О преломленіи свѣтовыхъ лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями.

А. П. Грузинцева.

Въ руководствахъ по физикѣ, какъ отечественныхъ, такъ и иностранныхъ, излагается обыкновенно вычисленіе хода свѣтовыхъ лучей черезъ прозрачныя средины, ограниченныя *сферическими поверхностями*, да и то лишь для случая лучей центральныхъ. И, вообще говоря, этого совершенно достаточно для обычныхъ нуждъ опытной физики; разсматривая-же вопросъ съ чисто-теоретической точки зрѣнія, необходимо придемъ къ тому заключенію, что можетъ встрѣтиться надобность въ вычисленіи хода лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-угодно поверхностями и тогда за разрѣшеніемъ такихъ вопросовъ придется обращаться къ старымъ мемуарамъ конца прошлаго и первой половины настоящаго столѣтія, именно къ мемуарамъ Эйлера, Штурма и др.—мемуарамъ, помѣщеннымъ въ изданіяхъ, не принадлежащихъ къ числу особенно распространенныхъ; на русскомъ-же языкѣ мнѣ неизвѣстно ни одной статьи, относящейся до изслѣдованія интересующаго насъ вопроса.

Въ виду сказаннаго мнѣ кажется не безполезнымъ изложить здѣсь рѣшеніе занимающаго насъ вопроса по возможности въ простой, хотя и общей формѣ. Къ тому-же побуждаетъ еще и слѣдующее соображеніе. Авторы, занимавшіеся поставленнымъ нами вопросомъ, смотрѣли на него болѣе съ геометрической его стороны, чѣмъ физической,—поэтому въ ихъ изслѣдованіяхъ встрѣчается не мало предложеній, весьма любопытныхъ съ чисто-геометрической точки зрѣнія, но не имѣющихъ особаго интереса для математической физики.

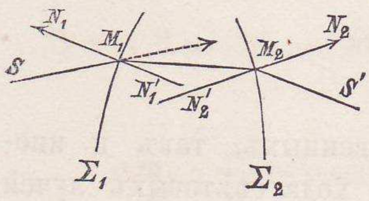
Разрѣшивъ вопросъ въ общемъ видѣ, поучительно приложить полученныя формулы къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, случаямъ, имѣющимъ извѣстное значеніе на практикѣ, почему въ этой статьѣ вслѣдъ за общими рѣшеніями будутъ разсмотрѣны и нѣкоторыя частныя ихъ формы.

Такимъ образомъ, задача, которую мы предлагаемъ себѣ разрѣшить, будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Данъ пучекъ свѣтовыхъ лучей и нѣкоторое число прозрачныхъ срединъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями; требуется опредѣлить направленіе пучка по выходѣ его изъ данныхъ срединъ.

I.

§ 1. Пусть $S(x_0\,, y_0\,, z_0)$ будетъ свѣтящаяся точка (черт. 1); $a_0\,, b_0\,, c_0$ косинусы направленія луча SM_1, падающаго на нѣкоторую поверхность Σ_1 въ точкѣ M_1, координаты которой пусть будутъ x_1, y_1, z_1. Косинусы направленія нормала M_1N_1 къ поверхности Σ_1 въ точкѣ паденія M_1 пусть будутъ A_1, B_1, C_1 и i_1 — уголъ паденія луча SM_1 на поверхность Σ_1; тогда будемъ имѣть:



Черт. 1-й.

$$A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0 = \operatorname{cs} i_1 \,.\;\; .\;\; .\;\; .\;\; .\;\; . \qquad (1)$$

Далѣе пусть косинусы направленія преломленнаго луча будутъ a_1, b_1, c_1 и i_2 — уголъ преломленія на поверхности Σ_1, тогда

$$A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = \operatorname{cs} i_2 \,.\;\; .\;\; .\;\; .\;\; .\;\; . \qquad (2)$$

