_{21}, & B_{22}, & B_{23} \\ B_{31}, & B_{32}, & B_{33} \end{vmatrix}$$

необходимо равенъ нулю. Въ послѣднемъ-же убѣждаемся, замѣчая, что по самому опредѣленію функціи B уравненіямъ

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_1}=0\,, \quad \frac{\partial B}{\partial \beta_2}=0\,, \quad \frac{\partial B}{\partial \beta_3}=0$$

можно удовлетворить вообще не равными нулю одновременно величинами:

$$\beta_1=\beta x\,, \quad \beta_2=\beta y\,, \quad \beta_3=\beta z\,.$$

По сокращеніи на k^2 уравненіе (54) приводится къ виду:

$$\frac{k^4}{c_1c_2c_3}+Qk^2+R=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} Q&=\mathbf{S}\frac{1}{c_2c_3}B_{11}+\mathbf{S}\frac{1}{c_1}(X-\sigma x)^2\,, \\ R&=\mathbf{S}\frac{1}{c_1}(B_{22}B_{33}-B_{23}{}^2)+\mathbf{S}B_{11}(X-\sigma x)^2+2\mathbf{S}B_{23}(Y-\sigma y)(Z-\sigma z)\,. \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Внося вмѣсто величинъ B_{ij} ихъ выраженія, найдемъ, что коэффиціентъ R есть та самая величина, которую мы уже разсматривали въ предыдущихъ параграфахъ, и которая опредѣляется формулой (20), а для коэффиціента Q получимъ слѣдующее выраженіе:

$$Q = \mathbf{S}\frac{1}{c_1}(X - \sigma x)^2 + H\mathbf{S}\frac{A_{11} - \mu}{c_1} - \mathbf{S}(A_{11} - \mu)\frac{x^2}{{c_1}^2} - 2\mathbf{S}A_{23}\frac{y}{c_2}\frac{z}{c_3},$$

гдѣ H по прежнему означаетъ

$$\frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3}.$$

Это выраженіе можемъ еще нѣсколько преобразовать, замѣчая, что изъ уравненій (8) слѣдуетъ:

$$\mathbf{S}(A_{11} - \mu)\frac{x^2}{{c_1}^2} + \mathbf{S}A_{23}\left(\frac{1}{{c_2}^2} + \frac{1}{{c_3}^2}\right)yz = 0.$$

Вслѣдствіе этого находимъ:

$$Q = \mathbf{S}\frac{1}{c_1}(X - \sigma x)^2 + H\mathbf{S}\frac{A_{11} - \mu}{c_1} + \mathbf{S}A_{23}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right)^2 yz. \quad . \ (57)$$

11. Изъ предыдущаго мы знаемъ, что необходимое условіе устойчивости состоитъ въ томъ, чтобы уравненіе (55) не имѣло корней съ положительными вещественными частями; а для этого обѣ величины k^2, удовлетворяющія ему, должны быть вещественными, и при томъ ни одна изъ нихъ не должна быть положительною. Это обстоятельство выразится тремя слѣдующими условіями:

$$Q^2 - \frac{4}{c_1 c_2 c_3}R \geqq 0, \quad Q \geqq 0, \quad R \geqq 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (58)$$

которыя, если угодно, можно замѣнить двумя

$$R \geqq 0, \quad Q \geqq 2\sqrt{\frac{R}{c_1 c_2 c_3}},$$

предполагая радикалъ положительнымъ.

Эти необходимыя условія дѣлаются достаточными по крайней мѣрѣ для устойчивости въ первомъ приближеніи, если въ нихъ отбросить знаки равенства.

Мы знаемъ, что движенія, соотвѣтствующія наименьшему корню μ, всегда устойчивы, и что движенія, соотвѣтствующія среднему корню, устойчивы, когда $R > 0$. Поэтому для наименьшаго корня условія (58) всегда должны удовлетворяться, а для средняго они должны приводиться къ одному: $R \geqq 0$.

Къ тому-же заключенію легко придти и изъ разсмотрѣнія выраженій (56) для Q и R. Для этого достаточно замѣтить, что величины

$$B_{22}B_{33} - B_{23}{}^2 \quad \text{и т. д.},$$

положительны въ случаѣ наименьшаго и наибольшаго корня μ и отрицательны въ случаѣ средняго, а величины B_{11}, B_{22}, B_{33} положительны въ случаѣ наименьшаго и отрицательны въ случаѣ наибольшаго корня, и что квадратичная функція

$$\mathbf{S} B_{11} x_1{}^2 + 2 \mathbf{S} B_{23} x_2 x_3$$

всегда заключается между предѣлами

$$\tau_1\left(\frac{x_1{}^2}{c_1} + \frac{x_2{}^2}{c_2} + \frac{x_3{}^2}{c_3}\right) \quad \text{и} \quad \tau_2\left(\frac{x_1{}^2}{c_1} + \frac{x_2{}^2}{c_2} + \frac{x_3{}^2}{c_3}\right)$$

гдѣ τ_1 наименьшій, а τ_2 наибольшій изъ корней уравненія

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \dfrac{\tau}{c_1}, & B_{12}, & B_{13} \\ B_{21}, & B_{22} - \dfrac{\tau}{c_2}, & B_{23} \\ B_{31}, & B_{32}, & B_{33} - \dfrac{\tau}{c_3} \end{vmatrix} = 0.$$

При этомъ окажется, что въ случаѣ средняго корня μ первое изъ условій (58) всегда удовлетворено, а второе есть слѣдствіе третьяго.

Что касается возможности удовлетворить условіямъ (58), то въ этомъ отношеніи уже былъ разсмотрѣнъ случай средняго корня (пар. 5). Теперь остается разсмотрѣть случай наибольшаго корня, и мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ условіямъ (58) всегда можно удовлетворить выборомъ достаточно большихъ значеній λ^2. Для этого разсмотримъ предѣльный случай $\lambda^2 = \infty$.

Положимъ по прежнему $\lim \dfrac{\mu}{\lambda^2} = -k$, такъ-что k есть одна изъ трехъ величинъ $\dfrac{1}{c_1}$, $\dfrac{1}{c_2}$, $\dfrac{1}{c_3}$.

При этомъ изъ формулы (20) найдемъ:

$$\lim R = 4\mathbf{S}\left(k-\frac{1}{c_1}\right)(c_3-c_2)^2\eta^2\zeta^2 + \mathbf{S}c_1\xi^2\mathbf{S}c_1{}^2\xi^2\mathbf{S}\left(k-\frac{1}{c_2}\right)\left(k-\frac{1}{c_3}\right),$$

а изъ формулы (57)

$$\lim Q = \mathbf{S}c_1\xi^2\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}-\frac{1}{c_1}\right)^2 + \mathbf{S}c_1\xi^2\mathbf{S}\frac{1}{c_1}\left(k-\frac{1}{c_1}\right).$$

Пусть $k=\frac{1}{c_1}$.

Если c_1 не равно ни c_2, ни c_3, то непремѣнно $\eta=\zeta=0$, и слѣдовательно

$$\lim R = c_1{}^3\xi^4\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right),$$

$$\lim Q = c_1\xi^2\left[\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)+\frac{1}{c_2c_3}\right].$$

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ изъ условій (58) первое всегда будетъ удовлетворено, второе удовлетворится въ силу третьяго, а третье — только при условіи, что c_1 есть наибольшая или наименьшая изъ трехъ величинъ c_1, c_2, c_3. При томъ два послѣднихъ условія удовлетворятся со знакомъ неравенства. Что-же касается перваго, то оно можетъ обратиться въ равенство только при $\frac{1}{c_1}=\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}$. Поэтому если c_1 есть наибольшая изъ величинъ c, т. е. если разсматриваемое движеніе есть предѣльное для соотвѣтствующаго наибольшему корню μ, то всѣ условія (58) въ предѣлѣ удовлетворятся со знакомъ неравенства, а потому удовлетворятся также и для конечныхъ достаточно большихъ значеній λ^2.

Если c_1 равно одной или обѣимъ изъ величинъ c_2 и c_3, то $\lim R=0$ Тѣмъ не менѣе и въ этомъ случаѣ для наибольшаго корня μ послѣднее изъ условій (58) будетъ удовлетворено при конечныхъ достаточно большихъ значеніяхъ λ^2, какъ это слѣдуетъ изъ соображеній, приведенныхъ въ параграфѣ 7. Точно также удовлетворятся при этомъ и первыя два изъ условій (58), ибо въ случаѣ $c_1=c_2>c_3$ непремѣнно $\zeta=0$, и слѣдовательно

$$\lim Q = \frac{\xi^2+\eta^2}{c_3},$$

а въ случаѣ $c_1 = c_2 = c_3$

$$\lim Q = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c_3}.$$

Такимъ образомъ для достаточно большихъ значеній λ^2 движенія, соотвѣтствующія наибольшему корню, устойчивы по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи. Напротивъ, движенія, соотвѣтствующія среднему корню, для достаточно большихъ λ^2 неустойчивы, ибо для нихъ, какъ мы знаемъ, $R < 0$ (пар. 7).

Когда для λ возможны значенія, при которыхъ два корня μ дѣлаются равными, то такимъ значеніямъ λ, какъ мы знаемъ, соотвѣтствуютъ непрерывные ряды безчисленнаго множества постоянныхъ движеній. При томъ мы знаемъ, что всѣ движенія такого ряда, когда онъ получается при равенствѣ наименьшаго корня среднему, вообще устойчивы. Теперь можемъ показать, что когда такой рядъ обусловливается равенствомъ наибольшаго корня среднему, то принадлежащія ему движенія вообще неустойчивы.

Въ самомъ дѣлѣ, въ параграфѣ 6-мъ было замѣчено, что для движеній, соотвѣтствующихъ двукратному корню μ, если $A_{11} - \mu$ есть та изъ трехъ величинъ $A_{11} - \mu$, $A_{22} - \mu$, $A_{33} - \mu$, которая не равна нулю, R обращается въ слѣдующее выраженіе

$$\frac{1}{A_{11} - \mu}\Big[(A_{11} - \mu)(yZ - zY) + A_{12}(zX - xZ) + A_{13}(xY - yX)\Big]^2,$$

а послѣднее, когда μ наибольшій корень, отрицательно, ибо при этомъ $A_{11} - \mu < 0$. При томъ обращаться въ нуль оно можетъ вообще только для предѣльныхъ движеній.

Въ заключеніе обратимъ вниманіе на частный случай, когда всѣ коэффиціенты b_{ij} равны нулю. Въ этомъ случаѣ движенія, соотвѣтствующія наибольшему и среднему корню, для достаточно малыхъ значеній λ^2 неустойчивы.

Въ самомъ дѣлѣ, когда всѣ b_{ij} равны нулю, то

$$X - \sigma x = \lambda\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)x,$$

$$Y - \sigma y = \lambda\left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)y,$$

$$Z - \sigma z = \lambda\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right)z,$$

а потому для $\lambda = 0$ формулы (56) даютъ:

$$Q = \mathbf{S}\frac{1}{c_2 c_3} B_{11}, \qquad R = \mathbf{S}\frac{1}{c_1}(B_{22}B_{33} - B_{23}{}^2).$$

Отсюда видно, что въ разсматриваемомъ случаѣ для средняго корня $R < 0$, а для наибольшаго $Q < 0$.

Такимъ образомъ въ случаѣ равенства нулю всѣхъ коэффиціентовъ b' изъ трехъ поступательныхъ движеній, вообще возможныхъ для тѣла, устойчиво только одно, соотвѣтствующее наименьшему корню μ, и слѣдовательно то, которое совершается по направленію наибольшей оси эллипсоида

$$\mathbf{S} a_{11} x^2 + 2\mathbf{S} a_{23} yz = \text{Const.},$$

представляющаго поверхность (10) для разсматриваемаго случая.

Случай тѣла, имѣющаго три взаимно перпендикулярныя плоскости симметріи, есть частный случай разсматриваемаго и получается изъ него при $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$.

Составимъ условія (58) для этого послѣдняго случая.

Такъ-какъ въ этомъ случаѣ $A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$, то мы можемъ положить $\mu_1 = A_{11}$, $\mu_2 = A_{22}$, $\mu_3 = A_{33}$. Поэтому разсматривая движеніе $\mu = \mu_1$, найдемъ

$$R = \frac{x^4}{c_1}(A_{22} - A_{11})(A_{33} - A_{11}),$$

$$Q = \frac{x^2}{c_1}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)^2 \lambda^2 + \frac{x^2}{c_1}\left(\frac{A_{22} - A_{11}}{c_2} + \frac{A_{33} - A_{11}}{c_3}\right),$$

гдѣ

$$A_{11} = a_{11} - \frac{\lambda^2}{c_1}, \quad A_{22} = a_{22} - \frac{\lambda^2}{c_2}, \quad A_{33} = a_{33} - \frac{\lambda^2}{c_3}.$$

Вслѣдствіе этого первыя два изъ условій (58) приводятся къ виду:

$$\frac{1}{c_1{}^2}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)^2 \lambda^4 + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{c_2} - \frac{a_{33} - a_{11}}{c_1}\right)^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)\left[\left(\frac{2}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{a_{22} - a_{11}}{c_2} + \left(\frac{2}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{a_{33} - a_{11}}{c_3}\right]\lambda^2 \geqq 0, \quad (59)$$

$$\left[\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)+\frac{1}{c_2c_3}\right]\lambda^2+\frac{a_{22}-a_{11}}{c_2}+\frac{a_{33}-a_{11}}{c_3}\geqq 0. \quad . \quad (60)$$

Въ случаѣ наибольшаго корня третье изъ условій (58) всегда удовлетворено. Но для того, чтобы разсматриваемое движеніе, для котораго $\mu = A_{11}$, соотвѣтствовало наибольшему корню, λ должно удовлетворять еще слѣдующимъ условіямъ:

$$\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\lambda^2+a_{22}-a_{11}<0,$$

$$\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)\lambda^2+a_{33}-a_{11}<0.$$

Если $a_{11}>a_{22}>a_{33}$ и $c_1>c_2>c_3$, то послѣднія условія удовлетворяются при всякомъ λ. При этомъ корни квадратнаго относительно λ^2 уравненія, которое получается изъ условія (59), если въ немъ отбросить знакъ неравенства, вещественны и положительны, а величина λ^2, обращающая въ нуль первую часть условія (60), заключается между корнями этого уравненія. Поэтому условіямъ (59) и (60) удовлетворимъ, выбирая для λ^2 величины, превосходящія бóльшій корень упомянутаго квадратнаго уравненія. Этотъ корень въ разсматриваемомъ случаѣ и будетъ низшимъ предѣломъ для величинъ λ^2, при которыхъ возможна устойчивость движенія съ наибольшимъ корнемъ μ.

Въ другихъ возможныхъ случаяхъ μ_1 не будетъ оставаться наибольшимъ корнемъ для всякаго λ, а потому при разысканіи предѣловъ для тѣхъ величинъ λ^2, которымъ могутъ соотвѣтствовать устойчивыя движенія съ наибольшимъ корнемъ, кромѣ условій (59) и (60), придется разсматривать также подобныя имъ условія, относящіяся къ корнямъ μ_2 и μ_3.

Что касается движеній, соотвѣтствующихъ среднему корню, то для тѣлъ съ тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметріи эти движенія всегда неустойчивы.

Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Настоящая статья посвящается слѣдующему вопросу:

„*Пусть функція* y *связана съ перемѣнною* x *алгебраическимъ уравненіемъ; требуется выразить интегралъ* $\int ydx$ *черезъ алгебраическую функцію отъ* x *или доказать, что значеніе предложеннаго интеграла не можетъ быть представлено алгебраическою функціею*".

Этотъ вопросъ въ первый разъ вполнѣ рѣшилъ *Ліувиль* (Journal de l'Ecole polytechnique, XXII cahier; Journal de mathématiques, t. III). Онъ основывался въ своемъ рѣшеніи на слѣдующей теоремѣ *Абеля:* если интегралъ $\int ydx$ выражается алгебраически, то величина его можетъ быть представлена функціею, составленною раціонально изъ x и y.

Вопросомъ объ алгебраическомъ интегрированіи занимались еще и другіе математики. Я укажу на *Briot et Bouquet* (Théorie des fonctions elliptiques), гг. *Zeuthen* (Comptes rendus, 1880), *Raffy* (Annales de l'Ecole Normale, 1883, 1885), *Humbert* (Acta mathematica, 1887).

Не входя въ подробное разсмотрѣніе предложенныхъ до настоящаго времени рѣшеній занимающаго насъ вопроса, я замѣчу только, что всѣ они сводятъ вопросъ на отысканіе нѣсколькихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Въ настоящей статьѣ я желаю указать на одну теорему, которая позволяетъ рѣшить вопросъ инымъ путемъ. Эта же теорема даетъ возможность рѣшить вопросъ и съ помощью способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, на основаніи новыхъ соображеній.

2. Теорема. *Пусть* P *есть цѣлая функція отъ* x; z — *функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами*

$$z^n + \varphi_1(x)\, z^{n-1} + \varphi_2(x)\, z^{n-2} + \ldots = 0\,;$$

z_1, z_2, ... z_n всѣ значенія, принимаемыя функціею z для каждаго значенія x. Пусть Δ есть дискриминантъ уравненія съ z и

$$\Delta = D^2 . E,$$

гдѣ D, E суть цѣлые полиномы относительно x, причемъ полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Если интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

гдѣ Y, X_0, X_1, ... X_{n-1} суть цѣлыя функціи отъ x, опредѣленныя слѣдующимъ образомъ:

1⁰ Полиномъ Y равенъ произведенію изъ полинома D на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P, \quad \frac{dP}{dx}.$$

2⁰ Полиномы X_0, X_1, ... X_{n-1} удовлетворяютъ равенствамъ:

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^{\,2}, \ldots z_1^{\,i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx, & z_1^{\,i+1}, \ldots z_1^{\,n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^{\,2}, \ldots z_2^{\,i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx, & z_2^{\,i+1}, \ldots z_2^{\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^{\,2}, \ldots z_n^{\,i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx, & z_n^{\,i+1}, \ldots z_n^{\,n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

3. Доказательство первой части нашей теоремы основывается главнымъ образомъ на одномъ предложеніи, къ выводу котораго мы предварительно и обратимся.

Возьмемъ n выраженій

$$X_0+X_1z_1+X_2z_1{}^2+\ldots+X_{n-1}z_1{}^{n-1},$$

$$X_0+X_1z_2+X_2z_2{}^2+\ldots+X_{n-1}z_2{}^{n-1},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$X_0+X_1z_n+X_2z_n{}^2+\ldots+X_{n-1}z_n{}^{n-1},$$

въ которыхъ X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ означаютъ цѣлыя функціи отъ x; z_1 $z_2, \ldots z_n$ — значенія функціи z, опредѣленной въ предыдущемъ n^0.

Пусть $x-a$ представляетъ двучленъ, не дѣлящій всѣхъ полиномовъ X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$, и содержащійся во всѣхъ n нашихъ выраженіяхъ съ показателями больше нуля [1]). Пусть α есть наименьшій изъ этихъ показателей.

Займемся разсмотрѣніемъ двучлена $x-a$ и показателя α.

Мы сказали, что не всѣ полиномы X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ дѣлятся на $x-a$; положимъ X_k есть полиномъ взаимно простой съ $x-a$. Называя разсматриваемыя нами выраженія соотвѣтственно черезъ

$$\mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2,\ldots \mathfrak{Z}_n,$$

мы имѣемъ равенство

$$X_k=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1{}^2,\ldots z_1{}^{k-1}, & \mathfrak{Z}_1, & z_1{}^{k+1},\ldots z_1{}^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2{}^2,\ldots z_2{}^{k-1}, & \mathfrak{Z}_2, & z_2{}^{k+1},\ldots z_2{}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n{}^2,\ldots z_n{}^{k-1}, & \mathfrak{Z}_n, & z_n{}^{k+1},\ldots z_n{}^{n-1}\end{vmatrix},$$

въ которомъ Δ есть цѣлая функція отъ x, равная дискриминанту уравненія съ z. Легко видѣть, что опредѣлитель, входящій въ полученное равенство, содержитъ $x-a$ съ показателемъ не меньше α.

Отсюда, въ силу вышепредположеннаго относительно X_k, сейчасъ получаемъ предложеніе, которое имѣли въ виду вывести: двучленъ

---

[1]) Мы будемъ говорить, что функція содержитъ множитель $(x-a)$ съ показателемъ μ, если въ разложеніи функціи, по восходящимъ степенямъ двучлена $x-a$, первый членъ содержитъ $(x-a)^{\mu}$. Число μ можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ.

$x-a$ дѣлитъ дискриминантъ Δ и притомъ показатель α не превосходитъ показателя, съ которымъ $x-a$ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\Delta}$.

4. Основываясь на выведенномъ нами предложеніи, не трудно теперь убѣдиться въ справедливости первой части нашей теоремы ($n^0 2$).

Пусть

$$\int \frac{z}{P}\,dx$$

есть интегралъ, выражающійся алгебраически.

На основаніи теоремы Абеля, цитированной въ $n^0 1$, будемъ имѣть равенство

$$\int \frac{z}{P}\,dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

въ которомъ Y, X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ означаютъ цѣлыя функціи отъ x, которыя, очевидно, можемъ предполагать взаимно простыми. Замѣтимъ, что это равенство, какъ показалъ Абель, остается справедливымъ, если на мѣсто z подставить какое угодно изъ n значеній: $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Предложимъ себѣ теперь изслѣдовать, какіе простые множители могутъ входить въ полиномъ Y, и въ какихъ степеняхъ.

Назовемъ черезъ $x-a$ одинъ изъ простыхъ множителей полинома Y и черезъ

$$\delta,\ \alpha,\ p$$

показатели, съ которыми двучленъ $x-a$ содержится соотвѣтственно въ функціяхъ

$$Y, \quad X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}, \quad P.$$

Между этими показателями, какъ легко убѣдиться, существуетъ весьма простая зависимость.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая вышенаписанное равенство, мы видимъ, что производная первой части содержитъ $x-a$ съ показателемъ не меньше $-p$, производная второй части содержитъ этотъ множитель, если только δ не равно α, съ показателемъ равнымъ $\alpha-\delta-1$; такъ что, если δ не равно α, то навѣрное

$$-p \leqq \alpha - \delta - 1.$$

Слѣдовательно, δ — показатель множителя $(x-a)$ у полинома Y опредѣляется одною изъ формулъ

$$\delta=\alpha, \quad \delta \leqq \alpha+p-1.$$

Предположимъ теперь, и это по вышезамѣченному всегда возможно, что въ нашемъ равенствѣ z означаетъ то изъ n значенiй $z_1, z_2, \dots z_n$, при которомъ показатель α имѣетъ наименьшую величину. Если, при этомъ предположенiи, число α не равно нулю, то ($n^0 3$) навѣрно $x-a$ будетъ дѣлителемъ дискриминанта $\triangle$ и само α не будетъ превосходить показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\triangle}$.

Въ силу этого изъ полученныхъ нами формулъ для δ сейчасъ можемъ заключить, что всѣ простые множители полинома Y найдутся между простыми множителями полиномовъ

$$P, \triangle.$$

Затѣмъ, изъ тѣхъ же формулъ для δ легко опредѣлить показатели, съ которыми простые множители полиномовъ $P, \triangle$ войдутъ въ полиномъ Y.

Разсмотримъ сначала двучленъ $x-a$, недѣлящiй полинома P. Изъ нашихъ формулъ, полагая $p=0$, заключаемъ, что показатель δ, съ которымъ $x-a$ входитъ въ полиномъ Y, не превзойдетъ числа α, а потому не превзойдетъ и показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\triangle}$. Но у насъ $\sqrt{\triangle}=D\sqrt{E}$, гдѣ радикалъ $\sqrt{E}$ не имѣетъ рацiональныхъ множителей; число же δ, очевидно, должно быть цѣлымъ. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ $(x-a)^\delta$ будетъ дѣлить полиномъ D.

Возьмемъ, во вторыхъ, двучленъ $x-a$, дѣлящiй полиномъ P. Изъ формулъ для δ заключаемъ, что показатель δ у множителя $(x-a)$ въ полиномѣ Y не больше числа $\alpha+p-1$. Здѣсь p означаетъ кратность множителя $(x-a)$ въ полиномѣ P, а потому $p-1$ есть кратность того же множителя у общаго наибольшаго дѣлителя полинома P и производной $\frac{dP}{dx}$; число α не больше показателя, съ которымъ $x-a$ входитъ въ радикалъ $\sqrt{\triangle}=D\sqrt{E}$. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ $(x-a)^\delta$ будетъ дѣлить произведенiе изъ полинома D на общiй наибольшiй дѣлитель полиномовъ $P, \frac{dP}{dx}$.

И такъ, первая часть теоремы доказана.

5. Изъ равенства предыдущаго n^0 получаемъ n уравненiй:

$$\int \frac{z_1}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z_1 + X_2 z_1{}^2 + \ldots + X_{n-1} z_1{}^{n-1}}{Y},$$

$$\int \frac{z_2}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z_2 + X_2 z_2{}^2 + \ldots + X_{n-1} z_1{}^{n-1}}{Y},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \frac{z_n}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z_n + X_2 z_n{}^2 + \ldots + X_{n-1} z_n{}^{n-1}}{Y}.$$

Рѣшая эти уравненія относительно $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$, получаемъ формулы, составляющія вторую часть доказываемой теоремы.

6. Изъ теоремы $n^0 2$ непосредственно вытекаетъ слѣдующій способъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала ydx.

Приводимъ функцію y къ виду

$$\frac{z}{P}$$

и дискриминантъ уравненія съ z къ виду

$$\triangle = D^2 . E.$$

Составляемъ произведеніе изъ полинома D на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P, $\frac{dP}{dx}$; это произведеніе даетъ намъ полиномъ Y.

Затѣмъ, разлагаемъ въ ряды, по нисходящимъ степенямъ x, n выраженій

$$\frac{Y}{\sqrt{\triangle}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1{}^2, \ldots z_1{}^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx, & z_1{}^{i+1}, \ldots z_1{}^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2{}^2, \ldots z_2{}^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx, & z_2{}^{i+1}, \ldots z_2{}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1, & z_n, & z_n{}^2, \ldots z_n{}^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx, & z_n{}^{i+1}, \ldots z_n{}^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1),$$

въ которыхъ $z_1, z_2, \ldots z_n$ означаютъ всѣ корни уравненія съ z и

$$\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, & \dots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, & \dots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2, & \dots z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Цѣлыя части разложеній дадутъ соотвѣтственно полиномы

$$X_0, \; X_1, \dots X_{n-1}.$$

Коэффиціенты этихъ полиномовъ будутъ содержать, вообще, линейнымъ образомъ n неизвѣстныхъ постоянныхъ $c_1, c_2, \dots c_n$; c_i есть постоянная произвольная интеграла $\int \frac{z_i}{P} dx$.

Одну изъ постоянныхъ можно назначить произвольно; остальныя опредѣляемъ изъ условія, что равенство

$$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{z}{P} dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}\right] = 0$$

должно обращаться въ тожество.

Когда постоянныя $c_1, c_2, \dots c_n$ будутъ опредѣлены, тогда функція

$$\frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}$$

представитъ величину предложеннаго интеграла

$$\int \frac{z}{P} dx.$$

Если же постоянныя $c_1, \dots c_n$, не могутъ быть опредѣлены согласно нашему условію, тогда заключимъ, что предложенный интегралъ не выражается алгебраически.

Замѣчаніе. Иногда невозможность алгебраическаго интегрированія можемъ обнаружить, не доводя до конца нашихъ дѣйствій. Мы заключимъ, что интегралъ $\int \frac{z}{P} dx$ не выражается алгебраически: 1^0 если разложеніе одной изъ функцій $\frac{z_i}{P}$ будетъ содержать членъ съ x^{-1} (такъ какъ тогда разложеніе интеграла $\int \frac{z_i}{P} dx$ будетъ содержать членъ съ $log\, x$ и, слѣдовательно, этотъ интегралъ не равняется алгебраической функціи); 2^0 если въ разложеніи выраженія, которое должно дать одинъ изъ полиномовъ X_i, члены съ дробными положительными степенями x не могутъ быть уничтожены ни при какомъ выборѣ постоянныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ [1]).

7. Вторая часть теоремы $n^0 2$ позволяетъ опредѣлить полиномы X^0 $X_1, \ldots X_{n-1}$ еще слѣдующимъ образомъ.

Пользуясь формулами второй части теоремы, вычисляемъ высшіе предѣлы степеней полиномовъ $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$; затѣмъ опредѣляемъ коэффиціенты этихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ изъ условія, чтобы равенство предыдущаго n^0 обратилось въ тожество.

Замѣчаніе. Легко убѣдиться, что, слѣдуя этому второму пути при отысканіи полиномовъ X_i, для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи дифференціала ydx придется выполнять только ариѳметическія дѣйствія.

8. Примѣнимъ наши правила къ тремъ примѣрамъ; два первые заимствованы у Бріо и Буке.

Примѣръ I. Разсмотримъ интегралъ

$$\int z dx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3 - 3z + 2x = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\triangle = 108 - 108x^2,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Находимъ

$$Y = 1.$$

---

[1]) Способъ, данный въ этомъ n^0, былъ уже мною предложенъ для одного частнаго случая въ Прибавленіи къ разсужденію *„Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференціаловъ“* (Спб., 1881).

Переходимъ къ опредѣленію полиномовъ X_0, X_1, X_2. Для этого отыщемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ, по нисходящимъ степенямъ x, трехъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}\int z_1 dx, & z_1, & z_1^2\\ \int z_2 dx, & z_2, & z_2^2\\ \int z_3 dx, & z_3, & z_3^2\end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}1, & \int z_1 dx, & z_1^2\\ 1, & \int z_2 dx, & z_2^2\\ 1, & \int z_3 dx, & z_3^2\end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}1, & z_1, & \int z_1 dx\\ 1, & z_2, & \int z_2 dx\\ 1, & z_3, & \int z_3 dx\end{vmatrix}.$$

Съ помощью уравненія съ z находимъ

$$z_1 = \alpha_1 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_1} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_1 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$z_2 = \alpha_2 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_2} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_2 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$z_3 = \alpha_3 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_3} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_3 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots;$$

гдѣ α_1, α_2, α_3 суть значенія корня $\sqrt[3]{-2}$; величина коэффиціентовъ β_1, β_2, β_3 намъ не нужна; отсюда сейчасъ получимъ

$$z_1^2 = \alpha_1^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_1^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_1\beta_1 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots,$$

$$z_2^2 = \alpha_2^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_2^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_2\beta_2 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots,$$

$$z_3^2 = \alpha_3^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_3^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_3\beta_3 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots;$$

и

$$\int z_1 dx = \frac{3\alpha_1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_1} x^{\frac{2}{3}} + c_1 - \frac{3\beta_1}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

$$\int z_2 dx = \frac{3\alpha_2}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_2} x^{\frac{2}{3}} + c_2 - \frac{3\beta_2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

$$\int z_3 dx = \frac{3\alpha_3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_3} x^{\frac{2}{3}} + c_3 - \frac{3\beta_3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 постоянныя интегрированія. Еще находимъ

$$\frac{1}{\sqrt{\triangle}}=\frac{1}{\sqrt{-108}}\left(x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-3}+\ldots\right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0=\text{пост.},\quad X_1=\frac{3}{4}x,\quad X_2=-\frac{3}{8}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int z dx=\frac{3}{4}xz-\frac{3}{8}z^2.$$

Взявъ производную обѣихъ частей этого равенства, убѣждаемся, что оно дѣйствительно представляетъ величину предложеннаго интеграла.

Примѣръ II. Разсмотримъ интегралъ

$$\int z dx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3-3xz+x^3=0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\triangle=-27x^6+108x^3,$$

такъ что

$$D=x.$$

Находимъ

$$Y=x.$$

Переходимъ теперь къ отысканію полиномовъ X_0, X_1, X_2, пользуясь правиломъ $n^0 7$. Для этого ищемъ сначала высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ, или, что одно и тоже, выраженій

$$\frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}\int z_1dx\,, & z_1\,, & z_1^2\\ \int z_2dx\,, & z_2\,, & z_2^2\\ \int z_3dx\,, & z_3\,, & z_3^2\end{vmatrix},\quad \frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}1\,, & \int z_1dx\,, & z_1^2\\ 1\,, & \int z_2dx\,, & z_2^2\\ 1\,, & \int z_3dx\,, & z_3^2\end{vmatrix},\quad \frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}1\,, & z_1\,, & \int z_1dx\\ 1\,, & z_2\,, & \int z_2dx\\ 1\,, & z_3\,, & \int z_3dx\end{vmatrix}.$$

Изъ уравненія съ z видимъ, что $z_1\,, z_2\,, z_3$ суть первой степени; отсюда заключаемъ, что $z_1^2\,, z_2^2\,, z_3^2$ и $\int z_1dx\,, \int z_2dx\,, \int z_3dx$ суть степени второй; замѣтимъ еще что $\frac{x}{\sqrt{\Delta}}$ есть (-2)-ой степени.

Слѣдовательно, высшіе предѣлы степеней выписанныхъ выраженій представятся соотвѣтственно числами

$$3\,,\ 2\,,\ 1\,.$$

Приступаемъ къ опредѣленію коэффиціентовъ полиномовъ X_0, X_1, X_2. Равенство

$$\frac{d}{dx}\left[\int zdx-\frac{X_0+X_1z+X_2z^2}{x}\right]=0\,,$$

послѣ подстановки въ немъ на мѣсто производной $\frac{dz}{dx}$ ея значенія, выраженнаго чрезъ x и z, послѣ уничтоженія дробей и исключенія степеней z выше второй, представитъ соотношеніе между x и z, второй степени относительно z. Изъ него сейчасъ заключаемъ уравненія

$$x\frac{dX_0}{dx}-X_0+x^3\frac{dX_1}{dx}-x^4=0\,,$$

$$2x\frac{dX_1}{dx}-X_1-x^3\frac{dX_2}{dx}-x^2X_2-2x^2=0\,,$$

$$x\frac{dX_0}{dx}-X_0+2x^2\frac{dX_2}{dx}=0\,,$$

которымъ должны удовлетворять искомые полиномы. Зная высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ можемъ, по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, опредѣлить и коэффиціенты этихъ полиномовъ. Не безполезно еще замѣтить, что, если полиномъ X_1 не выше второй степени, то, какъ непосредственно видно изъ полученныхъ дифференціальныхъ уравненій, полиномъ X_2 будетъ не выше нулевой степени, полиномъ X_0 не выше первой степени.

Такимъ образомъ, отысканіе полиномовъ X_0, X_1, X_2 не представитъ никакой трудности; мы находимъ

$$X_0 = bx, \quad X_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad X_2 = -\frac{1}{2},$$

гдѣ b произвольная постоянная.

И такъ, значеніе предложеннаго интеграла опредѣляется формулою

$$\int z dx = \frac{\frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{2}z^2}{x}.$$

Примѣръ III. Разсмотримъ интегралъ

$$\int \frac{z}{x}\, dx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^2 - 2x^3 z + x^6 - x^4 - 1 = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\Delta = 4x^4 + 4,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ примѣрѣ

$$P = x,$$

то находимъ

$$Y = 1.$$

Переходимъ къ отысканію полиномовъ X_0, X_1. Ищемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int \frac{z_1}{x}\, dx, & z_1 \\ \int \frac{z_2}{x}\, dx, & z_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & \int \frac{z_1}{x}\, dx \\ 1, & \int \frac{z_2}{x}\, dx \end{vmatrix}.$$

Изъ уравненія съ z получимъ

$$z_1 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-6} + \dots,$$

$$z_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{8}x^{-6} + \dots;$$

отсюда находимъ

$$\int \frac{z_1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 - \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1}{48}x^{-6} + \dots,$$

$$\int \frac{z_2}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_2 + \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1}{48}x^{-6} + \dots,$$

гдѣ c_1, c_2, постоянныя интегрированія; еще замѣтимъ, что

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{-1}{2}\left(x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-6} + \dots\right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad X_1 = \frac{1}{2}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{x}\,dx - \left(\frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{1}{2}z\right) = 0$$

Но постоянныя c_1, c_2, не могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы производная первой части послѣдняго равенства тождественно обращалась въ нуль. Слѣдовательно, нашъ интегралъ не выражается алгебраически.

Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Въ настоящей замѣткѣ я желаю дать другое болѣе простое доказательство теоремы, которая въ предыдущей статьѣ послужила основаніемъ двухъ методовъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала ydx [1]).

2. Теорема. *Пусть P есть цѣлая функція отъ x; z — функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами*

$$z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \varphi_2(x)z^{n-2} + \ldots = 0\,,$$

Пусть $z_1, z_2, \ldots z_n$ представляютъ всѣ значенія, принимаемыя функціею z для каждаго значенія x и $\triangle$ дискриминантъ уравненія съ z. Пусть наконецъ

$$\triangle = D^2.E,$$

гдѣ D, E цѣлые полиномы относительно x; полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Если интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\,dx$$

выражается алгебраическою функціею, то можно положить

$$\int \frac{z}{P}\,dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}\,,$$

---

[1]) Первому доказательству посвящены *nn*⁰ 3 — 5 предыдущей статьи.

гдѣ Y, X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ *суть цѣлыя функціи отъ* x, *опредѣляемыя слѣдующимъ образомъ:*

1^0 Y *равенъ произведенію изъ полинома*

$$D$$

на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P, \quad \frac{dP}{dx};$$

2^0 X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ *удовлетворяютъ равенствамъ:*

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, \ z_1, \ z_1^2, \ldots z_1^{i-1}, \displaystyle\int \frac{z_1}{P}\,dx, \ z_1^{i+1}, \ldots z_1^{n-1} \\ 1, \ z_2, \ z_2^2, \ldots z_2^{i-1}, \displaystyle\int \frac{z_2}{P}\,dx, \ z_2^{i+1}, \ldots z_2^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \ z_n, \ z_n^2, \ldots z_n^{i-1}, \displaystyle\int \frac{z_n}{P}\,dx, \ z_n^{i+1}, \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

3. Доказательство. Пусть интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\,dx$$

выражается алгебраически. Тогда должно существовать равенство

$$\int \frac{z}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1}z + \frac{X_2}{Y_2}z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}}z^{n-1}, \quad . \; . \; . \; (1)$$

въ которомъ X_0, Y_0, X_1, $Y_1, \ldots$ означаютъ цѣлыя функціи отъ x. Можно предположить, что дробь $\frac{X_i}{Y_i}$ несократима.

Равенство (1) влечетъ за собою n уравненій

$$\int \frac{z_1}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_1 + \frac{X_2}{Y_2} {z_1}^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} {z_1}^{n-1},$$

$$\int \frac{z_2}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_2 + \frac{X_2}{Y_2} {z_2}^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} {z_2}^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \frac{z_n}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_n + \frac{X_2}{Y_2} {z_n}^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} {z_n}^{n-1}.$$

Замѣтимъ, пользуясь этими уравненіями, что интегралъ

$$\int \frac{z_k}{P}\, dx, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots n), \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

вблизи каждой точки a можетъ быть представленъ съ помощью ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ $x - a$; такой рядъ будетъ содержать только конечное число членовъ съ отрицательными показателями.

Рѣшая систему нашихъ уравненій относительно коэффиціентовъ $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}, \ldots$, получаемъ формулу:

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & {z_1}^2, \ldots {z_1}^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx, & {z_1}^{i+1}, \ldots {z_1}^{n-1} \\ 1, & z_2, & {z_2}^2, \ldots {z_2}^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx, & {z_2}^{i+1}, \ldots {z_2}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & {z_n}^2, \ldots {z_n}^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx, & {z_n}^{i+1}, \ldots {z_n}^{n-1} \end{vmatrix}, \quad . \ . \quad (3)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Представимъ эту формулу подъ другимъ видомъ.

Съ этою цѣлью замѣтимъ, что всѣ элементы опредѣлителя, входящаго въ формулу (3), за исключеніемъ элементовъ i-аго столбца, остаются конечными при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x. Что же касается элемента (2) i-аго столбца, то очевидно, что онъ можетъ обращаться въ безконечность только при значеніяхъ x равныхъ корнямъ полинома P. Пусть

$$P=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_l)^{\alpha_l}.$$

Легко видѣть, что при $x=a$ интегралъ (2) или будетъ оставаться конечнымъ, или будетъ обращаться въ безконечность порядка не выше, какъ дробь $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

Слѣдовательно, разсматриваемый нами опредѣлитель приводится къ

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}},$$

гдѣ $f(x)$ представляетъ функцію, остающуюся конечною при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x. Припомнимъ еще, что радикалъ $\sqrt{\triangle}$ входящій въ формулу (3), равенъ $D.\sqrt{E}$, гдѣ полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Отсюда заключаемъ, что формула (3) даетъ

$$\frac{X_i}{Y_i}=\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.D\sqrt{E}}.$$

Изъ этого равенства, припомнивъ свойства функцій $f(x)$, E, X_i, Y_i, видимъ, что полиномъ Y_i долженъ дѣлить полиномъ

$$Y=D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.$$

Итакъ въ равенствѣ (1) можемъ считать, что

$$Y_i=Y,\quad (i=0,1,2,\dots n-1);$$

это предложеніе и составляетъ первую часть доказываемой теоремы.

Подставляя затѣмъ вышенайденное значеніе полинома Y_i въ формулу (3), мы получимъ изъ нея выраженіе для полинома X_i, которое и докажетъ вторую часть нашей теоремы.

Объ интерполированіи двухъ произведеній.

И. И. Иванова.

Если черезъ

$$\prod_{ax+b}$$

обозначимъ произведеніе

$$(a+b)(2a+b)(3a+b)\ldots(xa+b),$$

а черезъ

$$\prod_{ax^2+b}$$

произведеніе

$$(1^2a+b)(2^2a+b)(3^2a+b)\ldots(x^2a+b),$$

то, при условіи $0<b<a$, имѣютъ мѣсто слѣдующія неравенства:

$$\prod_{ax+b}>\sqrt{2\pi}\,a^x\,x^{x+\frac{1}{2}+\frac{b}{a}}\,e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

$$\prod_{ax+b}<\sqrt{2\pi}\,a^x\,x^{x+\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{b}{a}}\,e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}C}$$

и

$$\prod_{ax^2+b}>2\pi a^x\,x^{2x+1}\,e^{-2x+\frac{b}{a}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)}\right)}$$

$$\prod_{ax^2+b}<2\pi a^x\,x^{2x+1}\,e^{-2x+\frac{1}{6x}+\frac{b}{a}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

Въ двухъ первыхъ неравенствахъ C обозначаетъ постоянную Эйлера:

$$C = 0{,}5772156\ldots$$

Докажемъ два первыя неравенства. Очевидно, что

$$\prod_{xa+b} = a^x.1.2\ldots x.\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{2a}\right)\left(1+\frac{b}{3a}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{ax}\right).$$

Изъ разложенія $lg\left(1+\frac{b}{ka}\right)$ въ рядъ:

$$lg\left(1+\frac{b}{ka}\right) = \frac{b}{ka} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{ka}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{ka}\right)^3 - \ldots,$$

при условіи

$$0 < b < a,$$

находимъ:

$$1+\frac{b}{ka} < e^{\frac{b}{ka}} \quad \text{и} \quad 1+\frac{b}{ka} > e^{\frac{b}{ka} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{k^2}},$$

слѣдовательно,

$$\prod_{ax+b} > a^x.1.2.3\ldots x.e^{\frac{b}{a}\sum_1^x \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_1^x \frac{1}{k^2}}$$

и

$$\prod_{ax+b} < a^x.1.2.3\ldots x.e^{\frac{b}{a}\sum_1^x \frac{1}{k}}.$$

Если C обозначаетъ постоянную Эйлера, то, какъ извѣстно,

$$C = \left(\frac{1}{1} - lg\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - lg\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x} - lg\frac{x+1}{x}\right) + \ldots$$

и такъ какъ

$$\frac{1}{m} - lg\frac{m+1}{m} > 0$$

и $$lg\frac{m+1}{m} - \frac{1}{m+1} > 0, \quad \text{при } m > 1,$$

то имѣемъ

$$\sum_1^x \frac{1}{k} > C + lg\, x,$$

$$\sum_1^x \frac{1}{k} < C + lg\,(x+1).$$

Далѣе, извѣстно, что

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и такъ какъ, очевидно,

$$\sum_k^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} > \sum_k^{\infty} \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{1}{k+1},$$

то находимъ, что

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1}$$

принимая во вниманіе выведенныя неравенства, а также два извѣстныя неравенства:

$$1\,.\,2\,.\,3 \ldots x > \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

и $$1\,.\,2\,.\,3 \ldots x < \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}},$$

мы и находимъ требуемыя:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi a}^{\,x}\, a^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{b}{a}(C+lgx)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

или

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi a}^{\,x}\, x^{x+\frac{b}{a}+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

и

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi a}^{\,x}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}(C+lg\,(x+1))}$$

или

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi x}^{\,x}\, x^{x+\frac{1}{2}}\,(x+1)^{\frac{b}{a}}\, e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}C}$$

Послѣдніе два вышепредложенныя неравенства доказываются точно такъ же. При доказательствѣ ихъ придется принять во вниманіе, кромѣ двухъ неравенствъ Стирлинга, еще слѣдующія два:

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} > \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x},$$

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1}$$

и

$$\sum_1^x \frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

которыя доказываются очень легко и изъ которыхъ второе было уже выше доказано.

С.-Петербургъ.
20 Марта 1888 г.

Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ.

К. А. Торопова.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ разсмотрѣть преобразованіе гиперэллиптическихъ интеграловъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[$R(x)$ цѣлый полиномъ x, f есть знакъ раціональной функціи] посредствомъ введенія въ нихъ новой перемѣнной y уравненіемъ

$$y = U(x),$$

гдѣ $U(x)$ цѣлый полиномъ x.

Изслѣдованіе этого преобразованія даетъ возможность составить безчисленное множество гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

I.

Положимъ, что, вводя въ интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

вмѣсто x новую перемѣнную y уравненіемъ

$$y = U(x),$$

мы получаемъ интегралъ

$$\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{R_1(y)}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Пусть

$$R_1(y) = (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_m),$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ различны между собою; тогда, по введеніи въ интегралъ (2) x, будемъ имѣть

$$\int \frac{f_1(U)\,U'dx}{\sqrt{(U-\alpha_1)(U-\alpha_2)\ldots(U-\alpha_m)}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Полиномы $U-\alpha_1, U-\alpha_2, \ldots, U-\alpha_m$ можно представить въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} U-\alpha_1 &= p_1^{\,2}\gamma_1, \\ U-\alpha_2 &= p_2^{\,2}\gamma_2, \\ &\ldots\ldots \\ U-\alpha_m &= p_m^{\,2}\gamma_m, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

гдѣ полиномы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ не имѣютъ кратныхъ множителей; они не имѣютъ также общихъ множителей, на основаніи сдѣланнаго предположенія о постоянныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, ибо разность

$$p_i^{\,2}\gamma_i - p_k^{\,2}\gamma_k = \alpha_k - \alpha_i$$

не можетъ имѣть этого множителя.

Интегралъ (3) представится въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{f_1(U)\,U'dx}{p_1 p_2 \ldots p_m \sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}}.$$

Полиномы $p_1, p_2, \ldots p_m$, какъ видно изъ равенствъ (a), суть дѣлители производной U' и потому функція

$$\frac{U'}{p_1 p_2 \ldots p_m} = \varrho$$

есть цѣлый полиномъ x.

*

Сравнивая полученный интегралъ съ (1), мы должны положить:

$$\left.\begin{aligned} \varrho f_1(U) &= f(x) \\ \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m &= R(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Возьмемъ изъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ какіе-нибудь i полиномовъ, напримѣръ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i$, и положимъ:

$$\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i = R_i(x);$$

тогда въ интегралѣ

$$\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{R_i(x)}}$$

раціональную функцію λ можно подобрать на безчисленное множество манеръ такъ, чтобы этотъ интегралъ приводился къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на произведеніе $p_1\, p_2 \ldots . p_i$, получимъ интегралъ

$$\int\frac{\lambda p_1\, p_2 \ldots p_i dx}{\sqrt{(U-\alpha_1)(U-\alpha_2)\ldots(U-\alpha_i)}}.$$

Полагая

$$\lambda = \frac{U'}{p_1 p_2 \ldots . p_i} f(U), \quad U = y,$$

гдѣ f знакъ произвольной раціональной функціи, будемъ имѣть интегралъ

$$\int\frac{f(y)\, dy}{\sqrt{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_i)}},$$

гдѣ подъ знакомъ корня есть полиномъ степени i, меньшей, вообще, чѣмъ степень полинома $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i$.

Очевидно, если $i = 2$, то получается интегралъ, выражающійся въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Отсюда слѣдуетъ такая теорема: если гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса (посредствомъ указаннаго преобразованія), то интегралъ

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_i}} \quad (i < m)$$

также приводится къ интегралу низшаго класса; а интегралъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} \quad (k < m\,,\; e < m) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

выражается въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Не трудно найти выраженіе интеграла (4) въ логариѳмахъ, когда ϱ есть цѣлый полиномъ (случай, разсмотрѣнный еще Абелемъ).

Въ самомъ дѣлѣ, интегралъ (4) равенъ

$$\int \frac{\varrho\, p_k p_e\, dx}{\sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}};$$

положивъ

$$\varrho = \frac{U'}{p_k p_e},$$

найдемъ

$$\int \frac{U' dx}{\sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}},$$

выраженіе котораго чрезъ логариѳмы таково:

$$\frac{1}{2} \lg \frac{U - \dfrac{\alpha_k + \alpha_e}{2} + \sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}}{U - \dfrac{\alpha_k + \alpha_e}{2} - \sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lg \frac{p_k^2 \gamma_k + p_e^2 \gamma_e + 2 p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_e}}{p_k^2 \gamma_k + p_e^2 \gamma_e - 2 p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_k}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_e}}.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_c}}.$$

Такъ какъ степени полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ всѣ одинаковой четности, то въ интегралѣ, выражающемся въ логариѳмахъ, мы имѣемъ подъ знакомъ корня полиномъ четной степени.

Разсмотримъ сказанное на примѣрѣ.

Данъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x)=(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)(x^2+4).$$

Введемъ въ этомъ интегралъ новую перемѣнную y уравненіемъ

$$y=x^4+12x^3+40x^2+48x+1.$$

Если будемъ дѣлить многочленъ $x^4+12x^3+40x^2+48x+1$ послѣдовательно на $x^2+10x+19$, x^2+8x+4, x^2+4, то увидимъ, что остатки отъ этихъ дѣленій не зависятъ отъ x и въ частныхъ получаются полные квадраты. Отсюда, на основаніи вышеизложеннаго, заключаемъ, что данный гиперэллиптическій интегралъ приводится къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$y+18=(x+1)^2(x^2+10x+19),$$

$$y+15=(x+2)^2(x^2+8x+4),$$

$$y+143=(x+6)^2(x^2+4).$$

Слѣдовательно, помножая подъ интеграломъ числителя и знаменателя на $(x+1)$ $(x+2)$ $(x+6)$, получимъ эллиптическій интегралъ

$$\frac{1}{4}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+15)(y+143)}}.$$

Вмѣстѣ съ этимъ заключаемъ, что интегралы:

$$\int \frac{(x+6)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)}},$$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+8x+4)(x^2+4)}},$$

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)(x^2+4)}}$$

тою же подстановкою приводятся соотвѣтственно къ эллиптическимъ:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+15)}},$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+15)(y+143)}},\qquad \frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+143)}}.$$

Точно также гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)(x^2+4)}}$$

приводится къ эллиптическому

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{(y+18)(y+15)(y+143)}}.$$

Кромѣ того, мы имѣемъ выраженія въ логариѳмахъ слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int\frac{4(x^2+8x+12)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_2\sqrt{\gamma_2}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_2\sqrt{\gamma_2}}$$

$$\int\frac{4(x^2+7x+6)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+8x+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int\frac{4(x^2+3x+2)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int\frac{4(x+6)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_2\sqrt{\gamma_2}+p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_2\sqrt{\gamma_2}-p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int \frac{4(x+2)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+4)}} = \lg \frac{p_2\sqrt{\gamma_2}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_2\sqrt{\gamma_2}-p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int \frac{4(x+1)dx}{\sqrt{(x^2+8x+4)(x^2+4)}} = \lg \frac{p_3\sqrt{\gamma_3}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_3\sqrt{\gamma_3}-p_4\sqrt{\gamma_4}}.$$

Здѣсь

$$p_1 = 1, \qquad \gamma_1 = x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1,$$
$$p_2 = x + 1, \qquad \gamma_2 = x^2 + 10x + 19,$$
$$p_3 = x + 2, \qquad \gamma_3 = x^2 + 8x + 4,$$
$$p_4 = x + 6, \qquad \gamma_4 = x^2 + 4.$$

Подобныхъ примѣровъ можно составить, конечно, сколько угодно; для этого стоитъ только взять за y полиномъ

$$\int (x+a_1)^{2l_1-1}(x+a_2)^{2l_2-1}\ldots(x+a_q)^{2l_q-1}dx + C.$$

Понятное дѣло, что въ указанномъ примѣрѣ, какъ и вообще, кромѣ перечисленныхъ интеграловъ, мы имѣемъ еще множество другихъ вида

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

[гдѣ $R_1(x) = R(x)(y-a_k)(y-a_{k+1})\ldots$] приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этихъ интегралахъ разностямъ

$$y - a_k = p_k^2\gamma_k, \quad y - a_{k+1} = p^2_{k+1}\gamma_{k+1}, \ldots$$

соотвѣтствуютъ значенія для p_k, $p_{k+1}\ldots$ независящія отъ x. Такіе интегралы мы въ счетъ принимать не будемъ.

Изъ предыдущаго видимъ, что, если намъ удастся посредствомъ указаннаго преобразованія найти одинъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}},$$

приводящійся къ интегралу низшаго класса, то мы сейчасъ же найдемъ еще $\frac{m(m-1)}{1.2}$ интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ и $2^m - \frac{m(m+1)}{1.2} - 2$ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этомъ послѣднемъ числѣ заключается $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}$ интеграловъ, приводящихся къ эллиптическимъ, $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}$ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ перваго класса, и т. д. Эти числа выведены мною на основаніи извѣстныхъ свойствъ числа сочетаній изъ m элементовъ по n.

Въ приведенномъ выше примѣрѣ $m=4$ и потому мы нашли, кромѣ даннаго, еще 6 интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ и 4 интеграла, приводящихся къ эллиптическимъ.

II.

Для составленія гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ, можно пользоваться также слѣдующимъ пріемомъ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}},$$

(гдѣ ϱ и R цѣлые полиномы x) выражающійся въ логариѳмахъ. Такихъ интеграловъ мы знаемъ сколько угодно.

Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, существуютъ два полинома P и Q, удовлетворяющіе равенству

$$P^2-Q^2R=C=\text{пост.}$$

Полиномы P и Q найдутся посредствомъ разложенія $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь, именно $\frac{P}{Q}$ будетъ одна изъ подходящихъ дробей этого разложенія.

Положимъ

$$P=U,$$

тогда

$$Q^2R=U^2-C.$$

Помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на Q, получимъ

$$\int\frac{\varrho Q dx}{\sqrt{[U^2-C]}}.$$

Положивъ здѣсь

$$\varrho=\frac{U'}{Q}=\frac{P'}{Q},$$

найдемъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{2}\lg\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Такъ какъ степень P на m единицъ выше степени полинома Q (если R есть $2m$-ой степени), то, очевидно, $\varrho=\dfrac{P'}{Q}$ будетъ $(m-1)$-ой степени.

Замѣтимъ, что интегралъ

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{R}}$$

выражается въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ и въ томъ случаѣ, когда

$$f(x)=\frac{P'}{Q}F(P),$$

гдѣ F знакъ произвольной раціональной функціи, а P и Q вышеупомянутые полиномы; иначе говоря, *если мы имѣемъ* $\sqrt{R}$, *разлагающійся въ непрерывную дробь, то вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ безчисленное множество интеграловъ вида*

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{R}},$$

выражающихся въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Не трудно доказать также слѣдующую теорему.

Теорема. Если интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}},$$

гдѣ ϱ и R цѣлые полиномы, выражается въ логариѳмахъ, то гиперэллиптическій интегралъ перваго вида

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{P.R}},$$

гдѣ P полиномъ, удовлетворяющій равенству

$$P^2 - Q^2R = \text{пост.},$$

приводится къ эллиптическому.

Для доказательства замѣчаемъ, что по предыдущему $\varrho = \frac{P'}{Q}$ и, слѣдовательно,

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{P.R}} = \int\frac{P'dx}{Q\sqrt{R.P}} = \int\frac{P'dx}{\sqrt{P(P^2-C)}}.$$

Полагая

$$P = y,$$

получимъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{P.R}} = \frac{dy}{\sqrt{y(y^2-C)}},$$

что и требовалось доказать.

Кромѣ этого гиперэллиптическаго интеграла можно найти еще нѣсколько другихъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣсколько постоянныхъ $C_1, C_2 \ldots C_n$ и разложимъ разности $P - C_1$, $P - C_2, \ldots$ на множители; можемъ написать:

$$U - C_1 = p_1{}^2\gamma_1,$$
$$U - C_2 = p_2{}^2\gamma_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$U - C_n = p_n{}^2\gamma_n.$$

Тогда интегралъ

$$\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса положеніемъ

$$\lambda = \frac{U'}{Qp_1p_2\ldots p_n} = \frac{P'}{Qp_1p_2\ldots p_n}$$

и

$$U = y,$$

и вмѣстѣ съ нимъ, по вышеизложенному, приводится къ интегралу низшаго класса и какой угодно изъ интеграловъ

$$\frac{\lambda dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i}} \quad (i < n).$$

Полиномы $p_1, p_2, \ldots p_n$, очевидно, должны быть, какъ и Q, дѣлителями полинома P'. Число ихъ, слѣдовательно, не превышаетъ $m-1$, если $2m$ есть степень полинома R. (Замѣтимъ опять, что здѣсь мы не принимаемъ въ расчетъ значенiй $p_1, p_2, \ldots$, не зависящихъ отъ x).

Изъ сказаннаго получаемъ слѣдующiй прiемъ для составленiя гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Беремъ какой-нибудь интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

(ϱ и R цѣлые полиномы), выражающiйся въ логариѳмахъ.

Извѣстнымъ способомъ найдемъ полиномы P и Q, удовлетворяющiе равенству

$$P^2 - Q^2R = C.$$

Производный полиномъ P' дѣлимъ на Q и частное представляемъ въ видѣ произведенiя $p_1p_2\ldots p_n$. Затѣмъ дѣлимъ P послѣдовательно на $p_1{}^2, p_2{}^2, \ldots p_n{}^2$. Частныя будутъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ и остатки $C_1, C_2, \ldots C_n$. (Эти остатки, необходимо, будутъ величины, независящiя отъ x).

Тогда интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}}$$

приведется къ интегралу низшаго класса, а вмѣстѣ съ нимъ приведется къ интеграламъ низшихъ классовъ извѣстное число другихъ интеграловъ и, кромѣ того, найдется нѣсколько интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ.

Прослѣдимъ сказанное сейчасъ на примѣрѣ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}.$$

Этотъ интегралъ выражается въ логариѳмахъ, такъ какъ

$$\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}=$$
$$=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+a}{-2ab}+\cfrac{1}{-2a(x+a)+\cfrac{1}{\cfrac{x^2+ax+b}{2a^2b}+\cdots}}}$$

Находимъ полиномы P и Q:

$$\frac{P}{Q}=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+a}{-2ab}+\cfrac{1}{-2a(x+a)}}=$$
$$=\frac{(x^2+ax+b)([x+a]^2+b)-2ab(x+a)}{(x+a)^2+b}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$P=(x^2+ax+b)([x+a]^2+b)-2ab(x+a),$$
$$Q=(x+a)^2+b,$$

и

$$P^2-Q^2R=-4a^2b^3.$$

По раздѣленіи P' на Q у насъ получится частное первой степени: $4x+a$.

Такимъ образомъ, прежде всего имѣемъ

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}=\frac{1}{2}\lg\frac{P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}{P-Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}$$

и интегралъ

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2-4abx][(x^2+ax+b)((x+a)^2+b)-2ab(x+a)]}}=$$
$$=\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^2+4a^2b^3)}},$$

гдѣ $y=(x^2+ax+b)((x+a)^2+b)-2ab(x+a)$.

Полагаемъ $p_1=x+\frac{a}{4}$ и дѣлимъ p на $\left(x+\frac{a}{4}\right)^2$, найдемъ частное

$$\gamma_1 = x^2 + \frac{5ax}{2} + 2b + \frac{27a^2}{16}$$

и остатокъ

$$C_1 = b^2 - \frac{9a^2b}{8} - \frac{27a^4}{256}.$$

На основанiи вышеизложеннаго получаемъ слѣдующiя выраженiя интеграловъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P\gamma_1}} = 4\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2+4a^2b^3)\left(y-b^2+\frac{9}{8}a^2b+\frac{27}{256}a^4\right)}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{PR\gamma_1}} = 4\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^2+4a^2b^3)\left(y-b^2+\frac{9}{8}a^2b+\frac{27}{256}a^4\right)}},$$

$$\int\frac{(x^2+2ax+a^2+b)}{\sqrt{P\gamma_1}}dx = \lg\frac{\sqrt{P}+p_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{P}-p_1\sqrt{\gamma_1}}.$$

Кромѣ того, можно выразить въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функцiяхъ интегралы:

$$\int\frac{(4x+a)f(P)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}},$$

$$\int\frac{(x^2+2ax+a^2+b)f(P)dx}{\sqrt{P\gamma_1}},$$

гдѣ $f(P)$ произвольная рацiональная функцiя P.

Точно такъ же можемъ выразить въ эллиптическихъ интегралахъ и такiе гиперэллиптическiе:

$$\int\frac{f(P)dx}{\sqrt{R\gamma_1}},\quad \int\frac{f(P)dx}{\sqrt{PR\gamma_1}}.$$

Очевидно, такимъ образомъ, что и посредствомъ разсмотрѣннаго сейчасъ прiема можемъ найти сколько угодно гиперэллиптическихъ интеграловъ, выражающихся чрезъ эллиптическiе.

III.

Положимъ, намъ данъ интегралъ

$$\int\frac{l\,dx}{\sqrt{N(x)}},$$

гдѣ $N(x)$ цѣлый полиномъ x, и требуется узнать, не приводится ли онъ къ интегралу низшаго класса.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ вопросъ этотъ можетъ быть рѣшенъ въ положительномъ смыслѣ, на основаніи вышеизложеннаго.

Разлагаемъ подкоренной полиномъ $N(x)$ на множители

$$M_1 M_2 \ldots M_n,$$

при чемъ степени этихъ множителей должны быть одинаковой четности, и смотримъ, не получается ли при нѣкоторой комбинаціи полиномовъ $M_1 M_2, \ldots$, напр. $M_1 M_2 \ldots M_i$, въ разложеніи $\sqrt{M_1 M_2 \ldots M_i}$ непрерывная періодическая дробь (предполагается, что степень произведенія $M_1 M_2 \ldots M_i$ выше 2). Допустимъ, что получается. Ищемъ тогда полиномы P и Q, удовлетворяющіе равенству

$$P^2 - Q^2 M_1 M_2 \ldots M_i = C.$$

Дѣлимъ P' на Q и пусть частное будетъ $p_1 p_2 \ldots p_k$. Тогда, если данный интегралъ приводится къ болѣе простому посредствомъ нашего преобразованія, то въ частныхъ отъ дѣленія P на $p_1{}^2, p_2{}^2, \ldots$ должны получиться полиномы $M_{i+1}, M_{i+2}, \ldots M_n$ и въ остаткахъ величины, независящія отъ x.

Для приведенія даннаго интеграла къ интегралу низшаго класса слѣдуетъ ввести въ него новую перемѣнную y уравненіемъ

$$y = P.$$

Разсмотримъ это на гиперэллиптическомъ интегралѣ Эрмита [1])

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{(x^2 - a)(4x^3 + 3ax + b)}}.$$

Для удобства замѣнимъ въ немъ a чрезъ a^2

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(4x^3 + 3a^2 x + b)}}.$$

Представивъ подкоренной полиномъ въ видѣ произведенія

$$(x - a)(x + a)(4x^3 + 3a^2 x + b),$$

[1]) Sur un exemple de réduction des intégrales Abeliennes aux fonctions elliptiques. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1876).

пробуемъ разложить

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}$$

въ непрерывную дробь:

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}=\sqrt{(2x^2+ax-a^2)^2+(b-a^3)(x+a)}=$$
$$=2x^2+ax-a^2+\cfrac{1}{\cfrac{2(2x-a)}{b-a^3}+\cfrac{1}{2(2x^2+ax-a^2)+\cfrac{1}{\cfrac{2(2x-a)}{b-a^3}+\ldots}}}$$

Видимъ, что получается періодическая дробь. Опредѣляемъ полиномы P и Q

$$\frac{P}{Q}=2x^2+ax-a^2+\frac{b-a^3}{2(2x-a)}=\frac{8x^3-6a^2x+b+a^3}{2(2x-a)}.$$

Частное отъ дѣленія P' на Q есть $3(2x+a)=3p_1$. Дѣлимъ P на $(2x+a)^2$; получимъ частное, равное какъ разъ $2(x-a)$ и остатокъ $b+3a^3$.

Заключаемъ отсюда, что гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}}$$

приводится къ эллиптическому. Для нахожденія этого эллиптическаго интеграла слѣдуетъ числителя и знаменателя въ данномъ интегралѣ помножить на p_1Q и потомъ положить

$$y=8x^3-6a^2x+b+a^3.$$

Точно такъ же приводится къ эллиптическому такой интегралъ

$$\int\frac{f(P)dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}},$$

гдѣ f есть знакъ произвольной раціональной функціи.

Выше мы предполагали, что степень произведенія $M_1M_2\ldots M_i$ выше двухъ. Случай, когда она равняется 2, особенно интересенъ, и мы разберемъ его отдѣльно въ слѣдующемъ n^0.

IV.

Пусть гиперэллиптическій интегралъ:

$$\int \frac{l dx}{\sqrt{R(x)}}$$

положеніемъ

$$y = U(x)$$

приводится къ интегралу нисшаго класса

$$\int \frac{l_1 dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)\ldots(y-a_k)}}.$$

Представимъ разности подкоренного полинома въ видѣ

$$U - a_1 = p_1{}^2 \gamma_1,$$

$$U - a_2 = p_2{}^2 \gamma_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$U - a_k = p_k{}^2 \gamma_k.$$

Степени полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ должны быть одинаковой четности, т. е. эти полиномы или всѣ нечетныхъ степеней, или всѣ четныхъ. Если $R(x)$ нечетной степени, то, необходимо, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ будутъ нечетныхъ степеней, если же $R(x)$ четной степени, то $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ могутъ быть и четныхъ, и нечетныхъ степеней.

Если всѣ полиномы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ нечетныхъ степеней, то первой степени могутъ быть только два изъ нихъ, напр. γ_1 и γ_2, не болѣе. Въ самомъ дѣлѣ, тогда степень $U(x)$ есть $2m+1$ (нечетная) и потому p_1 и p_2 оба будутъ степени m и, такъ какъ p_1 и p_2 суть дѣлители производной $U'(x)$, то остальные полиномы $p_3, p_4, \ldots p_k$ будутъ величины постоянныя, не зависящія отъ x, и, стало быть, $\gamma_3, \gamma_4, \ldots \gamma_k$ каждый будетъ степени $2m+1$.

Этотъ случай, когда два изъ полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_k$ первой степени, я и намѣренъ здѣсь разобрать. Въ этомъ случаѣ видъ полинома U опредѣляется вполнѣ, а потому опредѣляется и видъ $R(x)$.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a\,,$$
$$\gamma_2 = x + b\,.$$

Такъ какъ p_1 и p_2 суть дѣлители полинома $U'(x)$, то заключаемъ

$$U'(x) = (2m+1)\,p_1 p_2\,.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{U'}{\sqrt{(U-a_1)(U-a_2)}} = \frac{2m+1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\,.$$

Интегрируя это дифференціальное уравненіе, получимъ

$$U - \frac{a_1+a_2}{2} + \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} =$$
$$= C\left[x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\right]^{2m+1}.$$

Постоянную C, вошедшую при интегрированіи, опредѣляемъ изъ условія, что при $x+a=0$ должно быть $U=a_1$. Это условіе даетъ намъ такое равенство

$$C = \frac{\frac{a_1-a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\,.$$

Мѣняя знаки у радикаловъ, будетъ имѣть въ то же время

$$U - \frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} =$$
$$= C\left(x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}.$$

Складывая два полученныя равенства, найдемъ

$$2U - (a_1+a_2) = \frac{\frac{a_1-a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\left\{\left(x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1} +\right.$$
$$\left. + \left(x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}\right\},$$

откуда

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{\frac{a_1+a_2}{2}}{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\left\{\left(x+\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}+\right.$$

$$\left.+\left(x+\frac{a+b}{2}-\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}\right\}.$$

Зная, что

$$\cos n \arccos z=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n}{2},$$

мы можемъ полиномъ U сокращенно написать такъ

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Полиномы p_1 и p_2 будутъ

$$p_1=\cos m \arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\cos(m-1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots+\frac{1}{2},$$

$$p_2=\cos m \arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}-\cos(m-1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots+(-1)^m\frac{1}{2},$$

такъ что

$$U-a_1=4\,\frac{a_1-a_2}{b-a}(x+a)p_1{}^2,$$

$$U-a_2=4\,\frac{a_1-a_2}{b-a}(x+b)p_2{}^2.$$

Если бы мы разсмотрѣли случай, когда одинъ изъ полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ нулевой степени, а другой второй степени, то нашли бы подобнымъ же образомъ выраженіе

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\cos 2m \arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

*

тогда

$$U(x)-a_1=(a_1-a_2)(x+a)(x+b)\left(\operatorname{cs}(m-1)\operatorname{arccs}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\operatorname{cs}(m-3)\operatorname{arccs}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\right)^2$$

и $$U(x)-a_2=(a_1-a_2)\left(\cos m\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что гиперэллиптическій интегралъ какого угодно класса

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)\left(A+B\operatorname{cs}n\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}$$

приводится къ эллиптическому.

Для приведенія можно положить

$$y=\cos n\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ выраженія въ логариѳмахъ для интеграловъ:

$$\int\frac{p_1dx}{\sqrt{(x+b)\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}=$$

$$\frac{1}{2m+1}\lg\frac{p_2\sqrt{(x+b)}+\sqrt{\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}{p_2\sqrt{(x+b)}-\sqrt{\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}},$$

$$\int \frac{\cos m \arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\, dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)\left(A+B\cos 2m\arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}} =$$

$$\frac{1}{2m}\lg \frac{P\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{\left(A+B\cos 2\, m\arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}{P\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{\left(A+B\cos 2\, m\arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}$$

$$\left[\text{здѣсь } P=\cos(m-1)\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\cos(m-3)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots\right]$$

и др.

Послѣднія разсужденія даютъ возможность доказать слѣдующую теорему.

Теорема. Если гиперэллиптическій интегралъ перваго класса

$$\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $R(x)$ полиномъ 5-й степени, приводится къ эллиптическиму преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлой функціи } x\,,$$

то *необходимо* должно быть

$$R(x)=(x+a)(x+b)\left(A+B\cos 3\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right),$$

Для доказательства замѣтимъ сначала, что данный интегралъ не можетъ приводиться къ такому эллиптическому

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)}},$$

такъ какъ, полагая

$$y - a_1 = p_1{}^2\gamma_1\,,$$
$$y - a_2 = p_2{}^2\gamma_2\,,$$
$$y - a_3 = p_3{}^2\gamma_3\,,$$
$$y - a_4 = p_4{}^2\gamma_4\,,$$

мы найдемъ

$$R(x) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\,,$$

но произведенiе четырехъ полиномовъ $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, которыхъ степени одинаковой четности, не можетъ быть полиномомъ 5-й степени.

Слѣдовательно, если данный интегралъ приведется къ эллиптическому, то такому:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)\,(y-a_2)\,(y-a_3)}}\,.$$

Полагая опять

$$y - a_1 = p_1{}^2\gamma_1\,,$$
$$y - a_2 = p_2{}^2\gamma_2\,,$$
$$y - a_3 = p_3{}^2\gamma_3\,,$$

мы будемъ имѣть

$$R(x) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\,.$$

Значитъ полиномы γ_1, γ_2, γ_3 должны быть нечетныхъ степеней, а такъ какъ сумма этихъ степеней равняется 5, то, очевидно, одинъ изъ этихъ полиномовъ будетъ 3-й степени, а остальныя два первой степени.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a\,,$$
$$\gamma_2 = x + b\,,$$

тогда, на основанiи сказаннаго въ этомъ n^0, заключаемъ

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\,,$$

а такъ какъ p_3 въ этомъ случаѣ не зависитъ отъ x (p_1, p_2 и p_3 дѣлители полинома $2m$-й степени y'), то y должно быть 3-й степени, ибо γ_3, какъ сказано выше, есть полиномъ 3-й степени.

Слѣдовательно,

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 3 \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

а это и доказываетъ теорему.

И такъ, изъ гиперэллиптическихъ интеграловъ перваго класса

$$\int \frac{(kx+1)\,dx}{\sqrt{(mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s)}},$$

преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлому полиному } x,$$

къ эллиптическому приводится только одинъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2xm + n)(x^3 + 3mx^2 + \frac{3}{4}(3m^2 + n)\,x + c)}}.$$

(Здѣсь мы обозначили $a + b$ чрезъ $2m$, ab чрезъ n).

Для приведенія можно положить

$$y = x^3 + 3mx^2 + \tfrac{3}{4}(3m^2 + n)x.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m = 0$, мы получаемъ интегралъ Эрмита

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + n)(x^2 + \frac{3}{4}nx + c)}},$$

о которомъ мы уже упоминали.

Подобная теорема не имѣетъ мѣста для гиперэллиптическихъ интеграловъ второго, третьяго и т. д. классовъ.

Пермь.

Ноябрь 1887 г.

Линейныя дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка [1]).

В. П. Ермакова.

Есть $n-1$ различныхъ функцій $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, каждая изъ которыхъ, будучи подставлена вмѣсто z, обращаетъ выраженіе

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

въ нуль. Эти функціи называются *частными интегралами* дифференціальнаго уравненія, которое получается, приравнивая выраженіе (1) нулю. Произвольная функція этихъ интеграловъ, будучи подставлена вмѣто z, также обращаетъ выраженіе (1) въ нуль, и потому называется *общимъ интеграломъ*.

Если частные интегралы $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ приравняемъ произвольнымъ постояннымъ, то полученныя уравненія

$$f_1 = C_1 \, , \; f_2 = C_2 \, , \ldots f_{n-1} = C_{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

будутъ интегралами системы совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

---

[1]) Настоящая замѣтка представляетъ конспектъ изложенія теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка. Для молодыхъ математиковъ она можетъ послужить схемою для усвоенія этого ученія въ его современномъ развитіи. Въ монографіяхъ относящихся къ этой области въ русской литературѣ недостатка нѣтъ; было бы желательно появленіе систематическаго сочиненія обработаннаго соотвѣтственно указываемому здѣсь плану (*примѣч. ред.*).

Обратно, если полную систему интеграловъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (3) разрѣшимъ относительно произвольныхъ постоянныхъ (2), то полученныя функціи $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, будучи подставлены вмѣсто z, обращаютъ выраженіе (1) въ нуль.

Если $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ представляютъ полную систему частныхъ интеграловъ, то выраженіе (1), будучи умножено на нѣкоторый множитель R, не зависящій отъ z, можетъ быть представлено въ формѣ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \frac{dz}{dx_1}, & \frac{dz}{dx_2}, & \ldots & \frac{dz}{dx_n} \\ \frac{df_1}{dx_1}, & \frac{df_1}{dx_2}, & \ldots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df_{n-1}}{dx_1}, & \frac{df_{n-1}}{dx_2}, & \ldots & \frac{df_{n-1}}{dx_n} \end{vmatrix} . \tag{4}$$

Если мы этотъ опредѣлитель разложимъ по элементамъ перваго горизонтальнаго ряда,

$$A_1 \frac{dz}{dx_1} + A_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + A_n \frac{dz}{dx_n},$$

то полученные коэффиціенты находятся въ слѣдующей зависимости:

$$\frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dA_n}{dx_n} = 0 .$$

Множитель R, на который нужно умножить выраженіе (1), чтобы его привести къ опредѣлителю (4), называется *интегральнымъ множителемъ* выраженія (1). Свойства этого множителя въ первый разъ изслѣдовалъ Якоби [1]).

---

[1]) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, Vierter Band, *Theoria novi multiplicatoris ystemati aequationum differentialium vulgarium applicandi*, стр. 317 — 509; — Suplesmentband, 10—15 Vorlesungen.

Интегральный множитель R удовлетворяетъ уравненію

$$X_1\frac{dR}{dx_1}+X_2\frac{dR}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dR}{dx_n}+R\left(\frac{dX_1}{dx_1}+\frac{dX_2}{dx_2}+\ldots+\frac{dX_n}{dx_n}\right)=0.$$

Если мы интегральный множитель умножимъ на произвольную функцію интеграловъ, то получимъ общее выраженіе интегральнаго множителя,

$$R'=R\Phi(f_1\,,\ f_2\,,\ \ldots\ f_{n-1}).$$

Отношеніе двухъ интегральныхъ множителей есть частный интегралъ.

Выраженіе (1), послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ $y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\ y_n$, принимаетъ форму

$$Y_1\frac{dz}{dy_1}+Y_2\frac{dz}{dy_2}+\ldots+Y_n\frac{dz}{dy_n}\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (5)$$

Если R есть интегральный множитель выраженія (1), то умноживъ его на опредѣлитель

$$\left|\begin{array}{cccc}\frac{dx_1}{dy_1}, & \frac{dx_1}{dy_2}, & \ldots & \frac{dx_1}{dy_n}\\[2ex] \frac{dx_2}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dy_2}, & \ldots & \frac{dx_2}{dy_n}\\[2ex] . & . & . & . \\[2ex] \frac{dx_n}{dy_1}, & \frac{dx_n}{dy_2}, & \ldots & \frac{dx_n}{dy_n}\end{array}\right|$$

получимъ интегральный множитель преобразованнаго выраженія (5).

Если извѣстенъ одинъ частный интегралъ f_1, то уравненіе

$$X_1\frac{dz}{dx_1}+X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (6)$$

можетъ быть приведено къ уравненію

$$X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0\,,\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .(7)$$

гдѣ вмѣсто x_1 нужно подставить его выраженіе чрезъ $x_2,\ldots x_n$ и f_1, послѣ чего f_1 нужно принимать за постоянное. Если R есть интегральный множитель уравненія (6), то интегральный множитель уравненія (7) будетъ

$$\frac{R}{\left(\frac{df_1}{dx_1}\right)}.$$

Если f_1 и f_2 суть два частные интеграла уравненія (6), то остальные интегралы того же уравненія будутъ также интегралами уравненія.

$$X_3\frac{dz}{dx_3}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ вмѣсто x_1 и x_2 нужно подставить ихъ выраженія чрезъ $x_3, \ldots x_n$, f_1 и f_2. Если R есть интегральный множитель уравненія (6), то интегральный множитель уравненія (8) будетъ

$$\frac{R}{\frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}-\frac{df_1}{dx_2}\frac{df_2}{dx_1}}.$$

Эти изслѣдованія можно распространить на какое угодно число данныхъ интеграловъ.

Если извѣстенъ интегральный множитель и всѣ частные интегралы, кромѣ одного, то нахожденіе послѣдняго интеграла приводится къ квадратурамъ.

Прежде чѣмъ приступить къ дальнѣйшему изложенію, условимся въ нѣкоторыхъ сокращенныхъ обозначеніяхъ. Выраженіе

$$X_1\frac{dz}{dx_1}+X_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+X_n\frac{dz}{dx_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

мы будемъ кратко обозначать чрезъ $X(z)$. Результатъ подстановки въ выраженіе (1) вмѣсто z какой-нибудь функціи f будемъ обозначать чрезъ $X(f)$. Подобнымъ образомъ символомъ $A(P)$ будемъ обозначать выраженіе

$$A_1\frac{dP}{dx_1}+A_2\frac{dP}{dx_2}+\ldots+A_n\frac{dP}{dx_n}.$$

Всякій интегралъ, удовлетворяющій двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$A_1\frac{dz}{dx_1}+A_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+A_n\frac{dz}{dx_n}=0,$$

$$B_1\frac{dz}{dx_1}+B_2\frac{dz}{dx_2}+\ldots+B_n\frac{dz}{dx_n}=0,$$

будетъ также интеграломъ уравненія

$$B(A_1)\frac{dz}{dx_1}+B(A_2)\frac{dz}{dx_2}+..+B(A_n)\frac{dz}{dx_n}=$$

$$=A(B_1)\frac{dz}{dx_1}+A(B_2)\frac{dz}{dx_2}+..+A(B_n)\frac{dz}{dx_n}.$$

Пусть дана система уравненій

$$\left.\begin{array}{l} X_1\dfrac{dz}{dx_1}+X_2\dfrac{dz}{dx_2}+..+X_n\dfrac{dz}{dx_n}=0\,, \\[2ex] X_1{}'\dfrac{dz}{dx_1}+X_2{}'\dfrac{dz}{dx_2}+..+X_n{}'\dfrac{dz}{dx_n}=0\,, \\[2ex] X_1{}''\dfrac{dz}{dx_1}+X_2{}''\dfrac{dz}{dx_2}+..+X_n{}''\dfrac{dz}{dx_n}=0\,, \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\quad \ldots\ldots(9)$$

Первыя части этихъ уравненій сокращено будемъ обозначать черезъ

$$(z)\,,\ (z)'\,,\ (z)''\,,\ldots$$

Результаты подстановки въ первыя части какой-нибудь функціи P вмѣсто z будемъ обозначать черезъ

$$(P)\,,\ (P)'\,,\ (P)''\,,\ldots$$

Всякій интегралъ, удовлетворяющій уравненіямъ (9), будетъ также интеграломъ уравненій

$$\left.\begin{array}{l} (X_1{}^i)^j\dfrac{dz}{dx_1}+(X_2{}^i)^j\dfrac{dz}{dx_2}+..+(X_n{}^i)^j\dfrac{dz}{dx_n}= \\[2ex] =(X_1{}^j)^i\dfrac{dz}{dx_1}+(X_2{}^j)^i\dfrac{dz}{dx_2}+..+(X_n{}^j)^i\dfrac{dz}{dx_n} \end{array}\right\}\quad \ldots(10)$$

Система уравненій (9) называется *замкнутою*, если уравненія (10) суть слѣдствія уравненій (9).

Замкнутая система уравненій послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ является также замкнутою системою.

Система уравненій (9) называется нормальною, если уравненіе (10) обращается въ простое тождество, т. е. имѣютъ мѣсто тождества

$$(X_k^i)^j = (X_k^j)^i.$$

Число интеграловъ, удовлетворяющихъ замкнутой или нормальной системѣ уравненій, равно числу независимыхъ перемѣнныхъ безъ числа уравненій.

Всякая замкнутая система уравненій рѣшеніемъ относительно столькихъ частныхъ производныхъ, какъ велико число уравненій приводится въ нормальную систему.

Положимъ, что намъ дана нормальная система уравненій въ разрѣшенномъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= X_1\frac{dz}{dx_1} + X_2\frac{dz}{dz_2} + \ldots + X_n\frac{dz}{dx_n}, \\ \frac{dz}{dt'} &= X_1'\frac{dz}{dx_1} + X_2'\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n'\frac{dz}{dx_n}, \\ \frac{dz}{dt''} &= X_1''\frac{dz}{dx_1} + X_2''\frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n''\frac{dz}{dx'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Покажемъ, какъ упрощается интегрированіе этихъ уравненій въ томъ случаѣ, когда намъ извѣстна полная система частныхъ интеграловъ перваго изъ этихъ уравненій. Пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что произвольныя функціи интеграловъ суть также интегралы, мы можемъ привести интегралы въ такую форму, чтобы удовлетворялись нѣкототорыя условія. Мы можемъ интегралы $f_1, f_2, \ldots f_n$ перваго изъ уравненій (11) привести въ такую форму, чтобы послѣ подстановки вмѣсто t его частнаго значенія t_0 эти интегралы превратились соотвѣтственно въ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Въ такомъ случаѣ интегрированіе нормальной системы (11) приводится къ нормальной системѣ

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt'} &= X_1'\frac{dz}{dx_1} + X_2'\frac{dz}{dx_2} + \ldots, \\ \frac{dz}{dt''} &= X''''\frac{dz}{dx_1} + X_2''\frac{dz}{dx_2} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

гдѣ вмѣсто t нужно подставить его частное значеніе t_0. Пользуясь этою теоремой Mayer [1]) показалъ, что интегрированіе нормальной системы

[1]) Ueber unbeschränkt integrable systeme linearer totaler Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen (Mathematische Annalen, томъ V, 1872).

уравненій (11) можетъ быть приведено къ одному уравненію. Это приведеніе состоитъ въ слѣдующемъ.

Положимъ

$$t' = t'_0 + \tau'(t - t_0),$$

$$t'' = t''_0 + \tau''(t - t_0),$$

и составимъ уравненіе

$$\frac{dz}{dt} = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

въ которомъ

$$Y_1 = X_1 + \tau' X_1' + \tau'' X_1'' + \ldots$$

$$Y_2 = X_2 + \tau' X_2' + \tau'' X_2'' + \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Найдемъ полную систему интеграловъ уравненія (12) и приведемъ ихъ въ такую форму, чтобы они обращались въ $x_1, x_2, \ldots x_n$, послѣ подстановки t_0 вмѣсто t. Если мы въ этихъ интегралахъ вмѣсто $\tau', \tau'', \ldots$ подставимъ ихъ значенія

$$\tau' = \frac{t' - t'_0}{t - t_0}, \quad \tau'' = \frac{t'' - t''_0}{t - t_0}, \ldots$$

то получимъ полную систему интеграловъ уравненій (11).

Пусть дана система уравненій

$$\left.\begin{aligned} X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} &= 0, \\ X_1' \frac{dz}{dx_1} + X_2' \frac{dz}{dx_1} + \ldots + X_n' \frac{dz}{dx_n} &= 0, \\ X_1'' \frac{dz}{dx_1} + X_2'' \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n'' \frac{dz}{dx_n} &= 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (9)$$

Преобразуемъ эти уравненія къ новымъ перемѣннымъ и положимъ, что формулы преобразованія содержатъ произвольное постоянное α. Разсмотримъ тотъ случай, когда ни данная, ни преобразованная системы уравненій не зависятъ отъ постояннаго α. Въ этомъ случаѣ къ уравненіямъ (9) можетъ быть прибавлено еще одно уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ положить, что искомый интегралъ послѣ преобразованія къ новымъ перемѣннымъ также не содержитъ постояннаго α; въ такомъ случаѣ

$$\frac{dz}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dz}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{dz}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Это и есть то уравненіе, которое можетъ быть прибавлено къ уравненіямъ (9). Само собою разумѣется, что мы не получимъ добавочнаго уравненія въ томъ случаѣ, когда это уравненіе (13) есть слѣдствіе уравненій (9).

Если число уравненій (9) на единицу менѣе числа независимыхъ перемѣнныхъ, то онѣ имѣютъ только одинъ интегралъ. Мы можемъ положить, что этотъ интегралъ, будучи преобразованъ къ новымъ перемѣннымъ, содержитъ постоянное α какъ придаточное постоянное; въ такомъ случаѣ

$$\frac{dz}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha}+\frac{dz}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha}+\ldots+\frac{dz}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha}=1.$$

Это послѣднее уравненіе совмѣстно съ уравненіями (9) вполнѣ опредѣлитъ частныя производныя искомой функціи z, и вся задача приводится къ квадратурамъ.

Какъ частный случай, положимъ, дано уравненіе

$$Mdx+Ndy=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Если

$$F(x,\, y)=C$$

есть интегралъ этого уравненія, то функція F должна удовлетворять уравненію

$$N\frac{dF}{dx}-M\frac{dF}{dy}=0.$$

Положимъ, что формулы преобразованія содержатъ произвольное постоянное α, которое не входитъ явно ни въ уравненіе (14), ни въ преобразованное уравненіе. Въ этомъ случаѣ можно положить

$$\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}=1.$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій находимъ

$$\frac{dF}{dx} = \frac{M}{M\frac{dx}{d\alpha} + N\frac{dy}{d\alpha}}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{N}{M\frac{dx}{d\alpha} + N\frac{dy}{d\alpha}},$$

откуда

$$dF = \frac{Mdx + Ndy}{M\frac{dx}{d\alpha} + N\frac{dy}{d\alpha}}.$$

Изъ этого уравненія помощью квадратуръ опредѣляется искомая функція F [1])

---

*) В. Ермаковъ, Дифференціальныя уравненія перваго порядка съ двумя перемѣнными, Кіевъ, 1887; страницы 125—131.

Къ вопросу о черченіи картъ.

А. А. Маркова.

Со временъ Птоломея извѣстно, что въ стереографической проекціи всякій кругъ сферы изображается кругомъ (или прямою). Извѣстно также, что въ центральной проекціи всякій большой кругъ сферы изображается прямою.

Мнѣ казалось интереснымъ узнать, нѣтъ ли другихъ способовъ изображать сферу на плоскости, обладающихъ тѣмъ или другимъ изъ выше-указанныхъ свойствъ.

И еще въ 1876 году я пришелъ къ тому заключенію, что *изъ всѣхъ изображеній сферы на плоскости только стереографическая проекція обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости тоже кругъ.*

Это предложеніе было публиковано мною въ 1884 году, какъ одно изъ положеній при докторской диссертаціи.

Оно было затѣмъ доказано M. M. du Chatenet въ 1886 году [1]).

Главная цѣль настоящей замѣтки состоитъ въ рѣшеніи слѣдующей болѣе общей задачи.

Найти всѣ такія изображенія сферы на плоскости, при которыхъ всякій большой кругъ сферы изображается на плоскости также кругомъ (или прямою).

ЗАДАЧА 1-я.

Пусть будутъ

$$X,\ Y$$

двѣ независимыя перемѣнныя.

---

[1]) Nouvelles Annales, 1886.

Найти, каковы должны быть двѣ неизвѣстныя функціи

$$\xi\,,\ \eta$$

отъ этихъ перемѣнныхъ, независимыя другъ отъ друга, для того, чтобы всякому линейному уравненію

$$aX + bY + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

между X и Y соотвѣтствовало линейное же уравненіе

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

между ξ и η.

РѢШЕНІЕ.

Дадимъ X нѣкоторое частное значеніе X_0.

Уравненію

$$X = X_0\,,$$

должно соотвѣтствовать нѣкоторое линейное уравненіе

$$\alpha_0\xi + \beta_0\eta + \gamma_0 = 0$$

между ξ и η.

Здѣсь

$$\alpha_0\,,\ \beta_0\,,\ \gamma_0\,,$$

означаютъ числа постоянныя и при томъ одно, по крайней мѣрѣ, изъ чиселъ

$$\alpha_0\,,\ \beta_0$$

не нуль.

Положимъ

$$\alpha_0\xi + \beta_0\eta = \theta\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Обращаясь затѣмъ къ перемѣнной Y, дадимъ ей послѣдовательно нѣкоторыя частныя значенія

$$Y_0\,,\ Y_1\,.$$

Пусть при

$$X = X_0\,,\quad Y = Y_0$$

имѣемъ

$$\xi = \xi_0 \,, \; \eta = \eta_0 \,, \; \theta = \theta_0$$

а при

$$X = X_0 \,, \; Y = Y_1$$

имѣемъ

$$\xi = \xi_1 \,, \; \eta = \eta_1 \,, \; \theta = \theta_1 \,.$$

Выраженіе θ нами подобрано такъ, что

$$\theta_0 = \theta_1 = -\gamma_0 \,.$$

Изъ чиселъ

$$\alpha_0 \,, \; \beta_0$$

одно, по крайней мѣрѣ, не нуль.

Предположимъ, что α_0 не нуль.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы имѣемъ право предполагать, что

$$\eta_1 \text{ не } = \eta_0 \,,$$

такъ какъ ξ и η должны зависѣть не только отъ X, но и отъ Y.

Послѣ этихъ замѣчаній введемъ новыя перемѣнныя

$$u = \frac{Y - Y_0}{X - X_0} \,, \; v = \frac{Y - Y_1}{X - X_0} \,, \; \varrho = \frac{\eta - \eta_0}{\theta - \theta_0} \,, \; \sigma = \frac{\eta - \eta_1}{\theta - \theta_0} \,. \quad . \quad (4)$$

Всякому линейному уравненію между X и Y соотвѣтствуетъ линейное же уравненіе между u и v; всякому линейному уравненію между u и v соотвѣтствуетъ линейное уравненіе между X и Y; всякому линейному уравненію между ξ и η соотвѣтствуетъ линейное уравненіе между ϱ и σ; всякому линейному уравненію между ϱ и σ соотвѣтствуетъ линейное уравненіе между ξ и η.

Кромѣ того не трудно убѣдиться, что ϱ зависитъ только отъ u, а σ только отъ v.

На этомъ основаніи поставленная нами задача сводится къ слѣдующей болѣе простой.

Найти, въ какой зависимости должны находиться

$$\varrho \text{ отъ } u \qquad \text{и} \qquad \sigma \text{ отъ } v$$

для того, чтобы всякому линейному уравненію между u и v соотвѣтствовало линейное же уравненіе между ϱ и σ.

*

Условія этой новой задачи требуютъ, чтобы отношеніе

$$\frac{\dfrac{d\sigma}{dv}}{\dfrac{d\varrho}{du}}$$

обращалось въ число постоянное всякій разъ, когда между u и v установлена такая зависимость, при которой производная

$$\frac{dv}{du}$$

равна числу постоянному.

Иначе сказать, при

$$\frac{dv}{du} = \text{пост.}$$

мы должны имѣть

$$d\,\frac{\dfrac{d\sigma}{dv}}{\dfrac{d\varrho}{du}} = \frac{\dfrac{d^2\sigma}{dv^2}\dfrac{d\varrho}{du}\dfrac{dv}{du} - \dfrac{d\sigma}{dv}\dfrac{d^2\varrho}{du^2}}{\left(\dfrac{d\varrho}{du}\right)^2}\,du = 0\,.$$

Послѣднее уравненіе, по причинѣ произвольности $\frac{dv}{du}$, тотчасъ разбивается на два

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2\varrho}{du^2} = 0\,,$$

которыя даютъ

$$\varrho = \delta u + \delta'\,, \quad \sigma = \varepsilon v + \varepsilon'\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Здѣсь

$$\delta\,,\ \delta'\,,\ \varepsilon\,,\ \varepsilon'$$

означаютъ числа постоянныя.

Изъ нашихъ формулъ (3), (4) и (5) не трудно заключить, что ξ и η должны быть связаны съ X и Y уравненіями слѣдующаго вида

$$\xi = \frac{\lambda' X + \mu' Y + \nu'}{\lambda X + \mu Y + \nu}, \qquad \eta = \frac{\lambda'' X + \mu'' Y + \nu''}{\lambda X + \mu Y + \nu} \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \lambda',\ \mu',\ \nu',\ \lambda'',\ \mu'',\ \nu'',$$

означаютъ числа постоянныя.

Имъ можно давать, согласно условіямъ задачи, только такія значенія, при которыхъ ξ и η можно считать перемѣнными независимыми, и соотвѣтственно этому уравненія (6) можно преобразовать въ слѣдующія

$$X = \frac{l'\xi + m'\eta + n'}{l\xi + m\eta + n}, \quad Y = \frac{l''\xi + m''\eta + n''}{l\xi + m\eta + n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Здѣсь

$$l,\ m,\ n,\ l',\ m',\ n',\ l'',\ m'',\ n''$$

означаютъ также числа постоянныя.

Уравненія (6) и (7) удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ нашей задачи; изъ нихъ слѣдуетъ также, что всякому линейному уравненію между ξ и η соотвѣтствуетъ линейное же уравненіе между X и Y.

Прежде чѣмъ приступить ко второй задачѣ, замѣчу, что первая задача была также рѣшена M. M. du Chatenet.

Я изложилъ здѣсь свой способъ рѣшенія этой задачи, потому что онъ кажется мнѣ болѣе простымъ, чѣмъ способъ M. M. du Chatenet.

ЗАДАЧА 2-я.

Пусть

$$x,\ y$$

означаютъ двѣ независимыя перемѣнныя и

$$z = x^2 + y^2.$$

Пусть кромѣ того

$$X,\ Y$$

означаютъ двѣ другія перемѣнныя, также не зависящія другъ отъ друга.

Найти, какова должна быть зависимость между

$$x,\ y$$

съ одной стороны и

$$X, Y$$

съ другой для того, чтобы всякому линейному соотношенію

$$aX + bY + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

между X и Y соотвѣтствовало линейное же соотношеніе

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

между x, y, z.

РѢШЕНІЕ.

При разсмотрѣніи уравненій (8) и (9) можно считать

$$X, Y, x, y, z$$

функціями одной какой-нибудь независимой перемѣнной.

Соотвѣтственно этому можно замѣнить наши уравненія (8) и (9) слѣдующими дифференціальными

$$\Phi = \begin{vmatrix} dX, & dY \\ d^2X, & d^2Y \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

и

$$2\Psi = \begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Преобразуя опредѣлители Φ и Ψ при помощи формулъ

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy, \qquad dY = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy,$$

$$d^2X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial X}{\partial x} d^2x + \frac{\partial X}{\partial y} d^2y$$

$$d^2Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial Y}{\partial x} d^2x + \frac{\partial Y}{\partial y} d^2y,$$

$$dz = 2xdx + 2ydy$$

$$d^2z = 2dx^2 + 2dy^2 + 2xd^2x + 2yd^2y,$$

$$d^3z = 6dxd^2x + 6dyd^2y + 2xd^3x + 2yd^3y,$$

получаемъ

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= G(dxd^2y - dyd^2x) + Adx^3 + Bdx^2dy + Cdxdy^2 + Ddy^3\,, \\
\Psi &= \begin{vmatrix} dx\,, & dy\,, & 0 \\ d^2x\,, & d^2y\,, & dx^2 + dy^2 \\ d^3x\,, & d^3y\,, & 3(dxd^2x + dyd^2y) \end{vmatrix} = \\
&= E(dyd^3x - dxd^3y) + F(dxd^2y - dyd^2x)\,,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
G &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\,, \\
A &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\,, \\
B &= \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - 2\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}\,, \\
C &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - 2\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}\,, \\
D &= \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,, \\
E &= dx^2 + dy^2\,, \qquad F = 3(dxd^2x + dyd^2y)\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Изъ формулъ (12) затѣмъ выводимъ

$$d\Phi = G(dxd^3y - dyd^3x) + Ud^2x + Vd^2y + W \quad . \quad . \quad (14)$$

и

$$G\Psi + Ed\Phi - F\Phi = (EU - 3\varphi dx)d^2x + (EV - 3\varphi dy)d^2y + EW\,. \quad (15)$$

гдѣ

$$
\left.\begin{aligned}
U &= -\left(\frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy\right)dy + 3Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2\,,\\
V &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy\right)dx + Bdx^2 + 2Cdxdy + 3Ddy^2\,,\\
W &= \frac{\partial A}{\partial x}\,dx^4 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right)dx^3dy + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x}\right)dx^2dy^2 +\\
&\qquad + \left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)dxdy^3 + \frac{\partial D}{\partial y}\,dy^4\,,\\
\varphi &= Adx^3 + Bdx^2dy + Cdxdy^2 + Ddy^3\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)
$$

Замѣтимъ еще, что

$$(EU - 3\varphi dx)dx + (EV - 3\varphi dy)dy = 0$$

и потому формула (15) даетъ

$$G\Psi + Ed\Phi - F\Phi + \frac{EU - 3\varphi dx}{Gdy}\,\Phi = EW + \frac{EU - 3\varphi dx}{Gdy}\,\varphi \quad . \quad (17)$$

По условіямъ задачи Ψ обращается въ нуль всякій разъ, когда Φ обращается въ нуль.

Отсюда изъ формулы (17) слѣдуетъ, что, при

$$\Phi = 0\,,$$

обращается въ нуль и выраженіе

$$EGWdy + EU\varphi - 3\varphi^2 dx\,.$$

А такъ какъ послѣднее выраженіе не содержитъ ни d^2x ни d^2y, то оно должно обращаться въ нуль тождественно.

Поэтому искомую нами зависимость, между

$$x\,,\ y$$

съ одной стороны и

$$X\,,\ Y$$

съ другой, можно представить слѣдующимъ уравненіемъ

$$EGWdy + EU\varphi - 3\varphi^2 dx = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

гдѣ dx и dy означаютъ числа вполнѣ произвольныя.