Пусть этотъ лучъ M_1M_2 падаетъ на вторую поверхность Σ_2 въ точкѣ M_2, координаты которой будутъ $x_2\,, y_2\,, z_2$, подъ угломъ i_3; пусть далѣе косинусы направленія нормала M_2N_2 къ поверхности Σ_2 въ точкѣ M_2 будутъ $A_2\,, B_2\,, C_2$, тогда

$$A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c_1 = \operatorname{cs} i_3 \,.\;\; .\;\; .\;\; .\;\; .\;\; . \qquad (3)$$

Наконецъ этотъ лучъ M_1M_2 преломляется въ точкѣ M_2 по направленію M_2S'; пусть уголъ преломленія будетъ i_4 и направленіе луча M_2S' опредѣляется косинусами $a_2\,, b_2\,, c_2$; тогда

$$A_2a_2 + B_2b_2 + C_2c_2 = \operatorname{cs} i_4 \,.\;\; .\;\; .\;\; .\;\; .\;\; . \qquad (4)$$

Лучъ M_2S' можетъ падать на слѣдующую поверхность Σ_3 и т. д.

§ 2. Прежде чѣмъ идти далѣе замѣтимъ на счетъ направленій нормаловъ и лучей слѣдующее. Будемъ считать за *положительное*—направленіе нормала *наружу* поверхности, а противоположное направленіе за отрицательное; затѣмъ направленіе отъ M_1 къ M_2, т. е. M_1M_2, за положительное, а направленіе отъ M_2 къ M_1 за отрицательное, или вообще направленіе M_iM_{i+1} за положительное, а $M_{i+1}M_i$ за отрицательное.

На этомъ основаніи по черт. 1 имѣемъ:

$$\mathrm{cs}(SM_1,\ M_1N_1) = -(A_1a_0 + B_1b_0 + C_1c_0) = -\mathrm{cs}i_1\,,$$

такъ какъ по нашему условію направленіе M_1S опредѣляется косинусами $-a_0$, $-b_0$, $-c_0$. Такъ же

$$\mathrm{cs}(M_1M_2,\ M_1N_1') = -(A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1) = -\mathrm{cs}i_2\,,$$

ибо направленіе M_1N_1' опредѣляется косинусами $-A_1$, $-B_1$, $-C_1$.

Подобнымъ же образомъ:

$$\begin{aligned}\mathrm{cs}i_3 = (-A_2)\,(-a_1) + (-B_2)\,(-b_1) + (-C_2)\,(-c_1) = \\ = A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c_1\end{aligned}$$

такъ-какъ направленіе M_2M_1 опредѣляется косинусами $-a_1$, $-b_1$, $-c_1$, а направленіе M_2N_2' косинусами $-A_2$, $-B_2$, $-C_2$.

§ 3. Назовемъ показатель преломленія свѣта при переходѣ изъ первой средины во вторую черезъ поверхность Σ_1 буквой μ_1, тогда по закону Декарта имѣемъ:

$$\frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2} = \mu_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Выразимъ теперь аналитически тотъ законъ, что оба луча, падающій и преломленный, лежатъ въ одной плоскости съ нормаломъ M_1N_1 къ поверхности Σ_1.

Это обстоятельство выразится слѣдующими тремя равенствами:

$$\left.\begin{aligned} b_0C_1 - c_0B_1 &= \frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2}\,(b_1C_1 - c_1B_1) \\ c_0A_1 - a_0C_1 &= \frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2}\,(c_1A_1 - a_1C_1) \\ a_0B_1 - b_0A_1 &= \frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2}\,(a_1B_1 - b_1A_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Дѣйствительно, косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ M_1S и M_1N_1, составляющихъ между собой уголъ i_1, суть

$$\frac{b_0C_1 - c_0B_1}{\operatorname{sn} i_1}, \quad \frac{c_0A_1 - a_0C_1}{\operatorname{sn} i_1}, \quad \frac{a_0B_1 - b_0A_1}{\operatorname{sn} i_1}, \quad . \;.\; . \qquad (a)$$

а косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ M_1N_1 и M_1M_2, между которыми заключается уголъ i_2, суть

$$\frac{b_1C_1 - c_1B_1}{\operatorname{sn} i_2}, \quad \frac{c_1A_1 - a_1C_1}{\operatorname{sn} i_2}, \quad \frac{a_1B_1 - b_1A_1}{\operatorname{sn} i_2}, \quad . \;.\; . \qquad (b)$$

но прямыя M_1S, M_1N_1 и M_1M_2 лежатъ въ одной плоскости, слѣдовательно, выраженія (a) и (b) должны быть равны между собой, откуда и получаются равенства (6).