Обращаясь къ уравненію (18), прежде всего находимъ

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi=(Adx+Bdy)(dx^2+dy^2)\,,\ A=C,\ B=D\,,\\
&W=\left\{\frac{\partial A}{\partial x}dx^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial B}{\partial y}dy^2\right\}(dx^2+dy^2),\\
&U=-\left(\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy\right)dy+3Adx^2+2Bdxdy+Ady^2.
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (19)$$

Затѣмъ по сокращеніи на

$$E^2dy=(dx^2+dy^2)^2\,dy$$

уравненіе (18) даетъ

$$G\left\{\frac{\partial A}{\partial x}dx^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial B}{\partial y}dy^2\right\}=$$

$$=(Adx+Bdy)\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}+B\right)dx+\left(\frac{\partial G}{\partial y}-A\right)dy\right\}.$$

Что же касается этого послѣдняго уравненія, то, въ виду произвольности dx и dy, оно равносильно слѣдующимъ тремъ:

$$\left.\begin{aligned}
&G\frac{\partial A}{\partial x}=A\frac{\partial G}{\partial x}+AB\,,\\
&G\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)=A\left(\frac{\partial G}{\partial y}-A\right)+B\left(\frac{\partial G}{\partial x}+B\right),\\
&G\frac{\partial B}{\partial y}=B\frac{\partial G}{\partial y}-AB\,.
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (20)$$

Отсюда при помощи весьма простыхъ преобразованій выводимъ

$$\frac{\partial G}{\partial x}=G\frac{\partial \log A}{\partial x}-B,\quad \frac{\partial G}{\partial y}=G\frac{\partial \log B}{\partial y}+A\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}=A\frac{\partial \log B}{\partial y}+B\frac{\partial \log A}{\partial x}\,,$$

$$A\frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial y}=B\frac{\partial \log\frac{A}{B}}{\partial x}.\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (21)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial \log A}{\partial x} + G\frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial \log B}{\partial y} + G\frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} =$$

$$= G\frac{\partial \log B}{\partial y}\frac{\partial \log A}{\partial x} + A\frac{\partial \log A}{\partial x} + G\frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} =$$

$$= G\frac{\partial \log A}{\partial x}\frac{\partial \log B}{\partial y} - B\frac{\partial \log B}{\partial y} + G\frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \log \frac{A}{B}}{\partial x \partial y} = 0 \,. \quad . \quad . \quad (22)$$

Самое общее рѣшеніе уравненія (22), какъ извѣстно, заключается въ слѣдующей формулѣ

$$\frac{A}{B} = f(x)\,.\,f_1(y)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

гдѣ $f(x)$ зависитъ только отъ x, а $f_1(y)$ — только отъ y.

Съ другой стороны, опредѣляя на основаніи формулы (23) производныя

$$\frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial y}$$

и подставляя полученные такимъ образомъ результаты въ уравненіе (21), находимъ

$$\frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial y} = \frac{f'_1(y)}{f_1(y)},$$

$$f'_1(y) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \text{пост.}$$

и потому

$$f_1(y) = py + q, \quad f(x) = \frac{1}{-px + r}.$$

Здѣсь

$$p\,,\; q\,,\; r$$

означаютъ числа постоянныя.

Полагая соотвѣтственно этому

$$A=(py+q)K,\quad B=(-px+r)K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

изъ уравненій (20) выводимъ

$$G\frac{\partial K}{\partial x}-K\frac{\partial G}{\partial x}=(-px+r)K^2, \qquad \frac{\partial \frac{G}{K}}{\partial x}=px-r,$$

$$G\frac{\partial K}{\partial y}-K\frac{\partial G}{\partial y}=(-py-q)K^2, \qquad \frac{\partial \frac{G}{K}}{\partial y}=py+q,$$

$$G=\left\{\frac{p(x^2+y^2)}{2}-rx+qy+s\right\}K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

гдѣ s означаетъ также число постоянное.

И такъ,

$$\left.\begin{aligned}\Phi=K\Bigg[\left(\frac{p(x^2+y^2)}{2}-rx+qy+s\right)(dxd^2y-dyd^2x)+\\ +\Big\{(py+q)\,dx-(px-r)\,dy\Big\}(dx^2+dy^2)\Bigg]\cdot\end{aligned}\right\} . (26)$$

Изъ чиселъ

$$p\,,\ q\,,\ r\,,\ s\,,$$

одно, по крайней мѣрѣ, не нуль.

Не должно обращаться въ нуль также и K.

Мы будемъ считать s не равнымъ нулю.

Такимъ предположеніемъ общность нашихъ результатовъ не нарушится, ибо отъ случаевъ, когда $s=0$, можно перейти къ случаю s не $=0$ посредствомъ прибавленія къ x и y нѣкоторыхъ постоянныхъ чиселъ.

Послѣ этихъ замѣчаній подвергнемъ Φ слѣдующимъ преобразованіямъ

$$\frac{8s^2\Phi}{K} = \begin{vmatrix} 2s\left(x - \dfrac{r}{p}\right), & 2s\left(y + \dfrac{q}{p}\right), & p(x^2+y^2) - 2rx + 2qy + 2s \\ 2sdx \quad , & 2sdy \quad , & 0 \\ 2sd^2x \quad , & 2sd^2y \quad , & -2p(dx^2+dy^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2s\left(x - \dfrac{r}{p}\right), & 2s\left(y + \dfrac{q}{p}\right), & -p(x^2+y^2) + 2s \\ 2sdx \quad , & 2sdy \quad , & -2p(xdx+ydy) \\ 2sd^2x \quad , & 2sd^2y \quad , & -2p(xd^2x+yd^2y+dx^2+dy^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2sx - r(x^2+y^2) \quad , & 2sy + q(x^2+y^2) \quad , & 2s - p(x^2+y^2) \\ 2sdx - 2r(xdx+ydy), & 2sdy + 2q(xdx+ydy), & -2p(xdx+ydy) \\ \begin{pmatrix} 2sd^2x - 2r(dx^2+dy^2) \\ -2r(xd^2x+yd^2y) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2sd^2y + 2q(dx^2+dy^2) \\ +2q(xd^2x+yd^2y) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -2p(dx^2+dy^2) \\ -2p(xd^2x+yd^2y) \end{pmatrix} \end{vmatrix},$$

и такимъ образомъ сдѣлаемъ очевиднымъ, что при

$$\Phi = 0\,,$$

должно имѣть мѣсто уравненіе слѣдующаго вида

$$\alpha[2sx - r(x^2+y^2)] + \beta[2sy + q(x^2+y^2)] + \gamma[2s - p(x^2+y^2)] = 0\,,$$

гдѣ α, β, γ независятъ ни отъ x ни отъ y.

Другими словами, всякому линейному соотношенію между X и Y должно соотвѣтствовать линейное же соотношеніе между

$$\frac{2sx - r(x^2+y^2)}{2s - p(x^2+y^2)} \quad \text{и} \quad \frac{2sy + q(x^2+y^2)}{2s - p(x^2+y^2)}.$$

Послѣ такого приведенія второй задачи къ первой нетрудно заключить, что

$$X, Y$$

должны быть связаны съ

$$x, y$$

уравненіями слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{k'(x^2+y^2)+l'x+m'y+n'}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\ Y &= \frac{k''(x^2+y^2)+l''x+m''y+n''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

которыя и представляютъ самое общее рѣшеніе нашей задачи.

Здѣсь

$$k\,,\ l\,,\ m\,,\ n\,,\ k'\,,\ l'\,,\ m'\,,\ n'\,,\ k''\,,\ l''\,,\ m''\,,\ n''$$

означаютъ числа постоянныя.

ЗАДАЧА 3-я.

Найти всѣ такія изображенія сферы на плоскости, при которыхъ всякій большой кругъ сферы изображается на плоскости также кругомъ (или прямою).

РѢШЕНІЕ.

Положеніе каждой точки сферы можно опредѣлять широтою φ и долготою ψ, а положеніе каждой точки плоскости — прямолинейными прямоугольными координатами

$$x\,,\ y\,.$$

Тогда всякому большому кругу сферы будетъ соотвѣтствовать линейное уравненіе

$$a\,\frac{\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi}+b\,\frac{\cos\varphi\sin\psi}{\sin\varphi}+c=0\,,$$

между

$$X=\operatorname{cotg}\varphi\cos\psi \qquad \text{и} \qquad Y=\operatorname{cotg}\varphi\sin\psi\,;$$

а всякому кругу плоскости будетъ соотвѣтствовать линейное уравненіе

$$\alpha x+\beta y+\gamma\,(x^2+y^2)+\delta=0$$

между

$$x\,,\ y\,,\ z=x^2+y^2\,.$$

На этомъ основанiи третья задача сводится ко второй и самое общее ея рѣшенiе заключается въ уравненiяхъ слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cotg}\varphi\cos\psi &= \frac{k'(x^2+y^2)+l'x+m'y+n'}{k(x^2+y^2)+lx+my+n}\\ \operatorname{cotg}\varphi\sin\psi &= \frac{k''(x^2+y^2)+l''x+m''y+n''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n}\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

гдѣ

$$k\,,\ l\,,\ m\,,\ n\,,\ k',\ l',\ m',\ n',\ k'',\ l'',\ m'',\ n'',$$

числа постоянныя.

Въ частномъ случаѣ, когда всякому большому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости прямая линiя, коэффицiенты

$$k,\ k',\ k''$$

должны, согласно рѣшенiю первой задачи, обращаться въ нули.

ЗАДАЧА 4-я.

Найти всѣ такiя изображенiя сферы на плоскости, при которыхъ всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости также кругъ (или прямая).

РѢШЕНIЕ.

При обозначенiяхъ предыдущей задачи всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ линейное уравненiе

$$a\cos\varphi\cos\psi+b\cos\varphi\sin\psi+c\sin\varphi+d=0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

между

$$\cos\varphi\cos\psi\,,\quad \cos\varphi\sin\psi \quad \text{и} \quad \sin\varphi\,.$$

Выражая $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ черезъ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ по формуламъ

$$\cos\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}\,,\quad \sin\varphi=\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}\,,$$

преобразуемъ уравненіе (29) въ слѣдующее

$$\left.\begin{array}{l} a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi + b\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi + \\ \frac{d-c}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{d+c}{2} = 0. \end{array}\right\} \quad . \quad . \ (30)$$

По условіямъ задачи уравненію (30) при всякихъ значеніяхъ постоянныхъ

$$a,\ b,\ \frac{d-c}{2},\ \frac{d+c}{2}$$

должно соотвѣтствовать линейное уравненіе

$$\alpha x + \beta y + \gamma(x^2+y^2) + \delta = 0$$

между

$$x,\ y\ x^2+y^2.$$

Остановимся на тѣхъ случаяхъ, при которыхъ одинъ изъ коэффиціентовъ

$$a,\ b,\ \frac{d-c}{2}$$

приводится къ нулю.

Изъ разсмотрѣнія такихъ случаевъ нетрудно, согласно рѣшенію второй задачи, вывесть формулы слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi = \dfrac{k'(x^2+y^2)+l'x+m'y+n'}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\[2ex] \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi = \dfrac{k''(x^2+y^2)+l''x+m''y+n''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\[2ex] \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{k'''(x^2+y^2)+l'''x+m'''y+n'''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \end{array}\right\}, \quad . \quad . \ (31)$$

гдѣ всѣ

$$k,\ l,\ m,\ n,$$

со значками и безъ значковъ, означаютъ числа постоянныя.

Съ другой стороны нетрудно убѣдиться, что, при существованіи формулъ (31), всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости также кругъ.

Остается изслѣдовать условія совмѣстности этихъ трехъ формулъ (31) и мы придемъ къ теоремѣ, высказанной въ началѣ статьи:

Изъ всѣхъ изображеній сферы на плоскости только стереографическая проекція удовлетворяетъ условіямъ нашей послѣдней задачи.

Въ то время, какъ эта замѣтка печаталась, я наткнулся еще на одну статью M. Ch. Schols, помѣщенную въ Annales de l'Ecole polytechnique de Delft за 1886 годъ.

Статья эта озаглавлена такъ: *La courbure de la ligne géodésique.*

M. Ch. Schols не только доказываетъ мою теорему о стереографической проекціи, приписывая эту теорему M. M. du Chatenet, но и рѣшаетъ ту задачу, которая составляетъ главную цѣль настоящей замѣтки.

Предоставляю читателю сравнить мое рѣшеніе съ рѣшеніемъ M. Ch. Schols.

С.-Петербургъ.
5 Октября 1888 г.

Одна задача механики системы матерьяльныхъ точекъ.

Д. К. Бобылева.

Рѣшить вопросъ о движеніи n матерьяльныхъ точекъ $M_1, M_2, \ldots\ldots M_i \ldots\ldots M_n$, остающихся на прямой линіи, которая не выходитъ изъ плоскости XY; каждая изъ точекъ M_i притягивается къ началу координатъ силою равною $\mu m_i r_i$, а между каждою парою точекъ M_i и M_j существуютъ взаимныя притяженія, равныя $\varepsilon m_i m_j r_{ij}$.

$m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots m_n$ означаютъ массы точекъ, r_i — разстояніе точки M_i отъ начала координатъ, r_{ij} — разстояніе между точками M_i и M_j.

Уравненіями связей могутъ служить равенства:

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0\,,$$
$$(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_4 - y_1)(x_2 - x_1) = 0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_n - x_1)(y_2 - y_1) - (y_n - y_1)(x_2 - x_1) = 0\,,$$

число которыхъ $(n-2)$. Такъ какъ число всѣхъ координатъ $2n$, то число независимыхъ координатъ равно $2n-(n-2)=(n+2)$, а потому предстоитъ произвести $(2n+4)$ интегрированій и получить столько же независимыхъ интеграловъ для полнаго рѣшенія вопроса.

Не трудно видѣть, что дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи будутъ:

$$x_c'' = -\mu x_c\,, \quad y_c'' = -\mu y_c \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

и что ихъ рѣшенія, требующія четырехъ интегрированій, будутъ:

$$x_c = a_c \cos t\sqrt{\mu} + \frac{\alpha_c}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu}\,,$$

$$y_c = b_c \cos t\sqrt{\mu} + \frac{\beta_c}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu}\,,$$

гдѣ a_c, b_c суть начальныя координаты, α_c и β_c — проекціи начальной скорости центра инерціи.

Послѣ этого замѣнимъ x_i черезъ $(x_c + \xi_i)$ и y_i — черезъ $(y_c + \eta_i)$ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія точекъ, которыя на основаніи дифференціальныхъ уравненій (1) получаютъ тогда видъ:

$$\begin{aligned}
m_1\xi_1'' &= -m_1\varkappa^2\xi_1 + \lambda_3(\eta_3 - \eta_2) + \ldots + \lambda_n(\eta_n - \eta_2)\,,\\
m_1\eta_1'' &= -m_1\varkappa^2\eta_1 - \lambda_3(\xi_3 - \xi_2) - \ldots - \lambda_n(\xi_n - \xi_2)\,,\\
m_2\xi_2'' &= -m_2\varkappa^2\xi_2 - \lambda_3(\eta_3 - \eta_1) - \ldots - \lambda_n(\eta_n - \eta_1)\,,\\
m_2\eta_2'' &= -m_2\varkappa^2\eta_2 + \lambda_3(\xi_3 - \xi_1) + \ldots + \lambda_n(\xi_n - \xi_1)\,,\\
m_i\xi_i'' &= -m_i\varkappa^2\xi_i + \lambda_i(\eta_2 - \eta_1)\,,\\
m_i\eta_i'' &= -m_i\varkappa^2\eta_i - \lambda_i(\xi_2 - \xi_1)\,,
\end{aligned}$$

гдѣ i означаетъ одно изъ чиселъ $3, 4, \ldots n$; $\lambda_3, \lambda_4 \ldots \lambda_n$ суть множители, свойственные связямъ; $\varkappa^2 = \mu + \varepsilon M$, $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Изъ этихъ дифференціальныхъ уравненій получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i\eta_i'' - \eta_i\xi_i'') = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

далѣе, на основаніи уравненій связей:

$$\xi_i\xi_i'' + \eta_i\eta_i'' = -\varkappa^2(\xi_i^2 + \eta_i^2) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

для i равнаго $3, 4, \ldots n$; если же принять въ разсчетъ, что всѣ точки находятся на прямой и означить черезъ ϑ уголъ, составляемый этою прямою съ осью X-овъ, такъ что

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\xi_2} = \frac{\eta_3}{\xi_3} = \ldots = \frac{\eta_i}{\xi_i} = \ldots = \frac{\eta_n}{\xi_n} = \operatorname{tg}\vartheta\,,$$

то окажется, что дифференціальное уравненіе (3) имѣетъ мѣсто также и для точекъ M_1 и M_2.

Кромѣ этого здѣсь имѣетъ мѣсто законъ живой силы, выражаемый интеграломъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i[(\xi'_i)^2 + (\eta'_i)^2] = -\varkappa^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2) + 2h \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Означимъ черезъ $\varrho_1, \varrho_2, \ldots . \varrho_i, \ldots . \varrho_n$ разстоянія точекъ отъ центра инерціи; эти разстоянія и производныя отъ нихъ по времени связаны равенствами:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i' = 0 .$$

Интегрируя дифференціальное уравненіе (2), получимъ:

$$J \frac{d\vartheta}{dt} = J_0 \vartheta'_0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

гдѣ

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \varrho_i^2 , \quad J_0 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i^2 ;$$

$a_1, a_2, \ldots . a_i, \ldots a_n$ означаютъ начальныя величины разстояній ϱ_1, $\varrho_2, \ldots \varrho_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots . \alpha_n$ будутъ означать начальныя величины производныхъ $\varrho'_1, \varrho'_2, \ldots . \varrho'_n$.

Интегралъ (4) выразится такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i [(\varrho'_i)^2 + \varrho_i^2 (\vartheta')^2] + \varkappa^2 J = 2h , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

$$2h = A + (\vartheta'_0{}^2 + \varkappa^2) J_0 ; \quad A = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \ \alpha_i^2 .$$

Далѣе, каждое изъ дифференціальныхъ уравненій (3) можно представить такъ:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho_i^2}{dt^2} = (\varrho'_i)^2 + \varrho_i^2 (\vartheta')^2 - \varkappa^2 \varrho_i^2 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

поэтому интегралу (II) можно дать слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2J}{dt^2}+2\varkappa^2J=2h\,.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (6)$$

Произведя надъ (6) два интегрированія, получимъ:

$$J-\frac{h}{\varkappa^2}=\left(J_0-\frac{h}{\varkappa^2}\right)\cos 2\varkappa t+\frac{K}{\varkappa}\sin 2\varkappa t\,,\quad .\quad .\quad (\mathrm{III},\ \mathrm{IV})$$

гдѣ

$$K=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\, a_i\, \alpha_i\,.$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\ \varrho_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\ (\varrho'_i)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\ \varrho_i\ \varrho'_i\right)^2=$$

$$=\sum_i\sum_j m_i\ m_j\ (\varrho_i\ \varrho'_j-\varrho_j\ \varrho'_i)^2\,,\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (7)$$

гдѣ двойная сумма распространяется па всевозможныя сочетанія чиселъ $1\,,\ 2\,,\ldots.\,n$ попарно. Примѣнивъ равенство это къ начальнымъ значеніямъ ϱ и ϱ', получимъ:

$$J_0\,A-K^2=\sum_i\sum_j m_i\ m_j\ (a_i\alpha_j-a_j\alpha_i)^2\,;\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (8)$$

отсюда видно, что $J_0\ A-K^2$ есть величина положительная. Отношеніе

$$\frac{J_0A-K^2}{J_0^{\,2}\vartheta'^{\,2}_0}\,,$$

которое будетъ также величиною положительною, мы означимъ черезъ D^2. Легко видѣть, что

$$2h=K^2+J_0\,(\vartheta'_0)^2\,(1+D^2)+J_0\varkappa^2\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (9)$$

и что

$$J=J_0\vartheta'^{\,2}_0\,(1+D^2)\,\frac{\sin^2 t\varkappa}{\varkappa^2}\left\{1+\frac{\varkappa^2}{\vartheta'^{\,2}_0\,(1+D^2)}\left(\operatorname{cotg} t\varkappa+\frac{K}{\varkappa J_0}\right)^2\right\}.\quad .\ (10)$$

Подставивъ это выраженіе для J въ интегралъ (I), произведемъ пятое интегрированіе; тогда получимъ:

$$\operatorname{cotg}(\vartheta+\Gamma)\sqrt{1+D^2}=\frac{\varkappa}{\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}}\left(\operatorname{cotg}t\varkappa+\frac{K}{J_0\varkappa}\right);$$

а если предположимъ, что при $t=0$ уголъ ϑ равенъ нулю, то окажется, что

$$\operatorname{tg}t\varkappa=\frac{J_0\varkappa\operatorname{tg}\varphi}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}-K\operatorname{tg}\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{V})$$

$$\varphi=\vartheta\sqrt{1+D^2}$$

$$J\left\{\left(\cos\varphi-\frac{K}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}}\sin\varphi\right)^2+\frac{\varkappa^2 J_0{}^2}{J_0{}^2\vartheta'_0{}^2(1+D^2)}\sin^2\varphi\right\}=J_0. \quad . \quad (11)$$

Теперь замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія (3) или (5) можно написать такъ:

$$\varrho_i\varrho_i''=\varrho_i^2[(\vartheta')^2-\varkappa^2];$$

поэтому имѣемъ $(n-1)$ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{\varrho_1''}{\varrho_1}=\frac{\varrho_2''}{\varrho_2}=\ldots\ldots=\frac{\varrho_i''}{\varrho_i}=\ldots\ldots=\frac{\varrho_n''}{\varrho_n},$$

изъ которыхъ найдемъ столько же интеграловъ:

$$\left.\begin{aligned}&\varrho_1\varrho_2'-\varrho_2\varrho_1'=C_{12},\\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\varrho_1\varrho_n'-\varrho_n\varrho_1'=C_{1n},\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

гдѣ

$$C_{1i}=a_1\alpha_i-a_i\alpha_1.$$

Эти интегралы можно представить подъ видомъ равенствъ:

$$\frac{d\left(\dfrac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1}\right)}{dt}=\frac{d\left(\dfrac{\varrho_3}{C_{13}\varrho_1}\right)}{dt}=\ldots\ldots=\frac{d\left(\dfrac{\varrho_n}{C_{1n}\varrho_1}\right)}{dt}=\frac{1}{\varrho_1{}^2}, \quad . \quad . \quad (12)$$

поэтому можно произвести $(n-2)$ новыхъ интегрированій и получить столько же интеграловъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varrho_3}{C_{13}\varrho_1}-\frac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1}=\Gamma_{23}\\
&\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\frac{\varrho_n}{C_{1n}\varrho_1}-\frac{\varrho_2}{C_{12}\varrho_1}=\Gamma_{2n},
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots(F)$$

гдѣ

$$\Gamma_{2i}=\frac{a_i}{C_{1i}\alpha_1}-\frac{a_2}{C_{12}a_1}=-\frac{(a_2\alpha_i-a_i\alpha_2)}{C_{1i}C_{12}}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(13)$$

Такимъ образомъ, произведено $4+5+n-1+n-2$, то есть $(2n+6)$ интегрированій, а требовалось только $(2n+4)$; правда, постоянныя C_{1i} связаны между собою зависимостью:

$$\sum_{i=2}^{i=n} m_i C_{1i}=0\,,\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(14)$$

а съ постоянными Γ_{2i} еще другою зависимостью:

$$\sum_{i=3}^{i=n} m_i\Gamma_{2i}C_{12}C_{1i}+m_1C_{12}=0\,^{*)}\,,\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(15)$$

---

*) Эти равенства (14) и (15) суть слѣдствія того, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i=0\,,\qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i\alpha_i=0\,;$$

въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ (14) вмѣсто C_{1i} ихъ выраженія въ a_1, α_1, a_i, α_i, а въ (15) выраженія Γ_{2i} по формулѣ (13), получимъ:

$$\sum_{i=2}^{i=n} m_iC_{1i}=a_1\sum_{i=1}^{i=n} m_i\alpha_i-\alpha_1\sum_{i=1}^{i=n} m_i a_i\,,$$

$$\sum_{i=3}^{i=n} m_i\Gamma_{2i}C_{12}C_{1i}=\alpha_2\sum_{i=2}^{i=n} m_i a_i-a_2\sum_{i=2}^{i=n} m_i\alpha^i=-m_1(a_2\alpha_1-a_2\alpha_1)\,.$$

такъ что, стало быть, произведено два излишнихъ интегрированія. Однако, при ближайшемъ разсмотрѣніи полученныхъ результатовъ, оказывается, что вопросъ еще не рѣшенъ и что нужно произвести еще одно интегрированіе. Въ самомъ дѣлѣ, постоянныя C_{1i}, Γ_{2i} связаны между собою и съ постоянными h, K, J_0, ϑ'_0 еще одною зависимостью, которая получится изъ равенства (8) слѣдующимъ образомъ:

Вмѣсто A подставимъ $2h - J_0(\vartheta'^2_0 + \varkappa^2)$ и вмѣсто $(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)$ для i и j неравныхъ единицѣ — слѣдующее:

$$\frac{a_1 a_i \alpha_j - a_i a_j \alpha_1 - a_1 a_j \alpha_i + a_i \alpha_j \alpha_1}{a_1} = \frac{a_i C_{1j} - a_j C_{1i}}{a_1},$$

или, выразивъ a_i и a_j въ Γ_{2i} и въ Γ_{2j}:

$$(\Gamma_{2i} - \Gamma_{2j})\, C_{1i} C_{1j}.$$

Такимъ образомъ, получимъ:

$$2hJ_0 - K^2 - J_0^2(\vartheta'^2_0 + \varkappa^2) = \sum_{ij} m_i m_j (\Gamma_{2i} - \Gamma_{2j})^2 C_{1i}^2 C_{1j}^2 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{k=n} m_1 m_k C_{1k}^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

гдѣ i и j суть числа $2, 3, \ldots n$, взятыя во всевозможныхъ сочетаніяхъ попарно.

Послѣднее интегрированіе я произведу надъ дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$d\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = C_{12}\frac{dt}{\varrho_1^2},$$

въ которомъ замѣню dt, на основаніи интеграла (I)-го, отношеніемъ $Jd\vartheta : J_0\vartheta'_0$, вслѣдствіе чего получится:

$$d\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = \frac{C_{12}}{J_0\vartheta'_0}\frac{J}{\varrho_1^2}\, d\vartheta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Теперь я преобразую выраженіе момента инерціи J при помощи равенствъ:

$$\varrho_i = \frac{C_{1i}}{C_{12}}\varrho_2 + C_{1i}\Gamma_{2i}\varrho_1 = \frac{C_{1i}}{C_{12}}\varrho_2 - \frac{(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)}{C_{12}}\varrho_1$$

или

$$\varrho_i = \frac{C_{1i}\varrho_2 - C_{2i}\varrho_1}{C_{12}},$$

если обозначить разности $(a_2\alpha_i - a_i\alpha_2)$ черезъ C_{2i}; тогда получимъ:

$$C_{12}{}^2 J = \varrho_2{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 - 2\varrho_2\varrho_1 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} + \varrho_1{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}{}^2, \quad \text{(18)}$$

поэтому:

$$\frac{J}{\varrho_1{}^2} C_{12}{}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{12}}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2} \right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} \right)^2}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2}.$$

Изъ теорiи опредѣлителей извѣстно, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i}{}^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{2i}{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i C_{1i} C_{2i} \right)^2 =$$

$$= \sum_{ij} m_i m_j (C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i})^2;$$

здѣсь можно произвести слѣдующее преобразованiе:

$$C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i} = a_2 (C_{1i}\alpha_j - C_{1j}\alpha_i) - \alpha_2 (C_{1i} a_j - C_{1j} a_i);$$

$$C_{1i}\alpha_j - C_{1j}\alpha_i = -(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i)\alpha_1,$$

$$C_{1i} a_j - C_{1j} a_i = -(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i) a_1,$$

$$C_{1i} C_{2j} - C_{1j} C_{2i} = (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)(a_i\alpha_j - a_j\alpha_i).$$

Поэтому, на основанiи равенства (8), вышесказанная разность оказывается равною:

$$C_{12}{}^2 (AJ_0 - K^2) = C_{12}{}^2 J_0{}^2 \vartheta'_0{}^2 D^2.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{J}{\varrho_1{}^2}C_{12}{}^2=\frac{C_{12}{}^2J_0{}^2\vartheta'_0{}^2D^2}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\left\{\frac{(\Sigma m_iC_{1i}{}^2)^2}{J_0{}^2\vartheta'_0{}^2D^2C_{12}{}^2}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-\frac{\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\right)^2+1\right\}.\ (18\text{bis})$$

Имѣя это выраженіе, я подставляю его въ дифференціальное уравненіе (17), которое интегрирую, и получаю:

$$\frac{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}{J_0\vartheta'_0DC_{12}}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-\frac{\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\right)=\operatorname{tg}D(\vartheta+\Gamma)\ .\quad .\quad .\quad (19)$$

Здѣсь Γ новая постоянная; такъ какъ при $t=0$ уголъ $\vartheta=0$, $\varrho_1=a_1$, $\varrho_2=a_2$, то

$$\operatorname{tg}D\Gamma=\frac{a_2\Sigma m_iC_{1i}{}^2-a_1\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}}{a_1J_0\vartheta'_0DC_{12}},$$

$$a_2\Sigma m_iC_{1i}{}^2-a_1\Sigma m_iC_{1i}C_{2i}=\Sigma m_iC_{1i}(a_2C_{1i}-a_1C_{2i})=$$

$$=C_{12}\,\Sigma m_iC_{1i}\alpha_i=C_{12}\,(a_1K-\alpha_1J_0);$$

$$\operatorname{tg}D\Gamma=\frac{a_1K-\alpha_1J_0}{a_1J_0\vartheta'_0D}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (20)$$

Изъ выраженія (18 bis) и интегральнаго уравненія (19) получается:

$$\frac{J}{\varrho_1{}^2}=\frac{J_0{}^2\vartheta'_0{}^2D^2}{\Sigma m_iC_{1i}{}^2}\,\frac{1}{\cos^2D(\vartheta+\Gamma)}\,,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (21)$$

а отсюда и изъ (11):

$$\varrho_1=\frac{a_1\cos D\vartheta-\dfrac{a_1K-\alpha_1J_0}{J_0\vartheta'_0D}\sin D\vartheta}{\sqrt{\left(\cos\varphi-\dfrac{K}{J_0\vartheta'_0\sqrt{1+D^2}}\sin\varphi\right)^2+\dfrac{\varkappa^2}{\vartheta'_0{}^2(1+D^2)}\sin^2\varphi}}\,,\ .\ (22)$$

потому что

$$\cos D\Gamma=\frac{a_1J_0\vartheta'_0D}{\sqrt{J_0\Sigma m_iC_{1i}{}^2}}\,,\quad \sin D\Gamma=\frac{a_1K-\alpha_1J_0}{\sqrt{J_0\Sigma m_iC_{1i}{}^2}}\,,$$

$$J_0\Sigma m_iC_{1i}{}^2=J_0(a_1{}^2A-2a_1\alpha_1K+\alpha_1{}^2J_0)=$$

$$=(a_1K-\alpha_1J_0)^2+a_1{}^2(AJ_0-K^2)=(a_1K-\alpha_1J_0)^2+a_1{}^2J_0{}^2\vartheta'_0{}^2D^2.$$

Имѣя выраженія для ϱ_1, получимъ выраженія для ϱ_i слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_1} = \frac{a_i}{a_1} + \frac{C_{1i}}{C_{12}}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{a_2}{a_1}\right);$$

$$\frac{C_{1i}}{C_{12}}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} - \frac{a_2}{a_1}\right) = \frac{J_0 \vartheta'_0 D C_{1i}}{\Sigma m_i C_{1i}^2}[\operatorname{tg} D(\vartheta + \Gamma) - \operatorname{tg} D\Gamma] =$$

$$= \frac{J_0 \vartheta'_0 D C_{1i}}{\Sigma m_i C_{1i}^2} \frac{\sin D\vartheta}{\cos D\Gamma \cos D(\vartheta + \Gamma)};$$

$$\cos D\Gamma \cos D(\vartheta + \Gamma) = \frac{a_1 \vartheta'_0 D \sqrt{J_0}}{\sqrt{\Sigma m_i C_{1i}^2}} \frac{\varrho_1}{\sqrt{J}} \frac{J_0 \vartheta'_0 D}{\sqrt{\Sigma m_i C_{1i}^2}};$$

$$\varrho_i = \frac{a_i}{a_1}\varrho_1 + \frac{\sqrt{J} C_{1i}}{a_1 \vartheta'_0 D \sqrt{J_0}} \sin D\vartheta;$$

$$\varrho_i \sqrt{\frac{J_0}{J}} = a_i \cos D\vartheta - \frac{a_1 K - \alpha_1 J_0}{a_1 \vartheta'_0 D J_0} a_i \sin D\vartheta + \frac{C_{1i}}{a_1 \vartheta'_0 D} \sin D\vartheta;$$

$$(a_1 K - \alpha_1 J_0)\, a_i - J_0 C_{1i} = a_1 (a_i K - \alpha_i J_0).$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\varrho_i = \frac{a_i \cos D\vartheta - \dfrac{a_i K - \alpha_i J_0}{J_0 \vartheta'_0 D} \sin D\vartheta}{\sqrt{\left(\cos\varphi - \dfrac{K}{J_0 \vartheta'_0 \sqrt{1+D^2}} \sin\varphi\right)^2 + \dfrac{\varkappa^2}{\vartheta'^2_0 (1+D^2)} \sin^2\varphi}},$$

гдѣ $\varphi = \vartheta \sqrt{1+D^2}$.

Конечно, полученное выраженіе для ϱ_i удовлетворяетъ дифференціальному уравненію второго порядка:

$$\varrho_i'' = \varrho_i \left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \varkappa^2\right],$$

въ которомъ

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{J_0 \vartheta'_0}{\dfrac{h}{\varkappa^2} + \left(J_0 - \dfrac{h}{\varkappa^2}\right)\cos 2\varkappa t + \dfrac{K}{\varkappa}\sin 2\varkappa t}.$$

11 Ноября 1888 г.

О преломленіи свѣтовыхъ лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями.

А. П. Грузинцева.

Въ руководствахъ по физикѣ, какъ отечественныхъ, такъ и иностранныхъ, излагается обыкновенно вычисленіе хода свѣтовыхъ лучей черезъ прозрачныя средины, ограниченныя *сферическими поверхностями*, да и то лишь для случая лучей центральныхъ. И, вообще говоря, этого совершенно достаточно для обычныхъ нуждъ опытной физики; разсматривая-же вопросъ съ чисто-теоретической точки зрѣнія, необходимо придемъ къ тому заключенію, что можетъ встрѣтиться надобность въ вычисленіи хода лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-угодно поверхностями и тогда за разрѣшеніемъ такихъ вопросовъ придется обращаться къ старымъ мемуарамъ конца прошлаго и первой половины настоящаго столѣтія, именно къ мемуарамъ Эйлера, Штурма и др.—мемуарамъ, помѣщеннымъ въ изданіяхъ, не принадлежащихъ къ числу особенно распространенныхъ; на русскомъ-же языкѣ мнѣ неизвѣстно ни одной статьи, относящейся до изслѣдованія интересующаго насъ вопроса.

Въ виду сказаннаго мнѣ кажется не безполезнымъ изложить здѣсь рѣшеніе занимающаго насъ вопроса по возможности въ простой, хотя и общей формѣ. Къ тому-же побуждаетъ еще и слѣдующее соображеніе. Авторы, занимавшіеся поставленнымъ нами вопросомъ, смотрѣли на него болѣе съ геометрической его стороны, чѣмъ физической,—поэтому въ ихъ изслѣдованіяхъ встрѣчается не мало предложеній, весьма любопытныхъ съ чисто-геометрической точки зрѣнія, но не имѣющихъ особаго интереса для математической физики.

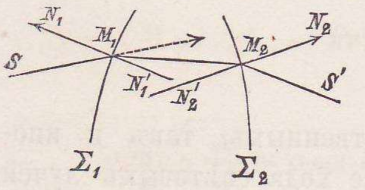
Разрѣшивъ вопросъ въ общемъ видѣ, поучительно приложить полученныя формулы къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, случаямъ, имѣющимъ извѣстное значеніе на практикѣ, почему въ этой статьѣ вслѣдъ за общими рѣшеніями будутъ разсмотрѣны и нѣкоторыя частныя ихъ формы.

Такимъ образомъ, задача, которую мы предлагаемъ себѣ разрѣшить, будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Данъ пучекъ свѣтовыхъ лучей и нѣкоторое число прозрачныхъ срединъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями; требуется опредѣлить направленіе пучка по выходѣ его изъ данныхъ срединъ.

I.

§ 1. Пусть $S(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$ будетъ свѣтящаяся точка (черт. 1); $a_0\,,\ b_0\,,\ c_0$ косинусы направленія луча SM_1, падающаго на нѣкоторую поверхность Σ_1 въ точкѣ M_1, координаты которой пусть будутъ $x_1,\ y_1,\ z_1$. Косинусы направленія нормала M_1N_1 къ поверхности Σ_1 въ точкѣ паденія M_1 пусть будутъ A_1, B_1, C_1 и i_1 — уголъ паденія луча SM_1 на поверхность Σ_1; тогда будемъ имѣть:



Черт. 1-й.

$$A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0 = \mathrm{cs}i_1\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

Далѣе пусть косинусы направленія преломленнаго луча будутъ a_1, b_1, c_1 и i_2 — уголъ преломленія на поверхности Σ_1, тогда

$$A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = \mathrm{cs}i_2\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

Пусть этотъ лучъ M_1M_2 падаетъ на вторую поверхность Σ_2 въ точкѣ M_2, координаты которой будутъ $x_2\,,\ y_2\,,\ z_2$, подъ угломъ i_3; пусть далѣе косинусы направленія нормала M_2N_2 къ поверхности Σ_2 въ точкѣ M_2 будутъ $A_2\,,\ B_2\,,\ C_2$, тогда

$$A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c_1 = \mathrm{cs}i_3\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Наконецъ этотъ лучъ M_1M_2 преломляется въ точкѣ M_2 по направленію M_2S'; пусть уголъ преломленія будетъ i_4 и направленіе луча M_2S' опредѣляется косинусами $a_2\,,\ b_2\,,\ c_2$; тогда

$$A_2a_2 + B_2b_2 + C_2c_2 = \mathrm{cs}i_4\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

Лучъ M_2S' можетъ падать на слѣдующую поверхность Σ_3 и т. д.

§ 2. Прежде чѣмъ идти далѣе замѣтимъ на счетъ направленій нормаловъ и лучей слѣдующее. Будемъ считать за *положительное*—направленіе нормала *наружу* поверхности, а противоположное направленіе за отрицательное; затѣмъ направленіе отъ M_1 къ M_2, т. е. M_1M_2, за положительное, а направленіе отъ M_2 къ M_1 за отрицательное, или вообще направленіе M_iM_{i+1} за положительное, а $M_{i+1}M_i$ за отрицательное.

На этомъ основаніи по черт. 1 имѣемъ:

$$\mathrm{cs}(SM_1,\ M_1N_1) = -(A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0) = -\mathrm{cs}i_1\,,$$

такъ какъ по нашему условію направленіе M_1S опредѣляется косинусами $-a_0$, $-b_0$, $-c_0$. Такъ же

$$\mathrm{cs}(M_1M_2,\ M_1N_1') = -(A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1) = -\mathrm{cs}i_2\,,$$

ибо направленіе M_1N_1' опредѣляется косинусами $-A_1$, $-B_1$, $-C_1$. Подобнымъ же образомъ:

$$\begin{aligned}\mathrm{cs}i_3 &= (-A_2)\ (-a_1) + (-B_2)(-b_1) + (-C_2)\,(-c_1) = \\ &= A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c_1\end{aligned}$$

такъ-какъ направленіе M_2M_1 опредѣляется косинусами $-a_1$, $-b_1$, $-c_1$, а направленіе M_2N_2' косинусами $-A_2$, $-B_2$, $-C_2$.

§ 3. Назовемъ показатель преломленія свѣта при переходѣ изъ первой средины во вторую черезъ поверхность Σ_1 буквой μ_1, тогда по закону Декарта имѣемъ:

$$\frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2} = \mu_1\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Выразимъ теперь аналитически тотъ законъ, что оба луча, падающій и преломленный, лежатъ въ одной плоскости съ нормаломъ M_1N_1 къ поверхности Σ_1.

Это обстоятельство выразится слѣдующими тремя равенствами:

$$\left.\begin{aligned} b_0C_1 - c_0B_1 &= \frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2}\,(b_1C_1 - c_1B_1) \\ c_0A_1 - a_0C_1 &= \frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2}\,(c_1A_1 - a_1C_1) \\ a_0B_1 - b_0A_1 &= \frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2}\,(a_1B_1 - b_1A_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Дѣйствительно, косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ M_1S и M_1N_1, составляющихъ между собой уголъ i_1, суть

$$\frac{b_0C_1 - c_0B_1}{\text{sn}i_1}, \quad \frac{c_0A_1 - a_0C_1}{\text{sn}i_1}, \quad \frac{a_0B_1 - b_0A_1}{\text{sn}i_1}, \quad . \; . \; . \; (a)$$

а косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ M_1N_1 и M_1M_2, между которыми заключается уголъ i_2, суть

$$\frac{b_1C_1 - c_1B_1}{\text{sn}i_2}, \quad \frac{c_1A_1 - a_1C_1}{\text{sn}i_2}, \quad \frac{a_1B_1 - b_1A_1}{\text{sn}i_2}, \quad . \; . \; . \; (b)$$

но прямыя M_1S, M_1N_1 и M_1M_2 лежатъ въ одной плоскости, слѣдовательно, выраженія (a) и (b) должны быть равны между собой, откуда и получаются равенства (6).

Замѣтимъ, что въ равенствахъ (6) независимыхъ равенствъ только два; третье есть ихъ слѣдствіе. Въ самомъ дѣлѣ, умножая, напр., первое на $-A_1$, второе на $-B_1$ и складывая результаты, получимъ по приведеніи и сокращеніи на C_1 равенство третье въ системѣ (6).

§ 4. Теперь ближайшая наша задача будетъ состоять въ опредѣленіи направленія преломленнаго луча M_1M_2, т. е. въ опредѣленіи количествъ a_1, b_1, c_1 и i_2 по даннымъ a_0, b_0, c_0, A_1, B_1, C_1, i_1 *) и μ_1.

Напишемъ два послѣднія уравненія системы (6) въ такомъ видѣ:

$$a_1C_1 = c_1A_1 - \frac{1}{\mu_1}(c_0A_1 - a_0C_1),$$

$$a_1B_1 = b_1A_1 + \frac{1}{\mu_1}(a_0B_1 - b_0A_1),$$

причемъ вмѣсто отношенія синусовъ угловъ i_1 и i_2 подставлено его значеніе изъ равенства (5).

Присоединимъ къ написаннымъ сейчасъ равенствамъ слѣдующее тождество

$$a_1A_1 = a_1A_1 .$$

Теперь умножимъ первое изъ этихъ уравненій на C_1, второе на B_1, третье на A_1 и результаты сложимъ; тогда, помня, что

---

*) Какъ опредѣляются A_1, B_1, C_1, i_1, будетъ объяснено ниже (§ 5); въ случаѣ плоскости A_1, B_1, C_1 суть данныя количества.

$$A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 = 1,$$

$$A_1 a_0 + B_1 b_0 + C_1 c_0 = \mathrm{cs} i_1,$$

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = \mathrm{cs} i_2,$$

найдемъ:

$$a_1 = A_1 \,\mathrm{cs} i_2 - \frac{1}{\mu_1}\left[A_1(\mathrm{cs} i_1 - a_0 A_1) - a_0(1 - A_1{}^2)\right]$$

или

$$a_1 = A_1 \,\mathrm{cs} i_2 - \frac{A_1}{\mu_1}\mathrm{cs} i_1 + \frac{a_0}{\mu_1};$$

но

$$\mathrm{cs} i_2 - \frac{\mathrm{cs} i_1}{\mu_1} = \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1},$$

слѣдовательно,

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} A_1.$$

Поступая подобнымъ образомъ, найдемъ формулы для b_1 и c_1.

И такъ, имѣемъ систему уравненій для опредѣленія a_1, b_1 и c_1:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mathrm{sn} i_2}{\mathrm{sn} i_1} a_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} A_1 \\ b_1 &= \frac{\mathrm{sn} i_2}{\mathrm{sn} i_1} b_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} B_1 \\ c_1 &= \frac{\mathrm{sn} i_2}{\mathrm{sn} i_1} c_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} C_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Такимъ образомъ, эти формулы *) даютъ возможность опредѣлить направленіе преломленнаго луча по данному падающему, если мы присоединимъ къ нимъ уравненіе (5), въ которомъ μ_1 должно считаться даннымъ, а i_1, A_1, B_1 и C_1 по тѣмъ-же даннымъ будутъ предварительно вычислены.

§ 5. Покажемъ теперь, какъ найти A_1, B_1, C_1 и i_1 по даннымъ a_0, b_0, c_0 и уравненію поверхности Σ_1.

*) Онѣ годятся и для случая отраженія, если сдѣлаемъ въ нихъ $i_2 = -i_1$, т. е., $\mu_1 = -1$.

Опредѣленіе всѣхъ этихъ количествъ можно выполнить слѣдующимъ путемъ.

Пусть

$$\omega_1(x\,,\ y\,,\ z)=0$$

будетъ уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ поверхности Σ_1 и

$$r_0$$

неизвѣстное пока разстояніе точки M_1 отъ S; тогда, выбравъ приличнымъ образомъ начало координатъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_0&=r_0a_0\\ y_1-y_0&=r_0b_0\\ z_1-z_0&=r_0c_0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1 должны удовлетворять уравненію поверхности Σ_1, поэтому имѣемъ:

$$\omega_1(x_0+r_0a_0\,,\ y_0+r_0b_0\,,\ z_0+r_0c_0)=0$$

или

$$\Phi_1(r_0)=0\,.$$

Рѣшимъ это уравненіе и возмемъ *наименьшій положительный корень* его; пусть это и будетъ r_0, тогда изъ равенствъ (c) найдемъ координаты точки M_1, т. е. количества

$$x_1,\ y_1,\ z_1.$$

Зная-же координаты точки M_1, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=P_1\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\\ B_1&=P_1\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}\\ C_1&=P_1\frac{\partial\omega_1}{\partial z_1} \end{aligned}\right\},\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

гдѣ P_1 опредѣляется равенствомъ

$$\frac{1}{P_1} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z_1}\right)^2},$$

а символы $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial z_1}$ обозначаютъ частныя производныя уравненія поверхности по координатамъ, въ которыя подставлены затѣмъ значенія x_1, y_1, z_1 вмѣсто перемѣнныхъ координатъ x, y, z.

Что касается двойнаго знака передъ корнемъ, то каждый разъ надо брать тотъ знакъ, при которомъ A_1, B_1, C_1 для внѣшняго направленія нормала будутъ положительны.

Такимъ образомъ, знаемъ A_1, B_1 и C_1, а затѣмъ по формулѣ (1) опредѣлимъ и уголъ i_1.

§ 6. Пусть теперь лучъ, преломленный на первой поверхности, падаетъ на вторую; примемъ его за падающій; направленіе его мы уже знаемъ по формуламъ (7).

И такъ, имѣемъ: падающій лучъ $M_1 M_2$ и преломленный $M_2 S'$ (черт. 1): косинусы направленія этого послѣдняго будутъ a_2, b_2, c_2. По формуламъ (7) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_3} a_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} A_2 \\ b_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_3} b_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} B_2 \\ c_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_3} c_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} C_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Эти равенства мы могли-бы получить непосредственно такимъ-же путемъ, какъ и формулы (7).

Дѣйствительно, сначала выразили-бы алгебраически тотъ фактъ, что направленія $M_1 M_2$, $M_2 S'$ и $M_2 N_2$ лежатъ въ одной плоскости; это дало-бы уравненія *):

$$\left.\begin{aligned} C_2 b_2 - B_2 c_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_3}(b_1 C_2 - c_1 B_2) \\ A_2 c_2 - C_2 a_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_3}(c_1 A_2 - a_1 C_2) \\ B_2 a_2 - A_2 b_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_3}(a_1 B_2 - b_1 A_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

---

*) Въ нихъ независимыхъ только два. (См. конецъ § 3).

Поступая затѣмъ совершенно такимъ-же образомъ, какъ и съ уравненіями (6), найдемъ систему (8).

Присоединяя къ уравненіямъ (8) еще слѣдующее

$$\frac{\operatorname{sn} i_3}{\operatorname{sn} i_4} = \mu_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

причемъ μ_2 — показатель преломленія при переходѣ свѣта изъ 2-й среды въ 3-ью, мы получимъ 4 уравненія съ 4-мя неизвѣстными a_2, b_2, c_2 и i_4; здѣсь, разумѣется, количества A_2, B_2, C_2 и i_3 опредѣляются предварительно по способу § 5, а именно будемъ имѣть формулы:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= P_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \\ B_2 &= P_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y_2} \\ C_2 &= P_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial z_2} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

въ которыхъ P_2 опредѣляется изъ равенства

$$\frac{1}{P_2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z_2}\right)^2},$$

а координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2 изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r_1 a_1 \\ y_2 - y_1 &= r_1 b_1 \\ z_2 - z_1 &= r_1 c_1 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

въ которыхъ

$$r_1 = M_1 M_2$$

опредѣляется уравненіемъ поверхности Σ_2:

$$\omega_2(x_2, y_2, z_2) = 0$$

или, по подстановкѣ значеній x_2, y_2, z_2 изъ уравненій (f), равенствомъ

$$\Phi_2(r_1) = 0.$$

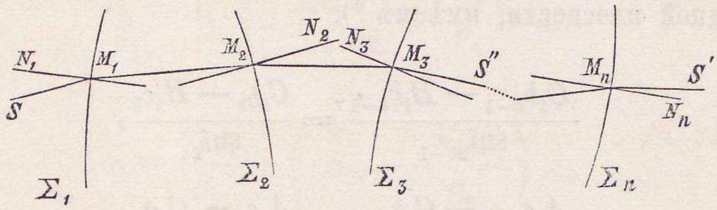
На счетъ того обстоятельства, какой корень надо брать, слѣдуетъ держаться правила, даннаго въ § 5 для корней уравненія $\Phi_1(r_0)=0$.

Уголъ i_3 опредѣлится по формулѣ (3).

§ 7. Подставимъ значенія a_1, b_1, c_1 изъ формулъ (7) въ формулы (8); тогда получимъ для a_2, b_2, c_2 выраженія въ функціи первоначальныхъ величинъ a_0, b_0, c_0, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
a_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} a_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} A_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} A_2 ,\\
b_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} b_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} B_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} B_2 ,\\
c_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} c_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} C_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} C_2 .
\end{aligned}\right\} \quad . \; . (11)$$

Если предположимъ, что лучъ M_2S' падаетъ на новую поверхность Σ_3 въ точкѣ M_3 (черт. 2), тогда можно прямо написать уравненія для опредѣленія вышедшаго луча. Дѣйствительно, пусть направленіе нор-



Черт. 2-й.