Замѣтимъ, что въ равенствахъ (6) независимыхъ равенствъ только два; третье есть ихъ слѣдствіе. Въ самомъ дѣлѣ, умножая, напр., первое на $-A_1$, второе на $-B_1$ и складывая результаты, получимъ по приведеніи и сокращеніи на C_1 равенство третье въ системѣ (6).

§ 4. Теперь ближайшая наша задача будетъ состоять въ опредѣленіи направленія преломленнаго луча M_1M_2, т. е. въ опредѣленіи количествъ a_1, b_1, c_1 и i_2 по даннымъ a_0, b_0, c_0, A_1, B_1, C_1, i_1 *) и μ_1.

Напишемъ два послѣднія уравненія системы (6) въ такомъ видѣ:

$$a_1C_1 = c_1A_1 - \frac{1}{\mu_1}(c_0A_1 - a_0C_1),$$

$$a_1B_1 = b_1A_1 + \frac{1}{\mu_1}(a_0B_1 - b_0A_1),$$

причемъ вмѣсто отношенія синусовъ угловъ i_1 и i_2 подставлено его значеніе изъ равенства (5).

Присоединимъ къ написаннымъ сейчасъ равенствамъ слѣдующее тождество

$$a_1A_1 = a_1A_1 .$$

Теперь умножимъ первое изъ этихъ уравненій на C_1, второе на B_1, третье на A_1 и результаты сложимъ; тогда, помня, что

---

*) Какъ опредѣляются A_1, B_1, C_1, i_1, будетъ объяснено ниже (§ 5); въ случаѣ плоскости A_1, B_1, C_1 суть данныя количества.

$$A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2 = 1\,,$$
$$A_1 a_0 + B_1 b_0 + C_1 c_0 = \mathrm{cs} i_1\,,$$
$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = \mathrm{cs} i_2\,,$$

найдемъ:

$$a_1 = A_1\,\mathrm{cs} i_2 - \frac{1}{\mu_1}\left[A_1\left(\mathrm{cs} i_1 - a_0 A_1\right) - a_0\left(1 - A_1{}^2\right)\right]$$

или

$$a_1 = A_1\,\mathrm{cs} i_2 - \frac{A_1}{\mu_1}\,\mathrm{cs} i_1 + \frac{a_0}{\mu_1}\,;$$

но

$$\mathrm{cs} i_2 - \frac{\mathrm{cs} i_1}{\mu_1} = \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1}\,,$$

слѣдовательно,

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1}\,A_1.$$

Поступая подобнымъ образомъ, найдемъ формулы для b_1 и c_1.

И такъ, имѣемъ систему уравненій для опредѣленія a_1, b_1 и c_1:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mathrm{sn} i_2}{\mathrm{sn} i_1}\,a_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1}\,A_1 \\ b_1 &= \frac{\mathrm{sn} i_2}{\mathrm{sn} i_1}\,b_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1}\,B_1 \\ c_1 &= \frac{\mathrm{sn} i_2}{\mathrm{sn} i_1}\,c_0 + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1}\,C_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Такимъ образомъ, эти формулы *) даютъ возможность опредѣлить направленіе преломленнаго луча по данному падающему, если мы присоединимъ къ нимъ уравненіе (5), въ которомъ μ_1 должно считаться даннымъ, а i_1, A_1, B_1 и C_1 по тѣмъ-же даннымъ будутъ предварительно вычислены.

§ 5. Покажемъ теперь, какъ найти A_1, B_1, C_1 и i_1 по даннымъ a_0, b_0, c_0 и уравненію поверхности Σ_1.

---

*) Онѣ годятся и для случая отраженія, если сдѣлаемъ въ нихъ $i_2 = -i_1$, т. е., $\mu_1 = -1$.

Опредѣленіе всѣхъ этихъ количествъ можно выполнить слѣдующимъ путемъ.

Пусть

$$\omega_1(x\,,\; y\,,\; z)=0$$

будетъ уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ поверхности Σ_1 и

$$r_0$$

неизвѣстное пока разстояніе точки M_1 отъ S; тогда, выбравъ приличнымъ образомъ начало координатъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_0&=r_0a_0\\ y_1-y_0&=r_0b_0\\ z_1-z_0&=r_0c_0 \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)$$

Координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1 должны удовлетворять уравненію поверхности Σ_1, поэтому имѣемъ:

$$\omega_1(x_0+r_0a_0\,,\; y_0+r_0b_0\,,\; z_0+r_0c_0)=0$$

или

$$\Phi_1(r_0)=0\,.$$

Рѣшимъ это уравненіе и возмемъ *наименьшій положительный коренъ* его; пусть это и будетъ r_0, тогда изъ равенствъ (c) найдемъ координаты точки M_1, т. е. количества

$$x_1,\; y_1,\; z_1.$$

Зная-же координаты точки M_1, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=P_1\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\\ B_1&=P_1\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}\\ C_1&=P_1\frac{\partial\omega_1}{\partial z_1} \end{aligned}\right\}\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

гдѣ P_1 опредѣляется равенствомъ

$$\frac{1}{P_1} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z_1}\right)^2},$$

а символы $\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial z_1}$ обозначаютъ частныя производныя уравненія поверхности по координатамъ, въ которыя подставлены затѣмъ значенія x_1, y_1, z_1 вмѣсто перемѣнныхъ координатъ x, y, z.

Что касается двойнаго знака передъ корнемъ, то каждый разъ надо брать тотъ знакъ, при которомъ A_1, B_1, C_1 для внѣшняго направленія нормала будутъ положительны.

Такимъ образомъ, знаемъ A_1, B_1 и C_1, а затѣмъ по формулѣ (1) опредѣлимъ и уголъ i_1.

§ 6. Пусть теперь лучъ, преломленный на первой поверхности, падаетъ на вторую; примемъ его за падающій; направленіе его мы уже знаемъ по формуламъ (7).

И такъ, имѣемъ: падающій лучъ M_1M_2 и преломленный M_2S' (черт. 1): косинусы направленія этого послѣдняго будутъ a_2, b_2, c_2. По формуламъ (7) получимъ:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{\mathrm{sn} i_4}{\mathrm{sn} i_3} a_1 + \frac{\mathrm{sn}(i_3 - i_4)}{\mathrm{sn} i_3} A_2 \\ b_2 &= \frac{\mathrm{sn} i_4}{\mathrm{sn} i_3} b_1 + \frac{\mathrm{sn}(i_3 - i_4)}{\mathrm{sn} i_3} B_2 \\ c_2 &= \frac{\mathrm{sn} i_4}{\mathrm{sn} i_3} c_1 + \frac{\mathrm{sn}(i_3 - i_4)}{\mathrm{sn} i_3} C_2 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8)$$

Эти равенства мы могли-бы получить непосредственно такимъ-же путемъ, какъ и формулы (7).

Дѣйствительно, сначала выразили-бы алгебраически тотъ фактъ, что направленія M_1M_2, M_2S' и M_2N_2 лежатъ въ одной плоскости; это дало-бы уравненія *):

$$\left.\begin{aligned} C_2b_2 - B_2c_2 &= \frac{\mathrm{sn} i_4}{\mathrm{sn} i_3}(b_1C_2 - c_1B_2) \\ A_2c_2 - C_2a_2 &= \frac{\mathrm{sn} i_4}{\mathrm{sn} i_3}(c_1A_2 - a_1C_2) \\ B_2a_2 - A_2b_2 &= \frac{\mathrm{sn} i_4}{\mathrm{sn} i_3}(a_1B_2 - b_1A_2) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

*) Въ нихъ независимыхъ только два. (См. конецъ § 3).