мала въ точкѣ M_3 опредѣляется косинусами A_3, B_3, C_3; углы паденія и преломленія на поверхности Σ_3 будутъ i_5 и i_6, а направленіе вышедшаго преломленнаго луча M_3S'' опредѣляется косинусами a_3, b_3, c_3; тогда на основаніи формулъ (11) можемъ написать

$$\left.\begin{aligned}
a_3 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} a_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} A_1 +\\
&\quad + \frac{\operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} A_2 + \frac{\operatorname{sn}(i_5 - i_6)}{\operatorname{sn} i_5} A_3\\
b_3 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} b_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} B_1 +\\
&\quad + \frac{\operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} B_2 + \frac{\operatorname{sn}(i_5 - i_6)}{\operatorname{sn} i_5} B_3\\
c_3 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} c_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} C_1 +\\
&\quad + \frac{\operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} C_2 + \frac{\operatorname{sn}(i_5 - i_6)}{\operatorname{sn} i_5} C_3
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . (12)$$

Какъ эти формулы, такъ и (11), показываютъ, что $a_2, \ldots a_3, \ldots$ суть линейныя функціи косинусовъ направленія падающаго луча и нормаловъ къ поверхностямъ раздѣла срединъ.

§ 8. Внимательное разсмотрѣніе предыдущихъ формулъ даетъ средство найти выраженія для количествъ, опредѣляющихъ направленіе луча, прошедшаго какую-нибудь k-ую поверхность раздѣла Σ_k.

Уголъ паденія луча на k-ую поверхность долженъ быть означенъ, согласно съ предыдущими обозначеніями, символомъ i_{2k-1}, а уголъ преломленія $-i_{2k}$; косинусы направленія нормала къ поверхности Σ_k будутъ A_k, B_k, C_k; тогда будемъ имѣть:

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} + C_k c_{k-1} = \operatorname{cs} i_{2k-1},$$

$$A_k a_k + B_k b_k + C_k c_k \quad = \operatorname{cs} i_{2k}.$$

Затѣмъ, такъ-какъ прямыя $(a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1})$, N_k и (a_k, b_k, c_k) лежатъ въ одной плоскости, имѣемъ *):

$$\frac{C_k b_{k-1} - B_k c_{k-1}}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} = \frac{C_k b_k - B_k c_k}{\operatorname{sn} i_{2k}},$$

$$\frac{A_k c_{k-1} - C_k a_{k-1}}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} = \frac{A_k c_k - C_k a_k}{\operatorname{sn} i_{2k}},$$

$$\frac{B_k a_{k-1} - A_k b_{k-1}}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} = \frac{B_k a_k - A_k b_k}{\operatorname{sn} i_{2k}}.$$

Уравненія второе и третье даютъ:

$$C_k a_k = A_k c_k - \frac{1}{\mu_k}(A_k c_{k-1} - C_k a_{k-1}),$$

$$B_k a_k = A_k b_k + \frac{1}{\mu_k}(B_k a_{k-1} - A_k b_{k-1}),$$

причемъ пользуемся равенствомъ

$$\frac{\operatorname{sn} i_{2k-1}}{\operatorname{sn} i_{2k}} = \mu_k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

если μ_k показатель преломленія на k-ой поверхности.

---

*) Здѣсь независимыхъ равенствъ, разумѣется, только два. (Ср. конецъ § 3).

Присоединяя къ предыдущимъ уравненіямъ тождество

$$A_k a_k = A_k a_k$$

и умножая первое изъ нихъ на C_k, второе на B_k, третье на A_k и складывая результаты, найдемъ:

$$a_k = A_k \operatorname{cs} i_{2k} + \frac{1}{\mu_k}[(B_k^2 a_{k-1} + C_k^2 a_{k-1}) - (A_k C_k c_{k-1} + A_k B_k b_{k-1})],$$

но

$$B_k^2 a_{k-1} + C_k^2 a_{k-1} = a_{k-1} - A_k^2 a_{k-1},$$

$$A_k C_k c_{k-1} + A_k B_k b_{k-1} = A_k(\operatorname{cs} i_{2k-1} - A_k a_{k-1}),$$

поэтому

$$a_k = A_k \operatorname{cs} i_{2k} + \frac{a_{k-1}}{\mu_k} - \frac{A_k}{\mu_k} \operatorname{cs} i_{2k-1}$$

или

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \left(\operatorname{cs} i_{2k} - \frac{\operatorname{cs} i_{2k-1}}{\mu_k}\right) A_k,$$

но по уравненію (13)

$$\operatorname{cs} i_{2k} - \frac{\operatorname{cs} i_{2k-1}}{\mu_k} = \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}},$$

слѣдовательно,

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} A_k.$$

Точно такъ-же найдемъ для b_k и c_k подобныя-же формулы, такъ что будемъ имѣть систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
a_k &= \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} A_k \\
b_k &= \frac{b_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} B_k \\
c_k &= \frac{c_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} C_k
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

Полагая въ этихъ формулахъ k равнымъ 1, 2, 3, мы получимъ предыдущія формулы, служащія для вычисленія направленій послѣдовательныхъ преломленныхъ лучей; точно такъ-же по этимъ формуламъ можемъ вычислить направленіе какого-нибудь k-го преломленнаго луча, зная направленіе предыдущаго.

§ 9. Къ формуламъ предыдущаго § надо присоединить еще другія, служащія для опредѣленія A_k, B_k, C_k и угловъ i *). Прежде всего имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= a_{k-1}\; r_{k-1} \\ y_k - y_{k-1} &= b_{k-1}\; r_{k-1} \\ z_k - z_{k-1} &= c_{k-1}\; r_{k-1} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

причемъ

$$r_{k-1} = M_{k-1} M_k .$$

Координаты x_k, y_k, z_k точки M_k должны удовлетворять уравненію поверхности Σ_k, а именно уравненію

$$\omega_k(x_k\, ,\, y_k\, ,\, z_k) = 0\, ,$$

которое по подстановкѣ значеній x_k, y_k, z_k обращается въ слѣдующее:

$$\omega_k(x_{k-1} + a_{k-1} r_{k-1}\, ,\, y_{k-1} + b_{k-1} r_{k-1}\, ,\, z_{k-1} + c_{k-1} r_{k-1}) = 0$$

или

$$\Phi_k(r_{k-1}) = 0\, .$$

Найдя отсюда r_{k-1}, изъ формулъ (g) опредѣлимъ x_k, y_k, z_k по координатамъ предыдущей точки M_{k-1}; затѣмъ вычисляемъ:

$$\frac{1}{P_k} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial z_k}\right)^2}$$

и окончательно находимъ

*) Въ случаѣ плоскости A_k, B_k, C_k суть данныя количества.

$$\left.\begin{aligned} A_k &= P_k \frac{\partial\omega_k}{\partial x_k} \\ B_k &= P_k \frac{\partial\omega_k}{\partial y_k} \\ C_k &= P_k \frac{\partial\omega_k}{\partial z_k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Уголъ i_{2k-1} опредѣлится по формулѣ

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} + C_k c_{k-1} = \operatorname{cs} i_{2k-1},$$

а уголъ i_{2k} по формулѣ

$$\frac{\operatorname{sn} i_{2k-1}}{\operatorname{sn} i_{2k}} = \mu_k .$$

§ 10. Теперь предположимъ, что лучъ проходитъ рядъ срединъ, числомъ n и выходитъ въ $(n+1)$-ую средину; всѣ эти средины отдѣлены одна отъ другой поверхностями Σ. Опредѣлимъ направленіе луча вышедшаго въ $(n+1)$-ую средину.

Положимъ на время для краткости письма

$$\frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} = R_k ;$$

тогда формулы (14) § 8 будутъ имѣть видъ:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + R_k A_k ,$$

$$b_k = \frac{b_{k-1}}{\mu_k} + R_k B_k ,$$

$$c_k = \frac{c_{k-1}}{\mu_k} + R_k C_k .$$

Полагая здѣсь $k-1$ вмѣсто k, затѣмъ $k-2$ вмѣсто $k-1$ и т. д., получимъ для количества a_k слѣдующій рядъ формулъ:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + R_k A_k$$

$$a_{k-1} = \frac{a_{k-2}}{\mu_{k-1}} + R_{k-1} A_{k-1},$$

$$a_{k-2} = \frac{a_{k-3}}{\mu_{k-2}} + R_{k-2} A_{k-2},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_2 = \frac{a_1}{\mu_2} + R_2 A_2,$$

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + R_1 A_1 .$$

Умножимъ 1-ое изъ этихъ уравненій на единицу, 2-ое на $\frac{1}{\mu_k}$, 3-ье на $\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1}}$, ... предпослѣднее на $\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_3}$ и послѣднее на $\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_2}$ и затѣмъ результаты сложимъ, тогда получится:

$$a_k = \frac{a_0}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 A_1}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_2} + \frac{R_2 A_2}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_3} + \ldots + \\ + \frac{R_{k-2} A_{k-2}}{\mu_k \mu_{k-1}} + \frac{R_{k-1} A_{k-1}}{\mu_k} + R_k A_k .$$

Подобныя-же формулы найдемъ для b_k и c_k. Полагая въ нихъ $k = n$, будемъ имѣть окончательныя формулы для опредѣленія косинусовъ направленія послѣдняго вышедшаго луча по прохожденіи имъ послѣдней n-ой поверхности. И такъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{a_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 A_1}{\mu_n \ldots \mu_2} + \frac{R_2 A_2}{\mu_n \ldots \mu_3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{R_{n-1} A_{n-1}}{\mu_n} + R_n A_n \\ b_n &= \frac{b_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 B_1}{\mu_n \ldots \mu_2} + \frac{R_2 B_2}{\mu_n \ldots \mu_3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{R_{n-1} B_{n-1}}{\mu_n} + R_n B_n \\ c_n &= \frac{c_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 C_1}{\mu_n \ldots \mu_2} + \frac{R_2 C_2}{\mu_n \ldots \mu_3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{R_{n-1} C_{n-1}}{\mu_n} + R_n C_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \ (15)$$

Этимъ формуламъ можно дать другой видъ.

Подставимъ вмѣсто всѣхъ μ и R ихъ значенія; тогда для a_n получимъ:

$$a_n = \frac{\mathrm{sn}i_2\,\mathrm{sn}i_4\ldots\mathrm{sn}i_{2n}}{\mathrm{sn}i_1\,\mathrm{sn}i_3\ldots\mathrm{sn}i_{2n-1}}\,a_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)\,\mathrm{sn}i_4\ldots\mathrm{sn}i_{2n}}{\mathrm{sn}i_1\,\mathrm{sn}i_3\ldots\mathrm{sn}i_{2n-1}}\,A_1 +$$

$$+ \frac{\mathrm{sn}(i_3 - i_4)\,\mathrm{sn}i_6\ldots\mathrm{sn}i_{2n}}{\mathrm{sn}i_3\,\mathrm{sn}i_5\ldots\mathrm{sn}i_{2n-1}}\,A_2 + \ldots + \frac{\mathrm{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})\,\mathrm{sn}i_{2k+2}\ldots\mathrm{sn}i_{2n}}{\mathrm{sn}i_{2k-1}\,\mathrm{sn}i_{2k+1}\ldots\mathrm{sn}i_{2n-1}}\,A_k + \ldots +$$

$$+ \frac{\mathrm{sn}(i_{2n-1} - i_{2n})}{\mathrm{sn}i_{2n-1}}\,A_n\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (A)$$

Для b_n и c_n получимъ подобныя формулы; стоитъ только вмѣсто a_0 и всѣхъ A подставить послѣдовательно b_0, c_0 и всѣ B и C.

§ 11. Прежде чѣмъ вычислять a_n, b_n, c_n по формуламъ (A) предыдущаго §, надо вычислить всѣ A, B, C и углы i. Вычисленіе угловъ A, B и C объяснено въ § 9, а для вычисленія угловъ i должны служить уравненія:

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} + C_k c_{k-1} = \mathrm{cs}i_{2k-1}\,,$$

$$\frac{\mathrm{sn}i_{2k-1}}{\mathrm{sn}i_{2k}} = \mu_k\,,$$

въ которыхъ k надо послѣдовательно полагать равнымъ $1, 2, 3, \ldots n$.

§ 12. Формулами предыдущихъ параграфовъ и рѣшается предложенный вопросъ. Повторимъ здѣсь вкратцѣ порядокъ вычисленій. Данными величинами при этихъ вычисленіяхъ должно считать: координаты x_0, y_0, z_0 свѣтящейся точки S, косинусы направленія падающаго луча a_0, b_0, c_0, уравненія всѣхъ n поверхностей, т. е. всѣ ω, затѣмъ показатели преломленія на всѣхъ поверхностяхъ, т. е. всѣ μ.

Прежде всего по уравненію первой преломляющей поверхности Σ_1 находимъ длину $SM_1 = r_0$ изъ уравненія (§ 5)

$$\Phi_1(r_0) = 0\,;$$

затѣмъ координаты точки M_1 и по этимъ послѣднимъ величины A_1, B_1, C_1. Зная A_1, B_1, C_1, вычислимъ уголъ i_1 по формулѣ (1) § 1 и уголъ i_2 по формулѣ (5) третьяго параграфа, и наконецъ величины a_1, b_1, c_1 по формуламъ (7) § 4.

Зная a_1, b_1, c_1, опредѣляемъ длину $M_1M_2 = r_1$ изъ уравненія (§ 6)

$$\Phi_2(r_1) = 0\,,$$

затѣмъ координаты точки M_2 и по этимъ послѣднимъ величины A_2, B_2, C_2; зная A_2, B_2, C_2, вычисляемъ уголъ i_3 по формулѣ (3) § 1 и уголъ i_4 по формулѣ

$$\frac{\operatorname{sn} i_3}{\operatorname{sn} i_4} = \mu_2,$$

и наконецъ величины a_2, b_2, c_2 по формуламъ (8) § 6 или по формуламъ (11) § 7, и т. д. Однимъ словомъ, сначала опредѣляемъ длину $M_{k-1}M_k = r_{k-1}$ изъ уравненія

$$\Phi_k(r_{k-1}) = 0\,,$$

затѣмъ координаты точки M_k и косинусы направленія нормала M_kN_k, углы i_{2k-1}, i_{2k} и послѣ всего количества a_k, b_k, c_k (§§ 8, 9 и 11).

Въ частныхъ случаяхъ вычисленія могутъ значительно упроститься.

§ 13. Пусть изъ свѣтящейся точки S выходятъ два луча; по прохожденіи ими всѣхъ n срединъ, вообще говоря, получатся, два вышедшіе луча, направленія которыхъ опредѣляются величинами a_n, b_n, c_n для одного и a'_n, b'_n, c'_n для другого. Эти лучи пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ; ея положеніе можетъ быть найдено, какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ извѣстнаго направленія. Уравненія этихъ прямыхъ можно написать въ видѣ:

$$\frac{x - x_n}{a_n} = \frac{y - y_n}{b_n} = \frac{z - z_n}{c_n}$$

и

$$\frac{x - x'_n}{a'_n} = \frac{y - y'_n}{b'_n} = \frac{z - z'_n}{c'_n}\,.$$

Здѣсь x, y, z и суть координаты искомой точки, называемой *фокусомъ лучей* или *точкой схожденія лучей*. Ближайшее ея опредѣленіе выходитъ изъ предѣловъ, намѣченныхъ нами для настоящей статьи; поэтому ограничимся сдѣланнымъ замѣчаніемъ.

§ 14. Примѣнимъ найденныя формулы къ плоской системѣ. Подъ *плоской системой* мы будемъ подразумѣвать тотъ случай, когда всѣ послѣдовательные лучи лежатъ въ одной плоскости. Для такой системы удобно принять за одну изъ координатныхъ плоскостей, напримѣръ за плоскость xy, плоскость, въ которой лежатъ всѣ лучи; въ этомъ случаѣ надо будетъ положить равными нулю всѣ количества C и c съ разными указателями. Въ такомъ случаѣ можно легко получить для угловъ A, B, a и b нѣкоторыя общія соотношенія. Установимъ эти соотношенія. Для k-ой поверхности имѣемъ (§ 8):

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} = \mathrm{cs} i_{2k-1} \quad \ldots \ldots \ldots (k)$$

Отсюда можно получить формулу для $\mathrm{sn} i_{2k-1}$; а именно, сначала напишемъ:

$$1 - (A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1})^2 = \mathrm{sn}^2 i_{2k-1},$$

а затѣмъ замѣнимъ единицу произведеніемъ

$$(A^2{}_k + B^2{}_k)(a^2{}_{k-1} + b^2{}_{k-1}),$$

тождественно равнымъ единицѣ. По раскрытіи скобокъ и приведеніи, получимъ:

$$(A_k b_{k-1} - B_k a_{k-1})^2 = \mathrm{sn}^2 i_{2k-1}$$

отсюда

$$A_k b_{k-1} - B_k a_{k-1} = \pm \mathrm{sn} i_{2k-1} \quad \ldots \ldots \ldots (l)$$

Здѣсь надо брать знакъ $+$, если $A_k b_{k-1} > B_k a_{k-1}$ и знакъ $-$, если $A_k b_{k-1} < B_k a_{k-1}$, такъ какъ $\mathrm{sn} i_{2k-1}$ по самой своей сущности количество положительное.

Изъ формулъ (k) и (l) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \mathrm{cs}(u_{k-1} \mp i_{2k-1}) \\ B_k &= \mathrm{sn}(u_{k-1} \mp i_{2k-1}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (m)$$

гдѣ u_{k-1} есть уголъ между r_{k-1} и осью x-овъ.

Подставляя эти значенія A_k и B_k въ формулы:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\mathrm{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} A_k,$$

$$b_k = \frac{b_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\mathrm{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} B_k,$$

получимъ по преобразованіи:

$$a_k = \mathrm{cs}(u_{k-1} \mp i_{2k-1} \pm i_{2k}),$$

$$b_k = \mathrm{sn}(u_{k-1} \mp i_{2k-1} \pm i_{2k}),$$

т. е.

$$u_k = u_{k-1} \mp i_{2k-1} \pm i_{2k} \quad \ldots \ldots \quad (n)$$

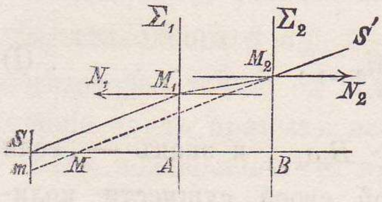
Знаки, вообще, опредѣляются предыдущими условіями, въ нѣкоторыхъ же частныхъ случаяхъ значеніемъ количества r_k.

Полагая въ этой формулѣ k равнымъ $1, 2, 3, \ldots n$, опредѣлимъ послѣдовательно всѣ углы u_k преломленныхъ лучей съ осью x-овъ.

II.

Приложимъ теперь развитую нами теорію къ частнымъ примѣрамъ.

§ 15. *Плоско-параллельная пластинка.*



Черт. 3-й.

Пусть мы имѣемъ средину, ограниченную двумя параллельными плоскостями Σ_1 и Σ_2 (черт. 3); съ обѣихъ сторонъ этой средины находится какая-нибудь другая.

Имѣемъ уравненія поверхностей:

$$\omega_1 = A_1x + B_1y + C_1z - p_1 = 0,$$

$$\omega_2 = A_2x + B_2y + C_2z - p_2 = 0,$$

причемъ, значитъ, A_1, A_2, ... будутъ данными количествами.

Такъ какъ плоскости Σ_1 и Σ_2 параллельны, то

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2 \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

Если точку S примемъ за начало координатъ и обозначимъ толщину пластинки черезъ t, то

$$p_2 = p_1 + t \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

Вслѣдствіе условій (a) уравненія (2) и (3) § 1 даютъ

$$i_3 = i_2 \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Такъ какъ по условію

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu_1},$$

то найдемъ, что

$$i_2 = i_1 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Далѣе по уравненіямъ (7) § 4 имѣемъ

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1} A_1 ,$$

$$b_1 = \frac{b_0}{\mu_1} + \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1} B_1 ,$$

$$c_1 = \frac{c_0}{\mu_1} + \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1} C_1 .$$

Въ этихъ уравненіяхъ $\mathrm{sn} i_2$ и $\mathrm{cs} i_2$ уже исключены при помощи равенства

$$\mathrm{sn} i_2 = \frac{\mathrm{sn} i_1}{\mu_1} .$$

Затѣмъ по формуламъ (8) § 6 получимъ:

$$a_2 = a_0 ,$$

$$b_2 = b_0 ,$$

$$c_2 = c_0 .$$

Эти равенства показываютъ, что *вышедшій изъ пластинки лучъ параллеленъ падающему* и идетъ въ томъ-же направленіи.

Для опредѣленія r_0 и координатъ x_1, y_1, z_1 имѣемъ уравненія:

$$x_1 = r_0 a_0 , \quad y_1 = r_0 b_0 , \quad z_1 = r_0 c_0$$

и

$$\omega_1 = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 - p_1 = 0 .$$

Уравненіе

$$\Phi_1(r_0) = 0$$

дастъ

$$r_0 = \frac{p_1}{\mathrm{cs} i_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

И такъ,

$$SM_1 = \frac{p_1}{\mathrm{cs} i_1} \, .$$

Теперь, слѣдовательно,

$$x_1 = \frac{a_0 p_1}{\mathrm{cs} i_1}\,, \qquad y_1 = \frac{b_0 p_1}{\mathrm{cs} i_1}\,, \qquad z_1 = \frac{c_0 p_1}{\mathrm{cs} i_1}\,.$$

Далѣе имѣемъ:

$$x_2 = x_1 + a_1 r_1\,, \quad y_2 = y_1 + b_1 r_1\,, \quad z_2 = z_1 + c_1 r_1$$

и уравненіе

$$\omega_2 = A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1 z_2 - p_1 - t_1 = 0\,.$$

Уравненіе

$$\Phi_2(r_1) = 0$$

дастъ

$$r_1 = \frac{t}{A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1}\,,$$

но

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = \mathrm{cs} i_2\,,$$

а

$$\mathrm{cs} i_2 = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}{\mu_1}\,,$$

слѣдовательно

$$r_1 = \frac{\mu_1 t}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}\,, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g)$$

а затѣмъ получимъ:

$$x_2 = Ra_0 + R_1 A_1\,,$$

$$y_2 = Rb_0 + R_1 B_1\,,$$

$$z_2 = Rc_0 + R_1 C_1\,,$$

гдѣ

$$R = \frac{p_1\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} + t\,\mathrm{cs}\,i_1}{\mathrm{cs}\,i_1\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}\,, \qquad R_1 = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs}\,i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}\,t\,.$$

Значенія a_2, b_2, c_2 уже даны выше.

Найдемъ теперь положеніе точки M пересѣченія вышедшаго изъ пластинки луча съ прямой SA, перпендикулярной къ пластинкѣ.

Уравненія SM будутъ:

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{B_1} = \frac{z}{C_1}\,,$$

уравненія $M_2 M$:

$$\frac{x - x_2}{a_0} = \frac{y - y_2}{b_0} = \frac{z - z_2}{c_0}\,.$$

Изъ первыхъ уравненій находимъ:

$$x = \frac{A_1}{C_1}\,z\,, \qquad y = \frac{B_1}{C_1}\,z\,;$$

подставляя эти значенія во вторыя уравненія, найдемъ:

$$z = \frac{C_1(c_0 x_2 - a_0 z_2)}{A_1 c_0 - C_1 a_0}\,, \qquad z = \frac{C_1(c_0 y_2 - b_0 z_2)}{c_0 B_1 - b_0 C_1}\,.$$

Сравнивая эти значенія z, получимъ уравненіе, которое можно представить въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ a_0\,, & b_0\,, & c_0 \\ x_2\,, & y_2\,, & z_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Это уравненіе показываетъ, что точка M_2 $(x_2\,, y_2\,, z_2)$ лежитъ въ плоскости прямыхъ $(a_0\,, b_0\,, c_0)$ и $(A_1,\ B_1,\ C_1)$.

Подставимъ теперь второе значеніе z-а въ x, а первое въ y; найдемъ:

$$x = \frac{A_1(c_0 y_2 - b_0 z_2)}{B_1 c_0 - C_1 b_0},$$

$$y = \frac{B_1(c_0 x_2 - a_0 z_2)}{A_1 c_0 - C_1 a_0}.$$

Для вычисленія x, y и z въ окончательной формѣ сначала найдемъ по подстановкѣ значеній x_2, y_2 и z_2:

$$c_0 y_2 - b_0 z_2 = (B_1 c_0 - C_1 b_0) R_1,$$
$$c_0 x_2 - a_0 z_2 = (A_1 c_0 - C_1 a_0) R_1,$$

и затѣмъ

$$x = A_1 R_1, \quad y = B_1 R_1, \quad z = C_1 R_1$$

или

$$x = K r_1 A_1, \quad y = K r_1 B_1, \quad z = K r_1 C_1,$$

гдѣ

$$K = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \operatorname{sn}^2 i_1} - \operatorname{cs} i_1}{\mu_1}.$$

Не трудно видѣть геометрическое значеніе K; это есть $SM : r_1$, т. е.

$$K = \frac{SM}{r_1}$$

или, что все равно,

$$SM = K r_1.$$

Далѣе можемъ найти:

$$MA = p_1 - K r_1$$

или, по подстановкѣ значеній K и r_1,

$$SM = t - \frac{t \operatorname{cs} i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \operatorname{sn}^2 i_1}},$$

$$AM = p_1 - t + \frac{t \operatorname{cs} i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \operatorname{sn}^2 i_1}}.$$

Подобнымъ образомъ мы нашли-бы:

$$MB = \frac{t\,\mathrm{cs}\,i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}} + p_1 .$$

И такъ, получаемъ слѣдующее предложеніе:

Если станемъ разсматривать точку S черезъ плоско-параллельную пластинку, то эта точка намъ покажется находящейся въ M, перемѣщенной на длину

$$t - \frac{t\,\mathrm{cs}\,i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}} .$$

§ 16. Если уголъ i_1 незначителенъ, то можно получить приближенныя формулы, которыя иногда употребляются въ физикѣ.

Имѣемъ тогда:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\mathrm{sn}^2 i_1}{2\mu_1} ,$$

$$\mathrm{cs}\,i_1 = 1 - \frac{\mathrm{sn}^2 i_1}{2} ,$$

поэтому

$$MB = p_1 + \frac{t}{\mu_1} - \frac{t(\mu_1{}^2 - 1)\,\mathrm{sn}^2 i_1}{2\mu_1{}^3} .$$

Подобную формулу можно найти, напримѣръ, у Поттера въ его книгѣ: An elementary treatise on optics, part II, p. 60.

Членъ

$$\frac{t(\mu_1{}^2 - 1)\,\mathrm{sn}^2 i_1}{2\mu_1{}^3}$$

есть величина такъ называемой *продольной аберраціи* пластинки.

Если пренебречь аберраціей, то точка S покажется приближенной къ пластинкѣ на величину

$$SM = t - \frac{t}{\mu_1} .$$

Если мы опредѣлимъ (напримѣръ микроскопомъ) величину SM, которую назовемъ d, то тогда

$$t - \frac{t}{\mu_1} = d,$$

откуда

$$\mu_1 = \frac{t}{t - d}.$$

На этой формулѣ основанъ старинный способъ опредѣленія показателя преломленія пластинки, предложенный де-Шонемъ (de Chaulnes).

Если наблюдать точку S сбоку, то она покажется перемѣщенной на величину $Sm = h$, и для h имѣемъ формулу

$$h = SM \operatorname{tg} i_1 = t \operatorname{tg} i - \frac{t \operatorname{sn} i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \operatorname{sn}^2 i_1}}.$$

При маломъ i_1 можно взять

$$h = \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1} t \operatorname{sn} i_1.$$

§ 17. *Цилиндрическія стекла.* Возьмемъ еще, какъ примѣръ, преломленіе въ цилиндрическомъ стеклѣ. Разсмотримъ ходъ лучей въ плоскости, проходящей черезъ свѣтящуюся точку и перпендикулярную къ оси цилиндра.

Здѣсь поверхность Σ_1 есть передняя поверхность цилиндра, а Σ_2 задняя (по отношенію къ свѣтящейся точкѣ).

Обозначимъ разстояніе свѣтящейся точки отъ центра сѣченія цилиндра буквой ∂, а радіусъ сѣченія буквой ϱ; тогда уравненія поверхностей Σ_1 и Σ_2 будутъ

$$\omega_1 = (x_1 - \partial)^2 + y_1{}^2 - \varrho^2 = 0$$

$$\omega_2 = (x_2 - \partial)^2 + y_2{}^2 - \varrho^2 = 0.$$

Уравненіе $\Phi_1(r_0) = 0$ здѣсь будетъ

$$r_0{}^2 - 2a_0 \partial r_0 + \partial^2 - \varrho^2 = 0,$$

откуда

$$r_0 = a_0 \partial - \sqrt{\varrho^2 - b_0{}^2 \partial^2}$$

или

$$r_0 = a_0 \partial - \varrho \operatorname{cs} i_1,$$

такъ какъ

$$\operatorname{cs} i_1 = A_1 a_0 + B_1 b_0 \,,$$

а величины A_1 и B_1 опредѣляются по формуламъ,

$$A_1 = -\frac{x_1 - \partial}{\varrho}, \quad B_1 = -\frac{y_1}{\varrho}\,;$$

поэтому

$$\operatorname{cs} i_1 = -\frac{r_0 - a_0 \partial}{\varrho}.$$

Отсюда

$$\operatorname{sn} i_1 = \frac{b_0 \partial}{\varrho}.$$

Для опредѣленія r_1 получимъ уравненіе

$$r_1{}^2 + 2r_1[a_1(x_1 - \partial) + b_1 y_1] = 0\,;$$

слѣдовательно

$$r_1 = 2\varrho \operatorname{cs} i_2 \,,$$

ибо

$$\operatorname{cs} i_2 = a_1 A_1 + b_1 B_1 \,.$$

Вычислимъ теперь i_3. Такъ какъ

$$A_1 = \frac{x_2 - \partial}{\varrho}, \quad B_2 = \frac{y_2}{\varrho}\,,$$

и кромѣ того

$$x_2 = a_0 r_0 + a_1 r_1 \,, \quad y_2 = b_0 r_0 + b_1 r_1 \,,$$

то

$$\operatorname{cs} i_3 = A_2 a_1 + B_2 b_1 = \frac{(x_2 - \partial)\, a_1 + y_2 b_1}{\varrho}\,,$$

будетъ равно

$$\operatorname{cs} i_3 = \frac{(x_1 - \partial)\, a_1 + y_1 b_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\varrho}$$

или окончательно

$$\mathrm{cs}i_3 = \frac{r_1}{2\varrho},$$

а сравнивая съ значеніемъ r_1, найдемъ:

$$i_3 = i_2 .$$

Затѣмъ изъ формулъ:

$$\frac{\mathrm{sn}i_3}{\mathrm{sn}i_4} = \frac{1}{\mu}$$

и

$$\frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2} = \mu ,$$

найдемъ

$$i_4 = i_1 .$$

Замѣтимъ здѣсь одно соотношеніе. Вычисляя $\mathrm{cs}i_3$ при помощи a_1 и b_1, находимъ по сравненіи съ полученнымъ выше:

$$\varrho\,\mathrm{sn}i_1 = \partial\,\mathrm{sn}u_0 .$$

Найдемъ теперь координаты x_2 и y_2. Получимъ

$$x_2 = \frac{a_0\partial}{\mathrm{sn}i_1}\mathrm{sn}(i_1 - u_0) + 2a_1\varrho\mathrm{cs}i_2 ,$$

$$y_2 = \frac{b_0\partial}{\mathrm{sn}i_1}\mathrm{sn}(i_1 - u_0) + 2b_1\varrho\mathrm{cs}i_2 .$$

Что касается A_2 и B_2, то онѣ найдутся изъ формулъ:

$$A_2 = \mathrm{cs}(i_2 + u_1) ,$$

$$B_2 = \mathrm{sn}(i_2 + u_1) .$$

Найдемъ точку пересѣченія вышедшаго луча съ прямой SO (O есть центръ цилиндра). Принимая для простоты эту прямую за ось x-овъ, получимъ для M_2S' уравненіе:

$$\frac{x - x_2}{a_2} = -\frac{y_2}{b_2} ,$$

откуда

$$x = x_2 - \frac{a_2}{b_2} y_2 .$$

Зная же, что

$$a_2 = \mu \left(a_1 - \frac{\operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1} \operatorname{cs}(u_1 + i_2) \right),$$

$$b_2 = \mu \left(b_1 - \frac{\operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1} \operatorname{sn}(u_1 + i_2) \right),$$

найдемъ:

$$x = \partial + \frac{2\varrho \operatorname{sn}^2 i_1}{\operatorname{cs}(u_0 - 2i_1 + i_2) - \operatorname{cs}(u_1 - i_1 + 2i_2)} .$$

§ 18. Разсмотримъ преломленіе въ стеклѣ, образованномъ двумя концентрическими круговыми цилиндрами.

И здѣсь разсмотримъ только случай, когда лучи лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ общей оси цилиндровъ.

Примемъ начало координатъ въ свѣтящейся точкѣ и назовемъ разстояніе ея отъ центра сѣченія буквой ∂, а радіусы цилиндровъ ϱ_1 и ϱ_2. Тогда уравненія поверхностей Σ будутъ:

$$\omega_1 = (\partial - x_1)^2 + y_1{}^2 - \varrho_1{}^2 = 0 ,$$

$$\omega_2 = (\partial - x_2)^2 + y_2{}^2 - \varrho_2{}^2 = 0 ,$$

$$\omega_3 = (x_3 - \partial)^2 + y_3{}^2 - \varrho_2{}^2 = 0 ,$$

$$\omega_4 = (x_4 - \partial)^2 + y_4{}^2 - \varrho_1{}^2 = 0 .$$

Косинусы направленія нормаловъ будутъ имѣть сначала видъ:

$$A_1 = -\frac{x_1 - \partial}{\varrho_1}, \quad A_2 = -\frac{x_2 - \partial}{\varrho_2}, \quad A_3 = \frac{x_3 - \partial}{\varrho_2}, \quad A_4 = \frac{x_4 - \partial}{\varrho_1},$$

$$B_1 = -\frac{y_1}{\varrho_1}, \quad B_2 = -\frac{y_2}{\varrho_2}, \quad B_3 = \frac{y_3}{\varrho_2}; \quad B_4 = \frac{y_4}{\varrho_1} .$$

Для опредѣленія r_0 имѣемъ уравненіе

$$r_0{}^2 - 2a_0 \partial r_0 + \partial^2 - \varrho_1{}^2 = 0 .$$

Отсюда

$$r_0 = a_0 \partial - \sqrt{\varrho_1{}^2 - b_0{}^2 \partial^2}\,.$$

Далѣе найдемъ по $\mathrm{cs} i_1$:

$$\mathrm{sn} i_1 = \frac{b_0 \partial}{\varrho_1} \; ^{*}).$$

Подставляя значеніе $b_0 \partial$ изъ этой формулы въ формулу для r_0, получимъ:

$$r_0 = \partial \,\mathrm{cs} u_0 - \varrho_1 \mathrm{cs} i_1\,.$$

Теперь, зная r_0, можно найти A_1 и B_1. Впрочемъ ихъ можно опредѣлить по формуламъ § 14, а именно получимъ:

$$A_1 = \mathrm{cs}(i_1 - u_0) \qquad \text{и} \qquad B_1 = -\,\mathrm{sn}(i_1 - u_0)\,.$$

Поэтому

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} \mathrm{cs}(i_1 - u_0) = \mathrm{cs}(u_0 - i_1 + i_2)\,,$$

$$b_1 = \frac{b_0}{\mu_1} - \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} \mathrm{sn}(i_1 - u_0) = \mathrm{sn}(u_0 - i_1 + i_2)\,.$$

Слѣдовательно

$$u_1 = u_0 - i_1 + i_2\,.$$

Тоже получимъ и по формулѣ (n) § 14.

Для координатъ точки M_1 найдемъ формулы:

$$x_1 = \partial - \varrho_1 \mathrm{cs}(i_1 - u_0)\,,$$

$$y_1 = \varrho_1 \mathrm{sn}(i_1 - u_0)\,.$$

Опредѣлимъ теперь количества, относящіяся до второй поверхности. Уравненіе для r_1 будетъ:

$$r_1{}^2 - 2\left[a_1(\partial - x_1) - b_1 y_1\right] r_1 + \varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2 = 0\,.$$

Отсюда, по преобразованіи, получимъ:

$$r_1 = \varrho_1 \mathrm{cs} i_2 - \sqrt{\varrho_2{}^2 - \varrho_1{}^2 \mathrm{sn}^2 i_2}\,.$$

*) Лучъ долженъ быть пущенъ подъ такимъ угломъ къ оси x-овъ, чтобы $b_0 \partial < \varrho_1$.

Затѣмъ опредѣлимъ

$$\mathrm{cs}i_3 = \sqrt{1 - \frac{\varrho_1{}^2 \mathrm{sn}^2 i_2}{\varrho_2{}^2}}.$$

Отсюда найдемъ

$$\mathrm{sn}i_3 = \frac{\varrho_1 \mathrm{sn}i_2}{\varrho_2};$$

поэтому для r_1 можно дать формулу

$$r_1 = \varrho_1 \mathrm{cs}i_2 - \varrho_2 \mathrm{cs}i_3.$$

Для A_2 и B_2 найдемъ формулы:

$$A_2 = \quad \mathrm{cs}(i_3 - u_1) = \quad \mathrm{cs}(i_3 - i_2 + i_1 - u_0),$$
$$B_2 = -\mathrm{sn}(i_3 - u_1) = -\mathrm{sn}(i_3 - i_2 + i_1 - u_0).$$

Затѣмъ по формуламъ для a_2 и b_2 получимъ

$$u_2 = u_0 - i_1 + i_2 - i_3 + i_4.$$

Для опредѣленія r_2 получимъ уравненіе

$$r_2{}^2 + 2r_2\left[(x_2 - \partial)\, a_2 + b_2 y_2\right] = 0,$$

откуда

$$r_2 = -2\left[a_2(x_2 - \partial) + b_2 y_2\right]$$

или окончательно

$$r_2 = 2\varrho_2 \,\mathrm{cs}i_4.$$

Опредѣляя затѣмъ $\mathrm{cs}i_5$, найдемъ

$$\mathrm{cs}i_5 = \frac{r_2}{2\varrho_2};$$

слѣдовательно,

$$i_4 = i_5.$$

По закону преломленія имѣемъ:

$$\frac{\mathrm{sn}i_5}{\mathrm{sn}i_6} = \frac{\mathrm{sn}i_4}{\mathrm{sn}i_6} = \frac{\mathrm{sn}i_4}{\mathrm{sn}i_3};$$

поэтому

$$i_3 = i_6 .$$

Для направленія луча M_3M_4 найдемъ:

$$u_3 = u_0 - i_1 + i_2 - 3i_3 + 3i_4 .$$

Для преломленія на послѣдней поверхности получимъ

$$r_3{}^2 + 2[(x_3 - \partial)\, a_3 + b_3 y_3]\, r_3 + \varrho_2{}^2 - \varrho_1{}^2 = 0 ,$$

откуда

$$r_3 = \varrho_1 \mathrm{cs} i_2 - \varrho_2 \mathrm{cs} i_3 ,$$

т. е.

$$r_3 = r_1 .$$

Наконецъ найдемъ:

$$i_7 = i_2$$

и

$$i_8 = i_1 .$$

Всѣ эти формулы даютъ возможность прослѣдить ходъ луча внутри срединъ, ограниченныхъ двумя цилиндрическими поверхностями.

Этотъ случай можно осуществить, пропуская свѣтовой лучъ черезъ стеклянный цилиндрическій сосудъ, наполненный какой-нибудь прозрачной жидкостью; тогда наружная поверхность сосуда будетъ первымъ цилиндромъ нашего примѣра, а внутренняя поверхность—вторымъ. Если толщина стѣнокъ сосуда, т. е. $\varrho_1 - \varrho_2$, мала, то можно получить приближенныя формулы, удобныя для практическихъ приложеній.

Въ заключеніе замѣтимъ, что имѣя уже путь, можно получить всѣ предыдущіе выводы геометрически, пользуясь формулами тригонометріи.

§ 19. Въ предыдущихъ параграфахъ (§§ 15—18) мы желали только показать приложимость общихъ формулъ и пріемовъ, развитыхъ нами въ первомъ отдѣлѣ настоящей статьи, и дѣйствительно убѣдились самымъ дѣломъ въ возможности строгаго вычисленія направленія луча, прошедшаго рядъ прозрачныхъ срединъ.

Эти точныя формулы, разумѣется, въ каждомъ частномъ случаѣ могутъ быть превращены въ приближенныя подъ тѣми или другими требованіями практики.

16 Октября 1887 г.

О функціяхъ подобныхъ функціи гамма.

В. П. Алексѣевскаго.

1. Первая задача, рѣшенію которой посвящено настоящее изслѣдованіе, состоитъ въ изученіи свойствъ функціи $G(x)$, удовлетворяющей уравненію:

$$G(x+1) = \Gamma(x)\, G(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

при условіи

$$G(1) = 1 .$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$G(2) = 1 , \quad G(3) = 1 , \quad G(4) = 2 , \quad G(5) = 12 ,$$

и, вообще, называя цѣлое положительное число буквою n, имѣемъ:

$$G(n+1) = \Gamma(1)\, \Gamma(2) \ldots \Gamma(n) = 1^{n-1} . \, 2^{n-2} \ldots (n-1) .$$

Опредѣлимъ теперь непрерывную функцію перемѣннаго x, удовлетворяющую уравненію (1). Взявъ логариѳмы обѣихъ частей этого уравненія, сведемъ вопросъ на интегрированіе разностнаго уравненія:

$$\triangle \log G(x) = \log \Gamma(x) .$$

Пусть $x > 0$, тогда, какъ извѣстно,

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u} \left\{ (x-1) - \frac{1 - e^{-(x-1)u}}{1 - e^{-u}} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

а потому, взявъ конечный интегралъ отъ этого выраженія въ предѣлахъ отъ 1 до x, получимъ:

$$\log G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{1-e^{-u}} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}. \quad . \quad . \quad (3)$$

Этотъ интегралъ представляетъ частное, но главное, рѣшеніе задачи; для полученія общаго интеграла разностнаго уравненія остается къ найденному рѣшенію добавить логариѳмъ произвольной періодической функціи самаго общаго вида съ періодомъ равнымъ единицѣ. Во всемъ послѣдующемъ мы будемъ имѣть въ виду исключительно это частное рѣшеніе.

Возникаетъ вопросъ: при какихъ значеніяхъ перемѣннаго x правая часть равенства (3) представляетъ опредѣленную функцію? Ясно, что это возможно, только когда $x > 0$.

Далѣе, извѣстно, что интегралъ (2), выражающій $\log\Gamma(x)$, остается конечнымъ при всякихъ положительныхъ значеніяхъ перемѣннаго x. Поэтому, основываясь на равенствѣ

$$\log G(x) = \log G(x+1) - \log\Gamma(x),$$

заключаемъ, что $\log G(x)$ имѣетъ опредѣленное значеніе, когда $\log G(x+1)$ остается конечнымъ; слѣдовательно, необходимо только убѣдиться въ конечности интеграла (3) когда $x-1>0$.

Полагая $e^{-u} = 1-\xi$, имѣемъ:

$$\log G(x) = -\int_0^1 \frac{d\xi}{\log(1-\xi)}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{\xi} + \frac{1-(1-\xi)^{x-1}}{\xi^2}\right\}.$$

Отсюда же не трудно усмотрѣть, что подъинтегральная функція остается конечной не только внутри предѣловъ, но и при нихъ самихъ. Замѣтивъ, наконецъ, что

$$\frac{1-(1-\xi)^{x-1}}{\xi^2} - \frac{x-1}{\xi} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3\,!}\,\xi(1-\theta\xi)^{x-4},$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1,$$

получаемъ:

$$\log G(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3\,!}\,\vartheta^{x-4}\int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\log(1-\xi)}.$$

Полагая здѣсь вновь

$$1 - \xi = e^{-u},$$

преобразуемъ послѣдній интегралъ въ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2u} - e^{-u}}{u} du = -\log 2\,;$$

слѣдовательно,

$$\log G(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3\,!} \vartheta^{x-4} \log 2\,.$$

И такъ, въ конечности интеграла (3) не можетъ быть сомнѣнія.

2. Формулой (3) легко воспользоваться для вывода безконечнаго произведенія, выражающаго $G(x)$.

Умножая всѣ члены подъинтегральной функціи (3) на

$$1 - e^{-un} + e^{-un},$$

можно написать, предполагая, что n цѣлое *положительное* число,

$$\log G(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{u} (1 - e^{-un}) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{u} \left\{ -(x-1) \frac{1 - e^{-un}}{1 - e^{-u}} + \frac{1 - e^{-un}}{1 - e^{-u}} \cdot \frac{1 - e^{-(x-1)u}}{1 - e^{-u}} \right\} +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-un} f(u, x)\, du\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

гдѣ $f(u, x)$ означаетъ подъинтегральную функцію формулы (3) § 1.

Первый членъ, входящій въ правую часть, извѣстенъ; онъ равенъ

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2} \log(n+1)\,.$$

Второй членъ, по прибавленіи въ скобкахъ

$$n(x-1) - n(x-1) = 0\,,$$

распадается на два интеграла такимъ образомъ:

$$(x-1)\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{n-\frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-n(x-1)+\frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\};$$

изъ нихъ первый, по формулѣ (2) § 1, выражаетъ

$$(x-1)\log\Gamma(n+1),$$

второй же можетъ быть легко вычисленъ. Означивъ этотъ интегралъ чрезъ y и замѣтивъ, что

$$\frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-ku},$$

получимъ:

$$y=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-(x-1)+e^{-ku}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Извѣстно, что

$$\log\Gamma(1+k)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{k-\frac{1-e^{-ku}}{1-e^{-u}}\right\}$$

и

$$\log\Gamma(x+k)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{x+k-1-\frac{1-e^{-(x+k-1)u}}{1-e^{-u}}\right\};$$

слѣдовательно, сдѣлавъ вычитаніе, найдемъ:

$$\log\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)}=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-(x-1)+e^{-ku}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\},$$

а потому

$$y=\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)}.$$

Остается опредѣлить послѣдній интегралъ формулы (4). Полагая

$$e^{-u}=v,$$

получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-un} f(u,x)du = \int_0^1 \frac{v^n dv}{\log\frac{1}{v}}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{1-v} + \frac{1-v^{x-1}}{(1-v)^2}\right\},$$

откуда

$$\int_0^\infty e^{-un} f(u\,,x)\,du = M\int_0^1 v^n\,dv = \frac{M}{n+1}.$$

И такъ,

$$\log G(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}\log(n+1) + (x-1)\log\Gamma(n+1) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)} + \frac{M}{n+1}.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, находимъ, что, при возрастаніи n до ∞,

$$G(x) = \lim\left\{(n+1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}}\,[\Gamma(n+1)]^{x-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)}\right\}.$$

Результатъ вполнѣ аналогичный съ извѣстнымъ произведеніемъ, выражающимъ $\Gamma(x)$, т. е.

$$\Gamma(x) = \lim\left\{(n+1)^{x-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+k}{x+k}\right\}.$$

3. Функціи $G(x)$ и $\Gamma(x)$ связаны между собой дифференціальнымъ уравненіемъ. Полагая въ формулѣ (3) § 1

$$e^{-u} = v$$

и измѣнивъ x въ $x+1$, получимъ:

$$\log G(x+1) = -\int_0^1 \frac{dv}{\log v}\left\{\frac{x(x-1)}{2} - \frac{x}{1-v} + \frac{1-v^x}{(1-v)^2}\right\}.$$

Обозначивъ

$$\frac{d}{dx}\log G(x+1) \text{ чрезъ } \mathcal{G}(1+x),$$

посредствомъ дифференцированія найдемъ:

$$\mathcal{G}(1+x) = -\int_0^1 dv\left\{\left(\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{1-v}\right)\frac{1}{\log v}+\frac{v^x}{(1-v)^2}\right\},$$

откуда

$$\mathcal{G}(1+x)-\mathcal{G}(1)=\int_0^1 dv\left\{\frac{v^x-1}{(1-v)^2}-\frac{x}{\log v}\right\}.$$

Припоминая, что

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\psi(x)=-\int_0^1 dv\left\{\frac{1}{\log v}+\frac{v^{x-1}}{1-v}\right\},$$

легко замѣтить, что можно исключить $\log v$ изъ обоихъ интеграловъ, такъ что

$$\mathcal{G}(1+x)-\mathcal{G}(1)-x\psi(x)=\int_0^1 dv\left\{\frac{xv^{x-1}}{1-v}+\frac{v^x-1}{(1-v)^2}\right\};$$

но

$$\int_0^1 dv\left\{\frac{xv^{x-1}}{1-v}+\frac{v^x-1}{(1-v)^2}\right\}=\int_0^1 dv\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{v^x-1}{1-v}\right)=-(x-1),$$

когда $x>0$. Слѣдовательно,

$$\mathcal{G}(1+x)=x\psi(x)-(x-1)+\mathcal{G}(1).$$

Это уравненіе и есть искомое. Для дальнѣйшаго приложенія удобнѣе будетъ представить его въ другомъ видѣ. По опредѣленію:

$$G(1+x)=\Gamma(x)\,G(x),$$

откуда, послѣ логариѳмическаго дифференцированія, имѣемъ:

$$\mathcal{G}(1+x)=\mathcal{G}(x)+\psi(x).$$

Исключая изъ найденныхъ уравненій $\mathcal{G}(1+x)$, получимъ:

$$\mathcal{G}(x)=(x-1)\psi(x)-(x-1)+\mathcal{G}(1)\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\qquad(5)$$

Остается опредѣлить постоянное $\mathcal{J}(1)$.