Поступая затѣмъ совершенно такимъ-же образомъ, какъ и съ уравненіями (6), найдемъ систему (8).

Присоединяя къ уравненіямъ (8) еще слѣдующее

$$\frac{\operatorname{sn} i_3}{\operatorname{sn} i_4} = \mu_2 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

причемъ μ_2 — показатель преломленія при переходѣ свѣта изъ 2-й среды въ 3-ью, мы получимъ 4 уравненія съ 4-мя неизвѣстными a_2, b_2, c_2 и i_4; здѣсь, разумѣется, количества A_2, B_2, C_2 и i_3 опредѣляются предварительно по способу § 5, а именно будемъ имѣть формулы:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= P_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \\ B_2 &= P_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial y_2} \\ C_2 &= P_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial z_2} \end{aligned}\right\} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (e)$$

въ которыхъ P_2 опредѣляется изъ равенства

$$\frac{1}{P_2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial z_2}\right)^2} ,$$

а координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2 изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r_1 a_1 \\ y_2 - y_1 &= r_1 b_1 \\ z_2 - z_1 &= r_1 c_1 \end{aligned}\right\} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (f)$$

въ которыхъ

$$r_1 = M_1 M_2$$

опредѣляется уравненіемъ поверхности Σ_2:

$$\omega_2(x_2 , y_2 , z_2) = 0$$

или, по подстановкѣ значеній x_2, y_2, z_2 изъ уравненій (f), равенствомъ

$$\Phi_2(r_1) = 0 .$$

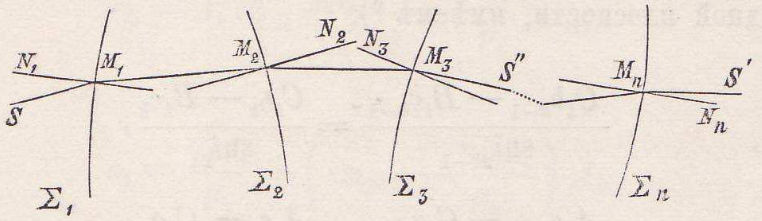
На счетъ того обстоятельства, какой корень надо брать, слѣдуетъ держаться правила, даннаго въ § 5 для корней уравненія $\Phi_1(r_0)=0$.

Уголъ i_3 опредѣлится по формулѣ (3).

§ 7. Подставимъ значенія a_1, b_1, c_1 изъ формулъ (7) въ формулы (8); тогда получимъ для a_2, b_2, c_2 выраженія въ функціи первоначальныхъ величинъ a_0, b_0, c_0, а именно:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} a_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} A_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} A_2, \\ b_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} b_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} B_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} B_2, \\ c_2 &= \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} c_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3} C_1 + \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3} C_2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad .(11)$$

Если предположимъ, что лучъ M_2S' падаетъ на новую поверхность Σ_3 въ точкѣ M_3 (черт. 2), тогда можно прямо написать уравненія для опредѣленія вышедшаго луча. Дѣйствительно, пусть направленіе нор-



Черт. 2-й.

мала въ точкѣ M_3 опредѣляется косинусами A_3, B_3, C_3; углы паденія и преломленія на поверхности Σ_3 будутъ i_5 и i_6, а направленіе вышедшаго преломленнаго луча M_3S'' опредѣляется косинусами a_3, b_3, c_3; тогда на основаніи формулъ (11) можемъ написать

$$\left.\begin{aligned} a_3 = {} & \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} a_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} A_1 + \\ & + \frac{\operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} A_2 + \frac{\operatorname{sn}(i_5 - i_6)}{\operatorname{sn} i_5} A_3 \\ b_3 = {} & \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} b_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} B_1 + \\ & + \frac{\operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} B_2 + \frac{\operatorname{sn}(i_5 - i_6)}{\operatorname{sn} i_5} B_3 \\ c_3 = {} & \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} c_0 + \frac{\operatorname{sn} i_4 \operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_1 - i_2)}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} C_1 + \\ & + \frac{\operatorname{sn} i_6 \operatorname{sn}(i_3 - i_4)}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5} C_2 + \frac{\operatorname{sn}(i_5 - i_6)}{\operatorname{sn} i_5} C_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad .(12)$$

*

Какъ эти формулы, такъ и (11), показываютъ, что $a_2, \ldots a_3, \ldots$ суть линейныя функціи косинусовъ направленія падающаго луча и нормаловъ къ поверхностямъ раздѣла срединъ.