Замѣщая въ послѣднемъ уравненіи x чрезъ $x+1$, получаемъ уравненіе

$$\frac{d\log G(1+x)}{dx}=x\frac{d\log \Gamma(1+x)}{dx}-x+\mathcal{J}(1),$$

интегрированіе котораго отъ 0 до x даетъ:

$$\log G(1+x)=x\log\Gamma(1+x)-\int_0^x \log\Gamma(1+x)\,dx-\frac{x^2}{2}+x\mathcal{J}(1).$$

Полагая здѣсь $x=1$, въ силу извѣстныхъ значеній

$$\log G(2)=0\,,\quad \log\Gamma(2)=0\,,$$

находимъ:

$$\mathcal{J}(1)=\frac{1}{2}+\int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx.$$

Но по формулѣ Раабе

$$\int_0^1 \log\Gamma(1+x)\,dx=-1+\frac{1}{2}\log 2\pi;$$

слѣдовательно,

$$\mathcal{J}(1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log 2\pi$$

и

$$\log G(1+x)=x\log\Gamma(1+x)-\int_0^x \log\Gamma(1+x)dx-\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi. \quad (6)$$

4. Функція G можетъ быть разложена на простыхъ множителей. Для этого необходимо предварительно преобразовать выраженіе (3). Путемъ послѣдовательнаго дифференцированія формулы (3), имѣемъ:

$$\mathcal{J}(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2a-3}{2}-\frac{1}{1-e^{-u}}+\frac{ue^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\},$$

$$\mathcal{J}'(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{1-\frac{u^2e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\},$$

$$\mathcal{J}''(a)=\int_0^\infty \frac{u^2e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2},$$

и вообще

$$\varphi^{(n)}(a) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{u^n e^{-au} du}{(1-e^{-u})^2}.$$

Помноживъ эти равенства послѣдовательно на

$$x\,, \frac{x^2}{2}\,, \frac{x^3}{3\,!} \ldots,$$

легко замѣтить, что

$$\log G(a+x) = \log G(a) + x\varphi(a) + \frac{x^2}{2}\varphi'(a) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

и вообще, когда n не менѣе двухъ,

$$\log G(a+x) = \log G(a) + x\varphi(a) + \frac{x^2}{2\,!}\varphi'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n\,!}\varphi^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1 - xu + \frac{x^2u^2}{2\,!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n u^n}{n\,!} - e^{-xu}\right\}. \quad (7) \text{ bis}.$$

Такъ какъ по (5) $\varphi(a)$ выражается чрезъ $\psi(a)$, а послѣдняя функція можетъ быть вычислена для всякаго значенія a, то всѣ коэффиціенты вида $\varphi^{(n)}(a)$ можно считать извѣстными. Въ частномъ случаѣ, когда $a=1$, $\varphi(1)$ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, а $\varphi'(1)$ можно найти слѣдующимъ образомъ. По предыдущему

$$\varphi'(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{1 - \frac{u^2}{(1-e^{-u})^2}\right\};$$

сверхъ того, Эйлерово постоянное γ выражается извѣстнымъ опредѣленнымъ интеграломъ, именно:

$$\gamma = \int_0^\infty du\left\{\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} - \frac{e^{-u}}{u}\right\}.$$

Сложивъ эти два выраженія, найдемъ:

$$\mathcal{J}'(1)+\gamma=\int_0^\infty du\left\{\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}-\frac{ue^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}=\int_0^\infty\frac{d}{du}\left(\frac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}\right)du=-1,$$

слѣдовательно,

$$\mathcal{J}'(1)=-(1+\gamma),$$

а потому, полагая въ (7) $a=1$, получимъ

$$\log G(1+x)=\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x+1)}{2}-\frac{\gamma x^2}{2}+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}.\quad.\quad.\quad.\quad.(8)$$

5. Перейдемъ теперь къ разложенію $G(x)$ на множители. Въ силу тождества

$$\frac{1}{(1-e^{-u})^2}=\sum_{k=1}^{n}ke^{-(k-1)u}+\frac{(n+1)e^{-nu}-ne^{-(n+1)u}}{(1-e^{-u})^2}$$

формула (7) пріиметъ видъ:

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\mathcal{J}(a)+\frac{x^2}{2}\mathcal{J}'(a)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}k\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}\frac{du}{u}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}+R,$$

гдѣ

$$R=\int_0^\infty\frac{(n+1)e^{-nu}-ne^{-(n+1)u}}{(1-e^{-u})^2}\cdot e^{-au}\frac{du}{u}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\},$$

но

$$\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}\frac{du}{u}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}=\int_0^\infty\frac{e^{-(a+k-1)u}-e^{-(a+x+k-1)u}}{u}\cdot du-$$

$$-x\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}\cdot du+\frac{x^2}{2}\int_0^\infty ue^{-(a+k-1)u}\cdot du=$$

$$=\log\left(1+\frac{x}{a+k-1}\right)-\frac{x}{a+k-1}+\frac{x^2}{2(a+k-1)^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\mathcal{F}(a)+\frac{x^2}{2}\mathcal{F}'(a)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{k\log\left(1+\frac{x}{a+k-1}\right)-\frac{kx}{a+k-1}+\frac{kx^2}{2(a+k-1)^2}\right\}+R.$$

Что касается послѣдняго члена R, то, полагая $e^{-u}=v$, легко убѣдиться, что

$$R=\frac{(2n+1)}{n(n+1)}M,$$

и такъ какъ M среднее значеніе функціи, независящей отъ n, то очевидно, что при возрастаніи n до безконечности

$$\lim R=0\,.$$

Вслѣдствіе этого, по переходѣ отъ логариѳмовъ къ числамъ, выведенная формула принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{G(a+x)}{G(a)}=e^{x\mathcal{F}(a)+\frac{x^2}{2}\mathcal{F}'(a)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{a+k-1}\right)^k e^{-\frac{kx}{a+k-1}+\frac{kx^2}{2(a+k-1)^2}} \quad . \quad . \ (9)$$

Это разложеніе имѣетъ форму, требуемую теоремой Вейерштрасса. Полагая $a=1$, въ силу сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ, имѣемъ:

$$G(1+x)=(2\pi)^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x(x+1)}{2}}e^{-\frac{\gamma x^2}{2}}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{\frac{x^2}{2k}-x} \quad . \quad . \ (10)$$

что напоминаетъ извѣстное выраженіе:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{\gamma x}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\,.$$

Наконецъ, полагая въ (9) $x=1$, получаемъ новую форму безконечнаго произведенія для $\Gamma(a)$, именно:

$$\Gamma(a)=e^{\mathcal{f}(a)+\frac{1}{2}\mathcal{f}'(a)}\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{1}{a+k-1}\right)^k e^{-\frac{k}{a+k-1}+\frac{k}{2(a+k-1)^2}}.$$

Формула (10) остается справедливой при всякихъ дѣйствительныхъ или комплексныхъ значеніяхъ x, поэтому должна быть принята по опредѣленію за общее выраженіе функціи $G(1+x)$.

Воспользуемся этимъ замѣчаніемъ для вывода нѣкоторыхъ слѣдствій. Пусть α_i корень двучленнаго уравненія:

$$\alpha^n=1.$$

Составимъ при помощи равенства (10) два выраженія $G(1+a-\alpha_i x)$ и $G(1+a)$ и затѣмъ раздѣлимъ полученные результаты; тогда

$$\frac{G(1+a-\alpha_i x)}{G(1+a)}=\left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-\frac{\alpha_i x}{2}} e^{\frac{1+\gamma}{2}\alpha_i x(2a-\alpha_i x)}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{\alpha_i x}{a+k}\right)^k e^{-\frac{\alpha_i x(2a-\alpha_i x)}{2k}+\alpha_i x}.$$

Отсюда, давъ i всѣ значенія отъ 1 до n и сдѣлавъ перемноженіе, найдемъ:

$$\prod_1^{n}\frac{G(1+a-\alpha_i x)}{G(1+a)}=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{(a+k)^n}\right)^k,\quad n>2\ .\ .\ .\ (11)$$

и, если $n=2$,

$$\frac{G(1+a-x)G(1+a+x)}{G^2(1+a)}=e^{-(1+\gamma)x^2}\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(a+k)^2}\right)^k e^{\frac{x^2}{k}}\ .\ .\ .\ (12)$$

Послѣдняя формула при $a=0$ аналогична разложенію $\frac{\sin\pi x}{\pi x}$ на множители, а изъ первой (11) легко вывести теорему Меллина.

Замѣнивъ въ (11) $a+1$ чрезъ a и k чрезъ $k+1$, получимъ:

$$\prod_1^{n}\frac{G(a-\alpha_i x)}{G(a)}=\prod_0^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{(a+k)^n}\right)^{k+1}.$$

Раздѣливъ эту формулу на (11), получаемъ равенство, доказанное Меллиномъ:

$$\prod_{1}^{n}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-\alpha_i x)}=\prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{(a+k)^n}\right).$$

6. Мы знаемъ, что

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+$$

$$\int_0^\infty\frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}.$$

Отсюда, при помощи тождества

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-ku}+\frac{e^{-nu}}{1-e^{-u}},$$

выводимъ:

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-(a+k)u}du}{u(1-e^{-u})}\left(1-xu-e^{-xu}\right)+\frac{x^2}{2}\int_0^\infty\frac{ue^{-(a+k)}du}{1-e^{-u}}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-(a+n)u}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}.\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

Пользуясь пріемомъ, изложеннымъ въ § 4, не трудно доказать, что

$$\log\Gamma(a+x)=\log\Gamma(a)+x\psi(a)-\int_0^\infty\frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})}\left\{1-xu-e^{-xu}\right\}.\ .\ (b)$$

откуда, по замѣщеніи a чрезъ $a+k$, имѣемъ:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-(a+k)u}du}{u(1-e^{-u})}\left\{1-xu-e^{-xu}\right\}=\log\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+x+k)}+x\psi(a+k).$$

Дифференцируя (b) дважды по x и полагая въ результатѣ $x=k$, найдемъ:

$$\psi'(a+k)=\int_0^\infty \frac{ue^{-(a+k)u}du}{1-e^{-u}}.$$

Наконецъ, легко замѣтить, что послѣдній интегралъ, входящій въ (a), при возрастаніи n до безконечности стремится къ нулю. Слѣдовательно, подставивъ найденныя значенія интеграловъ, изъ формулы (a) выводимъ:

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\log\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+x+k)}+x\psi(a+k)+\frac{x^2}{2}\psi'(a+k)\right\}$$

и

$$G(a+x)=G(a)\,.\,e^{x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)}\prod_0^\infty\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+x+k)}e^{x\psi(a+k)+\frac{x^2}{2}\psi'(a+k)}\quad ..\ (13)$$

Въ частныхъ случаяхъ, когда $a=1$,

$$G(1+x)=(2\pi)^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x(x+1)}{2}}e^{-\frac{\gamma x^2}{2}}\prod_0^\infty\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+x+k)}e^{x\psi(1+k)+\frac{x^2}{2}\psi'(1+k)}\quad ..\ (14)$$

когда же $x=1$,

$$\Gamma(a)=e^{\phi(a)+\frac{1}{2}\phi'(a)}\prod_0^\infty\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+1+k)}e^{\psi(a+k)+\frac{1}{2}\psi'(a+k)},$$

или, такъ какъ

$$\Gamma(a+k+1)=(a+k)\Gamma(a+k),$$

$$\Gamma(a)=e^{\phi(a)+\frac{1}{2}\phi'(a)}\prod_0^\infty\frac{1}{a+k}e^{\psi(a+k)+\frac{1}{2}\psi'(a+k)}$$

Формулы (13) и (14) суть частные случаи довольно общей теоремы, изъ которой слѣдуетъ, что функціи съ отрицательными корнями разлагаются не только на простые множители Вейерштрасса, но и на множители, составленные изъ функціи Γ или изъ функцій подобныхъ функціи гамма. Объ этомъ мы будемъ имѣть случай говорить.

7. Выраженіями (7) или (8) можно воспользоваться для полученія разложеній въ строку $\log G(a+x)$. Въ самомъ дѣлѣ, разложивъ e^{-ux} въ рядъ по степенямъ ux, по (7) найдемъ:

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+\sum_{i=3}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i!}\int_0^\infty\frac{u^{i-1}e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2},$$

но

$$\int_0^\infty\frac{u^{i-1}e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_0^\infty u^{i-1}e^{-(a+k-1)u}du=(i-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(a+k-1)^i}=(i-1)!C_i;$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned}\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+\\+\frac{x^3}{3}C_3-\frac{x^4}{4}C_4+\ldots(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}C_i+\ldots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(15)$$

Если же $a=1$,

то
$$C_i=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{i-1}}=S_{i-1},$$

и слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}\log G(1+x)=x\phi(1)+\frac{x^2}{2!}\phi'(1)+S_2\frac{x^3}{3}-S_3\frac{x^4}{4}+\ldots\\+(-1)^{i-1}S_{i-1}\frac{x^i}{i}+\ldots\end{aligned}\right\}\quad.\quad.\quad(16)$$

аналогично съ разложеніемъ:

$$\log\Gamma(1+x) = -\gamma x + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} - \ldots + (-1)^i S_i \frac{x^i}{i} + \ldots$$

Если въ (15) $a = m$, цѣлому положительному числу, то коэффиціенты

$$C_i = \frac{1}{m^i} + \frac{2}{(m+1)^i} + \frac{3}{(m+2)^i} + \frac{4}{(m+3)^i} + \ldots$$

выражаются чрезъ суммы S_i. Дѣйствительно, по фор. (1) § 1,

$$G(m+x) = G(1+x)\Gamma(1+x)\Gamma(2+x)\ldots\Gamma(m-1+x).$$

Логариѳмируя и дифференцируя по x, найдемъ:

$$\phi(m+x) = \phi(1+x) + \psi(1+x) + \psi(2+x) + \ldots + \psi(m-1+x),$$

но извѣстно, что

$$\psi(2+x) = \psi(1+x) + \frac{1}{1+x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi(m-1+x) = \psi(1+x) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \ldots + \frac{1}{m-2+x};$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\phi(m+x) = \phi(1+x) + (m-1)\psi(1+x) + \\ &+ \frac{m-2}{1+x} + \frac{m-3}{2+x} + \ldots + \frac{2}{m-3+x} + \frac{1}{m-2+x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Взявъ $(i-1)$-ую производную этого выраженія по x, получимъ:

$$\phi^{(i-1)}(m+x) = \phi^{(i-1)}(1+x) + (m-1)\psi^{(i-1)}(1+x) +$$

$$+ (-1)^{i-1}(i-1)!\left\{\frac{m-2}{(1+x)^i} + \frac{m-3}{(2+x)^i} + \ldots + \frac{2}{(m-3+x)^i} + \frac{1}{(m-2+x)^i}\right\},$$

откуда

$$\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(m+x)=\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(1+x)+\frac{m-1}{(i-1)!}\psi^{(i-1)}(1+x)+$$

$$+(-1)^{i-1}\left\{\frac{m-2}{(1+x)^i}+\frac{m-3}{(2+x)^i}+\ldots+\frac{2}{(m-3+x)^i}+\frac{1}{(m-2+x)^i}\right\}\ldots(18)$$

Затѣмъ понятно, что

$$\log G(m+x)=\log G(m)+x\phi(m)+\frac{x^2}{2!}\phi'(m)+\frac{x^3}{3!}\phi''(m)+\ldots$$

$$+\frac{x^i}{i!}\phi^{(i-1)}(m)+\ldots$$

а потому, сличая это разложеніе послѣдовательно съ (15) и (16), имѣемъ:

$$\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(m)=(-1)^{i-1}C_i,$$

$$\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(1)=(-1)^{i-1}S_{i-1}.$$

Также изъ разложенія $\log\Gamma(1+x)$ не трудно вывести, что

$$\frac{1}{(i-1)!}\psi^{(i-1)}(1)=(-1)^iS_i.$$

Замѣтивъ это и полагая въ (17) и (18) $x=0$, находимъ:

$$\phi(m)=\phi(1)+(m-1)\psi(1)+\frac{m-2}{1}+\frac{m-3}{2}+\ldots+\frac{2}{m-3}+\frac{1}{m-2},$$

$$\phi'(m)=\phi'(1)+(m-1)S_2-\left[\frac{m-2}{1^2}+\frac{m-3}{2^2}+\ldots+\frac{2}{(m-3)^2}+\frac{1}{(m-2)^2}\right],$$

$$C_i=S_{i-1}-(m-1)S_i+\frac{m-2}{1^i}+\frac{m-3}{2^i}+\ldots+\frac{2}{(m-3)^i}+\frac{1}{(m-2)^i}.$$

Очевидно, что строка (15) остается сходящейся, пока

$$\text{mod.}\, x<a.$$

Функція $\mathcal{F}$ можетъ быть разложена въ строку особаго вида. Дифференцированіе формулы (7 bis) даетъ:

$$\mathcal{F}(a+x)=\mathcal{F}(a)+x\mathcal{F}'(a)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{F}^{(n-1)}(a)-$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2!}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}u^{n-1}}{(n-1)!}-e^{-xu}\right\}.$$

Обозначивъ послѣдній интегралъ буквою R, не трудно понять, что

$$R=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}du\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^iu^i}{i!}-e^{-xu}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^i}{(a+k-1)^{i+1}}-\frac{1}{a+k-1+x}\right\}.$$

Вторая сумма представляетъ геометрическую прогрессію, сумма которой

$$\frac{(a+k-1)^n-(-1)^nx^n}{(a+k-1)^n(a+k-1+x)}.$$

Подставивъ это значеніе въ скобки и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$R=-(-1)^nx^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(a+k-1)^n(a+k-1+x)}.$$

Слѣдовательно,

$$\mathcal{F}(a+x)=\mathcal{F}(a)+x\mathcal{F}'(a)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{F}^{(n-1)}(a)+$$

$$+(-1)^nx^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(a+k-1)^n(a+k-1+x)}.$$

Самый интересный случай получается при $a=1$, $n=2$, именно:

$$\psi(1+x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2\pi - x(1+\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(x+k)}.$$

8. Переходимъ къ выводу факторіальныхъ строкъ.

Мы имѣли въ § 1 слѣдующее выраженіе:

$$\log G(x) = -\int_0^1 \frac{d\xi}{\log(1-\xi)} \left\{ \frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{\xi} + \frac{1-(1-\xi)^{x-1}}{\xi^2} \right\}.$$

Разложивъ $(1-\xi)^{x-1}$ въ строку, имѣемъ:

$$\log G(x) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k-2)}{(k+2)!} \int_0^1 \frac{\xi^k d\xi}{\log(1-\xi)} + R.$$

Замѣняя въ интегралѣ $1-\xi$ чрезъ e^{-u}, получимъ:

$$-\int_0^1 \frac{\xi^k d\xi}{\log(1-\xi)} = \int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-u})^k e^{-u} du}{u} = K_k$$

или, возвысивъ $(1-e^{-u})$ только въ $(k-1)$-ую степень, найдемъ:

$$K_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(k+1)u} - e^{-(k+2)u}}{u} du$$

или

$$K_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!} \log\frac{k+2}{k+1},$$

т. е.

$$K_1 = \log 2, \quad K_2 = \log\frac{4}{3}, \quad K_3 = \log\frac{32}{27}, \ldots$$

Замѣтивъ, что

$$K_{k+1} = -\int_0^1 \frac{\xi^{k+1} d\xi}{\log(1-\xi)} = -\theta \int_0^1 \frac{\xi^k d\xi}{\log(1-\xi)} = \theta K_k,$$

убѣждаемся не только въ томъ, что коэффиціенты убываютъ, но и въ сходимости строки при всякомъ значеніи x, ибо остаточному члену R можно дать такую форму:

$$R=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n-3)}{(n+2)!}\cdot-\int_0^1\frac{\xi^{n+1}(1-\theta)^{n+3}(1-\theta\xi)^{x-m-5}}{\log(1-\xi)}d\xi,$$

откуда

$$R=(-1)^n K_{n+1}\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n-3)}{(n+2)!}\vartheta^{n-3}\vartheta_1^{x-2}.$$

И такъ,

$$\log G(x)=K_1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}-K_2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4!}+\dots$$

Взявъ дифференцію этой строки, имѣемъ:

$$\log\Gamma(x)=K_1\frac{(x-1)(x-2)}{2!}-K_2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}+\dots$$

Для функціи $\psi(a+x)$ извѣстно разложеніе по факторіаламъ, выведенное впервые Абелемъ методомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Предыдущія свойства функціи G наводятъ на мысль, что то-же должно быть и для функціи $\phi(a+x)$.

Обратимся къ интегралу въ § 4, выражающему $\phi(a)$. Замѣнивъ въ немъ a чрезъ $(a+x)$ и e^{-u} чрезъ u, будемъ имѣть:

$$\phi(a+x)=\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a+x-1}}{(1-u)^2}-\left[\frac{2a+2x-3}{2}-\frac{1}{1-u}\right]\frac{1}{\log u}\right\};$$

отсюда-же

$$\phi(a+x)-\phi(a)=\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a-1}(u^x-1)}{(1-u)^2}-\frac{x}{\log u}\right\}\quad .\ .\ .\ (a)$$

Извѣстно, что

$$\psi(a)=-\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a-1}}{1-u}+\frac{1}{\log u}\right\}.$$

Умноживъ эту формулу на x и вычтя изъ предыдущей, получимъ:

$$\phi(a+x)-\phi(a)-x\psi(a)=\int_0^1 u^{a-1}\,du\left\{\frac{u^x-1}{(1-u)^2}+\frac{x}{1-u}\right\}$$

или, измѣняя u въ $1-u$,

$$\varphi(a+x)=\varphi(a)+x\psi(a)+\int_0^1(1-u)^{a-1}du\left\{\frac{(1-u)^x-1}{u^2}+\frac{x}{u}\right\}.$$

Теперь уже можно примѣнить теорему Ньютона, такъ что

$$\varphi(a+x)=\varphi(a)+x\psi(a)+$$

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i!}\int_0^1 u^{i-2}(1-u)^{a-1}\,du+R,$$

при чемъ

$$\int_0^1 u^{i-2}(1-u)^{a-1}du=\frac{\Gamma(i-1)\Gamma(a)}{\Gamma(a+i-1)}=\frac{(i-2)!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+i-2)}.$$

Остаточный членъ имѣетъ форму:

$$R=(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{a-1}(1-\theta)^n(1-\theta u)^{x-1-n}du,$$

но

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{a-1}(1-\theta)^n(1-\theta u)^{x-1-n}du=(1-\theta_1)^{x-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_1}\right)^n\frac{\Gamma(n)\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)},$$

вслѣдствіе чего

$$R=(-1)\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\cdot\frac{\vartheta^n}{n}(1-\theta_1)^{x-1},$$

гдѣ

$$\vartheta=\frac{1-\theta}{1-\theta_1}<1.$$

Предѣлъ остаточнаго члена при возрастаніи n равенъ нулю; слѣдовательно:

$$\mathcal{f}(a+x)=\mathcal{f}(a)+x\psi(a)+\frac{1}{1.2}\,\frac{x(x-1)}{a}-\frac{1}{2.3}\,\frac{x(x-1)(x-2)}{a(a+1)}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1}{(n-1)n}\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n-2)}+\ldots$$

Это и есть искомая формула.

Взявъ дифференцію этого равенства по x, или по a, и замѣтивъ, что

$$\triangle\mathcal{f}(a+x)=\psi(a+x),$$

получимъ формулу Абеля:

$$\psi(a+x)=\psi(a)+\frac{x}{a}-\frac{x(x-1)}{2a(a-1)}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{(n-1)\,.\,a(a+1)\ldots(a+n-2)}+\ldots$$

Нѣкоторыя слѣдствія этихъ формулъ довольно интересны. Раздѣливъ обѣ части предпослѣдняго равенства на x и затѣмъ полагая $x=0$, получимъ:

$$\mathcal{f}'(a)=\psi(a)-\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a(a+1)}-\frac{1.2}{4a(a+1)(a+2)}-$$

$$-\frac{1\,.\,2\,.\,3}{5a(a+1)(a+2)(a+3)}-\ldots$$

Изъ этой строки получается разложеніе $\psi'(a)$. Мы знаемъ изъ § 3, формула (5), что

$$\mathcal{f}(a)=(a-1)\,\psi(a)-(a-1)+\mathcal{f}(1)\,.$$

Дифференцированіе дастъ:

$$\mathcal{f}'(a)=\psi(a)+(a-1)\,\psi'(a)-1\,.$$

Сравнивая этотъ результатъ съ полученной строкой, послѣ легкихъ преобразованій, имѣемъ:

$$\psi'(a)=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{2(a-1)a}-\frac{1}{3(a-1)a(a+1)}-\frac{1.2}{4(a-1)a(a+1)(a+2)}-\ldots,$$

тогда какъ извѣстная форма $\psi'(a)$ такова:

$$\psi'(a)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2a(a+1)}+\frac{1.2}{3a(a+1)(a+2)}+\dots$$

Легко убѣдиться въ тождествѣ обѣихъ строкъ.

9. Формула удвоенія аргумента функціи G аналогична равенству:

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Слѣдующій пріемъ доказательства намъ показался проще другихъ, хотя онъ довольно искусственъ. Пусть

$$H(x)=\frac{G(2x)}{G^2(x)G^2(x+\frac{1}{2})}.$$

По замѣщеніи x чрезъ $x+1$ составимъ выраженіе:

$$\frac{H(x+1)}{H(x)}=\frac{G(2x+2)\,G^2(x)\,G^2(x+\frac{1}{2})}{G(2x)G^2\,(x+1)\,G^2(x+\frac{3}{2})}.$$

Правая часть можетъ быть упрощена при помощи формулы (a) и

$$G(x+1)=\Gamma(x)\,G(x)\,,$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,,$$

такъ что

$$\frac{H(x+1)}{H(x)}=\frac{\Gamma(2x+1)\,\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)\,\Gamma^2(x+\frac{1}{2})}=\frac{2x\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)\,\Gamma^2(x+\frac{1}{2})}$$

или

$$\frac{H(x+1)}{H(x)}=\frac{x\,.\,2^{4x}}{2\pi}.$$

Взявъ логариѳмы, результатъ можно представить въ видѣ:

$$\triangle\log H(x)=\log x+4x\log 2-\log 2\pi\,.$$

Извѣстно, что

$$\triangle \log \Gamma(x) = \log x,$$

поэтому, интегрируя предыдущее разностное уравненіе отъ 1 до x, найдемъ:

$$\log \frac{H(x)}{H(1)} = \log \Gamma(x) - x(x-1)\, 2\log 2 - (x-1) \log 2\pi .$$

Слѣдовательно,

$$H(x) = H(1)\, \Gamma(x) 2^{(x-1)(2x-1)} \pi^{-x} .$$

Сравнивая это значеніе $H(x)$ съ прежнимъ, получимъ:

$$\frac{G(2x)}{G^2(x) G^2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = H(1)\, \Gamma(x) 2^{(x-1)(2x-1)} \pi^{-x} .$$

Для опредѣленія $H(1)$ полагаемъ $x = 1$, тогда

$$H(1) = \frac{\pi}{G^2(3/2)} = \frac{1}{G^2(1/2)} ,$$

ибо

$$\pi = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

И такъ, окончательно:

$$G(2x) = \frac{1}{G^2\left(\frac{1}{2}\right)} 2^{(x-1)(2x-1)} \pi^{-x} \Gamma(x) G^2(x) G^2\left(x + \frac{1}{2}\right). \quad . \quad . \quad (19)$$

10. Мы воспользуемся этой формулой для вывода интеграла

$$\int_0^1 \log G(x+a)\, dx = \int_a^{a+1} \log G(x) dx = y(a) .$$

Посредствомъ дифференцированія по a, составимъ уравненіе:

$$\frac{dy(a)}{da} = \log G(a+1) - \log G(a) = \log \Gamma(a) .$$

Обратно, интегрируя отъ 0 до a и замѣчая, что

$$y(0)=\int_0^1 \log G(x)dx\,,$$

находимъ:

$$y(a)=\int_0^1 \log G(a)da+\int_0^a \log\Gamma(a)da\,.$$

Вычисленіе второго интеграла не представляетъ затрудненій. Было доказано въ § 3, формула (6), что

$$\log G(1+x)=x\log\Gamma(1+x)-\int_0^x \log\Gamma(1+x)dx-\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Въ силу соотношенія:

$$\log\Gamma(1+x)=\log x+\log\Gamma(x)\,,$$

эта формула преобразуется въ такую:

$$\log G(1+x)=x\log x+x\log\Gamma(x)-$$

$$-\int_0^x \log x dx-\int_0^x \log\Gamma(x)dx-\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Замѣтивъ, что

$$\int_0^x \log x dx=x\log x-x\,,$$

и написавъ a вмѣсто x, имѣемъ:

$$\int_0^a \log\Gamma(a)da=a\log\Gamma(a)-\log G(1+a)-\frac{a(a-1)}{2}+\frac{a}{2}\log 2\pi\quad .\ .\ .\ .\ (a)$$

Обращаясь къ первому интегралу, замѣчаемъ, что его можно разбить на два; такъ что

$$\int_0^1 \log G(a)da=\int_0^{\frac{1}{2}} \log G(a)da+\int_{\frac{1}{2}}^1 \log G(a)da$$

или, по замѣнѣ a чрезъ $a+\frac{1}{2}$, во второмъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left\{ G(a)G\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\} da\,.$$

По формулѣ удвоенія аргумента (19):

$$G(a)G\left(a+\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right) G^{\frac{1}{2}}(2a)\,.\,2^{-(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)} \pi^{-\frac{a}{2}} \Gamma^{-\frac{1}{2}}(a)\,.$$

Подставивъ это въ предыдущій интегралъ и сдѣлавъ всѣ возможныя упрощенія, находимъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \frac{1}{2}\log G\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \log G(2a)da - \frac{5}{48}\log 2 +$$

$$+\frac{1}{16}\log\pi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \log\Gamma(a)da\,.$$

Здѣсь, очевидно, можно сдѣлать такія преобразованія: замѣнить $2a$ чрезъ a въ первомъ интегралѣ и опредѣлить второй изъ формулы (a). Такимъ образомъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \frac{1}{2}\log G\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\int_0^1 \log G(a)da - \frac{5}{48}\log 2 + \frac{1}{16}\log\pi -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \log G\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\log 2\pi\right\}.$$

Отсюда, сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \log\left\{\frac{G^{4/3}(1/2)}{2^{11/36}}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{\frac{1}{12}}\right\}.$$

Такимъ же способомъ можно опредѣлить болѣе простой интегралъ:

$$\int_0^1 \log\Gamma(a) = \frac{1}{2}\log 2\pi\,.$$

Этотъ пріемъ общій для всѣхъ функцій подобныхъ функціи $\Gamma(a)$. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ:

$$\int_0^1 \log G(x+a)dx = \log\left\{\frac{G^{4/3}(1/2)}{2^{11/36}}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{\frac{1}{12}}\right\} + \frac{a}{2}\log 2\pi - \frac{a(a-1)}{2} +$$

$$+ a\log\Gamma(a) - \log G(1+a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Это равенство соотвѣтствуетъ формулѣ Раабе въ теоріи функціи $\Gamma(a)$.

11. Коши доказалъ, что

$$\log\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \overline{\omega}(x) \quad . \; . \quad (a)$$

гдѣ

$$\overline{\omega}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}du\left\{\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Мы обнаружимъ, что подобнымъ-же свойствомъ обладаетъ $\log G(1+x)$. Интегрируя по частямъ, имѣемъ:

$$\int_0^1 \log G(x+a)da = \log G(1+x) - \int_0^1 \phi(a+x)a\,da \quad . \; . \; . \quad (c)$$

Изъ предыдущаго извѣстно (§ 4):

$$\phi(a+x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2x+2a-3}{2} - \frac{1}{1-e^{-u}} + \frac{ue^{-(a+x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\},$$

слѣдовательно,

$$\int_0^1 \phi(a+x)a\,da = \int_0^1 a\,da\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2x+2a-3}{2} - \frac{1}{1-e^{-u}} + \frac{ue^{-(a+x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Измѣнивъ порядокъ интеграціи и выполнивъ интегрированіе по a, будемъ имѣть:

$$\int_0^1 \phi(a+x)a\,da =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{x}{2} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2(1-e^{-u})} - \frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^2} + \frac{e^{-(x-1)u}}{u(1-e^{-u})}\right\}.$$

Нѣкоторые члены подъинтегральной функціи наводятъ на мысль выдѣлить изъ этого интеграла $\log\Gamma(x)$. Мы знаемъ, что

$$\log\Gamma(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{x-1-\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $^1/_2$ и вычтя изъ прежняго, находимъ:

$$\int_0^1 \phi(a+x)ada-\frac{1}{2}\log\Gamma(x)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{1}{12}-\frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{e^{-(x-1)u}}{u(1-e^{-u})}-\frac{e^{-(x-1)u}}{2(1-e^{-u})}\right\}.$$

Это еще преобразуется посредствомъ прибавленія въ скобкахъ:

$$-\frac{1}{12}e^{-(x-1)u}+\frac{1}{12}e^{-(x-1)u}=0\,,$$

такъ что правая часть можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\frac{1}{12}\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}\,du+\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{1}{12}e^{-(x-1)u}-\frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-(x-1)u}}{u(1-e^{-u})}-\frac{e^{-(x-1)u}}{2(1-e^{-u})}\right\}$$

или, имѣя въ виду, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}\,du=\log x\,,$$

и вынеся $e^{-(x-1)u}$ за скобку, въ видѣ:

$$\frac{1}{12}\log x+\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{1}{u(1-e^{-u})}-\frac{1}{2(1-e^{-u})}\right\}.$$

Разложивъ $\dfrac{1}{1-e^{-u}}$ по степенямъ u, можно написать

*

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\frac{1}{u}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right).$$

Внося это выраженіе вмѣсто послѣдняго члена въ скобкахъ, нашей формулѣ можно дать такой видъ:

$$\frac{1}{12}\log x-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{1}{u(1-e^{-u})}-\frac{1}{2u}-\frac{1}{6}\right\}.$$

Первый интегралъ представляетъ не что иное, какъ $\overline{\omega}(x)$; слѣдовательно:

$$\int_0^1\phi(a+x)ada=\frac{1}{2}\log\Gamma(x)+\frac{1}{12}\log x-\frac{1}{2}\overline{\omega}(x)+\varrho(x),$$

гдѣ $\varrho(x)$ послѣдній интегралъ предыдущаго выраженія. И такъ (c):

$$\int_0^1\log G(x+a)da=\log G(x+1)-\frac{1}{12}\log x+\frac{1}{2}\left\{\log\Gamma(x)-\overline{\omega}(x)\right\}+\varrho(x).$$

Но мы имѣли (20):

$$\int_0^1\log G(x+a)da=\int_0^1\log G(a)da+\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x-1)}{2}+$$

$$+x\log\Gamma(x)-\log G(x+1).$$

Исключая первый интегралъ изъ этихъ выраженій, не трудно получить:

$$2\log G(x+1)=\int_0^1\log G(a)da+\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x-1)}{2}+$$

$$+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\Gamma(x)+\frac{1}{12}\log x+\varrho(x)-\frac{1}{2}\overline{\omega}(x)\quad .\ .\ .\quad (d)$$

Написавъ въ формулѣ (a)

$$\log\Gamma(1+x)=\log x+\log\Gamma(x)$$

имѣемъ:

$$\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+\overline{\omega}(x).$$

Подставивъ это выраженіе $\log\Gamma(x)$ въ формулу (d), найдемъ:

$$\log G(x+1)=\frac{1}{2}\int_0^1\log G(a)da+\frac{1}{8}\log 2\pi+\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{3}{4}x^2+$$

$$+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\right)\log x+\frac{1}{2}\left(x\overline{\omega}(x)+\varrho(x)\right)\quad .\ .\ .\ .\ (e)$$

Сумма опредѣленныхъ интеграловъ

$$x\overline{\omega}(x)+\varrho(x)$$

можетъ быть представлена однимъ интеграломъ.

Умноживъ (b) на x, имѣемъ:

$$x\overline{\omega}(x)=\int_0^\infty\frac{xe^{-ux}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\}.$$

Интеграція по частямъ приводитъ къ такому равенству:

$$x\overline{\omega}(x)=-\left|\int_0^\infty\frac{e^{-xu}}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\}+\right.$$

$$+\int_0^\infty e^{-xu}d\left\{\frac{1}{u}\left[\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

или

$$x\overline{\omega}(x)=\frac{1}{12}+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}}{u}du\left\{\frac{2}{u^2}+\frac{1}{2u}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}-\frac{1}{u(1-e^{-u})}\right\}.$$

Складывая это равенство почленно съ

$$\varrho(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{1}{u(1-e^{-u})}-\frac{1}{2u}+\frac{1}{6}\right\},$$

получимъ:

$$x\overline{\omega}(x)+\varrho(x)=\frac{1}{12}+2\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Полагая

$$\omega(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\} \quad . \; . \; . \quad (21)$$

и замѣтивъ, что

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \log G(a)da+\frac{1}{8}\log 2\pi+\frac{1}{24}=\log\frac{G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{1/6}}{2^{1/36}},$$

изъ формулы (e) находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\log G(x+1)=\log\frac{G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{1/6}}{2^{1/36}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\\ +\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+\omega(x)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (22)$$

что и требовалось доказать.

Равенство (22) можетъ быть доказано иначе. Мы знаемъ (3), что

$$\log G(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x-1}{1-e^{-u}}+\frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Разлагая $(1-e^{-u})^{-2}$ въ строку, получимъ:

$$\frac{1}{(1-e^{-u})^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}+R$$

гдѣ R строка, расположенная по положительнымъ степенямъ u.

Замѣтивъ это, можно написать

$$\log G(x)=F(x)+\Omega(x),$$

полагая

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x-1}{1-e^{-u}}+\frac{1}{(1-e^{-u})^2}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}\right)e^{-(x-1)u}\right\}$$

$$\Omega(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}-\frac{1}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Для вычисленія $F(x)$ возьмемъ производную по x:

$$F'(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2x-3}{2}-\frac{1}{1-e^{-u}}+\left(\frac{1}{u}+1+\frac{5}{12}u\right)e^{-(x-1)u}\right\}, \quad (f)$$

откуда

$$F'(1)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{1-e^{-u}}+\left(\frac{1}{u}+1+\frac{5}{12}u\right)\right\} \ . \ . \ . \ (g)$$

или

$$F'(1)=\int_0^\infty \frac{5}{12}e^{-u}du-\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\}$$

или, припоминая формулу (b) и выполнивъ интеграцію въ первомъ членѣ,

$$F'(1)=\frac{5}{12}-\overline{\omega}(1).$$

Полагая въ формулѣ (a) $x=1$, найдемъ:

$$\overline{\omega}(1)=1-\frac{1}{2}\log 2\pi .$$

Слѣдовательно,

$$F'(1)=-\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\log 2\pi \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (h)$$

Вычитая (g) изъ (f), получимъ:

$$F'(x)-F'(1)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{(x-1)+\left(\frac{1}{u}+1+\frac{5}{12}u\right)\left(e^{-(x-1)u}-1\right)\right\},$$

что можно представить иначе:

$$F'(x)-F'(1)=\int_0^\infty du\left\{(x-1)\frac{e^{-u}}{u}+\frac{e^{-xu}-e^{-u}}{u^2}\right\}-\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}du+$$

$$+\frac{5}{12}\int_0^\infty \left(e^{-xu}-e^{-u}\right)du .$$

Полагая

$$y(x)=\int_0^{\infty} du\left\{(x-1)\frac{e^{-u}}{u}+\frac{e^{-xu}-e^{-u}}{u^2}\right\}\quad .\ .\ .\ .\quad (i)$$

и вспомнивъ значенія двухъ остальныхъ интеграловъ, найдемъ:

$$F'(x)-F'(1)=y(x)-\log x+\frac{5}{12x}-\frac{5}{12}.$$

Дифференцируя равенство (i), имѣемъ:

$$y'(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}\,du=\log x.$$

Слѣдовательно, интегрируя отъ 1 до x и замѣчая, что

$$y(1)=0,$$

найдемъ:

$$y(x)=x\log x-x+1.$$

Изъ всего найденнаго будемъ имѣть, принимая въ разсчетъ равенство (h):

$$F'(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+(x-1)\log x-x+\frac{5}{12x}.$$

Интегрируя это равенство отъ 1 до x, находимъ:

$$F(x)=F(1)+\frac{x-1}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}$$

или

$$F(x)=C+\varphi(x),$$

полагая

$$C=F(1)-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{4}$$

и

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x.$$

Для опредѣленія постояннаго C обратимся къ формулѣ удвоенія (19), которая въ логариѳмическомъ видѣ можетъ быть написана такъ:

$$\log G(2x) - 2\log G(x) - 2\log G\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)\log 2 +$$

$$+\log\Gamma(x) - x\log\pi - 2\log G\left(\frac{1}{2}\right).$$

или, замѣтивъ, что

$$\log G(x) = C + \varphi(x) + \Omega(x),$$

$$\left.\begin{aligned} &-3C+\varphi(2x)-2\varphi(x)-2\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-1)\log 2-\\ &-x\log\pi-2\log G\left(\frac{1}{2}\right)+\log\Gamma(x)-\Omega(2x)+2\Omega(x)+2\Omega\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\}\ . \ . \ (k)$$

Пользуясь значеніемъ $\varphi(x)$, не трудно вывести, что

$$\varphi(2x)=x\log 2\pi+\left(2x^2-2x+\frac{5}{12}\right)\log x-3x^2+2x+\left(2x^2-2x+\frac{5}{12}\right)\log 2$$

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)=\varphi(x)+\frac{1}{4}\log 2\pi+\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)\log x-\frac{1}{2}x+$$

$$+\left\{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\right)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right\}.$$

Наконецъ, по теоремѣ Коши:

$$\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\overline{\omega}(x).$$

Подставивъ всѣ эти значенія въ выраженіе (k), послѣ сокращеній получимъ:

$$2\log G\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{19}{12}\log 2-\log\pi-3C=\overline{\omega}(x)+2\Omega(x)+2\Omega\left(x+\frac{1}{2}\right)-\Omega(2x)+$$

$$+\left\{\left(x^2-x+\frac{1}{12}\right)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{x}{2}+\frac{5}{8}\right\}.$$

Равенство это справедливо при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ x, но при $x=\infty$ правая часть обращается въ нуль, ибо каждое изъ слагаемыхъ при этомъ равно нулю, а потому

$$2\log G\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{19}{12}\log 2-\log\pi-3C=0.$$

Отсюда

$$C=\log\frac{G^{2/3}(1/2)}{2^{19/36}\pi^{1/3}}.$$

Слѣдовательно,

$$F(x)=\log\frac{G^{2/3}(\frac{1}{2})}{2^{19/36}\pi^{1/3}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x.$$

и

$$\log G(x)=\log\frac{G^{2/3}(\frac{1}{2})}{2^{19/36}\pi^{1/3}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}-\frac{1}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Складывая это равенство съ равенствомъ

$$\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\},$$

получаемъ окончательно:

$$\log G(x+1)=\log\frac{\pi^{1/6}G^{2/3}(\frac{1}{2})}{2^{1/36}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Разложеніе послѣдняго интеграла въ рядъ по отрицательнымъ степенямъ x даетъ строку, подобную строкѣ Стирлинга.

Извѣстно, что

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{u}+\frac{B_1}{2!}u-\frac{B_2}{4!}u^3+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}u^{2n-1}+(-1)^n\frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)!}u^{2n+1}$$

гдѣ B_1, B_2, ... Бернулліевы числа, θ — правильная дробь.

Дифференцируя, имѣемъ:

$$-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}=-\frac{1}{u^2}+\frac{B_1}{2!}-\frac{3B_2}{4!}u^2+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)B_n}{(2n)!}u^{2n-2}+(-1)^n\frac{\theta(2n+1)B_{n+1}}{(2n+2)!}u^{2n}.$$

Отсюда, замѣтивъ, что $B_1=\frac{1}{6}$, получимъ:

$$\frac{1}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}=-\frac{3B_2}{4!}u+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)B_n}{2n!}u^{2n-3}+(-1)^n\frac{\theta(2n+1)B_{n+1}}{(2n+2)!}u^{2n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ux}}{u}du\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}=-\frac{B_2}{2.4}\frac{1}{x^2}+\frac{B_3}{4.6}\frac{1}{x^4}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-2)2n}\frac{1}{x^{2n-2}}+(-1)^n\frac{\theta B_{n+1}}{2n(2n+2)}\frac{1}{x^{2n}}.$$

И такъ,

$$\log G(x+1) = \log \frac{\pi^{1/6} G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{1/36}} + \frac{x}{2}\log 2\pi + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}\right)\log x - \frac{3}{4}x^2 -$$

$$- \frac{B_2}{2.4}\frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{4.6}\frac{1}{x^4} - \ldots (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-2)2n}\frac{1}{x^{2n-2}} +$$

$$+ (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{2n(2n+2)}\frac{1}{x^{2n}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Такимъ образомъ, при весьма большомъ x приближенное значеніе $G(x+1)$ будетъ:

$$G(x+1) = \frac{G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{1/6}}{2^{1/36}}(2\pi)^{\frac{x}{2}} x^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}} e^{-\frac{3}{4}x^2} .$$

12. Пользуясь вышедоказанными формулами, можно вычислить нѣкоторые опредѣленные интегралы.

Интегралъ

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du ,$$

по замѣнѣ $u+a$ чрезъ u, распадается на два, именно:

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du = \int_a^{a+x} \log\Gamma(u)du = \int_0^{a+x} \log\Gamma(u)du - \int_0^a \log\Gamma(u)du .$$

По доказанному въ § 10 формула (a), или пользуясь (6), имѣемъ:

$$\int_0^{a+x} \log\Gamma(u)du = (a+x-1)\log\Gamma(x+a) - \log G(x+a) - \frac{(x+a)(x+a-1)}{2} +$$

$$+ \frac{x+a}{2}\log 2\pi$$

$$\int_0^a \log\Gamma(u)du = (a-1)\log\Gamma(a) - \log G(a) - \frac{a(a-1)}{2} + \frac{a}{2}\log 2\pi .$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du = \log\frac{\Gamma^{x+a-1}(x+a)G(a)}{\Gamma^{a-1}(a)G(x+a)} - \frac{x(x+2a-1)}{2} + \frac{x}{2}\log 2\pi .$$

Если x цѣлое число, правая часть не зависитъ отъ G, и въ частномъ случаѣ, при $x=1$, получаемъ формулу Раабе:

$$\int_0^1 \log\Gamma(u+a)du = \log\frac{\Gamma^{a}(1+a)\,.\,G(a)}{\Gamma^{a-1}(a)G(1+a)} - a + \frac{1}{2}\log 2\pi =$$

$$= a\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi .$$

13. Мы имѣли уравненіе (a) въ § 8:

$$\phi(a+x)-\phi(a)=\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a-1}(u^x-1)}{(1-u)^2}-\frac{x}{\log u}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(1)$$

Подставивъ сюда $a+1$ вмѣсто a и b вмѣсто x, можно написать:

$$\frac{d}{da}\log\frac{G(a+b+1)}{G(a+1)}=\int_0^1 du\left\{\frac{u^a(u^b-1)}{(1-u)^2}+\frac{b}{\log\frac{1}{u}}\right\}.$$

Отсюда, интегрируя по a отъ нуля,

$$\log\frac{G(a+b+1)}{G(a+1)G(b+1)}=\int_0^1\frac{du}{\log\frac{1}{u}}\left\{ab-\frac{(1-u^a)(1-u^b)}{(1-u)^2}\right\} \;.\;.\;. \;(2)$$

Интегралъ (2) имѣетъ конечное значеніе при $a>-1$, $b>-1$. Измѣняя знакъ у b и складывая результатъ съ (2), найдемъ:

$$\log\frac{G(a+b+1)G(a-b+1)}{G^2(1+a)G(1+b)G(1-b)}=\int_0^1\frac{(1-u^a)(1-u^b)^2}{u^b(1-u)^2\log\frac{1}{u}}du \;.\;.\;. \;(3)$$

Формула имѣетъ мѣсто, когда

$$a > -1, \qquad 1 > b > -1.$$

Отсюда, полагая

$$a=1, \qquad u=e^{-x},$$

получаемъ извѣстную формулу:

$$\frac{1}{2}\log\frac{\pi b}{\sin\pi b}=\int_0^\infty \frac{\cosh bx-1}{e^x-1}\,\frac{dx}{x}.$$

Полагая въ (3),

$$b=\frac{1}{2}, \qquad u^{\frac{1}{2}}=x,$$

имѣемъ:

$$\log\frac{\sqrt{\pi}\,G^2\left(\frac{1}{2}\right)\cdot G^2(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)G^2\left(a+\frac{1}{2}\right)}=\int_0^1\frac{(1-x^{2a})dx}{(1+x)^2\log x}\;\ldots\ldots(4)$$

Написавъ въ (1) $a+c$ вмѣсто a и вычтя (1) изъ результата, найдемъ:

$$\log\frac{G(a+1)G(a+b+c+1)}{G(a+b+1)G(a+c+1)}=\int_0^1\left\{bc-\frac{u^a(1-u^b)(1-u^c)}{(1-u^2)}\right\}\frac{du}{\log\frac{1}{u}}\;\ldots(5)$$

но согласно съ (2)

$$\log\frac{G(b+c+1)}{G(b+1)G(c+1)}=\int_0^1\left\{bc-\frac{(1-u^b)(1-u^c)}{(1-u)^2}\right\}\frac{du}{\log\frac{1}{u}},$$

а потому, вычитая первый интегралъ изъ второго:

$$\log\frac{G(a+b+1)G(a+c+1)G(b+c+1)}{G(a+1)G(b+1)G(c+1)G(a+b+c+1)}=\int_0^1\frac{(u^a-1)(u^b-1)(u^c-1)}{(1-u)^2\log\frac{1}{u}}du\;(6)$$

Измѣнивъ здѣсь a въ $a+d$ и вычтя изъ полученнаго интеграла предыдущій, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\log\frac{G(a+b+1)G(a+c+1)G(a+d+1)G(a+b+c+d+1)}{G(a+b+c+1)G(a+b+d+1)G(a+c+d+1)G(a+1)}=\\ =\int_0^1\frac{u^a(1-u^b)(1-u^c)(1-u^d)}{(1-u)^2\log\frac{1}{u}}du\end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

Продолжая тѣ-же преобразованія, очевидно, будемъ получать аналогичные результаты. Пріемъ, употребленный здѣсь, заимствованъ у Штерна *). Найденные интегралы подобны интеграламъ этого ученаго, но послѣдніе суть частные случаи предыдущихъ, такъ напр., полагая въ (6) $c=1$ и въ (7) $d=1$ въ силу соотношенія

$$G(a+2)=\Gamma(a+1)G(a+1)\,,$$

получимъ послѣдовательно:

$$\log\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}=\int_0^1\frac{(1-u^a)(1-u^b)}{(1-u)\log\frac{1}{u}}du$$

и

$$\log\frac{\Gamma(a+b+c+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+c+1)}=\int_0^1\frac{u^a(1-u^b)(1-u^c)}{(1-u)\log\frac{1}{u}}du.$$

14. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx\,.$$

Извѣстно, что

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

Слѣдовательно,

---

*) Ср. *Meyer*, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, стр. 161.

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx = x\log\pi - \int_0^x \log\Gamma(x)dx - \int_0^x \log\Gamma(1-x)dx\,. \quad . \quad (b)$$

Мы имѣли въ § 10 формулу (a):

$$\int_0^x \log\Gamma(x)dx = (x-1)\log\Gamma(x) - \log G(x) - \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Очевидно, что

$$\int_0^x \log\Gamma(1-x) = \int_0^1 \log\Gamma(x)dx - \int_0^{1-x} \log\Gamma(x)dx$$

откуда по предыдущей формулѣ, предполагая $1 - x > 0$, получимъ

$$\int_0^{1-x} \log\Gamma(x)dx = -x\log\Gamma(1-x) - \log G(1-x) - \frac{x(x-1)}{2} + \frac{1-x}{2}\log 2\pi$$

и

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\log 2\pi\,;$$

поэтому

$$\int_0^x \log\Gamma(1-x)dx = x\log\Gamma(1-x) + \log G(1-x) + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Подставляя найденные результаты въ формулу (b) и принимая въ соображенiе равенство (a), найдемъ:

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx = x\log\frac{\sin\pi x}{2\pi} + \log\frac{G(1+x)}{G(1-x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Полагая $x = \frac{1}{2}$, получимъ извѣстный результатъ:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\sin\pi x dx = -\frac{1}{2}\log 2\,.$$

Извѣстно еще другое значенiе разсматриваемаго интеграла, именно при $x = 1$.

Не трудно вывести это изъ формулы (c). Дѣйствительно, правая часть (c) можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$-x\log\Gamma(x)-(x-1)\log\Gamma(2-x)+(x-1)\log(1-x)+\log G(2-x)+$$
$$+\log G(1+x)-x\log 2\,.$$

Полагая теперь $x=1$, получимъ $-\log 2$, т. е.

$$\int_0^1 \log\sin\pi x dx = -\log 2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (d)$$

какъ и должно быть.

Равенство (c) выведено въ предположенiи $x<1$ и мы только что обнаружили, что оно имѣетъ мѣсто при $x=1$. Докажемъ, что уравненiе (c) справедливо при всѣхъ дѣйствительныхъ значенiяхъ x.

Пусть $x>0$ и положимъ, что наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x, есть n, такъ что

$$x=n+z\,,\qquad 1>z>0\,.$$

Замѣтивъ, что при всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ $\log\sin\pi x$ обращается въ ∞, опредѣлимъ разсматриваемый интегралъ такимъ образомъ:

$$\int_0^{n+z}\log\sin\pi x dx = \lim\left\{\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\eta}^{2-\varepsilon}+\int_{2+\eta}^{3-\varepsilon}+\ldots+\int_{n-1+\eta}^{n-\varepsilon}+\int_{n+\eta}^{n+z}\right\}_{\varepsilon=0,\ \eta=0,}$$

но, полагая $x=n-1+u$, имѣемъ:

$$\int_{n-1+\eta}^{n-\varepsilon}\log\sin\pi x dx=(n-1)\log(-1)\int_\eta^{1-\varepsilon}du+\int_\eta^{1-\varepsilon}\log\sin\pi u du\,.$$

Слѣдовательно,

$$\lim\int_{n-1+\eta}^{n-\varepsilon}\log\sin\pi x dx=(n-1)\log(-1)+\int_0^1\log\sin\pi u du\,.$$

Подобнымъ же путемъ убѣдимся, что

$$\int_{n+\eta}^{n+z}\log\sin\pi x dx= n\log(-1)\int_\eta^z du+\int_\eta^z\log\sin\pi x dx\,,$$

такъ что

$$\lim \int_{n+\eta}^{n+z} \log\sin\pi x dx = nz\log(-1) + \int_0^z \log\sin\pi u du .$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^{n+z} \log\sin\pi x dx = n\int_0^1 \log\sin\pi u du + [nz + 1 + 2 + \ldots + (n-1)]\log(-1) +$$

$$+ \int_0^z \log\sin\pi u du$$

или, принимая въ разсчетъ (d),

$$\int_0^{n+z} \log\sin\pi x dx = -n\log 2 + \left[nz + \frac{n(n-1)}{2}\right]\log(-1) + \int_0^z \log\sin\pi u du \;.\;.\; (e)$$

Положимъ

$$P(z) = \frac{G(1+z)}{G(1-z)} .$$

Измѣняя z въ $z+1$, имѣемъ:

$$P(z+1) = \frac{G(2+z)}{G(-z)} = \frac{\Gamma(1+z)G(1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(-z)G(-z)} ,$$

т. е.

$$P(z+1) = \Gamma(1+z)\Gamma(-z)P(z) ,$$

что, на основаніи (a), можетъ быть написано еще такъ:

$$P(z+1) = \frac{\pi}{(-1)\sin\pi z} P(z) .$$

Не трудно доказать, что вообще

$$P(z+n) = (-1)^{\frac{-n(n+1)}{2}} \frac{\pi^n}{\sin^n \pi z} P(z) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (f)$$

По формулѣ (c) можно написать:

$$\int_0^z \log\sin\pi u du = z\log\sin\pi z - z\log 2\pi + \log P(z)\,,$$

или, исключая $\log P(z)$ изъ этого ур. и (f),

$$\int_0^z \log\sin\pi u du = (n+z)\log\sin\pi z - (n+z)\log\pi - z\log 2 + \frac{n(n+1)}{2}\log(-1) +$$
$$+ \log P(z+n)\,.$$

Подставляя этотъ результатъ въ формулу (e), получимъ:

$$\int_0^{n+z} \log\sin\pi x dx = (n+z)\log\sin\pi z - (n+z)\log 2\pi + n(n+z)\log(-1) +$$
$$+ \log P(z+n)\,.$$

Положивъ

$$n + z = x$$

и, чтобы не вводить число $2\log(-1)$, написавъ

$$\sin\pi z = \sin\pi(x-n) = (-1)^{-n}\sin\pi x\,,$$

найдемъ:

$$\int_0^x \log\sin\pi x\, dx = x\log\sin\pi x - x\log 2\pi + \log P(x)$$

или

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx = x\log\frac{\sin\pi x}{2\pi} + \log\frac{G(1+x)}{G(1-x)}\,.$$

Распространеніе на отрицательныя значенія x не представляетъ затрудненій. Пусть $x = -a$, тогда

$$\int_0^{-a} \log\sin\pi x dx = -\int_0^a [\log(-1) + \log\sin\pi x] dx = -a\log(-1) - \int_0^a \log\sin\pi x dx$$

или, по доказанному,

$$\int_0^{-a} \log\sin\pi x dx = -a\log(-1) - a\log\frac{\sin\pi a}{2\pi} - \log\frac{G(1+a)}{G(1-a)},$$

или, имѣя въ виду, что

$$\log(-1) + \log\sin\pi a = \log\sin\pi(-a),$$

$$\int_0^{-a} \log\sin\pi x dx = -a\log\frac{\sin\pi(-a)}{2\pi} + \log\frac{G(1-a)}{G(1+a)},$$

что и требовалось доказать.

Съ помощью указаннаго интеграла можно найти весьма много другихъ, напр.

$$\int_0^x \pi x\cot\pi x dx = x\log\sin\pi x - \int_0^x \log\sin\pi x dx.$$

Слѣдовательно, пользуясь равенствомъ (c),

$$\int_0^x \pi x\cot\pi x dx = x\log 2\pi + \log\frac{G(1-x)}{G(1+x)}.$$

Такъ же просто находятся интегралы, въ предѣлахъ отъ 0 до x, слѣдующихъ функцій:

$$\log\cos x, \qquad \log\operatorname{tg} x,$$

$$x\operatorname{tg} x, \qquad x\operatorname{cosec} x \text{ и др.}$$

15. Функція G можетъ имѣть примѣненіе и въ другихъ случаяхъ. Пусть, напр., требуется опредѣлить функцію $F(x)$, удовлетворяющую равенству

$$F(x+a) = \cos\frac{\pi x}{a} F(x).$$

Взявъ логариѳмы и обозначая разность съ приращеніемъ α знакомъ $\triangle_\alpha$, получимъ:

$$\triangle_\alpha \log F(x) = \log\cos\frac{\pi x}{\alpha}.$$

Извѣстно, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi x}{\alpha}};$$

отсюда

$$\log\cos\frac{\pi x}{\alpha}=\log\pi-\log\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)-\log\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right),$$

но, очевидно, что

$$\triangle_\alpha \log G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)=\log\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right),$$

$$\triangle_\alpha G\log\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)=-\log\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Слѣдовательно,

$$\triangle_\alpha F(x)=\log\pi-\triangle_\alpha \log G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)+\triangle_\alpha \log G\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ:

$$F(x)=C\,.\,\pi^{\frac{x}{\alpha}}\frac{G\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)}.$$

16. Извѣстно, что

$$\log\Gamma(x)=\triangle^{-1}\log x, \qquad \log G(x)=\triangle^{-2}\log x$$

гдѣ $\triangle^{-1}$ знакъ конечнаго интеграла въ предѣлахъ отъ 1 до x, $\triangle^{-2}=\triangle^{-1}\triangle^{-1}$. По аналогіи съ предыдущимъ, не трудно догадаться, что функція $G_n(x)$, опредѣляемая изъ уравненія

$$\log G_n(x) = \triangle^{-n} \log x,$$

при условіи

$$\log G_n(1) = 0,$$

должна обладать свойствами, сходными со свойствами функціи $\Gamma(x)$.

Мы не намѣрены здѣсь останавливаться на изслѣдованіи такихъ функцій, но укажемъ только опредѣленный интегралъ, выражающій $\log G_n(x)$. Не трудно видѣть, что

$$\log G_n(x+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{u} P_n(x+1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ

$$P_n(x+1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{(n-i)}}{(n-1)!} \frac{1}{(1-e^{-u})^i} + (-1)^{n+1} \frac{x^{-xu}}{(1-e^{-u})^n};$$

при этомъ $x^{(n-i)}$ выражаетъ факторіалъ $(n-i)$-ой степени.

Очевидно, что при $n=1, 2$ интервалъ (a) выражаетъ послѣдовательно:

$$\log G_1(x+1) = \log \Gamma(x+1),$$

$$\log G_2(x+1) = \log G(x+1).$$

Поэтому для доказательства нашего утвержденія достаточно показать, что, при справедливости равенства (a) для n, оно будетъ имѣть мѣсто и для $(n+1)$. Интегрируя (a) въ предѣлахъ отъ нуля до x, получимъ:

$$\log G_{n+1}(x+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{u} \triangle^{-1} P_n(x+1),$$

но

$$\triangle^{-1} P_n(x+1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{(n-i+1)}}{(n+1-i)!} \frac{1}{(1-e^{-u})^i} + (-1)^{n+1} \frac{1-e^{-xu}}{(1-e^{-u})^n},$$

или, подводя подъ знакъ суммы предпослѣднее слагаемое,

$$\triangle^{-1} P_n(x+1) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \frac{x^{(n+1-i)}}{(n+1-i)!} \frac{1}{(1-e^{-u})^i} + (-1)^{n+2} \frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^n},$$

или, согласно съ нашимъ обозначеніемъ,

$$\triangle^{-1}P_n(x+1)=P_{n+1}(x+1),$$

и слѣдовательно:

$$\log G_{n+1}(x+1)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\,P_{n+1}(x+1),$$

что и требовалось показать.

Доказанной фомулой можно воспользоваться для обнаруженія одного свойства разностныхъ интеграловъ, что мы сдѣлаемъ дальше.

17. По теоремѣ Вейерштрасса функціи можно раздѣлить на три разряда, смотря по виду ихъ разложенія на простые множители. Можно показать, что логариѳмъ всякой функціи двухъ первыхъ разрядовъ, съ *отрицательными* корнями, можетъ быть представленъ опредѣленнымъ интеграломъ.

Положимъ, что $F(x)$ есть функція, всѣ корни которой отрицательны, или же, если они комплексныя количества, то ихъ дѣйствительныя части *отрицательны*. Обоззначимъ корень съ *обратнымъ* знакомъ чрезъ a_k и соотвѣтственный показатель кратности чрезъ p_k.

Если существуетъ такое цѣлое положительное число j (не исключая нуля), при которомъ строка

$$\frac{p_1}{(\text{mod. } a_1)^{j+1}}+\frac{p_2}{(\text{mod. } a_2)^{j+1}}+\ldots+\frac{p_k}{(\text{mod. } a_k)^{j+1}}+\ldots$$

остается сходящеюся, то логариѳмъ данной функціи $F(x)$ можно представить слѣдующей формулой:

$$\log F(x)=\log F(0)+\int_0^x \mathfrak{G}(x)dx+$$

$$+\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{du}{u}\left\{1-\frac{xu}{1}+\frac{x^2u^2}{2!}-\ldots+(-1)^j\frac{x^ju^j}{j!}-e^{-xu}\right\},$$

гдѣ $\mathfrak{G}(x)$—конечная функція на всей плоскости, а

$$S(e^{-u})=\sum_{k=1}^{\infty}p_k e^{-a_k u}.$$

По теоремѣ Вейерштрасса, (см. Laurent, Traité d'Analyse, t. III, p. 368 et suiv.),

$$\left.\begin{aligned}\log F(x) = \log F(0) + \int_0^x \mathfrak{G}(x)dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{p_k \log\left(1+\frac{x}{a_k}\right) + p_k \int_0^x \varphi_k(x)dx\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (a)$$

гдѣ

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{a_k} + \frac{x}{a_k^2} - \ldots + (-1)^j \frac{x^{j-1}}{a_k^j},$$

когда $j>0$; если же $j=0$, то добавочнаго интеграла отъ φ_k вовсе не существуетъ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы будемъ называть данную функцію *простою*.

Слѣдовательно,

$$\int_0^x \varphi_k(x)dx = -\frac{x}{a_k} + \frac{x^2}{2a_k^2} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j}{ja_k^j}.$$

Не трудно замѣтить, что

$$\frac{x^j}{ja_k^j} = \frac{x^j \Gamma(j)}{j!\, a_k^j} = \frac{x^j}{j!}\int_0^{\infty} e^{-a_k u} u^{j-1} du,$$

а потому

$$\int_0^x \varphi_k(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-a_k u} \frac{du}{u}\left\{-\frac{xu}{1} + \frac{x^2u^2}{2!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j!}\right\}.$$

Далѣе извѣстно, что при высказанныхъ условіяхъ,

$$\log\left(1+\frac{x}{a_k}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a_k u} - e^{-(a_k+x)u}}{u}\, du,$$

лишь бы только

$$|a_k| + x > 0.$$

Подставляя эти величины подъ знакъ суммы въ (a), получимъ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \int_0^{\infty} e^{-a_k u} \frac{du}{u} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2\,!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j\,!} \right\}$$

или

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{-a_k u} \left\{ 1 - \frac{xu}{1} + \frac{x^2u^2}{2\,!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j\,!} - e^{-xu} \right\} \frac{du}{u}.$$

Полагая теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{-a_k u} = S(e^{-u}),$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \log F(x) = \log F(0) + \int_0^x \mathfrak{G}(x)dx + \\ \int_0^{\infty} S(e^{-u}) \frac{du}{u} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2\,!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j\,!} - e^{-xu} \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Такъ какъ въ (a) строка всегда сходящаяся, то и $S(e^{-u})$ должна быть сходящейся строкой; но обратный переходъ, отъ интеграла вида (b) къ (a), возможенъ только тогда, когда остаточный членъ въ формулѣ (b) стремится къ нулю.

Полагая въ (b) $j = 0$, получаемъ интегралъ, соотвѣтствующій простой функціи. Наконецъ, разсуждая по прежнему, убѣдимся, что если $-a_k$ будетъ *полюсъ* функціи $F(x)$, то формула (b) не измѣнится, только послѣдній интегралъ придется взять съ минусомъ.

18. Не трудно замѣтить, что формула Вейерштрасса не измѣняется, если показатели кратности будутъ *дробные*, слѣдовательно, то же справедливо и для (b). Даже можно убѣдиться, что всякой не простой функціи соотвѣтствуетъ *простая* съ тѣми же корнями или полюсами, но показатели кратности которыхъ вообще *дробные*. Дѣйствительно, дифференцируя (a), найдемъ:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \mathfrak{G}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left\{ \frac{1}{a_k + x} + \varphi_k(x) \right\}$$

или, имѣя въ виду, что

$$\frac{1}{a_k+x}+\varphi_k(x)=(-1)^j\frac{x^j}{a_k^j(a_k+x)},$$

найдемъ:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\mathfrak{G}(x)+(-1)^j x^j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_k^j(a_k+x)}.$$

Полагая

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_k^j(a_k+x)}=\frac{L'(x)}{L(x)},$$

получимъ

$$\log F(x)=\log F(0)+\int_0^x\mathfrak{G}(x)dx+(-1)^j\int_0^x x^j\frac{L'(x)}{L(x)}dx \quad . \quad . \quad (c)$$

и въ то же время

$$\log\frac{L(x)}{L(0)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_k^j}\log\left(1+\frac{x}{a_k}\right).$$

Очевидно, при высказанныхъ раньше условіяхъ, правая часть послѣдней формулы будетъ сходящейся строкой, слѣдовательно $L(x)$ функція конечная и, согласно съ формулой (b), можетъ быть представлена такимъ образомъ:

$$\log\frac{L(x)}{L(0)}=\int_0^{\infty}S_1(e^{-u})\frac{1-e^{-xu}}{u}du, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

гдѣ

$$S_1(e^{-u})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_{kj}}e^{-a_k u}.$$

Дифференцируя (d) и подставляя въ (c), находимъ:

$$\log F(x)=\log F(0)+\int_0^x\mathfrak{G}(x)dx+(-1)^j\int_0^x x^j dx\int_0^{\infty}S_1(e^{-u})e^{-xu}du \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Эта формула представляетъ въ новой формѣ выраженіе $\log F(x)$ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Примѣняя сказанное къ функціямъ $\Gamma(x)$ и $G(x)$, получимъ:

$$\log G(1+x)=\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x+1)}{2}-\gamma\frac{x^2}{2}-\int_0^x x^2dx\int_0^\infty \log(1-e^{-u})e^{-xu}du,$$

$$\log\frac{1}{\Gamma(x+1)}=\gamma x+\int_0^x xdx\int_0^\infty \log(1-e^{-u})e^{-xu}du,$$

$$\log\frac{L(x)}{L(0)}=-\int_0^\infty \log(1-e^{-u})\frac{1-e^{-xu}}{u}du=-\int_0^x du\int_0^\infty \log(1-e^{-u})e^{-xu}du,$$

$$\frac{L(x)}{L(0)}=\prod_1^\infty\left(1+\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Разумѣется, здѣсь L не то же, что раньше.

19. Положимъ, что $f(x+1)$ есть простая функція съ отрицательными корнями. Не обращая вниманія на часть, не зависящую отъ корней, можно написать:

$$\log f(x+1)=\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{1-e^{-xu}}{u}du. \tag{1}$$

Обозначимъ разностный интегралъ n-го порядка между предѣлами 0 и x чрезъ $\log f_n(x+1)$; тогда, согласно съ выведеннымъ раньше, будемъ имѣть:

$$\log f_n(x+1)=\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{du}{u}\,.\,P_n(x+1), \tag{2}$$

полагая

$$P_n(x+1)=\sum_{i=0}^n(-1)^i\frac{x^{(n-i)}}{(n-i)!}\frac{1}{(1-e^{-u})^i}+(-1)^{n+1}\frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^n}. \tag{3}$$

Выраженіе (2) можетъ быть преобразовано. По теоремѣ Тейлора:

$$\log f_n(x+a)=\log f_n(a)+\frac{x}{1}\frac{d}{da}\log f_n(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\log f_n(a)+\varrho.$$

Опредѣляя ϱ, получимъ:

$$\varrho = \log f_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} \log f_n(a)\,,$$

или, при помощи (1) и (2),

$$\varrho = \int_0^\infty S(e^{-u}) \frac{du}{u} \left\{ P_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} P_n(a) \right\}. \tag{4}$$

Напишемъ уравненіе (3) въ такомъ видѣ:

$$P_n(x+a) = R(x+a) + \frac{(-1)^{(n+1)} e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} e^{-xu}\,;$$

отсюда

$$\frac{d^k P_n(a)}{da^k} = \frac{d^k R(a)}{dx^k} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} (-1)^k u^k.$$

Умножая послѣднее равенство на $\frac{x^k}{k!}$, проводя k отъ 0 до n и вычтя результатъ изъ предшествующаго равенства, найдемъ:

$$P_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k P_n(a)}{da^k} = R(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} R(a)$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} \left\{ e^{-xu} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} \right\},$$

но

$$R(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} R(a) = 0\,,$$

ибо $R(x+a)$ есть цѣлая раціональная функція x n-ой степени, а потому

$$P_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k P_n(a)}{da^k} = \frac{(-1)^n e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\}$$

и слѣдовательно, уравненіе (4) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\varrho = (-1)^n \int_0^\infty S(e^{-u}) \frac{e^{-(a-1)u} du}{u(1-e^{-u})^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Легко видѣть, что это преобразованіе имѣетъ мѣсто, когда

$$\left| a_1 + a - 1 \right| > 0 \, .$$

И такъ,

$$\left. \begin{aligned} \log f_n(x+a) &= \log f_n(a) + \ldots + \frac{x^n}{k!} \frac{d^n}{da^n} \log f_n(a) + \\ &+ (-1)^n \int_0^\infty S(e^{-u}) \frac{e^{-(a-1)u} du}{u(1-e^{-u})^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Полагая

$$S(e^{-u}) = e^{-u},$$

получимъ

$$\left. \begin{aligned} \log G_n(x+a) &= \log G_n(a) + \ \ldots \ + \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \log G_n\,(a) + \\ &+ (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-au} du}{u(1-e^{-u})^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Послѣ этихъ предварительныхъ преобразованій можемъ перейти къ разложенію $f_n(x+a)$ на множители.

Разложимъ въ выраженіи (5) $(1-e^{-u})^{-n}$ на множители такимъ образомъ:

$$(1-e^{-u})^{-n} = (1-e^{-u})^{-m} (1-e^{-u})^{-n+m},$$

допуская, что

$$m < n + 1 \, .$$

Затѣмъ второй изъ нихъ разлагаемъ въ строку по положительнымъ степенямъ e^{-u}, полагая

$$\frac{1}{(1-e^{-u})^{n-m}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i e^{-iu}.$$

Вслѣдствіе этого выраженіе для ϱ преобразуется въ слѣдующее:

$$\varrho = (-1)^n \sum_{i=0}^{\infty} b_i \int_0^{\infty} \frac{S(-e^{-u}) e^{-(a+i-1)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\}$$

и потому, замѣтивъ, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} +$$

$$+ (-1)^{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \frac{x^{m+1+j} u^{m+1+j}}{(m+1+j)!},$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \varrho = (-1)^n \sum_{i=0}^{\infty} b_i \Bigg[\int_0^{\infty} \frac{S(e^{-u}) e^{-(a+i-1)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\} + \\ + (-1^{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \frac{x^{m+1+j}}{(m+1+j)!} \int_0^{\infty} \frac{u^{m+j} e^{-(a+i-1)u} S(e^{-u}) du}{(1-e^{-u})^m} \Bigg] \end{aligned}\right\} . \quad (8)$$

Ради краткости введемъ слѣдующее обозначеніе:

$$\frac{d}{da} \log f_n(a) = \varphi_n(a).$$

По перемѣнѣ n на m, формула (6) приметъ такой видъ:

$$\log f_m(x+a) = \log f_m(a) + x\varphi_m(a) + \ldots + \frac{x^m}{m!} \varphi_m^{m-1}(a) +$$

$$+ (-1)^m \int_0^{\infty} \frac{S(e^{-u}) e^{-(a-1)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{ \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\}.$$

Дифференцируя это равенство $(m+1+j)$ разъ по x и полагая въ результатѣ $x=0$, найдемъ:

$$\varphi_m^{(m+1+j)}(a)=(-1)^j\int_0^\infty \frac{S(e^{-u})e^{-(a-1)u}u^{m+j}}{(1-e^{-u})^m}\,du.$$

Вслѣдствіе этого, по замѣщеніи въ этихъ равенствахъ a чрезъ $a+i$, получимъ:

$$\varrho=(-1)^{n-m}\sum_{i=0}^{\infty} b_i\left[\log\frac{f_m(x+a+i)}{f_m(a+i)}-x\varphi_m(a+i)-\ldots-\frac{x^n}{n!}\varphi_m^{(n-1)}(a+i)\right].$$

Такимъ образомъ, изъ этой формулы и (6) находимъ, что, когда $n-m$ четное число, то

$$f_n(x+a)=$$

$$=f_n(a)e^{\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)}\prod_{i=0}^{\infty}\left[\frac{f_m(x+a+i)}{f_m(a+i)}\right]^{b_i}e^{-b_i\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_m(a+i)}.$$

Если же $n-m$ нечетное число, то

$$\left.\begin{aligned}&f_n(x+a)=\\&=f_n(a)e^{\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)}\prod_{i=0}^{\infty}\left[\frac{f_m(a+i)}{f_m(x+a+i)}\right]^{b_i}e^{b_i\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_m^j(a+i)}\end{aligned}\right\}(a)$$

т. е. всякая функція $f_n(x+a)$ разлагается на множители, составленные изъ функцій того-же рода, но низшаго порядка.

Можно показать, что всякая функція $f_n(x+a)$ разлагается на множители, составленные изъ функцій подобныхъ функціи $\Gamma(x)$.

Пусть

$$S(e^{-u}) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l e^{-a_l u}$$

и

$$\frac{S(e^{-u})}{(1-e^{-u})^{n-m}} = \sum p_l b_i e^{-(a_l+i)u};$$

тогда, пользуясь равенствомъ (5), или лучше (8), получимъ:

$$\varrho = (-1)^n \sum p_l b_i \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+a_l+i)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu}\right\} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \frac{x^{m+1-j}}{(m+1-j)!} \int_0^{\infty} \frac{u^{m+j} e^{-(a+a_l+i)u} du}{(1-e^{-u})^m}\right].$$

Отсюда, разсуждая по прежнему, при посредствѣ формулы (7) найдемъ:

$$\log f_n(x+a) = \log f_n(a) + \sum_0^{n-1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \varphi_n^j(a) +$$

$$+ (-1)^{n-m} \sum p_l b_i \left[\log \frac{G_m(x+a_l+i+a)}{G_m(a+a_l+i)} - \sum_0^{n-1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \Phi_m^j(a+a_l+i)\right]$$

или, если $n-m$ четное,

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x+a) = f_n(a) e^{\sum_0^{n-1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \varphi_n^j(a)} \cdot \\ \prod \left[\frac{G_m(x+a+a_l+i)}{G_m(a+a_l+i)}\right]^{p_l b_i} e^{-\sum_0^{n-1} p_l b_i \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \Phi_m^j(a+a_l+i)} \end{array}\right\} \ldots (b)$$

гдѣ

$$\Phi_m^j(a) = \frac{d}{da} \log G_m(a).$$

При допущенiи $m=0$ получимъ теорему Вейерштрасса. Дѣйствительно,

$$G_0(x) = x\,,$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{x}\,,$$

$$\Phi_0^j(x) = (-1)^j \frac{j!}{x^{j+1}}\,.$$

Слѣдовательно, полагая еще $a=1$ и замѣняя $i+1$ чрезъ i, найдемъ:

$$\left.\begin{array}{c} f_n(x+1) = f_n(a)\, e^{\sum\limits_0^{n-1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)} \\ \prod \left(1+\frac{x}{a_l+i}\right)^{p_l b_{i-1}} e^{+p_l b_{i-1} \sum\limits_0^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \frac{x^{j+1}}{(a_l+i)^{j+1}}} \end{array}\right\} \ldots (c)$$

какъ и должно быть. (Ср. съ формулой (a) и слѣдующей § 17).

20. Разсмотрѣнныя нами функціи, подобныя функціи $\Gamma(x)$, суть частные виды болѣе общихъ. Въ виду связи этихъ функцій съ функціями θ, мы остановимся на выводѣ нѣкоторыхъ свойствъ одной изъ нихъ. Опредѣлимъ функцію, удовлетворяющую равенству

$$H(x+1) = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right) H(x)\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

предполагая

$$H(1) = 1\,.$$

Очевидно, что при $\alpha = 1$ искомая функція совпадаетъ съ $G(x)$.

Если $x > 0$ и $\alpha > 0$, то

$$\log\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha u}\,du}{u}\left\{\frac{x-\alpha}{\alpha} - \frac{1-e^{-(x-\alpha)u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\}.$$

Взявъ конечный интегралъ этого выраженія отъ 1 до x, найдемъ:

$$\log H(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha u}\,du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}} + \frac{e^{-(1-\alpha)u} - e^{-(x-\alpha)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})}\right\}. \quad (2)$$

Докажемъ, что

$$H(x+\alpha) = (2\pi)^{\frac{\alpha-1}{2}}\, \alpha^{-\frac{2x-1}{2}}\, \Gamma(x) H(x) \ldots \ldots \ldots (3)$$

Не трудно вывести, что

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)}=\int_0^\infty e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\left\{\frac{2x-1-\alpha}{2}-\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha u}}+\frac{e^{-(x-\alpha)}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Вычитая отсюда

$$\log\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{x-1-\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\},$$

найдемъ:

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-u}-e^{-\alpha u}}{u}\,du+$$

$$+\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{-\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha u}-\frac{\alpha e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha u}}+\frac{1}{2}e^{-u}+\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Замѣняя первый интегралъ его значеніемъ и прибавляя во второмъ

$$\frac{\alpha}{\alpha u}-\frac{1}{u}=0,$$

дадимъ предыдущей формулѣ видъ:

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\log\alpha+\alpha\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{\alpha u}-\frac{1}{2}e^{-\alpha u}-\frac{e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\}-$$

$$-\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{2}e^{-u}-\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right\},$$

или, замѣняя въ первомъ αu чрезъ u,

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\log\alpha+(\alpha-1)\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{2}e^{-u}-\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Назовемъ оставшійся интегралъ чрезъ y и припомнимъ теорему Коши:

$$\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log2\pi-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+\bar{\omega}(x),$$

$$\bar{\omega}(x)=\int_0^\infty e^{-xu}\frac{du}{u}\left\{\frac{2}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right\}.$$

Полагая въ этихъ равенствахъ $x=1$, найдемъ:

$$\overline{\omega}(1)=1-\frac{1}{2}\log 2\pi,$$

$$\overline{\omega}(1)=\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right\}.$$

Складывая интегралы y и $\overline{\omega}(1)$, имѣемъ:

$$y+\overline{\omega}(1)=\int_0^\infty \frac{du}{u}\left\{\frac{1-e^{-u}}{u}-e^{-u}\right\}=\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{e^u-1-u\right\}.$$

Развертывая e^u въ строку, не трудно получить:

$$y+\overline{\omega}(1)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-u}u^{k-2}du=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=1.$$

И такъ,

$$y+\overline{\omega}(1)=1.$$

Подставляя сюда значеніе $\overline{\omega}(1)$, приведенное выше, найдемъ:

$$y=\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Слѣдовательно,

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\log\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\log 2\pi,$$

что и требовалось доказать.

Полагая въ (1) и (3) $x=\alpha$ и $x=1$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}H(\alpha+1)&=H(\alpha)\\ H(\alpha)&=\alpha^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{\alpha-1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

Вслѣдствіе этого соотношенія равенство (3) можно написать въ другомъ видѣ, именно:

$$H(x+\alpha)=H(\alpha)\alpha^{-(x-1)}\Gamma(x)H(x)\,.\quad\ldots\ldots\ (5)$$

Изъ этихъ равенствъ легко получается одинъ извѣстный результатъ.

Полагая, что $\alpha=n$, цѣлому положительному числу, изъ формулы (1) находимъ:

$$H(n)=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

но изъ формулы (4):

$$H(n)=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

слѣдовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

21. Между функціями H, при различныхъ значеніяхъ постояннаго α, существуетъ нѣсколько зависимостей.

Во избѣжаніе недоразумѣній мы будемъ означать $H(x)$ при постоянномъ α чрезъ $H(x,\alpha)$.

Если замѣнимъ въ равенствѣ (1) α чрезъ $\frac{1}{\alpha}$, то оно принимаетъ видъ:

$$H\left(x+1,\frac{1}{\alpha}\right)=\Gamma(\alpha x)H\left(x,\frac{1}{\alpha}\right).$$

Въ то же время, подставивъ въ (5) αx вмѣсто x, получимъ:

$$H(\alpha x+\alpha,\alpha)=H(\alpha,\alpha)\alpha^{-(\alpha x-1)}\Gamma(\alpha x)H(\alpha x,\alpha).$$

Логариѳмируя эти два равенства и исключая изъ нихъ $\log\Gamma(\alpha x)$ находимъ разностное уравненіе:

$$\triangle\log H\left(x,\frac{1}{\alpha}\right)=\triangle\log H(\alpha x,\alpha)+(\alpha x-1)\log\alpha-\log H(\alpha,\alpha),$$

откуда

$$H\left(x,\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{H(\alpha x,\alpha)}{H^{x}(\alpha,\alpha)}\alpha^{\frac{(x-1)(\alpha x-2)}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

или въ другой формѣ:

$$H\left(\frac{x}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{H(x,\alpha)}{H^{\frac{x}{\alpha}}(\alpha,\alpha)}\alpha^{\frac{(x-2)(x-\alpha)}{2\alpha}}.$$

Переходимъ къ выводу другихъ соотношеній.

Измѣнимъ въ (5) x въ $x+1$; тогда

$$H(x+1+\alpha\,,\alpha)=H(\alpha\,,\alpha)\alpha^{-x}\Gamma(x+1)H(x+1\,,\alpha)\,,$$

но, принимая во вниманіе равенство (1), можно предыдущее соотношеніе представить такимъ образомъ:

$$H(x+1+\alpha\,,\alpha)=H(\alpha\,,\alpha)\alpha^{-x}x\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)H(x\,,\alpha)\;.\;\;.\;\;.\quad(7)$$

Если положимъ

$$x=(\alpha+1)z\,,$$

то послѣднее равенство приметъ видъ разностнаго уравненія, именно:

$$H[(\alpha+1)(z+1),\alpha]=H(\alpha,\alpha)\alpha^{-(\alpha+1)z}(\alpha+1)z\Gamma[(\alpha+1)z]\Gamma\left[\frac{\alpha+1}{\alpha}z\right]H[(\alpha+1)z,\alpha],$$

интегралъ котораго, полагая нижній предѣлъ, равнымъ единицѣ, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$H[(1+\alpha)z,\alpha]=H^{z}(\alpha,\alpha)\alpha^{\frac{-(\alpha+1)z(z-1)}{2}}(\alpha+1)^{z-1}\Gamma(z)H\left(z,\frac{1}{\alpha+1}\right)H\left(z,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\quad(8)$$

или въ иной формѣ:

$$\frac{H(x\,,\alpha)}{H\left(\frac{x}{\alpha+1},\frac{1}{\alpha+1}\right)H\left(\frac{x}{\alpha+1},\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)}=H^{\frac{x}{\alpha+1}}(\alpha,\alpha)\alpha^{\frac{-x(x-\alpha-1)}{2(\alpha+1)}}(\alpha+1)^{\frac{x-\alpha-1}{\alpha+1}}\Gamma\left(\frac{x}{\alpha+1}\right).$$

Если въ двухъ функціяхъ $H(x\,,\alpha)$ и $H(x\,,\beta)$ отношеніе постоянныхъ параметровъ $\frac{\beta}{\alpha}$ есть число соизмѣримое, то каждая изъ нихъ можетъ быть выражена чрезъ другую. Положимъ

$$\beta=\frac{m}{n}\alpha\,,$$

гдѣ m и n числа цѣлыя и положительныя. По теоремѣ Лежандра:

$$\Gamma\left(\frac{nx}{m\alpha}\right)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}n^{\frac{nx}{m\alpha}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}+\frac{n-1}{n}\right) \quad (a)$$

Мы знаемъ, что

$$\log H\left(x\,,\frac{m}{n}\,\alpha\right)=\Big|_1^x \triangle^{-1}\log\Gamma\left(\frac{nx}{m\alpha}\right),$$

$$\log\frac{H(x+p\,,m\alpha)}{H(1+p\,,m\alpha)}=\Big|_1^x \triangle^{-1}\log\Gamma\left(\frac{x+p}{m\alpha}\right),$$

и, полагая въ послѣднемъ равенствѣ

$$p=\frac{mk\alpha}{n},$$

получимъ

$$\log\frac{H\left(x+\frac{km\alpha}{n}\,,m\alpha\right)}{H\left(1+\frac{km\alpha}{n}\,,m\alpha\right)}=\Big|_1^x \triangle^{-1}\log\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}+\frac{k}{n}\right);$$

поэтому разностное интегрированіе равенства (a) даетъ:

$$H\left(x\,,\frac{m}{n}\,\alpha\right)=\frac{n^{\frac{(x-1)(nx-m\alpha)}{2m\alpha}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{H\left(x+\frac{km\alpha}{n}\,,m\alpha\right)}{H\left(1+\frac{km\alpha}{n}\,,m\alpha\right)}\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

Остается выразить $H(x,m\alpha)$ чрезъ $H(x,\alpha)$.

По опредѣленію (1)

$$H(mz+m\,,m\alpha)=$$
$$=\Gamma\left(\frac{mz+m-1}{m\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{mz+m-2}{m\alpha}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{mz+1}{m\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{z}{\alpha}\right)H(mz,m\alpha)$$

или иначе

$$\triangle\log H(mz\,,m\alpha)=\sum_{j=0}^{m-1}\log\Gamma\left(\frac{mz+j}{m\alpha}\right).$$

Отсюда посредствомъ интеграціи отъ $\frac{1}{m}$ до z, находимъ:

$$H(mz, m\alpha) = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{H\left(z + \frac{j}{m}, \alpha\right)}{H\left(\frac{1+j}{m}, \alpha\right)} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Полагая теперь

$$mz = x,$$

имѣемъ:

$$H(x, m\alpha) = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{H\left(\frac{x+j}{m}, \alpha\right)}{H\left(\frac{1+j}{m}, \alpha\right)} \quad \ldots \ldots \quad (10)'$$

Изъ равенствъ (9) и $(10)'$ уже легко вывести, что

$$H\left(x, \frac{m}{n}\alpha\right) = \frac{n^{\frac{(x-1)(nx-m\alpha)}{2m\alpha}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{H\left(\frac{nx+nj+km\alpha}{mn}, \alpha\right)}{H\left(\frac{n+nj+km\alpha}{mn}, \alpha\right)} \quad \ldots \quad (11)$$

что и оправдываетъ наше предложеніе.

Если параметръ α въ функціи $H(x, \alpha)$ есть число соизмѣримое, то эта функція выражается чрезъ функціи G и Γ различныхъ аргументовъ. Чтобы доказать это, стоитъ только положить въ формулѣ (11) $\alpha = 1$; тогда, имѣя въ виду, что

$$H(x, 1) = G(x),$$

получимъ:

$$H\left(x, \frac{m}{n}\right) = \frac{n^{\frac{(x-1)nx-m)}{2m}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{G\left(\frac{nx+nl+km}{mn}\right)}{G\left(\frac{n+nj+km}{mn}\right)}.$$

Два случая, когда

$$\alpha = n \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{n},$$

заслуживаютъ особаго вниманія. Положимъ въ (9)

$$m\alpha = n\,;$$

тогда это равенство обратится въ слѣдующее:

$$G(x) = \frac{n^{\frac{(x-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{H(x+k\,,n)}{H(1+k\,,n)}\,.$$

Правая часть этого выраженія легко преобразуется. По формулѣ (1), имѣемъ:

$$H(x+1\,,n) = \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) H(x\,,n)\,,$$

$$H(x+2\,,n) = \Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) H(x\,,n)\,,$$

. . . .

$$H(x+n-1\,,n) = \Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+n-2}{n}\right) H(x\,,n)\,,$$

поэтому

$$\prod_{k=0}^{n-1} H(x+k,n) = \Gamma^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma^{n-2}\left(\frac{x+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+n-2}{n}\right) H^n(x,n).$$

Слѣдовательно

$$G(x) = \frac{n^{\frac{(x-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}}\; \frac{\Gamma^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma^{n-2}\left(\frac{x+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}\, H^n(x,n)\,. \quad (12)$$

Для вывода зависимости, соотвѣтствующей второму случаю, подставимъ теперь nx вмѣсто x, тогда

$$G(nx) = \frac{n^{\frac{(nx-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(nx-1)}{2}}}\; \frac{\Gamma^{n-1}(x)\Gamma^{n-2}\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}\, H^n(nx,n) \quad (12)'$$

Припомнивъ формулу (6), не трудно заключить, что

$$H(nx\,,n)=n^{-\frac{(x-1)(nx-2)}{2}}H^x(n\,,n)H\left(x\,,\frac{1}{n}\right).$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній, найдемъ:

$$G(nx)=n^{\frac{(n-1)(nx-2)}{2}}\frac{\Gamma^{n-1}(x)\Gamma^{n-2}\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^{n-3}\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)}H^n\left(x\,,\frac{1}{n}\right).$$

Наконецъ, предыдущими результатами можно воспользоваться для вывода формулы умноженія аргумента функціи $G(x)$. Полагая въ (10)

$$a=1\,,\quad m=n\,,\quad z=x$$

это равенство можно написать такимъ образомъ:

$$H(nx\,,n)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{G\left(x+\frac{j}{n}\right)}{G\left(\frac{1+j}{n}\right)}.$$

Подставляя это значеніе H въ выраженіе $(12)'$, получимъ:

$$G(nx)=\frac{n^{\frac{(nx-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(nx-1)}{2}}}\frac{\Gamma^{n-1}(x)\Gamma^{n-2}\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{1}\right)}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{G^n\left(x+\frac{j}{n}\right)}{G^n\left(\frac{1+j}{n}\right)}$$

22. До сихъ поръ мы разсматривали функцію H, предполагая, что перемѣнное x и параметръ a количества дѣйствительныя; но это условіе становится излишнимъ, если принять за опредѣленіе нашей функціи то безконечное произведеніе, въ которое оно разлагается.

Примѣняя пріемъ, изложенный въ § 4, и полагая для краткости

$$\frac{d\log H(x)}{dx}=f(x)\,,$$

получимъ:

$$\log H(x+1) = xf(1) + \frac{x^2}{2} f'(1) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-au} du}{u(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu} \right\}.$$

Сверхъ того, извѣстно, что

$$\log \Gamma\left(\frac{x}{\alpha} + 1\right) = \frac{x}{\alpha} \psi(1) + \frac{x^2}{2\alpha^2} \psi'(1) -$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha u} du}{u(1-e^{-\alpha u})} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu} \right\}.$$

Если вычтемъ эти два выраженія и замѣтимъ, что

$$\frac{H(x+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)} = \frac{H(x)}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$$

$$\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})} + \frac{e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha u}} = \frac{1}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})} - 1,$$

то, полагая

$$f(1) + \frac{1}{\alpha} \psi(1) = a,$$

$$\frac{1}{2}\left[f'(1) + \frac{1}{\alpha^2} \psi'(1) \right] = b,$$

будемъ имѣть:

$$\log \frac{H(x)}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)} = ax + bx^2 + \int_0^\infty \frac{du}{u} \left\{ \frac{1}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})} - 1 \right\} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu} \right\}.$$

Отсюда

$$H(x) = e^{ax+bx^2} \frac{x}{\alpha} \prod \left(1 + \frac{x}{m+n\alpha}\right) e^{-\frac{x}{m+n\alpha} + \frac{x^2}{2(m+n\alpha)^2}},$$

гдѣ буквамъ m и n приписываются всѣ цѣлыя положительныя значенія отъ 0 до ∞, исключая сочетаніе $m=0$, $n=0$.

Принимая это произведеніе за опредѣленіе функціи $H(x)$ и полагая

$$x=\frac{z}{\omega}\,, \qquad \alpha=\frac{\omega'}{\omega}\,,$$

гдѣ ω и ω' періоды эллиптическихъ функцій, получимъ:

$$H\left(\frac{z}{\omega}\right)=e^{a\frac{z}{\omega}+b\frac{z^2}{\omega^2}}\frac{z}{\omega'}\prod\left(1+\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)e^{-\frac{z}{m\omega+n\omega'}+\frac{z^2}{2(m\omega+n\omega')}}.$$

Ясно, что эта функція составлена изъ *четверти* множителей, входящихъ въ составъ функцій σ_3 Вейерштрасса (или θ_1 Якоби), и при томъ она получается изъ σ_3 такъ-же точно, какъ $\frac{1}{\Gamma(z)}$ изъ $\sin\pi z$. Но въ двупеіодическихъ функціяхъ отношеніе $\frac{\omega'}{\omega}$ должно быть мнимымъ или комплекснымъ, тогда какъ для функціи H это условіе вовсе не обязательно.

Функція H аналогична функціи Гейне *), которая составлена изъ *половины* множителей σ_3. Для сличенія приводимъ изъ мемуара Аппеля **), гдѣ онъ занимается обобщеніемъ функціи Гейне, ея выраженіе:

$$\mathrm{O}(x,\ \omega,\ \omega')=e^{a'x^2+b'x+c}\,x\prod\left(1-\frac{x}{m\omega-n\omega'}\right)e^{\frac{x}{m\omega-n\omega'}+\frac{x^2}{2(m\omega-n\omega')^2}},$$

при

$$m=0\,,\ \pm1\,,\ \pm2\,,\ldots\pm\infty\,,$$

$$n=0\,,\ +1\,,\ +2\,,\ldots+\infty\,,$$

исключая комбинацію $m=0$, $n=0$.

Кромѣ указаннаго произведенія за опредѣленіе функціи H можетъ быть принято любое изъ остальныхъ. Такъ, пользуясь способомъ, изложеннымъ въ § 2, не трудно доказать, что

---

*) Handbuch der Kugelfunctionen. стр. 109 или Crelle J. t. 34. стр. 290.

**) Mathematische Annalen. B. 19. стр. 84.

$$H(x) = \left(1+\frac{n}{\alpha}\right)^{\frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha}} \Gamma^{x-1}\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+k}{\alpha}\right)}$$

$$\text{при} \quad n = \infty .$$

Этой формулой можно воспользоваться для доказательства основныхъ свойствъ функціи $H(x)$, но на этомъ мы не станемъ останавливаться.

Любопытно, что функція H можетъ быть представлена еще другимъ произведеніемъ такого-же вида, какъ и приведенное выше.

Обратимся опять къ интегралу (2):

$$\log H(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha u} \frac{du}{u} \left\{ \frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}} + \frac{e^{-(1-\alpha)u} - e^{-(x-\alpha)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})} \right\} .$$

Вычтя изъ обѣихъ частей этого равенства слѣдующее:

$$(x-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (x-1)\int_0^\infty e^{-\alpha u} \frac{du}{u} \left\{ \frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{1-e^{-(1-\alpha)u}}{1-e^{-\alpha u}} \right\},$$

найдемъ

$$\log H(x) - (x-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^\infty \frac{du}{u} \left\{ \frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}}\, e^{-u} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-u} - e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})} \right\};$$

отсюда же, добавивъ предварительно въ скобкахъ

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} e^{-u} - \frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} e^{-u} = 0,$$

получимъ:

$$\log H(x) - (x-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} \log\alpha = \log J(x) ,$$

полагая

$$\log J(x) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})}\right\} (a)$$

Разлагая этотъ интегралъ въ безконечную сумму опять такъ-же, какъ въ § 2, съ той только разницей, что всѣ члены умножаются на

$$1-e^{-n\alpha u}+e^{-n\alpha u},$$

и замѣтивъ, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{x-1}{\alpha} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\} = \log\left\{\alpha^{x-1}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}, \quad . \ . \ . \ (b)$$

найдемъ:

$$J(x) = \alpha^{n(x-1)}(1+n\alpha)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}}\frac{\Gamma^{x-1}\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)}{\Gamma^{x-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(x+k\alpha)}.$$

Слѣдовательно,

$$H(x) = \alpha^{n(x-1)}\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}}\Gamma^{x-1}\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(x+k\alpha)},$$

при $n=\infty$.

При выводѣ этихъ формулъ предполагалось, что $\alpha>0$. Однако, интегралъ (a) остается конечнымъ, когда $\alpha<0$; поэтому казалось бы, что выведенное произведеніе имѣетъ мѣсто и при этомъ условіи, но легко убѣдиться въ неправильности такого вывода. Дѣло въ томъ, что интегралы, при помощи которыхъ совершается переходъ отъ равенства (a), къ безконечному произведенію, въ этомъ случаѣ обращаются въ ∞, и, слѣдовательно, выводъ произведенія долженъ быть сдѣланъ иначе.

Чтобы составить себѣ понятіе о томъ, что выражаетъ формула (a) въ данномъ случаѣ, удобнѣе поступать слѣдующимъ образомъ.

Если перемѣнимъ знакъ у α въ интегралѣ (a), то онъ приметъ видъ:

$$\log J_1(x) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{-\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{+\alpha u}} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{+\alpha u})}\right\}.$$

Складывая это выраженіе съ прежнимъ (a), находимъ:

$$\log J(x) J_1(x) = -\int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{u} \left\{ x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)u}}{1 - e^{-u}} \right\} = -\log \Gamma(x) .$$

Отсюда

$$J_1(x) = \frac{1}{J(x) \Gamma(x)} .$$

Аналогичнымъ этому свойствомъ обладаютъ многіе интегралы, въ томъ числѣ интегралъ (b).

Объ интерполированіи нѣкоторыхъ произведеній *).

В. А. Стеклова.

Обозначимъ черезъ

$$\prod_{\alpha+k\beta}$$

произведеніе вида

$$(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)\;\ldots.\;(\alpha+k\beta)\,.$$

Интерполированіе этого произведенія, а также произведеній вида

$$\prod_{\alpha-k\beta}\,,\qquad \prod_{\alpha-k^2\beta}\,,\qquad \prod_{\alpha+k^2\beta}\,,$$

можно произвести, основываясь на нѣкоторыхъ свойствахъ функціи $\Gamma(x)$.

Какъ извѣстно,

$$\log\Gamma(x)=\sum_{1}^{\infty}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right]$$

или

$$\left.\begin{aligned}\log\Gamma(x)=&\sum_{1}^{k}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right]+\\ &+\sum_{k+1}^{\infty}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].\end{aligned}\right\}\;.\;.\quad(\mathrm{I})$$

*) См. въ этомъ же томѣ „Сообщеній Х. М. О." статью *И. И. Иванова* „Объ интерполированіи двухъ произведеній" стр. 78—81.

Пусть

$$\log\psi(x) = \sum_{k+1}^{\infty}\left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\};$$

это выраженіе стремится къ нулю по мѣрѣ возрастанія m.