§ 8. Внимательное разсмотрѣніе предыдущихъ формулъ даетъ средство найти выраженія для количествъ, опредѣляющихъ направленіе луча, прошедшаго какую-нибудь k-ую поверхность раздѣла Σ_k.

Уголъ паденія луча на k-ую поверхность долженъ быть означенъ, согласно съ предыдущими обозначеніями, символомъ i_{2k-1}, а уголъ преломленія — i_{2k}; косинусы направленія нормала къ поверхности Σ_k будутъ A_k, B_k, C_k; тогда будемъ имѣть:

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} + C_k c_{k-1} = \mathrm{cs} i_{2k-1},$$
$$A_k a_k + B_k b_k + C_k c_k \;\; = \mathrm{cs} i_{2k}.$$

Затѣмъ, такъ-какъ прямыя $(a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1})$, N_k и (a_k, b_k, c_k) лежатъ въ одной плоскости, имѣемъ *):

$$\frac{C_k b_{k-1} - B_k c_{k-1}}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} = \frac{C_k b_k - B_k c_k}{\mathrm{sn} i_{2k}},$$

$$\frac{A_k c_{k-1} - C_k a_{k-1}}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} = \frac{A_k c_k - C_k a_k}{\mathrm{sn} i_{2k}},$$

$$\frac{B_k a_{k-1} - A_k b_{k-1}}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} = \frac{B_k a_k - A_k b_k}{\mathrm{sn} i_{2k}}.$$

Уравненія второе и третье даютъ:

$$C_k a_k = A_k c_k - \frac{1}{\mu_k}(A_k c_{k-1} - C_k a_{k-1}),$$

$$B_k a_k = A_k b_k + \frac{1}{\mu_k}(B_k a_{k-1} - A_k b_{k-1}),$$

причемъ пользуемся равенствомъ

$$\frac{\mathrm{sn} i_{2k-1}}{\mathrm{sn} i_{2k}} = \mu_k, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

если μ_k показатель преломленія на k-ой поверхности.

---

*) Здѣсь независимыхъ равенствъ, разумѣется, только два. (Ср. конецъ § 3).

Присоединяя къ предыдущимъ уравненіямъ тождество

$$A_k a_k = A_k a_k$$

и умножая первое изъ нихъ на C_k, второе на B_k, третье на A_k и складывая результаты, найдемъ:

$$a_k = A_k \operatorname{cs} i_{2k} + \frac{1}{\mu_k}[(B_k^2 a_{k-1} + C_k^2 a_{k-1}) - (A_k C_k c_{k-1} + A_k B_k b_{k-1})],$$

но

$$B_k^2 a_{k-1} + C_k^2 a_{k-1} = a_{k-1} - A_k^2 a_{k-1},$$

$$A_k C_k c_{k-1} + A_k B_k b_{k-1} = A_k(\operatorname{cs} i_{2k-1} - A_k a_{k-1}),$$

поэтому

$$a_k = A_k \operatorname{cs} i_{2k} + \frac{a_{k-1}}{\mu_k} - \frac{A_k}{\mu_k} \operatorname{cs} i_{2k-1}$$

или

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \left(\operatorname{cs} i_{2k} - \frac{\operatorname{cs} i_{2k-1}}{\mu_k}\right) A_k,$$

но по уравненію (13)

$$\operatorname{cs} i_{2k} - \frac{\operatorname{cs} i_{2k-1}}{\mu_k} = \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}},$$

слѣдовательно,

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} A_k.$$

Точно такъ-же найдемъ для b_k и c_k подобныя-же формулы, такъ что будемъ имѣть систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} A_k \\ b_k &= \frac{b_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} B_k \\ c_k &= \frac{c_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\operatorname{sn} i_{2k-1}} C_k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14)$$

Полагая въ этихъ формулахъ k равнымъ $1, 2, 3$, мы получимъ предыдущія формулы, служащія для вычисленія направленій послѣдовательныхъ преломленныхъ лучей; точно такъ-же по этимъ формуламъ можемъ вычислить направленіе какого-нибудь k-го преломленнаго луча, зная направленіе предыдущаго.

§ 9. Къ формуламъ предыдущаго § надо присоединить еще другія, служащія для опредѣленія A_k, B_k, C_k и угловъ i *). Прежде всего имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= a_{k-1}\ r_{k-1} \\ y_k - y_{k-1} &= b_{k-1}\ r_{k-1} \\ z_k - z_{k-1} &= c_{k-1}\ r_{k-1} \end{aligned}\right\} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

причемъ

$$r_{k-1} = M_{k-1} M_k .$$

Координаты x_k, y_k, z_k точки M_k должны удовлетворять уравненію поверхности Σ_k, а именно уравненію

$$\omega_k(x_k, y_k, z_k) = 0 ,$$

которое по подстановкѣ значеній x_k, y_k, z_k обращается въ слѣдующее:

$$\omega_k(x_{k-1} + a_{k-1} r_{k-1}, \ y_{k-1} + b_{k-1} r_{k-1}, \ z_{k-1} + c_{k-1} r_{k-1}) = 0$$

или

$$\Phi_k(r_{k-1}) = 0 .$$

Найдя отсюда r_{k-1}, изъ формулъ (g) опредѣлимъ x_k, y_k, z_k по координатамъ предыдущей точки M_{k-1}; затѣмъ вычисляемъ:

$$\frac{1}{P_k} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_k}{\partial y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_k}{\partial z_k}\right)^2}$$

и окончательно находимъ

*) Въ случаѣ плоскости A_k, B_k, C_k суть данныя количества.

$$\left.\begin{aligned} A_k &= P_k \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} \\ B_k &= P_k \frac{\partial \omega_k}{\partial y_k} \\ C_k &= P_k \frac{\partial \omega_k}{\partial z_k} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (h)$$

Уголъ i_{2k-1} опредѣлится по формулѣ

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} + C_k c_{k-1} = \mathrm{cs}\, i_{2k-1},$$

а уголъ i_{2k} по формулѣ

$$\frac{\mathrm{sn}\, i_{2k-1}}{\mathrm{sn}\, i_{2k}} = \mu_k .$$

§ 10. Теперь предположимъ, что лучъ проходитъ рядъ срединъ, числомъ n и выходитъ въ $(n+1)$-ую средину; всѣ эти средины отдѣлены одна отъ другой поверхностями Σ. Опредѣлимъ направленіе луча вышедшаго въ $(n+1)$-ую средину.

Положимъ на время для краткости письма

$$\frac{\mathrm{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\mathrm{sn}\, i_{2k-1}} = R_k ;$$

тогда формулы (14) § 8 будутъ имѣть видъ:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + R_k A_k ,$$

$$b_k = \frac{b_{k-1}}{\mu_k} + R_k B_k ,$$

$$c_k = \frac{c_{k-1}}{\mu_k} + R_k C_k .$$

Полагая здѣсь $k-1$ вмѣсто k, затѣмъ $k-2$ вмѣсто $k-1$ и т. д., получимъ для количества a_k слѣдующій рядъ формулъ:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + R_k A_k$$

$$a_{k-1} = \frac{a_{k-2}}{\mu_{k-1}} + R_{k-1} A_{k-1}\,,$$

$$a_{k-2} = \frac{a_{k-3}}{\mu_{k-2}} + R_{k-2} A_{k-2}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_2 = \frac{a_1}{\mu_2} + R_2 A_2\,,$$