При этомъ

$$\log\psi(x) = \sum_{k+1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{x-1}{2m^2}+\dfrac{x-1}{3m^3}-\ldots.\\ +\dfrac{(x-1)^2}{2m^2}-\dfrac{(x-1)^3}{3m^3}+\ldots.\end{array}\right\}$$

Если $0 < x-1 < 1$ и m достаточно велико, то

$$\left.\begin{array}{l} \log\psi(x) > -\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2m^2} \\ \text{и} \\ \log\psi(x) < -\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2m^2}+\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)-(x-1)^3}{3m^3}, \end{array}\right\} \ldots(\alpha)$$

если же $x-1 > 1$ и m достаточно велико, то

$$\left.\begin{array}{l} \log\psi(x) < \displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)^2-(x-1)}{2m^2} \\ \text{и} \\ \log\psi(x) > \displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)^2-(x-1)}{2m^2}-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)^3-(x-1)}{3m^3}. \end{array}\right\} \ldots(\beta)$$

Замѣтивъ, что

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \frac{1}{k}, \quad \sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} > \frac{1}{k+1}$$

и

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^3} < \frac{1}{k(k+1)}\ ^{*)},$$

---

*)
$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots. < \frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\ldots.=\frac{1}{k},$$

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots > \frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\ldots.=\frac{1}{k+1}$$

получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\log\psi(x) &> -\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2k}\\ \log\psi(x) &< -\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2(k+1)}+\frac{(x-1)-(x-1)^3}{3k(k+1)}\end{aligned}\right\}\ldots.(\alpha_1)$$

при $x-1<1$

и

$$\left.\begin{aligned}\log\psi(x) &< \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2k}\\ \log\psi(x) &> \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2(k+1)}-\frac{(x-1)^3-(x-1)}{3k(k+1)}\end{aligned}\right\}\ldots.(\beta_1)$$

при $x-1>1$.

Для перваго случая $(x-1<1)$

$$\log\Gamma(x)>\sum_1^k\left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\}-\frac{(x-1)(2-x)}{2k},$$

$$\log\Gamma(x)<\sum_1^k\left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\}-$$

$$-\frac{(x-1)(2-x)}{2(k+1)}+\frac{(x-1)(2-x)x}{3k(k+1)},$$

а переходя отъ логариѳма къ числу,

$$\Gamma(x)>\frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{x-1}}{(k+x-1)(k+x-2)\ldots x}e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2k}},$$

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^3}=\frac{1}{(k+1)^3}+\frac{1}{(k+2)^3}+\ldots.<\frac{1}{k(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)^2}+\ldots,$$

но

$$\frac{1}{k(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)^2}+\ldots=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\frac{1}{k+2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{k}-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)},$$

такъ что

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^3}<\frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\Gamma(x) < \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{x-1}}{(k+x-1)(k+x-2)\ldots x}\, e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)}+\frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}}.$$

Положивъ

$$x = 1+\frac{\alpha}{\beta}\text{, причемъ } \frac{\alpha}{\beta} < 1\,,$$

будемъ имѣть

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\, e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2k}}\,,$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\, e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)}+\frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}}.$$

Принявъ же во вниманіе неравенства Стирлинга

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(k+1) &> \sqrt{2\pi}\, e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}} \\ \Gamma(k+1) &< \sqrt{2\pi}\, e^{-k+\frac{1}{12k}} k^{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots (a)$$

получимъ:

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\, e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2k}}\,, \quad \ldots\ldots (b)$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-k+\frac{1}{12k}} k^{k+\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\, e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)}+\frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}} \quad \ldots (c)$$

Вычисленіе $\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ производится по формулѣ

$$\log\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi\frac{\alpha}{\beta}}{\sin\frac{\pi\alpha}{\beta}} - \frac{1}{2}\log\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)} + (1-C)\frac{\alpha}{\beta} -$$

$$-(S_3-1)\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3}{3} - (S_5-1)\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^5}{5}\ldots\ldots - (S_{2n+1}-1)\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+1}}{2n+1},$$

гдѣ вообще

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots .$$

Если черезъ Γ обозначимъ истинное значенiе Γ, то вычисленное будетъ $\Gamma + k$, гдѣ k достаточно малая величина. Всегда можно вычислить $\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ съ такой точностью, что неравенства (b) и (c) не нарушатся, для чего необходимо, чтобы

$$\frac{\psi}{\Gamma} < \frac{\psi + k_1}{\Gamma + k} ,$$

гдѣ

$$\psi + k_1 = e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}} ,$$

или

$$\frac{k}{\Gamma} < \frac{k_1}{\psi} ,$$

неравенство, которое всегда можетъ быть удовлетворено.

Отношенiе предѣловъ неравенствъ (b) и (c) равно

$$e^{\frac{1}{12k} + \frac{\alpha(\beta-\alpha)}{2\beta^2 k(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}}$$

и стремится къ единицѣ по мѣрѣ возрастанiя k.

Напр. при $\alpha = 1$, $\beta = 6$ и $k = 10$ оно равно $1,0094$,

при $\alpha = 1$, $\beta = 6$ и $k = 50$ „ $1,0017$.

Въ случаѣ $x - 1 > 1$ на основанiи неравенствъ (β_1) и формулы (I) получимъ:

$$\log\Gamma(x) < \sum_1^k \left\{ (x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\} + \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2k} ,$$

$$\log\Gamma(x) > \sum_1^k \left\{ (x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2(k+1)} - \frac{(x-1)^3-(x-1)}{3k(k+1)} ,$$

откуда, разсуждая подобно предыдущему, находимъ:

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2k}}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2(k+1)} - \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^2 k(k+1)}}, \; . \; . \; (f)$$

и, наконецъ, въ силу неравенствъ (a):

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\sqrt{2\pi}e^{-k+\frac{1}{12k}}k^{k+\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2\beta^2 k}}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}, \; . \; . \; . \; . \; . \; (e_1)$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\sqrt{2\pi}e^{-k}k^{k+\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2(k+1)} - \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^2 k(k+1)}}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} \; . \; . \; . \; (f_1)$$

Отношеніе предѣловъ равно

$$e^{\frac{1}{12k} + \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2\beta^2 k(k+1)} + \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^3 k(k+1)}}$$

и стремится къ единицѣ по мѣрѣ возрастанія k. При этомъ оно тѣмъ ближе къ 1, чѣмъ ближе къ единицѣ отношеніе $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Вычисленіе $\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ можетъ быть сведено на вычисленіе $\Gamma(1+\delta)$, гдѣ $\delta < 1$, при помощи извѣстной зависимости $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, и произведено съ такою точностью, что неравенства (e_1) и (f_1) не нарушатся.

Какъ упомянуто выше, исходя изъ формулы (I), можно получить интерполяціонныя формулы для произведеній

$$\prod_{\alpha-k\beta}, \quad \prod_{\alpha-k^2\beta} \quad \text{и} \quad \prod_{\alpha+k^2\beta}.$$

Разсмотримъ послѣдній случай.

Выраженіе (I) справедливо и для комплексныхъ значеній аргумента $\Gamma(x)$. Такъ какъ

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{x-1}}{(k+x-1)(k+x-2)\ldots x}\,\psi,$$

то, полагая сначала $x = 1 + \frac{\alpha}{i\beta}$, потомъ $x = 1 - \frac{\alpha}{i\beta}$, гдѣ $i = \sqrt{-1}$ и $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, будемъ имѣть:

$$\Gamma\left[1 + \frac{\alpha}{i\beta}\right] = \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{i\beta}}(i\beta)^k}{\prod_{\alpha+i\beta k}} \psi$$

и

$$\Gamma\left[1 - \frac{\alpha}{i\beta}\right] = \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{-\frac{\alpha}{i\beta}}(i\beta)^k}{\prod_{i\beta k-\alpha}} \psi_1,$$

откуда

$$\prod_{\alpha+i\beta k} \prod_{i\beta k-\alpha} = \frac{[\Gamma(k+1)]^2(-\beta^2)^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)} \psi\psi_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (g)$$

Но

$$\psi = \prod_{k+1}^{\infty} \frac{(m+1)^{\frac{\alpha}{i\beta}} m}{m^{\frac{\alpha}{i\beta}}\left(m + \frac{\alpha}{i\beta}\right)} \quad \text{и} \quad \psi_1 = \prod_{k+1}^{\infty} \frac{(m+1)^{-\frac{\alpha}{i\beta}} m}{m^{-\frac{\alpha}{i\beta}}\left(m - \frac{\alpha}{i\beta}\right)},$$

такъ что

$$\psi\psi_1 = \prod_{k+1}^{\infty} \frac{m^2}{m^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \prod_{k+1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2 m^2}},$$

откуда

$$\log\psi\psi_1 = -\sum_{k+1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2 m^2}\right) = \sum_{k+1}^{\infty}\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2 m^2} + \frac{\alpha^4}{\beta^4 m^4}\frac{1}{2} - \ldots\right).$$

Слѣдовательно,

$$\psi\psi_1 > e^{-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\beta^2 m^2}}$$

и

$$\psi\psi_1 < e^{-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\beta^2 m^2} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}^{\infty}\frac{\alpha^4}{\beta^4 m^4}},$$

но

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^4}<\frac{1}{k^2}\,{}^{*)},$$

а потому

$$\left.\begin{aligned}\psi\psi_1 &> e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2 k}}\\ \psi\psi_1 &< e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2(k+1)}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{\beta^4 k^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (h)$$

Такъ какъ

$$\prod_{i\beta k+\alpha}\prod_{i\beta k-\alpha}=\pm\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2},$$

смотря по тому четное или нечетное k, то на основаніи формулы (g) и неравенствъ (h) получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2} &> \frac{[\Gamma(k+1)]^2\beta^{2k}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)}e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2 k}}\\ \prod_{\alpha^2+k^2\beta^2} &< \frac{[\Gamma(k+1)]^2\beta^{2k}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)}e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2(k+1)}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{\beta^4 k^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (k)$$

но

$$\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)=\frac{\frac{\pi\alpha}{i\beta}}{\sin\frac{\pi\alpha}{i\beta}}=\frac{\pi\alpha}{\beta\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta}}=\frac{2\pi\alpha}{\beta\left(e^{\frac{\pi\alpha}{\beta}}-e^{-\frac{\pi\alpha}{\beta}}\right)},$$

а потому, принявъ въ соображеніе неравенства (a), получаемъ:

$$\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2}>\frac{2e^{-2k}k^{2k+1}\beta^{2k+1}e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\frac{1}{k}}}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta}$$

$$\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2}<\frac{2e^{-2k+\frac{1}{6k}}k^{2k+1}\beta^{2k+1}e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4\frac{1}{k^2}}}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta}.$$

---

*) $$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{1}{(k+1)^4}+\frac{1}{(k+2)^4}+\ldots<\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^2+\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)^2+\ldots=$$
$$=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)^2+\ldots<\frac{1}{k^2}.$$

Положивъ $\alpha^2 = \alpha_1$ и $\beta^2 = \beta_1$ и затѣмъ опуская значки, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \prod_{\alpha + k^2\beta} &> \frac{2e^{-2k} k^{2k+1} \beta^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{k}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sh}\pi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \prod_{\alpha + k^2\beta} &< \frac{2e^{-2k+\frac{1}{6k}} k^{2k+1} \beta^{k+\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{1}{k^2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sh}\pi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots (l)$$

Отношеніе предѣловъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, тѣмъ ближе къ единицѣ, чѣмъ менѣе $\frac{\alpha}{\beta}$ и болѣе k.

Интерполированіе нѣкоторыхъ изъ разсмотрѣнныхъ выше произведеній можетъ быть произведено значительно проще и точнѣе на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Такъ какъ при всякомъ x

$$(1+x)\Gamma(1+x) = \Gamma(2+x),$$

$$(2+x)\Gamma(2+x) = \Gamma(3+x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k+x)\Gamma(k+x) = \Gamma(k+1+x),$$

то

$$\prod_{(k+x)} = \frac{\Gamma(k+1+x)}{\Gamma(1+x)}.$$

Отсюда, полагая

$$x = +\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{и} \quad x = -\frac{\alpha}{\beta},$$

получимъ въ лѣвой части равенства соотвѣтственно

$$\frac{1}{\beta^k}\prod_{\alpha+\beta k} \quad \text{и} \quad (-1)^k \frac{1}{\beta^k}\prod_{\alpha-\beta k}.$$

Останавливаясь на первомъ случаѣ, имѣемъ:

$$\prod_{\alpha+k\beta} = \frac{\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} \cdots\cdots\cdots (m)$$

Такъ какъ

$$\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{\beta}\right) > \sqrt{2\pi}\; e^{-\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{\beta}\right) < \sqrt{2\pi}\; e^{-\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{1}{12\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)}}\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}},$$

то, положивъ $\frac{\alpha}{\beta}=p$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\sqrt{2\pi}\; e^{-(k+p)}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{\Gamma(1+p)} \\ &\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\sqrt{2\pi}\; e^{-(k+p)+\frac{1}{12(k+p)}}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{\Gamma(1+p)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (n)$$

Отношеніе предѣловъ равняется $e^{\frac{1}{12(k+p)}}$ и стремится къ 1 по мѣрѣ возрастанія k. Вычисленіе $\Gamma(1+p)$ приводится къ вычисленію $\Gamma(1+p_1)$ гдѣ $p_1 < 1$, которое можетъ быть произведено съ такою точностью, что неравенства (n) не нарушатся. Если p достаточно велико, то и для $\Gamma(1+p)$ можно воспользоваться неравенствами Стирлинга, такъ что

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{e^{-(k+p)}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{e^{-p+\frac{1}{12p}}\,p^{p+\frac{1}{2}}},$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{e^{-(k+p)+\frac{1}{12(k+p)}}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{e^{-p}\,p^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Подобнымъ же образомъ нетрудно получить интерполяціонныя формулы и для произведеній

$$\prod_{\alpha-k\beta},\quad \prod_{\alpha-k^2\beta}.$$

Задача на преобразованіе фигуръ въ пространствѣ.

В. П. Ермакова.

Пусть x, y и z означаютъ прямоугольныя координаты произвольной точки; пусть X, Y, Z означаютъ координаты другой точки относительно тѣхъ же или другихъ прямоугольныхъ осей. Три зависимости между первыми и вторыми координатами даютъ возможность преобразовать одну фигуру въ другую. Требуется составить такое преобразованіе, при помощи котораго поверхность произвольнаго шара преобразуется также въ поверхность шара.

Показать, что искомое преобразованіе въ самомъ общемъ случаѣ равносильно двумъ преобразованіямъ: преобразованію по способу обратныхъ радіусовъ и вращенію около постоянной оси.

Показать, что подобное преобразованіе для плоскихъ фигуръ можетъ быть выражено формулою:

$$Z = \frac{Az + B}{Cz + D},$$

гдѣ $z = x + y\sqrt{-1}$, $Z = X + Y\sqrt{-1}$ и A, B, C, D — постоянныя мнимыя или дѣйствительныя числа.

7-го Февраля 1889 г.

Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

А. А. Маркова.

ЗАДАЧА 1.

Между данными точками A и B (см. фиг. 1-ю) провести кратчайшую кривую линію при слѣдующихъ двухъ условіяхъ: 1) радіусъ кривизны нашей кривой повсюду долженъ быть не меньше данной величины ϱ, 2) въ точкѣ A касательная къ нашей кривой должна имѣть данное направленіе AC.

РѢШЕНІЕ.

Пусть M одна изъ точекъ нашей кривой, а прямая NMT соотвѣтствующая касательная.

Обозначимъ буквою s дугу AM и буквою φ уголъ TNC.

Затѣмъ возьмемъ AC за ось x-овъ, а перпендикуляръ къ ней AD за ось y-овъ.

Тогда, принимая s за перемѣнное независимое, можемъ выразить координаты x и y точки M слѣдующими формулами

$$x = \int_0^s \cos\varphi ds, \qquad y = \int_0^s \sin\varphi ds .$$

По условіямъ задачи кривая AMB должна оканчиваться данною точкою B.

Соотвѣтственно этому имѣемъ:

$$a = \int_0^S \cos\varphi ds, \qquad b = \int_0^S \sin\varphi ds \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

гдѣ a есть координата x точки B, b координата y точки B и S вся дуга кривой AB.

При возрастаніи s, отъ нуля до S, число φ можетъ, то возрастать, то убывать. Если φ возрастаетъ вмѣстѣ съ s, то по условіямъ задачи $\frac{ds}{d\varphi} > \varrho$; по тѣмъ же условіямъ $-\frac{ds}{d\varphi} > \varrho$ всякій разъ, когда при возрастаніи s число φ убываетъ.

Разобьемъ наши интегралы

$$\int_0^S \cos\varphi ds \quad \text{и} \quad \int_0^S \sin\varphi ds$$

на такія части, въ каждой изъ которыхъ $\frac{d\varphi}{ds}$ сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ.

Пусть эти части будутъ

$$\int_0^{s_1} \cos\varphi ds, \quad \int_{s_1}^{s_2} \cos\varphi ds, \ldots \int_{s_{n-1}}^{s_n=S} \cos\varphi ds$$

и

$$\int_0^{s_1} \sin\varphi ds, \quad \int_0^{s_2} \sin\varphi ds, \ldots \int_{s_{n-1}}^{s_n=S} \sin\varphi ds.$$

Обозначимъ черезъ $-\alpha_i$, β_i соотвѣтственно наименьшее и наибольшее значеніе φ для значеній s, лежащихъ между s_{i-1} и s_i, и черезъ σ_i численное значеніе $\frac{ds}{d\varphi}$ для тѣхъ же значеній s.

Въ такомъ случаѣ

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \cos\varphi ds = \int_{-\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_i \cos\varphi d\varphi, \quad \int_{s_{i-1}}^{s_i} \sin\varphi ds = \int_{-\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_i \sin\varphi d\varphi$$

$$s_i - s_{i-1} = \int_{-\alpha_i}^{\beta_i} \sigma_i d\varphi$$

и потому

$$\left.\begin{aligned} a &= \int_{-\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_1 \cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha_2}^{\beta_2} \sigma_2 \cos\varphi d\varphi + \ldots + \int_{-\alpha_n}^{\beta_n} \sigma_n \cos\varphi d\varphi \\ b &= \int_{-\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_1 \sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha_2}^{\beta_2} \sigma_2 \sin\varphi d\varphi + \ldots + \int_{-\alpha_n}^{\beta_n} \sigma_n \sin\varphi d\varphi \\ S &= \int_{-\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_1 d\varphi + \int_{-\alpha_2}^{\beta_2} \sigma_2 d\varphi + \ldots + \int_{-\alpha_n}^{\beta_n} \sigma_n d\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

По условіямъ задачи всѣ значенія $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ не меньше ϱ и одно изъ чиселъ α_1, β_1 равно нулю.

Обозначимъ черезъ α наибольшее изъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и черезъ β наибольшее изъ чиселъ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Конечно $\alpha \geqq 0$ и $\beta \geqq 0$.

Если $\alpha = 0$, то формулы (2) можно переписать такъ:

$$a = \int_0^\beta \sigma \cos\varphi d\varphi, \quad b = \int_0^\beta \sigma \sin\varphi d\varphi, \quad S = \int_0^\beta \sigma d\varphi \quad . \; . \; . \; (3)$$

гдѣ σ означаетъ сумму нѣсколькихъ σ_i и потому не меньше ϱ.

Подобнымъ же образомъ при $\beta = 0$ получаемъ:

$$a = \int_{-\alpha}^0 \sigma \cos\varphi d\varphi, \quad b = \int_{-\alpha}^0 \sigma \sin\varphi d\varphi, \quad S = \int_{-\alpha}^0 \sigma d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; (4),$$

гдѣ σ также не меньше ϱ.

Если же ни α ни β не нуль, то перемѣнная φ должна пройти дважды черезъ всѣ значенія, лежащія между $-\alpha$ и 0, или черезъ всѣ значенія, лежащія между 0 и β.

Вмѣстѣ съ тѣмъ формуламъ (2) можно придать слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{array}{l} a = \int_{-\alpha}^0 \sigma\cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi \text{ или } \int_0^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi \\ b = \int_{-\alpha}^0 \sigma\sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi \text{ или } \int_0^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi \\ S = \int_{-\alpha}^0 \sigma d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma d\varphi \quad \text{ или } \quad \int_0^\beta \sigma d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma d\varphi \end{array}\right\} \quad (5)$$

Здѣсь σ также означаетъ сумму нѣсколькихъ σ_i и потому не меньше ϱ.

Разсмотримъ одинъ изъ указанныхъ нами случаевъ.

Пусть напримѣръ:

$$\left.\begin{array}{l} a = \int_{-\alpha}^0 \sigma\cos\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\cos\varphi d\varphi \\ b = \int_{-\alpha}^0 \sigma\sin\varphi d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma\sin\varphi d\varphi \\ S = \int_{-\alpha}^0 \sigma d\varphi + \int_{-\alpha}^\beta \sigma d\varphi \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Изъ этихъ равенствъ выводимъ:

$$\left.\begin{aligned}
a-\varrho\int_{-\alpha}^{0}\cos\varphi d\varphi-\varrho\int_{-\alpha}^{\beta}\cos\varphi d\varphi=a_1=\int_{-\alpha}^{0}(\sigma-\varrho)\cos\varphi d\varphi+\int_{-\alpha}^{\beta}(\sigma-\varrho)\cos\varphi d\varphi\\
b-\varrho\int_{-\alpha}^{0}\sin\varphi d\varphi-\varrho\int_{-\alpha}^{\beta}\sin\varphi d\varphi=b_1=\int_{-\alpha}^{0}(\sigma-\varrho)\sin\varphi d\varphi+\int_{-\alpha}^{\beta}(\sigma-\varrho)\sin\varphi d\varphi\\
S-\varrho\int_{-\alpha}^{0}d\varphi-\varrho\int_{-\alpha}^{\beta}d\varphi=S_1=\int_{-\alpha}^{0}(\sigma-\varrho)d\varphi+\int_{-\alpha}^{\beta}(\sigma-\varrho)d\varphi
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned}
a-2\varrho\sin\alpha-\varrho\sin\beta=a_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\cos\varphi d\varphi\\
b+\varrho(1-\cos\alpha)+\varrho(\cos\beta-\cos\alpha)=b_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\sin\varphi d\varphi\\
S-2\varrho\alpha-\varrho\beta=S_1=\int_{=\alpha}^{\beta}\tau d\varphi
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(7')$$

Здѣсь τ при $0<\varphi<\beta$ означаетъ $\sigma-\varrho$ и при $\alpha<\varphi<0$ сумму двухъ $\sigma-\varrho$. Во всякомъ случаѣ τ не меньше нуля.

При однихъ и тѣхъ же значеніяхъ α и β дуга S будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше S_1. Будемъ же искать наименьшее значеніе

$$S_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau d\varphi$$

при данныхъ значеніяхъ

$$\alpha,\ \beta,\ a_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\cos\varphi d\varphi,\ b_1=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\sin\varphi d\varphi.$$

Для упрощенія дальнѣйшихъ разсужденій введемъ вмѣсто φ новую перемѣнную ψ равную $\varphi+\alpha$ и составимъ выраженія

$$\left.\begin{aligned}
a'=a_1\cos\alpha-b_1\sin\alpha=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\cos(\varphi+\alpha)d\varphi=\int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\cos\psi d\psi\\
b'=a_1\sin\alpha+b_1\cos\alpha=\int_{-\alpha}^{\beta}\tau\sin(\varphi+\alpha)d\varphi=\int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\sin\psi d\psi
\end{aligned}\right\}\ldots(8)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей задачѣ.

Соотвѣтственно даннымъ значеніямъ

$$\alpha+\beta,\ \int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\cos\psi d\psi=a',\ \int_{0}^{\alpha+\beta}\tau\sin\psi d\psi=b'$$

опредѣлить наименьшее значенiе

$$S_1 = \int_{-\alpha}^{\beta} \tau d\varphi = \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi$$

при условiи

$$\tau \geqq 0 .$$

Приступая къ рѣшенiю этой задачи, прежде всего замѣтимъ, что отношенiе

$$\frac{\int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos\psi d\psi}{\int_0^{\alpha+\beta} \tau \sin\psi d\psi}$$

равно котангенсу нѣкотораго числа γ, лежащаго между 0 и $\alpha+\beta$.

Слѣдовательно, при $\alpha+\beta<\pi$, равно какъ и при $\alpha+\beta>2\pi$, можемъ положить

$$a' = \int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos\psi d\psi = c\cos\gamma\,,\ b' = \int_0^{\alpha+\beta} \tau \sin\psi d\psi = c\sin\gamma\ .\ .\ .\ (9),$$

гдѣ c означаетъ число положительное, а γ заключается между 0 и $\alpha+\beta$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$c = \int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos(\psi-\gamma) d\psi$$

и потому

$$c \leqq \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi\,.$$

Отсюда не трудно заключить, что при $\alpha+\beta<\pi$, равно какъ и при $\alpha+\beta>2\pi$, наименьшее значенiе интеграла

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \tau d\varphi$$

равно

$$c = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2}$$

и соотвѣтствуетъ тому случаю, когда кривая линія, опредѣляемая уравненіями

$$x = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \cos\varphi d\varphi, \qquad y = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \sin\varphi d\varphi,$$

обращается въ прямую.

Если же $\alpha + \beta$ заключается между π и 2π, то въ формулахъ (9) число c иногда нельзя считать положительнымъ и тогда предыдущій выводъ теряетъ свою силу.

Съ другой стороны при $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$ каждый изъ интеграловъ

$$\int_0^{\alpha+\beta} \tau \cos\psi d\psi, \quad \int_0^{\alpha+\beta} \tau \sin\psi d\psi, \quad \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi,$$

можно разбить на два: одинъ отъ $\psi = 0$ до $\psi = \pi$, другой отъ $\psi = \pi$ до $\psi = \alpha + \beta$.

Соотвѣтственно этому положимъ

$$\int_0^{\pi} \tau \cos\psi d\psi = \lambda_0, \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau \cos\psi d\psi = \lambda, \quad \int_0^{\pi} \tau \sin\psi d\psi = \mu_0, \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau \sin\psi d\psi = \mu;$$

такъ что

$$a' = \lambda_0 - \lambda, \qquad b' = \mu_0 - \mu \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

При однихъ и тѣхъ же значеніяхъ $\alpha + \beta$, λ_0, λ, μ_0, μ интегралъ

$$\int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi,$$

тѣмъ меньше, чѣмъ меньше интегралы

$$\int_0^{\pi} \tau d\psi \quad \text{и} \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau d\psi.$$

А наименьшія значенія послѣднихъ двухъ интеграловъ, при данныхъ $\alpha + \beta$, λ_0, λ, μ_0, μ, опредѣляются изъ формулъ

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 = z_0 \cos\xi_0, & -\lambda = z \cos\xi \\ \mu_0 = z_0 \sin\xi_0, & -\mu = z \sin\xi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Здѣсь

$$z_0 \text{ означаетъ наименьшее значеніе } \int_0^{\pi} \tau d\psi\,,$$

$$z \quad » \quad » \quad » \quad \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau d\psi\,,$$

$$0 < \xi_0 < \pi < \xi < \alpha + \beta\,.$$

У насъ $\alpha + \beta$ число данное, а λ_0, λ, μ_0, μ могутъ получать различныя значенія, такъ какъ даны только разности

$$\lambda_0 - \lambda = a'\,, \qquad \mu_0 - \mu = b'\,.$$

Между различными возможными значеніями λ_0, λ, μ_0, μ слѣдуетъ остановиться на тѣхъ, для которыхъ сумма $z_0 + z$ достигаетъ своего наименьшаго значенія, такъ какъ наименьшее значеніе

$$S_1 = \int_0^{\alpha+\beta} \tau d\psi = \int_0^{\pi} \tau d\psi + \int_{\pi}^{\alpha+\beta} \tau d\psi\,,$$

равно наименьшему значенію $z_0 + z$.

Формулы (10) и (11) даютъ

$$a' = z_0 \cos\xi_0 + z\cos\xi\,, \qquad b' = z_0 \sin\xi_0 + z\sin\xi\,.$$

Отсюда посредствомъ дифференцированія выводимъ

$$0 = \cos\xi_0 dz_0 + \cos\xi dz - z_0 \sin\xi_0 d\xi_0 - z\sin\xi d\xi\,,$$

$$0 = \sin\xi_0 dz_0 + \sin\xi dz + z_0 \cos\xi_0 d\xi_0 + z\cos\xi d\xi\,,$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\xi - \xi_0)dz_0 = z_0\cos(\xi - \xi_0)d\xi_0 + zd\xi \\ &\sin(\xi - \xi_0)dz = -z_0 d\xi_0 + z\cos(\xi - \xi_0)d\xi \\ &\sin(\xi - \xi_0)d(z + z_0) = (zd\xi - z_0 d\xi_0([1 - \cos(\xi - \xi_0)] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (12)$$

Послѣднее равенство показываетъ, что сумма $z_0 + z$ достигаетъ своего наименьшаго значенія въ одномъ изъ слѣдующихъ случаевъ:

1) $z = 0$ или $z_0 = 0$,

2) $\xi_0 = 0$ и $\xi = \alpha + \beta$,

такъ какъ во всѣхъ прочихъ случаяхъ всегда можно уменьшить эту сумму $z_0 + z$ посредствомъ нѣкоторыхъ достаточно малыхъ измѣненій чиселъ ξ_0 и ξ.

Соотвѣтственно этому интегралъ

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \tau d\varphi = S_1$$

достигаетъ, при $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, своего наименьшаго значенія только тогда, когда кривая линія, опредѣляемая уравненіями

$$x = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \cos\varphi d\varphi\,, \quad y = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \sin\varphi d\varphi\,,$$

обращается въ двѣ прямыя, составляющія съ осью x углы $-\alpha$ и $+\beta$, или въ одну прямую. Вспомнимъ, что при $\alpha + \beta < \pi$ и при $\alpha + \beta > 2\pi$ тотъ же интегралъ достигаетъ своего наименьшаго значенія только тогда, когда кривая линія опредѣляемая уравненіями

$$x = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \cos\varphi d\varphi\,, \quad y = \int_{-\alpha}^{\varphi} \tau \sin\varphi d\varphi\,,$$

обращается въ прямую.

Сопоставляя эти результаты съ формулами (5), (6) и (7), заключаемъ, что при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ дуга S достигаетъ наименьшаго значенія для такой кривой AMB (см. фиг. 2-ю), которая состоитъ изъ дуги AM_1 круга радіуса ϱ, изъ прямой M_1M_2, касательной къ дугѣ AM_1, изъ дуги M_2M_3 другаго круга радіуса ϱ и, наконецъ, изъ прямой M_3B, касательной къ дугѣ M_2M_3, или — изъ дугъ трехъ круговъ радіуса ϱ и изъ прямой (см. фиг. 3-ю).

Каждыя двѣ смежныя части нашей кривой, конечно, должны въ общей ихъ точкѣ имѣть общую касательную.

Замѣтимъ еще, что для кривой, составленной изъ трехъ дугъ и одной прямой, центры двухъ круговъ, касательныхъ къ прямой, должны лежать по одну и ту же сторону отъ этой послѣдней.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при $\alpha = 0$, равно какъ и при $\beta = 0$, дуга S достигаетъ наименьшаго значенія для такой кривой AMB, которая состоитъ изъ одной дуги круга радіуса ϱ и двухъ прямыхъ, касательныхъ къ ней (фиг. 4-я), или — изъ дугъ двухъ круговъ радіуса ϱ и прямой, касательной къ нимъ (фиг. 5-я).

До сихъ поръ мы предполагали α и β данными.

Мы предполагали также извѣстнымъ, который изъ двухъ промежутковъ, отъ 0 до $-\alpha$ или отъ 0 до β, перемѣнная φ проходитъ дважды.

Соотвѣтствующее этимъ даннымъ наименьшее значеніе S обозначимъ черезъ Σ.

На самомъ дѣлѣ числа α и β могутъ получать различныя значенія и изъ двухъ промежутковъ, отъ 0 до $-\alpha$ и отъ 0 до β, перемѣнная φ можетъ проходить дважды тотъ или другой.

Этою неопредѣленностью, очевидно, слѣдуетъ воспользоваться такъ, чтобы Σ достигло своего наименьшаго значенія, которое вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ наименьшимъ значеніемъ S.

Приступая къ разысканію наименьшаго значенія Σ, остановимся сначала на тѣхъ случаяхъ, когда кривая AMB составлена изъ двухъ дугъ и двухъ прямыхъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ для опредѣленности положимъ, что φ проходитъ дважды промежутокъ отъ 0 до $-\alpha$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma = (2\alpha + \beta)\varrho + z_0 + z\,, \\ &a = 2\varrho\sin\alpha + \varrho\sin\beta + z_0\cos\alpha + z\cos\beta\,, \\ &b = 2\varrho\cos\alpha - \varrho - \varrho\cos\beta - z_0\sin\alpha + z\sin\beta\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Отсюда, по дифференцированіи, получаемъ:

$$d\Sigma = 2\varrho d\alpha + \varrho d\beta + dz_0 + dz\,,$$

$$\cos\alpha dz_0 + \cos\beta dz = (z_0\sin\alpha - 2\varrho\cos\alpha)d\alpha + (z\sin\beta - \varrho\cos\beta)d\beta\,,$$

$$\sin\alpha dz_0 - \sin\beta dz = -(z_0\cos\alpha + 2\varrho\sin\alpha)d\alpha + (z\cos\beta + \varrho\sin\beta)d\beta\,,$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta)dz_0 = -[z_0\cos(\alpha+\beta) + 2\varrho\sin(\alpha+\beta)]d\alpha + zd\beta\,, \\ &\sin(\alpha+\beta)dz = z_0 d\alpha - [z\cos(\alpha+\beta) + \varrho\sin(\alpha+\beta)]d\beta\,, \\ &\sin(\alpha+\beta)d\Sigma = (z_0 d\alpha + zd\beta)[1 - \cos(\alpha+\beta)]\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Послѣднее равенство показываетъ, что при z_0, z, α, β не равныхъ нулю Σ всегда можно уменьшить посредствомъ нѣкоторыхъ достаточно малыхъ измѣненій въ числахъ α и β.

Иначе сказать, кривыя AMB, составленныя изъ двухъ дугъ и двухъ прямыхъ, не даютъ для Σ наименьшаго значенія, если ни одна изъ этихъ дугъ и прямыхъ не исчезаетъ.

Если въ нашей кривой исчезаетъ одна изъ прямыхъ, то такую кривую можно разсматривать какъ частный случай кривыхъ, составленныхъ изъ трехъ дугъ и одной прямой.

Этими послѣдними кривыми мы теперь и займемся.

Для нихъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma = \varrho(2\alpha+\beta)+z\,, \qquad z>0\,, \\ &a = 2\varrho\sin\alpha+\varrho\sin\beta+z\cos\xi\,, \\ &b = 2\varrho\cos\alpha-\varrho-\varrho\cos\beta+z\sin\xi\,, \quad -\alpha<\xi<\beta\,. \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(15)$$

Отсюда, по дифференцированіи, выводимъ:

$$d\,\Sigma = 2\varrho d\alpha+\varrho d\beta+dz\,,$$

$$\cos\xi dz - z\sin\xi d\xi = -2\varrho\cos\alpha d\alpha-\varrho\cos\beta d\beta\,,$$

$$\sin\xi dz + z\cos\xi d\xi = 2\varrho\sin\alpha d\alpha-\varrho\sin\beta d\beta\,,$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned} dz &= -2\varrho\cos(\alpha+\xi)d\alpha-\varrho\cos(\xi-\beta)d\beta\,, \\ zd\xi &= 2\varrho\sin(\alpha+\xi)d\alpha+\varrho\sin(\xi-\beta))d\beta\,, \\ d\Sigma &= 2\varrho[1-\cos(\alpha+\xi)]d\alpha+\varrho[1-\cos(\xi-\beta)]d\beta\,. \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(16)$$

Отсюда видно, что наименьшее значеніе Σ можетъ соотвѣтствовать только одному изъ слѣдующихъ случаевъ:

1) $\xi=-\alpha\,,\quad \alpha>0\,,\quad \beta>0\,,\quad z>0\,;$

2) $\xi=\beta\,,\quad \alpha>0\,,\quad \beta>0\,,\quad z>0\,;$

3) $z=0\,;$

4) $\alpha=0$ или $\beta=0\,.$

При $\xi=-\alpha\,,\ \alpha>0\,,\ \beta>0\,,\ z>0$ имѣемъ:

$$d\xi = -\frac{\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\xi}\,d\beta\,,$$

$$d(\xi+\alpha) = d\alpha-\frac{\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\xi}\,d\beta\,,$$

$$d\Sigma = \varrho[1-\cos(\alpha+\beta)]d\beta\,,$$

и можемъ уменьшить Σ: стоитъ только β уменьшить на нѣкоторое достаточно малое положительное число ε, а α увеличить на нѣкоторое также достаточно малое число η, удовлетворяющее неравенству

$$\eta+\frac{\varrho\sin(\alpha+\beta)}{\xi}\,\varepsilon>0\,.$$

Мы предполагаемъ здѣсь, что сумма $\alpha+\beta$ не равна 2π. Если же $\xi=-\alpha$ и $\alpha+\beta=2\pi$, то

*

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \varrho \cos\varphi d\varphi = \int_{-\alpha}^{\beta} \varrho \sin\varphi d\varphi = 0 \,,$$

и Σ можно уменьшить на величину равную

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \varrho d\varphi = 2\pi\varrho \;.$$

Наше замѣчаніе о случаѣ

$$\xi = -\alpha$$

можно распространить и на случай

$$\xi = \beta \;.$$

Поэтому при α и β не равныхъ нулю Σ можетъ достигать своего наименьшаго значенія только для такой кривой AMB, которая состоитъ изъ двухъ дугъ; прямолинейныя же части должны исчезать (см. фиг. 6-ю).

Совершенно такъ же убѣдимся, что при $\alpha = 0$, равно какъ и при $\beta = 0$, Σ можетъ достигать наименьшаго значенія только для такой кривой AMB, которая состоитъ изъ одной прямой и одной дуги (см. фиг. 7-ю).

Кривую AMB, составленную изъ прямой AM и дуги MB, слѣдуетъ отбросить, такъ какъ при $\alpha = \xi = 0$, $z > 0$, $\beta > 0$ формулы (16) даютъ

$$dz = -\varrho \cos\beta d\beta \,,$$

$$z d\xi = -\varrho \sin\beta d\beta \,, \quad z d(\alpha + \xi) = z d\alpha - \varrho \sin\beta d\beta \,,$$

$$d\Sigma = \varrho(1 - \cos\beta) d\beta \,,$$

и показываютъ, что Σ можно уменьшить.

Съ другой стороны изъ чертежа не трудно видѣть, что кривая AMB, составленная изъ двухъ дугъ, можетъ давать наименьшее значеніе для Σ только въ тѣхъ случаяхъ, когда точка B лежитъ внутри одного изъ двухъ круговъ радіуса ϱ, касающихся прямой AC въ точкѣ A (см. фиг. 8-ю). (Дуга AM_0 съ касательною M_0B представляетъ длину меньшую суммы соотвѣтствующихъ дугъ AM и MB).

Напротивъ, кривая AMB, составленная изъ дуги и прямой, можетъ давать наименьшее значеніе для Σ только въ тѣхъ случаяхъ, когда точка B лежитъ внѣ обоихъ круговъ радіуса ϱ, касательныхъ къ прямой AC въ точкѣ A (см. фиг. 9-ю). (Дуга AMM_0 съ касательною M_0B представляетъ длину большую суммы дугъ AM и $MM'B$, такъ какъ $\overset{\frown}{M_0AM} < \overline{M_0B} + \overset{\frown}{MB}$).

Итакъ, если точка B лежитъ внѣ обоихъ круговъ радіуса ϱ, касающихся прямой AC въ точкѣ A, то для полученія искомой кратчайшей кривой AMB слѣдуетъ провести изъ точки B касательную къ ближайшему изъ этихъ круговъ и составить затѣмъ кривую изъ дуги круга и проведенной нами касательной къ нему.

Если же точка B лежитъ внутри одного изъ круговъ, касающихся прямой AC въ точкѣ A, то искомую кратчайшую кривую слѣдуетъ составлять изъ двухъ дугъ.

ЗАДАЧА 2-я.

Даны направленія двухъ прямолинейныхъ путей AOB и COD (см. фиг. 10-ю).

Требуется соединить эти пути такою кривою XMY (courbe de raccordement), которая была бы кратчайшею при слѣдующихъ условіяхъ:

1) наша кривая XMY должна касаться въ одномъ изъ своихъ концовъ X прямой AB, въ другомъ Y — прямой CD;

2) кривизна ея въ началѣ и въ концѣ должна быть равною нулю, а въ другихъ точкахъ должна не превосходить нѣкотораго даннаго числа $\frac{1}{\varrho}$;

3) производная отъ кривизны по дугѣ повсюду должна быть не больше другого даннаго числа g;

4) начальное направленіе движенія по нашей кривой, отъ X къ Y, должно совпадать съ AB, а окончательное — съ CD.

РѢШЕНІЕ.

Для всякой точки M нашей кривой обозначимъ дугу XM черезъ s, а уголъ BNT между AB и касательною NMT къ кривой черезъ φ.

При этомъ будемъ придавать φ положительное значеніе для такихъ угловъ BNT, которые можно получить посредствомъ поворота NB около N по направленію стрѣлки часовъ; въ противномъ же случаѣ будемъ придавать φ отрицательное значеніе.

Пусть уголъ BOD выражается числомъ φ_0.

Согласно чертежу примемъ

$$0 < \varphi_0 < \pi .$$

Наконецъ буквою S обозначимъ всю дугу XMY.

По условіямъ задачи начальныя значенія s и φ равны нулю (для точки X).

Затѣмъ при непрерывномъ измѣненіи s число φ должно измѣняться также непрерывно и окончательное значеніе φ (для точки Y) равно φ_0 или $\varphi_0 - 2\pi$.

Предположимъ, что φ постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ s. Тогда окончательное значеніе φ число положительное и равно φ_0.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\frac{1}{\varrho} > \frac{d\varphi}{ds} > 0$$

и не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ неравенствъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g\varphi \leqq 0,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi) \leqq 0;$$

такъ какъ по условіямъ вопроса

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g\varphi\right\} = 2\left\{\frac{d^2\varphi}{ds^2} - g\right\}\frac{d\varphi}{ds} < 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi)\right\} = 2\left\{\frac{d^2\varphi}{ds^2} + g\right\}\frac{d\varphi}{ds} > 0,$$

$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g\varphi$ обращается въ нуль при $s = 0$, $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi)$ обращается въ нуль при $s = S$.

Поэтому

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \varrho, \quad \frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$S = \int_0^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Различимъ теперь два случая:

$$1)\ \varrho < \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}}, \qquad 2)\ \varrho > \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}}.$$

Если

$$\varrho < \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}},$$

то при $0 < \varphi < \frac{\varphi_0}{2}$ всѣ неравенства (1) равносильны второму

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}},$$

а при $\frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \varphi_0$ — третьему

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}.$$

Разбивая соотвѣтственно этому интегралъ

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

на два

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi \quad \text{и} \quad \int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

и замѣняя $\frac{ds}{d\varphi}$ въ интегралѣ

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

выраженіемъ $\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}$, а въ интегралѣ

$$\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi,$$

выраженіемъ $\frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}$, приходимъ къ неравенству

$$S \geqq \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{\sqrt{2g\varphi}} + \int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{\sqrt{2(\varphi_0 - \varphi)}} = 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Не трудно также видѣть, что S равняется $2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}}$ въ томъ случаѣ, когда

$$\text{при } 0 < \varphi < \frac{\varphi_0}{2} \text{ имѣемъ } \frac{d^2\varphi}{ds^2} = g,$$

$$\text{а при } \frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \varphi_0 \text{ имѣемъ } \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -g\,.$$

Если же

$$\varrho > \frac{1}{\sqrt{g\varphi_0}}\,,$$

то прежде всего мы опредѣлимъ два числа φ_1 и φ_2 по условію

$$\frac{1}{\sqrt{2g\varphi_1}} = \varrho = \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi_2)}}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

которое даетъ

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \varphi_2 = \frac{1}{2g\varrho^2}\,, \quad \varphi_2 = \varphi_0 - \frac{1}{2g\varrho^2}\,, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{1}{g\varrho^2}\,. \quad (5)$$

Пока φ меньше φ_1, всѣ неравенства (1) равносильны второму

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}\,;$$

при $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ они равносильны первому

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \varrho$$

и наконецъ при $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$ — третьему

$$\frac{ds}{d\varphi} \geqq \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}\,.$$

Соотвѣтственно этому разбиваемъ нашъ интегралъ

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, ds$$

на три

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi\,, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi\,, \quad \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$$

и замѣняемъ $\frac{ds}{d\varphi}$

въ интегралѣ $\int_0^{\varphi_1} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ выраженіемъ $\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}$,

» » $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ » ϱ,

» » $\int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi$ » $\frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}}$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ неравенству

$$S \geqq \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g(\varphi_0-\varphi)}} = \varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho} \quad . \quad . (6)$$

которое обращается въ равенство

$$S = \varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho}$$

въ томъ частномъ случаѣ, когда

$$\text{при } 0 < \varphi < \varphi_1 \text{ имѣемъ } \frac{d^2\varphi}{ds^2} = g,$$

$$\text{при } \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \quad » \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

$$\text{и при } \varphi_2 < \varphi < \varphi_0 \quad » \quad \frac{d^2\varphi}{ds^3} = -g\,.$$

Совершенно такъ-же получимъ неравенство

$$S \geqq 2\sqrt{\frac{2\pi-\varphi_0}{g}} \quad \text{при } \varrho < \frac{1}{\sqrt{g(2\pi-\varphi_0)}}$$

и неравенство

$$S \geqq \varrho(2\pi-\varphi_0) + \frac{1}{g\varrho} \quad \text{при } \varrho > \frac{1}{\sqrt{g(2\pi-\varphi_0)}},$$

если предположимъ, что при возрастаніи s число φ постоянно убываетъ.

У насъ $0 < \varphi_0 < \pi$ и потому наименьшее значеніе S во второмъ предположеніи больше чѣмъ въ первомъ:

$$2\sqrt{\frac{2\pi-\varphi_0}{g}} > 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}} \quad \text{и} \quad \varrho(2\pi-\varphi_0) + \frac{1}{g\varrho} > \varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho}\,.$$

Обратимся къ разсмотрѣнію тѣхъ кривыхъ, для которыхъ производная $\frac{d\varphi}{ds}$ получаетъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія. Для опредѣленности положимъ, что послѣднее значеніе φ равно φ_0. Пусть наименьшее значеніе φ для нашей кривой равно α. Конечно

$$\alpha \leqq 0\,.$$

Выкинемъ изъ нашей кривой тѣ части, на которыхъ $\frac{d\varphi}{ds} < 0$. Общая длина всѣхъ оставшихся частей, конечно, будетъ меньше S. Для каждой изъ нихъ $\frac{ds}{d\varphi} > \varrho$ и вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ неравенствъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi - \alpha) \leqq 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 2g(\varphi_0 - \varphi) \leqq 0\,.$$

Отсюда затѣмъ, разсуждая по прежнему, заключаемъ, что

$$S \geqq 2\sqrt{\frac{\varphi_0 - \alpha}{g}} \quad \text{при } \varrho < \frac{1}{\sqrt{g(\varphi_0 - \alpha)}}$$

и

$$S \geqq \varrho(\varphi_0 - \alpha) + \frac{1}{g\varrho} \quad \text{при } \varrho > \frac{1}{\sqrt{g(\varphi_0 - \alpha)}}\,.$$

Совершенно такъ-же получимъ неравенство

$$S \geqq 2\sqrt{\frac{2\pi - \varphi_0 + \beta}{g}} \quad \text{при } \varrho < \frac{1}{\sqrt{g(2\pi - \varphi_0 + \beta)}}$$

и неравенство

$$S \geqq \varrho(2\pi - \varphi_0 + \beta) + \frac{1}{g\varrho} \quad \text{при } \varrho > \frac{1}{\sqrt{g(2\pi - \varphi_0 + \beta)}}\,,$$

если предположимъ, что послѣднее значеніе φ равно $\varphi_0 - 2\pi$ и наибольшее равно β.

Сопоставимъ теперь всѣ наши результаты.

Изъ нихъ слѣдуетъ, что при опредѣленіи кратчайшей кривой XMY надо различать два случая:

$$1)\ \varphi_0 < \frac{1}{g\varrho^2} \quad \text{и} \quad 2)\ \varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}\,.$$

Если $\varphi_0 < \frac{1}{g\varrho^2}$, то кратчайшая кривая XMY должна состоять изъ двухъ частей. Первая часть опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \frac{1}{2}\, g s^2$$

при условіи $0 < \varphi < \frac{\varphi_0}{2}$, а вторая часть—уравненіемъ

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} g \left\{ 2\sqrt{\frac{\varphi_0}{g}} - s \right\}^2$$

при условіи $\frac{\varphi_0}{2} < \varphi < \varphi_0$.

Если же $\varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}$, то кратчайшая кривая XMY должна состоять изъ трехъ частей. Первая часть опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \frac{1}{2} gs^2$$

при условіи $0 < \varphi < \varphi_1 = \frac{1}{2g\varrho^2}$. Вторая часть дуга круга радіуса ϱ и опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \frac{s}{\varrho} - \frac{1}{2g\varrho^2}$$

при условіи $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 = \varphi_0 - \frac{1}{2g\varrho^2}$. Наконецъ третья часть опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} g \left(\varrho\varphi_0 + \frac{1}{g\varrho} - s \right)^2$$

при условіи $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$.

Для окончательнаго опредѣленія положенія и вида кратчайшей кривой примемъ прямую OA за ось x-овъ, а OD за ось y-овъ. Иначе сказать, будемъ проводить черезъ каждую точку M нашей кривой двѣ прямыя ME и MF соотвѣтственно параллельныя AO и DO и обозначимъ длину ME черезъ x, длину MF черезъ y.

При такихъ обозначеніяхъ не трудно вывесть слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \\ y &= \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Въ частности для точки X

$$x = \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \,, \quad y = 0 \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

а для точки Y

$$x = 0 \,, \quad y = \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Въ послѣднихъ формулахъ (7), (8) и (9) производная $\frac{ds}{d\varphi}$ постоянно равна наибольшему изъ трехъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}} \,, \; \varrho \,, \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}} \,.$$

Замѣтимъ еще, что кратчайшая кривая XMY расположена симметрично относительно прямой OH, дѣлящей уголъ AOD пополамъ.

Для точки пересѣченія прямой OH съ кратчайшею кривою XMY имѣемъ:

$$y = x = \int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \,; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

разстояніе же этой точки отъ O равно

$$\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \,.$$

При построеніи кратчайшей кривой главную трудность представляютъ тѣ части ея, гдѣ

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2g(\varphi_0 - \varphi)}} \,.$$

По симметричности кривой относительно OH достаточно разсмотрѣть одну изъ этихъ частей.

Остановимся на первой, гдѣ

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}} \,.$$

Для этой части имѣемъ

$$y\sin\varphi_0=\int_0^\varphi\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}}=$$

$$=\int_0^\varphi\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}d\varphi}{\sqrt{2g}}-\frac{1}{6}\int_0^\varphi\frac{\varphi^{\frac{5}{2}}d\varphi}{\sqrt{2g}}+\ldots$$

$$=\frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}-\frac{1}{21}\frac{\varphi^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2g}}+\ \ldots\ldots\ldots\ (11)$$

и

$$x=a-\int_0^\varphi\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}}+y\cos\varphi_0=$$

$$=a+y\cos\varphi_0-\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}}+\frac{1}{2}\int_0^\varphi\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}d\varphi-\ldots$$

$$=a+y\cos\varphi_0-\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}}+\frac{1}{5}\frac{\varphi^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}}-\ \ldots\ldots\ldots\ (12)$$

гдѣ

$$a=\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi=\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi\ \ldots\ldots\ (13)$$

Быстрота сходимости нашихъ рядовъ (11) и (12) зависитъ отъ величины числа φ, которое во всякомъ случаѣ меньше $\frac{1}{2g\varrho^2}$.

При достаточно малыхъ значеніяхъ $\frac{1}{2g\varrho^2}$ можно положить

$$\left.\begin{aligned}y\sin\varphi_0&=\frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}}\\ a-x+y\cos\varphi_0&=\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}}\end{aligned}\right\};\ \ldots\ldots\ (14)$$

иначе сказать, можно замѣнить первую часть кривой XMY параболою третьей степени

$$y\sin\varphi_0=\frac{g}{6}(a-x+y\cos\varphi_0)^3\ \ldots\ldots\ (15)$$

Желая примѣнить наши разсужденія къ желѣзно-дорожной практикѣ, положимъ, согласно „Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen“ bearbeitet von *O. Sarrazin* und *H. Oberbeck*, 1888;

$$\varrho = 300\,,\ g = \frac{1}{12000}\,.$$

Здѣсь за единицу длины принятъ метръ. При такихъ значеніяхъ ϱ и g имѣемъ:

$$\frac{1}{2g\varrho^2} = \frac{1}{15}\,,$$

$$y\sin\varphi_0 < \frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}} < \frac{40}{45} = \frac{8}{9}\,,$$

$$a - x + y\cos\varphi_0 < \frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} < 40\,.$$

Обращаясь затѣмъ къ рядамъ

$$\frac{2}{3}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g}} - \frac{1}{21}\frac{\varphi^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2g}} + \ldots$$

и

$$\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} - \frac{1}{5}\frac{\varphi^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}} + \ldots$$

видимъ, что для каждаго изъ нихъ отношеніе второго члена къ первому меньше $\frac{1}{2250}$. Отсюда можно заключить, что парабола (15) третьей степени дѣйствительно мало уклоняется отъ первой части нашей кратчайшей кривой.

M. Nordling, насколько мнѣ извѣстно, первый предложилъ соединять прямую съ кругомъ посредствомъ параболы третьей степени *).

При измѣненіи однихъ элементовъ кривой XMY необходимо измѣнить и другіе ея элементы для того, чтобы не было разрыва ни въ самой кривой ни въ значеніяхъ ея радіуса кривизны.

Для уясненія вопроса остановимся еще на томъ случаѣ, когда

$$\varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}\,.$$

---

*) Annales des ponts et chaussées 1867, „Note sur le raccordement des courbes des voies de fer“, par Nordling.

Въ этомъ случаѣ мы составляемъ кривую XMY изъ трехъ частей.

Если первую часть мы замѣнимъ параболою (15), то радіусъ кривизны для этой части нашей кривой будетъ равенъ

$$\text{не } \frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}, \quad \text{а } \frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g\varphi}}.$$

При $\varphi=\varphi_1$ выраженіе $\frac{1}{\sqrt{2g\varphi}}$ обращается въ ϱ, а выраженіе $\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g\varphi}}$ въ $\varrho(1+\varphi_1{}^2)^{\frac{3}{2}}$.

Поэтому, замѣнивъ первую часть нашей кратчайшей кривой XMY параболою (15), мы должны за радіусъ кривизны второй части взять не ϱ, а $\varrho(1+\varphi_1{}^2)^{\frac{3}{2}}$, или же продолжить первую часть до такого значенія φ, которое удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2g\varphi}}=\varrho\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (16)$$

Мы предположимъ послѣднее и обозначимъ корень φ уравненія (16) черезъ Φ_1.

Не трудно видѣть, что уравненіе (16) равносильно слѣдующему:

$$\frac{\varphi}{\varphi_1}=(1+\varphi^2)^3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (17)$$

Необходимо принять во вниманіе также и то обстоятельство, что перемѣнная φ въ уравненіяхъ (14) не уголъ TNB, какъ прежде, а тангенсъ этого угла. Поэтому, если желаемъ сохранить за φ прежнее значеніе, то въ уравненіяхъ (14), (16) и (17) слѣдуетъ замѣнить φ на $\Phi=tg\varphi$.

Теперь мы можемъ составить изъ дуги круга радіуса ϱ и изъ двухъ совершенно одинаковыхъ параболъ третьей степени такую кривую, которая будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ нашей задачи, кромѣ одного: она не будетъ кратчайшей. Длина ея равна

$$\varrho(\varphi_0-2\operatorname{arctg}\Phi_1)+2\int_0^{\Phi_1}\frac{\sqrt{1+\Phi^2}d\Phi}{\sqrt{2g\Phi}}$$

и мало отличается отъ длины кратчайшей кривой.

Что касается разстояній OX, OY отъ O до точекъ касанія новой кривой съ прямыми AB и CD, то они равны

$$\frac{2\sqrt{\Phi_1}}{\sqrt{2g}} + \frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\frac{\sqrt{\Phi_1{}^3}}{\sqrt{2g}} + \varrho\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} - \Phi_1}{\sqrt{1+\Phi_1{}^2}}.$$

Въ „Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen", на стр. 54—55, приведенъ примѣръ составленія кривой XMY изъ дуги круга и двухъ параболъ третьей степени. Останавливаясь на этомъ примѣрѣ, положимъ

$$\varrho = 300 \text{ (метровъ)},\ g = \frac{1}{12000},\ \varphi_0 = 1{,}89863\ (108^0 47' 0'',3).$$

При такихъ данныхъ

$$\varphi_1 = \frac{1}{15} = 0{,}0666667\ (3^0 49' 11''),$$

$$\Phi_1 = 0{,}0675844$$

$$\operatorname{arctg}\Phi_1 = 0{,}0674817\ (3^0 51' 59'',1).$$

Длина дуги круга: для кратчайшей кривой $= 529{,}589$ (метровъ), для кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ, $= 529{,}100$ (метровъ).

Общая длина двухъ другихъ частей: для кратчайшей кривой $= 80$ (метровъ), для кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ, $= 80{,}586$ (метровъ).

Вся длина кратчайшей кривой $= 609{,}589$ (метровъ), длина кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ $= 609{,}686$ (метровъ).

Длина отрѣзковъ OX: для кратчайшей кривой $= 439{,}215$ (метровъ), для кривой, составленной изъ дуги круга и двухъ параболъ, $= 439{,}267$ (метровъ).

Обращаясь къ Taschenbuch, замѣчаемъ, что всѣ вычисленія этой книжки основаны на такихъ приближенныхъ формулахъ, при которыхъ кривая, составленная изъ дуги круга и двухъ параболъ, совпадаетъ формально съ кратчайшею кривою.

Такое формальное совпаденіе должно, по моему мнѣнію, сопровождаться замѣтнымъ разрывомъ какъ въ величинѣ кривизны кривой, такъ и въ величинѣ угла φ, если только параболы не будутъ замѣнены вышеуказанными кривыми, для которыхъ производная отъ кривизны по дугѣ сохраняетъ постоянное значеніе.

Дѣло въ томъ, что при

$$\varrho = 300,\ g = \frac{1}{12000},\ \varphi = \varphi_1$$

радіусъ кривизны параболы (15) отличается отъ $\varrho = 300$ на 2 (метра) и φ отличается отъ $\operatorname{arctg}\varphi$ на $0{,}000098$ $(20'')$.

ЗАДАЧА 3-я.

Даны направленія двухъ прямолинейныхъ путей AB и CD и двѣ точки A и D на нихъ (см. фиг. 11-ю).

Требуется соединить эти пути такою кривою AMD, для которой производная отъ кривизны по дугѣ наименѣе уклоняется отъ нуля при соблюденіи слѣдующихъ условій:

1) касательная къ нашей кривой въ точкѣ A должна совпадать съ AB и въ точкѣ D — съ CD;

2) при увеличеніи дуги AM точка M должна постоянно удаляться отъ AB и приближаться къ CD;

3) въ точкахъ A и D кривизна нашей кривой должна обращаться въ нуль.

РѢШЕНІЕ.

Замѣнивъ X на A и Y на D, мы можемъ пользоваться обозначеніями предыдущей задачи: s, φ, φ_0, x, y.

Относительно числа φ_0 попрежнему можемъ предположить, что оно заключается между 0 и π.

Пусть отрѣзки OA и OD выражаются соотвѣтственно числами a и b.

При такихъ обозначеніяхъ имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{d\varphi}{ds} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \\[2ex] \varphi = \varphi_0 \quad \text{и} \quad \dfrac{d\varphi}{ds} = 0 \quad \text{при} \quad s = S \\[2ex] 0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 \\[2ex] a = \displaystyle\int_0^S \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin\varphi_0}\, ds, \quad b = \int_0^S \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\, ds \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Разсмотримъ теперь произвольную кривую, удовлетворяющую всѣмъ этимъ условіямъ, и обозначимъ для нея наибольшее отклоненіе $\dfrac{d^2\varphi}{ds^2}$, производной кривизны по дугѣ, отъ нуля буквою g; такъ что

$$-g \leqq \frac{d^2\varphi}{ds^2} \leqq +g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Разсуждая совершенно такъ-же, какъ при рѣшеніи предыдущей задачи, приходимъ къ неравенствамъ

$$\sqrt{g} \geqq \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{1}{a}\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\varphi_0-\varphi)}} \;. \quad (3)$$

и

$$\sqrt{g} \geqq \frac{1}{b}\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{1}{b}\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\varphi_0-\varphi)}} \;.\;.\;.\;.\; (4)$$

откуда затѣмъ выводимъ

$$g \geqq \frac{1}{2a^2}\left\{\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}\right\}^2 = g' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

и

$$g \geqq \frac{1}{2b^2}\left\{\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}\right\}^2 = g'' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6)$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно убѣдиться, что g можно сдѣлать равнымъ наибольшему изъ двухъ чиселъ g' и g''.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a > b$, то g достигаетъ значенія равнаго g'' для кривой AMB, составленной изъ слѣдующихъ трехъ частей:

1) первая часть прямая линія и опредѣляется уравненіемъ

$$y = 0 \quad \text{при условіи } b \leqq x \leqq a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7)$$

2) вторая часть опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= b - \int_0^{\varphi} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g''\varphi}}, \\ y &= \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g''\varphi}}, \quad \text{при условіи } 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\varphi_0}{2} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;. (8)$$

3) третья часть опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0-\varphi)}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g''(\varphi_0-\varphi)}}, \\ y &= b - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g''(\varphi_0-\varphi)}}, \quad \text{при } \frac{\varphi_0}{2} \leqq \varphi \leqq \varphi_0 \end{aligned}\right\} \;.\;. (9)$$

Если же $a < b$, то g достигаетъ значенія равнаго g' для кривой AMB, составленной изъ слѣдующихъ трехъ частей:

1) первая часть опредѣляется уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= a - \int_0^{\varphi} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'\varphi}}, \\ y &= \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'\varphi}}, \quad \text{при условіи } 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\varphi_0}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (10),$$

2) вторая—уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'(\varphi_0 - \varphi)}} \\ y &= a - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2g'(\varphi_0 - \varphi)}}, \quad \text{при } \frac{\varphi_0}{2} \leqq \varphi \leqq \varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (11),$$

3) третья часть прямая линія и опредѣляется уравненіемъ

$$x = 0 \quad \text{при условіи } a \leqq y \leqq b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Отсюда заключаемъ, что производная кривизны по дугѣ отклоняется наименѣе отъ нуля для такой кривой AMB, которая составлена изъ вышеуказанныхъ трехъ частей.

Численное значеніе производной кривизны по дугѣ въ прямолинейной части составленной нами кривой равно нулю, а въ другихъ частяхъ той же кривой равно наибольшему изъ чиселъ g' и g''.

Замѣтимъ еще, что для всякой другой кривой AMB, удовлетворяющей условіямъ нашей задачи, наибольшее значеніе производной кривизны по дугѣ больше каждаго изъ чиселъ g' и g''.

ЗАДАЧА 4-я.

Къ тремъ условіямъ предыдущей задачи прибавимъ четвертое:

4) кривизна кривой AMB должна не превосходить данной величины $\dfrac{1}{\varrho}$.

Требуется изъ всѣхъ кривыхъ AMB, удовлетворяющихъ нашимъ четыремъ условіямъ, опредѣлить ту, для которой производная кривизны по дугѣ наименѣе отклоняется отъ нуля.

РѢШЕНІЕ.

Здѣсь надо различать два случая:

1) $$\varphi_0 < \frac{1}{g'\varrho^2} \quad \text{и} \quad < \frac{1}{g''\varrho^2},$$

2) $$\varphi_0 > \frac{1}{g'\varrho^2} \text{ или } > \frac{1}{g''\varrho^2}.$$

*

Въ первомъ случаѣ рѣшеніе нашей новой задачи, очевидно, совпадаетъ съ рѣшеніемъ предыдущей. Во второмъ же случаѣ для всякой кривой AMB

$$\varphi_0 > \frac{1}{g\varrho^2}\,.$$

Полагая затѣмъ

$$\frac{1}{2g\varrho^2} = \varphi_1\,,\quad \varphi_0 - \frac{1}{2g\varrho^2} = \varphi_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (1)$$

и разсматривая выраженіе

$$U = \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} + \varrho\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_0}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g(\varphi_0-\varphi)}} =$$

$$= \int_0^{\varphi_1}\frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} + \varrho\frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi_1\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,. (2),$$

приходимъ къ неравенствамъ

$$U \leqq a \quad \text{и} \quad U \leqq b \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (3).$$

При уменьшеніи g выраженіе U возрастаетъ, такъ какъ

$$\frac{dU}{dg} = -\frac{1}{2g}\int_0^{\varphi_1}\frac{\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}-\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2g\varphi}} < 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (4).$$

Поэтому наименьшее значеніе g соотвѣтствуетъ наибольшему значенію U и удовлетворяетъ одному изъ уравненій

$$U = a \quad \text{или} \quad U = b \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (5).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что при $\varphi_0 > \frac{1}{g'\varrho^2}$ или $> \frac{1}{g''\varrho^2}$ искомая кривая AMB должна быть составлена изъ прямой, дуги круга радіуса ϱ и двухъ такихъ кривыхъ, для которыхъ численное значеніе производной кривизны по дугѣ равно корню (g) одного изъ уравненій (5).

Задача наша имѣетъ смыслъ только до тѣхъ поръ, пока ϱ меньше каждаго изъ выраженій

$$a\operatorname{cotg}\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{и} \quad b\operatorname{cotg}\frac{\varphi_0}{2}\,.$$

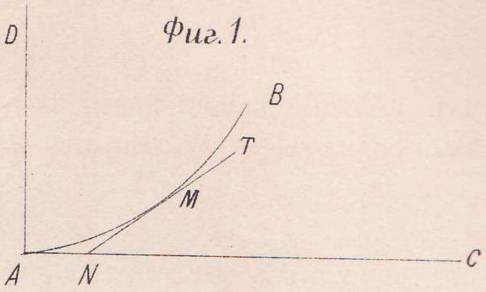
Если же

$$\varrho > a\operatorname{cotg}\frac{\varphi_0}{2} \text{ или } \varrho > b\operatorname{cotg}\frac{\varphi_0}{2}\,,$$

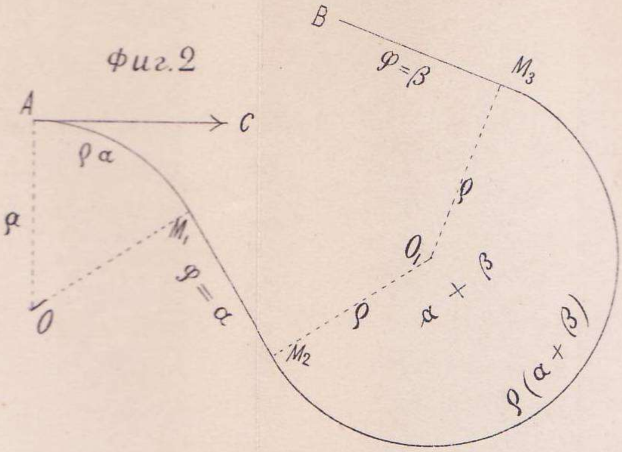
то первыя три условія нашей задачи несовмѣстны съ четвертымъ.

Къ статьѣ А. А. Маркова: „Нѣсколько примѣровъ и т. д.“.

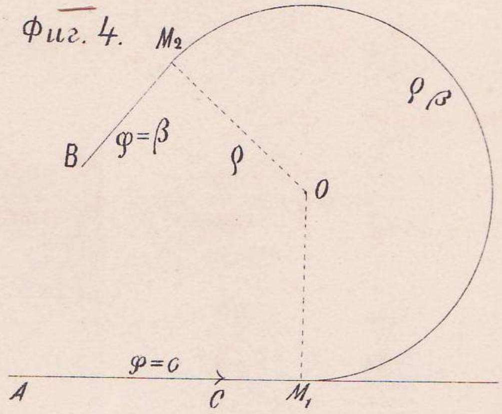
Фиг. 1.



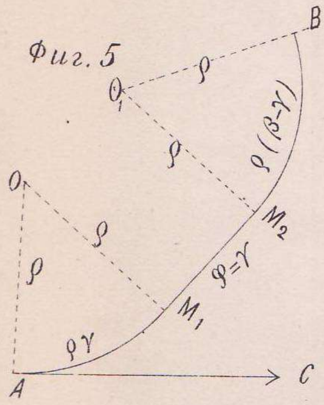
Фиг. 2



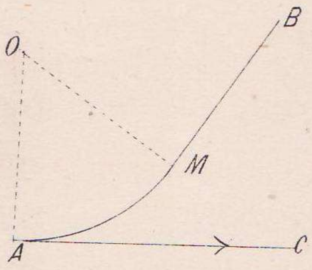
Фиг. 4.

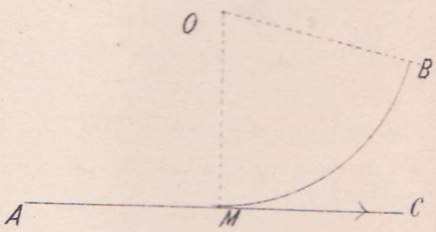


Фиг. 5

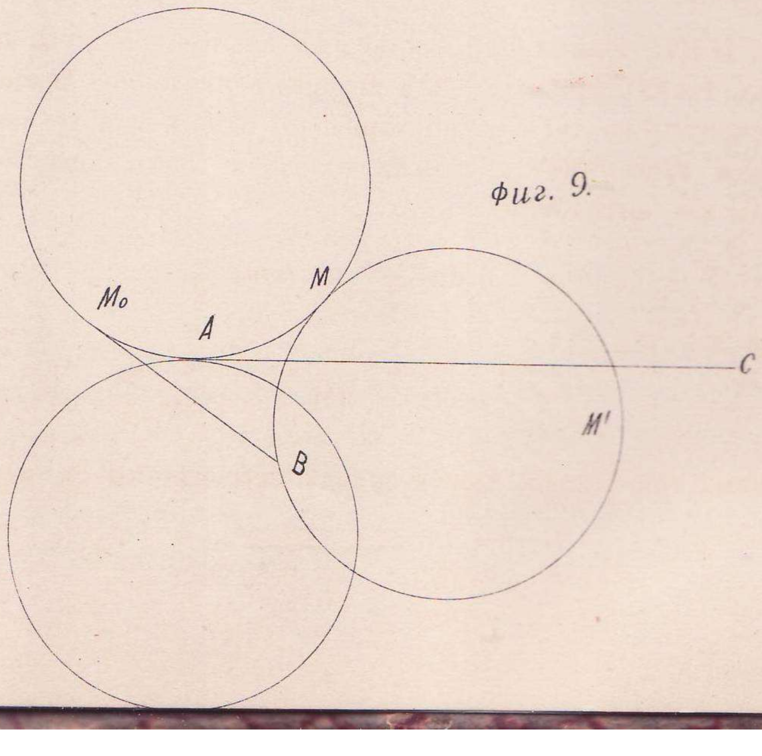


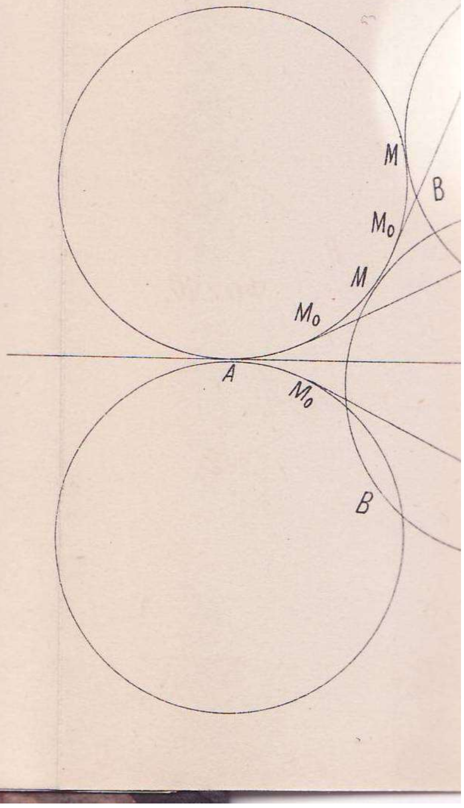
Фиг. 7.



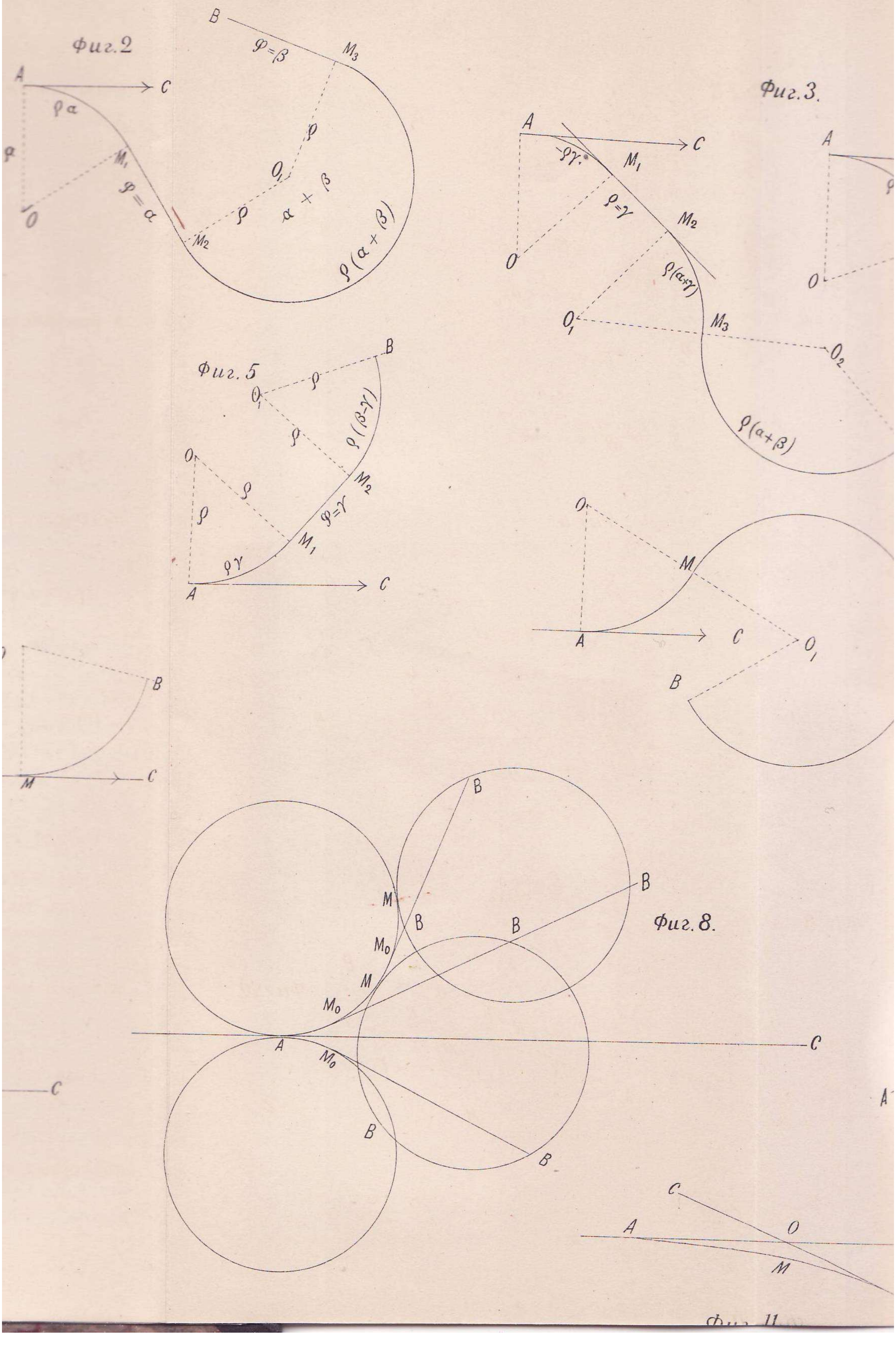


Фиг. 9.

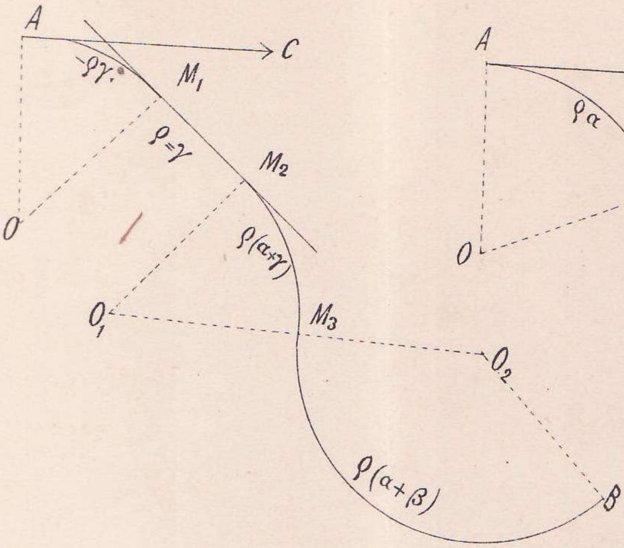


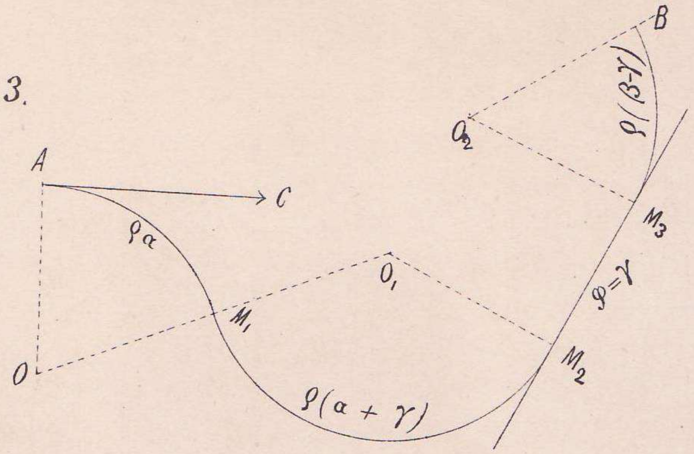


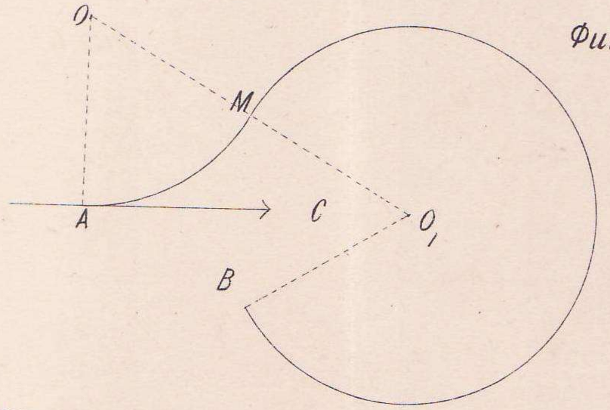
Нѣсколько примѣровъ и т. д.“.



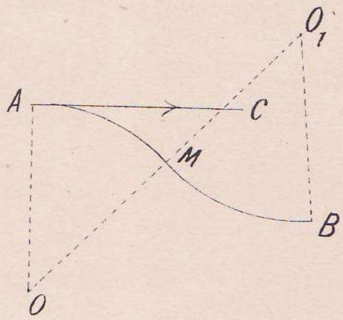
Фиг. 3.

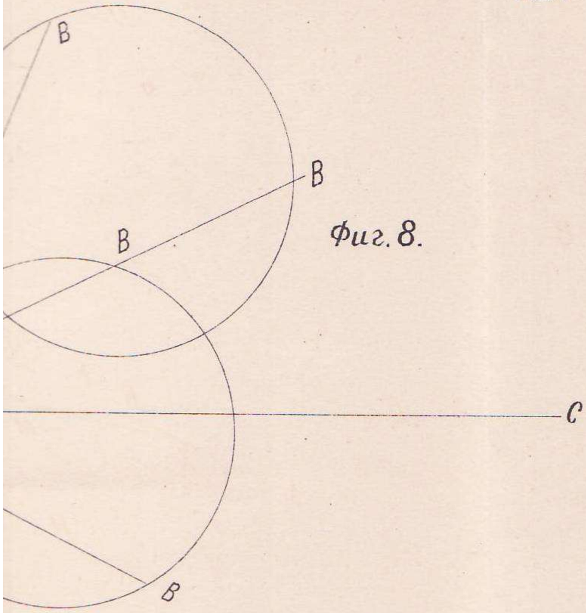




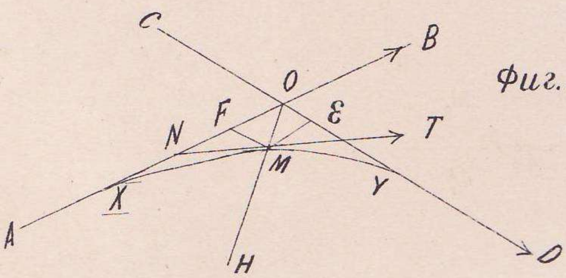


Фиг. 6.

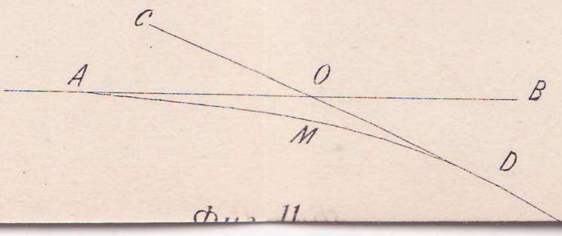




Фиг. 8.



Фиг. 10.



Фиг. 11

Семиугольники Шрётера.

К. А. Андреева.

1. Теорема Паскаля о вписанномъ въ коническое сѣченіе шестиугольникѣ представляетъ, какъ извѣстно, очень важное дескриптивное свойство, изъ котораго, какъ изъ основного предложенія, можетъ быть развита вся проективная теорія этихъ кривыхъ, разсматриваемыхъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ. Такое же значеніе имѣетъ теорема Бріаншона объ описанномъ около коническаго сѣченія шестиугольникѣ при воззрѣніи на эти кривыя, какъ огибаемыя прямыми линіями.

Дальнѣйшее развитіе ученія о коническихъ сѣченіяхъ при помощи какъ аналитическаго, такъ и чисто геометрическаго метода, приводитъ между прочимъ ко многимъ предложеніямъ, представляющимъ аналогію съ теоремами Паскаля и Бріаншона и относящимся ко вписаннымъ и описаннымъ многоугольникамъ высшихъ порядковъ. Такъ о восьмиугольникахъ существуютъ слѣдующія теоремы.

Если въ коническое сѣченіе вписанъ восьмиугольникъ, то точки пересѣченія каждой стороны съ двумя сторонами, смежными съ противоположной, лежатъ также на нѣкоторомъ коническомъ сѣченіи.

Точки пересѣченія, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, могутъ быть точнѣе опредѣлены при указаніи порядка, въ которомъ слѣдуютъ стороны даннаго восьмиугольника. Именно, при обозначеніи сторонъ даннаго восьмиугольника нумерами 1, 2, 3...8, будемъ имѣть, что въ теоремѣ говорится о восьми точкахъ встрѣчи сторонъ 1-й съ 4 й, 2-й съ 5-й, 3-й съ 6-й, 4-й съ 7-й, 5-й съ 8-й, 6-й съ 1-й, 7-й со 2-й и 8-й съ 3-й. Короче сказать, это суть точки пересѣченія каждой стороны со слѣдующей, при установленномъ порядкѣ, послѣ двухъ пропущенныхъ.

Теорема, взаимная съ предыдущей и относящаяся къ восьмиугольнику описанному, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если около коническаго сѣченія описанъ восьмиугольникъ, то прямыя, соединяющія каждую его вершину съ вершинами, смежными съ противоположной, суть касательныя къ нѣкоторому другому коническому сѣченію.

Здѣсь, при обозначеніи порядка, въ которомъ слѣдуютъ одна за другой вершины даннаго восьмиугольника, прямыя, о которыхъ идетъ рѣчь, могутъ быть опредѣлены также, какъ соединяющія каждую вершину съ слѣдующею за ней послѣ двухъ пропущенныхъ.

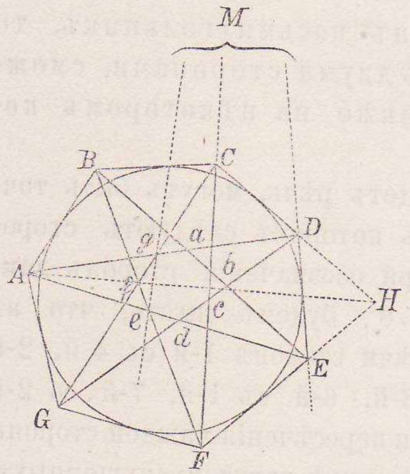
Мы не будемъ приводить доказательствъ этихъ теоремъ, какъ уже давно извѣстныхъ. Замѣтимъ только, что если желаемъ, чтобы оно было строго геометрическое и элементарное *), то должны основывать его только на теоремахъ Паскаля и Бріаншона, какъ дающихъ дескриптивныя опредѣленія коническихъ сѣченій, и на основныхъ предложеніяхъ проективной геометріи.

2. До послѣдняго времени не было, кажется, извѣстно такихъ теоремъ, аналогичныхъ съ теоремами Паскаля и Бріаншона, которыя относились бы къ многоугольникамъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ и вершинъ.

Генрихъ Шрётеръ, профессоръ въ Бреславлѣ, извѣстный издатель и послѣдователь знаменитаго Штейнера, указалъ недавно на теорему о семиугольникѣ, не давши, однако, ея доказательства **).

Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ:

Если около коническаго сѣченія описанъ семиугольникъ, то, соединяя прямыми линіями по порядку каждую вершину съ слѣдующей за нею послѣ двухъ пропущенныхъ, будемъ имѣть, что точки пересѣченія каждой изъ этихъ прямыхъ съ слѣдующей въ томъ же круговомъ порядкѣ лежатъ на нѣкоторомъ другомъ коническомъ сѣченіи.



На прилагаемомъ чертежѣ вершины даннаго описаннаго семиугольника суть по порядку A, B, C, D, E, F, G; точки пересѣченія послѣдовательныхъ діагоналей, о которыхъ говорится въ теоремѣ, будутъ, слѣдовательно, a, b, c, d, e, f, g.

Предлагаемъ въ слѣдующемъ очень простое доказательство этой теоремы, удовлетворяющее всѣмъ упомянутымъ выше требованіямъ.

3. Прежде всего замѣтимъ, что достаточно показать, что какія-нибудь шесть

*) Элементарное въ смыслѣ не пользующагося тѣмъ, что могло бы быть заимствовано изъ теоріи поверхностей второго порядка или линій высшихъ порядковъ.

**) Schröter (H) – „Ein Satz über das dem Kegelschnitt umschriebene Siebeneck". Zeitschrift für Math. und Phys. T. XXXIII, 1888, p. 374—375.

изъ семи точекъ $a, b, c \ldots f, g$ лежатъ на одномъ коническомъ сѣченіи. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ все, сказанное объ одной какой-нибудь группѣ шести точекъ изъ этихъ семи, должно имѣть мѣсто и для всякой другой такой группы, и такъ какъ двѣ такія группы имѣютъ пять общихъ точекъ, которыми коническое сѣченіе опредѣляется вполнѣ, то и убѣдимся, что на этомъ же коническомъ сѣченіи должны лежать и двѣ остальныя точки.

Соединимъ теперь прямою линіею точки e и g и обозначимъ буквою H точку пересѣченія прямыхъ CD и EF. Такъ какъ по условію шестиугольникъ $ABCHFG$ есть описанный, то по теоремѣ Бріаншона прямыя BF, CG и AH должны проходить черезъ одну точку f. Это показываетъ, что треугольники DCg и EFe гомологическіе, ибо ихъ стороны Dg и Ee, Cg и Fe, DC и EF пересѣкаются въ трехъ точкахъ A, f, H, лежащихъ на одной прямой. Слѣдовательно, прямыя ge, CF и DE, соединяющія соотвѣтственныя вершины этихъ треугольниковъ, сходятся въ одной точкѣ M.

Но точки D, E и M, лежащія, такимъ образомъ, на одной прямой, могутъ быть разсматриваемы, какъ точки пересѣченія прямыхъ ga и cd, ab и de, bc и eg, которыя суть противоположныя стороны шестиугольника $abcdeg$. Слѣдовательно, этотъ шестиугольникъ, по теоремѣ Паскаля, есть вписанный въ коническое сѣченіе, что и требовалось доказать.

4. Въ предыдущемъ доказательствѣ мы дѣлаемъ, собственно говоря, два послѣдовательныя заключенія. Прежде всего изъ того, что шестиугольникъ $ABCHFG$ описанный, мы заключаемъ, по теоремѣ Бріаншона, что треугольники DCg и EFe гомологическіе. Отсюда же, на основаніи теоремы Паскаля, заключаемъ, что шестиугольникъ $abcdeg$ вписанный.

Понятно, что, исходя изъ этого послѣдняго условія и дѣлая тѣ же заключенія въ обратномъ порядкѣ, мы будемъ имѣть доказательство обратной и въ то же время взаимной съ предыдущею теоремы. Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ:

Если въ коническое сѣченіе вписанъ семиугольникъ и мы возьмемъ точки пересѣченія каждой его стороны съ слѣдующей послѣ двухъ пропущенныхъ, то прямыя, соединяющія эти точки въ томъ же круговомъ порядкѣ, составятъ семиугольникъ, описанный около нѣкотораго другого коническаго сѣченія.

5. Семь касательныхъ, составляющихъ данный описанный многоугольникъ въ первой изъ двухъ предыдущихъ теоремъ, предполагаются данными въ извѣстномъ порядкѣ.

При измѣненіи этого порядка измѣнятся, вообще говоря, вершины этого семиугольника, а съ тѣмъ вмѣстѣ измѣнится и коническое сѣченіе, въ которое вписанъ другой семиугольникъ, упоминаемый въ заключеніи теоремы. Такихъ коническихъ сѣченій будетъ, слѣдовательно, столько, сколько можно составить изъ семи данныхъ касательныхъ различныхъ описанныхъ семиугольниковъ. Это число есть, очевидно, $3.4.5.6 = 360$. Между всѣми этими коническими сѣченіями должна существовать геометрическая связь, подобная той, которая существуетъ между 60 паскалевыми прямыми для шестиугольниковъ, имѣющихъ вершины въ даннныхъ шести точкахъ на коническомъ сѣченіи, или между 60 бріаншоновыми точками для шестиугольниковъ, имѣющихъ сторонами шесть данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію. Изслѣдованіе этой связи можетъ повести ко многимъ любопытнымъ геометрическимъ результатамъ, если судить по аналогіи съ тѣми результатами, къ которымъ привели въ теоріи Паскалева мистическаго шестиугольника труды Штейнера, Киркмана, Кэле, Салмона, Кремоны и Веронезе. Мы ограничимся, впрочемъ, лишь указаніемъ на этотъ интересный путь изслѣдованій, такъ какъ цѣлью настоящей замѣтки мы полагали только приведенное выше доказательство теоремы Шрётера о семиугольникахъ.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 22-го Января 1888 г.

1. Избраны въ почетные члены Общества академики: В. Я. Имшенецкій, В. Я. Буняковскій и П. Л. Чебышевъ.

2. К. А. Андреевъ доложилъ статью академика В. Г. Имшенецкаго: „Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ въ теоріи вѣроятностей“.

3. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости“.

4. Въ этомъ засѣданіи получено въ даръ Обществу сочиненіе В. Г. Имшенецкаго: „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“, отъ автора.

Засѣданіе 26-го Февраля.

1. Избраны въ члены-корреспонденты Общества профессоры: В. П. Ермаковъ, А. Н. Коркинъ, К. А. Поссе, Н. Е. Жуковскій, А. А. Марковъ, И. Л. Пташицкій и П. О. Сомовъ.

2. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О простыхъ геометрическихъ условіяхъ, опредѣляющихъ коническія сѣченія“.

3. М. А. Тихомандрицкій доложилъ статью И. Л. Пташицкаго: „Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ“.

Засѣданіе 1-го Апрѣля.

1. В. П. Алексѣевскій доложилъ статью К. А. Торопова: „Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ“.

2. М. А. Тихомандрицкій доложилъ статью И. Л. Пташицкаго „Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ“.

3. К. А. Андреевъ доложилъ статью И. И. Иванова „Объ интерполированіи двухъ произведеній“.

4. Въ этомъ засѣданіи получено въ даръ Обществу сочиненіе П. О. Сомова „О степеняхъ свободы кинематической цѣпи“, отъ автора.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

1-го Октября 1888 г.

1. Доложенъ отчетъ о дѣятельности и о состояніи кассы и библіотеки Общества за 1887—88 академическій годъ.

2. Произведены выборы членовъ распорядительнаго коммитета на 1888—89 академическій годъ. Избраны:

Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, профессоръ университета.

Товарищами предсѣдателя: В. Л. Кирпичевъ, директоръ харьк. технологическаго института и М. А. Тихомандрицкій, профес. университ.

Секретаремъ А. П. Грузинцевъ, преподаватель 1-ой харьк. гимназіи.

Завѣдываніе библіотекой поручено А. А. Клюшникову, стипендіату университета.

Засѣданіе 20-го Октября.

1. Избранъ въ дѣйствительные члены Общества А. С. Веребрюсовъ, преподаватель старобѣльской гимназіи (по предложенію С. А. Раевскаго и М. Ѳ. Ковальскаго).

2. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма“.

3. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи алгебраическихъ функцій и кривыхъ линій“.

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу слѣдующія сочиненія:

Суслова—„Объ уравненіяхъ съ частными производными для несвободнаго движенія“, Спб., 1888, отъ автора.

Порѣцкаго—„Къ ученію о простыхъ числахъ“, Казань, 1888, отъ автора.

Markoff—„Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2}dt$“, St. Pet., 1888, отъ автора.

Репашевъ—„Рѣшеніе задачи Ермакова“, отъ автора.

Weyr, E.—„Ueber Raumcurven 5-ter Ordnung“, Wien, 1888, отъ автора.

Rayet—„Observations pluviométriques“, Bordeaux, 1886, отъ автора.

Засѣданіе 17-го Ноября.

1. Избранъ въ дѣйствительные члены Общества В. А. Стекловъ стипендіатъ университета (по предложенію А. М. Ляпунова и Г. В. Левицкаго).

2. Доложены задачи А. А. Маркова на опредѣленіе функцій и кривыхъ линій по нѣкоторымъ условіямъ.

3. Доложено о вступленіи въ дѣйствительные члены Общества безъ избранія (согласно § 3 устава) профессоровъ харьк. технологическаго института: Х. С. Головина, П. М. Мухачева, В. С. Кнаббе и К. А. Зворыкина.

4. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма" (продолженіе).

5. Г. В. Левицкій доложилъ статью А. А. Маркова: „Къ вопросу о черченіи картъ".

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу слѣдующія сочиненія В. И. Альбицкаго: a) „Болтовыя сцѣпленія", b) „Цилиндрическія зубчатыя колеса", c) „Коническія зубчатыя колеса", d) „Винтовое зацѣпленіе", отъ автора.

Засѣданіе 15-го Декабря.

1. Предсѣдатель доложилъ объ утратѣ, понесенной Обществомъ въ лицѣ дѣйствительнаго члена И. И. Федоренко, бывшаго профессора харьковскаго университета, скончавшагося 13-го Декабря.

2. А. М. Ляпуновъ доложилъ статью Д. К. Бобылева: „Одна задача механики системы матеріальныхъ точекъ".

3. Онъ-же предложилъ рѣшеніе задачъ А. А. Маркова.

4. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ добавленіе къ своему предыдущему сообщенію: „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма".

5. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу отъ Д. К. Бобылева слѣдующія его сочиненія: a) „Курсъ теоретической механики" 3 вып., b) „Гидростатика и теорія упругости", c) „Поляризаціонныя призмы", d) „О распредѣленіи электричества въ проводникахъ", e) „О движеніи поверхности, прикасающейся къ другой поверхности", f) „О перемѣнѣ координатъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія", g) „Электростатическія задачи о распредѣленіи электричества на двухъ шарахъ", h) „Объ успѣхахъ теоріи движенія жидкостей за послѣдніе 30 лѣтъ".

Засѣданіе 19-го Января 1889 г.

1. Избранъ въ члены-корреспонденты Общества профессоръ с.-петербургскаго университета Д. К. Бобылевъ (по предложенію К. А. Андреева и А. М. Ляпунова).

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интерполированіи одного произведенія" (по поводу статьи И. И. Иванова о томъ же предметѣ).

3. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу о конфигураціяхъ".

4. А. М. Ляпуновъ изложилъ часть своего произведенія: „Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ“.

5. Въ этомъ засѣданіи получено въ даръ Обществу отъ Ѳ. А. Бредихина его сочиненіе: „Sur l'origine des étoiles filantes“.

Засѣданіе 16-го Февраля.

1. Доложена задача проф. В. П. Ермакова на преобразованіе фигуръ въ пространствѣ.

2. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ“ (продолженіе).

3. В. А. Стекловъ доложилъ статью А. А. Маркова: „Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ“.

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу слѣдующія сочиненія: *Петрова* „Сопротивленіе поѣзда на желѣзной дорогѣ“ отъ директ. с.-петерб. технол. инст., *Алексѣева* „Геометрическія изслѣдованія объ одно-четырехзначномъ соотвѣтствіи 4-го порядка двухъ плоскостей“, отъ автора.

Засѣданіе 23-го Марта.

1. В. П. Алексѣевскій изложилъ свое „Обобщеніе одной теоремы Вейерштрасса“.

2. А. П. Грузинцевъ изложилъ новыя изслѣдованія въ элементарной геометріи подъ заглавіемъ: „О новой геометріи треугольника“.

3. В. А. Стекловъ сообщилъ замѣтку „Къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка“.

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу сочиненія: *Забуцкаго* „Рѣшеніе задачи навѣсной стрѣльбы“ отъ автора, и *Волкова* „О логическомъ счисленіи“ отъ автора.

Засѣданіе 27-го Апрѣля.

1. К. А. Андреевъ сообщилъ замѣтку „О семиугольникахъ Шрётера“.

2. А. П. Грузинцевъ продолжилъ сообщеніе „О новой геометріи треугольника“, начатое въ предыдущее засѣданіе.

3. Г. В. Левицкій доложилъ статью А. С. Веребрюсова: „Объ ускореніи движенія кометы Энке и о возмущеніи перигелія Меркурія“.

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ Обществу слѣдующія сочиненія: *Бредихина Ѳ. А.* „Sur l'origine des cometes périodiques“, отъ автора. *Штенгеля* „О вѣтряныхъ двигателяхъ“, отъ издателя, г. Шпачинскаго. *Граве* „О параболическомъ интерполированіи“, отъ автора.

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

ОБЪ ИЗДАНІИ

Сообщеній Харьковскаго Математическаго Общества.

Сообщенія издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Изданіе это содержитъ научныя и педагогическія статьи изъ области чистой и прикладной математики, докладывавшіяся въ засѣданіяхъ Харьковскаго Математическаго Общества.

Книжки сообщеній выходятъ въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ трехъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на первый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ.

Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) продаются отдѣльно, по 50 коп. Съ требованіями можно обращаться въ книжный магазинъ Д. Н. Полуехтова, Харьковъ, Московская ул. № 18. Тамъ же можно получать указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи; цѣна 20 коп.

По всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

ОБЪ ИЗДАНІИ

Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстій

въ 1889 году.

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ Университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностію Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ Университетскихъ Извѣстіяхъ печатаются.

1. Протоколы засѣданій Университетскаго Совѣта.

2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.

3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.

4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.

5. Программы, конспекты и библіографическіе указатели для учащихся.

6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студентскій ея отдѣлъ.

7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.

8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.

9. Годичные отчеты по Университету.

10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.

11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степеней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также самыя диссертаціи.

12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.

13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.

14. Ученые труды преподавателей и учащихся.

15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются въ слѣдующемъ порядкѣ: Часть I—оффиціальная (протоколы, отчеты и т. п.); Часть II—неоффиціальная: отдѣлъ I—*историко-филологическій*; отдѣлъ II—*юридическій*; отдѣлъ III—*физико-математическій*; отдѣлъ IV—*медицинскій*; отдѣлъ V—*критико-библіографическій*—посвящается критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной); отдѣлъ VI—*научная хроника* заключаетъ въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при Университетѣ и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы и переводы сочиненій; а также указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

Университетскія извѣстія въ 1889 году будутъ выходить, въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 15 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **извѣстій** безъ пересылки шесть рублей пятьдесятъ коп., а съ пересылкою семь рублей. Въ случаѣ выхода *приложеній* (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Студенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ университетовъ 4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. иногородные могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглоблину въ С.-Петербургъ, на Малую Садовую, № 4, и въ Кіевъ, на Крещатикъ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Главный Редакторъ В. Иконниковъ.