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + R_1 A_1\,.$$

Умножимъ 1-ое изъ этихъ уравненій на единицу, 2-ое на $\frac{1}{\mu_k}$, 3-ье на $\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1}}$, ... предпослѣднее на $\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_3}$ и послѣднее на $\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_2}$ и затѣмъ результаты сложимъ, тогда получится:

$$a_k = \frac{a_0}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 A_1}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_2} + \frac{R_2 A_2}{\mu_k \mu_{k-1} \ldots \mu_3} + \ldots + \\ + \frac{R_{k-2} A_{k-2}}{\mu_k \mu_{k-1}} + \frac{R_{k-1} A_{k-1}}{\mu_k} + R_k A_k\,.$$

Подобныя-же формулы найдемъ для b_k и c_k. Полагая въ нихъ $k = n$, будемъ имѣть окончательныя формулы для опредѣленія косинусовъ направленія послѣдняго вышедшаго луча по прохожденіи имъ послѣдней n-ой поверхности. И такъ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{a_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 A_1}{\mu_n \ldots \mu_2} + \frac{R_2 A_2}{\mu_n \ldots \mu_3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{R_{n-1} A_{n-1}}{\mu_n} + R_n A_n \\ b_n &= \frac{b_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 B_1}{\mu_n \ldots \mu_2} + \frac{R_2 B_2}{\mu_n \ldots \mu_3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{R_{n-1} B_{n-1}}{\mu_n} + R_n B_n \\ c_n &= \frac{c_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} + \frac{R_1 C_1}{\mu_n \ldots \mu_2} + \frac{R_2 C_2}{\mu_n \ldots \mu_3} + \ldots + \\ &\quad + \frac{R_{n-1} C_{n-1}}{\mu_n} + R_n C_n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \; (15)$$

Этимъ формуламъ можно дать другой видъ.

Подставимъ вмѣсто всѣхъ μ и R ихъ значенія; тогда для a_n получимъ:

$$a_n = \frac{\operatorname{sn} i_2 \operatorname{sn} i_4 \ldots \operatorname{sn} i_{2n}}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \ldots \operatorname{sn} i_{2n-1}} a_0 + \frac{\operatorname{sn}(i_1 - i_2) \operatorname{sn} i_4 \ldots \operatorname{sn} i_{2n}}{\operatorname{sn} i_1 \operatorname{sn} i_3 \ldots \operatorname{sn} i_{2n-1}} A_1 +$$

$$+ \frac{\operatorname{sn}(i_3 - i_4) \operatorname{sn} i_6 \ldots \operatorname{sn} i_{2n}}{\operatorname{sn} i_3 \operatorname{sn} i_5 \ldots \operatorname{sn} i_{2n-1}} A_2 + \ldots + \frac{\operatorname{sn}(i_{2k-1} - i_{2k}) \operatorname{sn} i_{2k+2} \ldots \operatorname{sn} i_{2n}}{\operatorname{sn} i_{2k-1} \operatorname{sn} i_{2k+1} \ldots \operatorname{sn} i_{2n-1}} A_k + \ldots +$$

$$+ \frac{\operatorname{sn}(i_{2n-1} - i_{2n})}{\operatorname{sn} i_{2n-1}} A_n \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Для b_n и c_n получимъ подобныя формулы; стоитъ только вмѣсто a_0 и всѣхъ A подставить послѣдовательно b_0, c_0 и всѣ B и C.

§ 11. Прежде чѣмъ вычислять a_n, b_n, c_n по формуламъ (A) предыдущаго §, надо вычислить всѣ A, B, C и углы i. Вычисленіе угловъ A, B и C объяснено въ § 9, а для вычисленія угловъ i должны служить уравненія:

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} + C_k c_{k-1} = \operatorname{cs} i_{2k-1},$$

$$\frac{\operatorname{sn} i_{2k-1}}{\operatorname{sn} i_{2k}} = \mu_k,$$

въ которыхъ k надо послѣдовательно полагать равнымъ $1, 2, 3, \ldots n$.

§ 12. Формулами предыдущихъ параграфовъ и рѣшается предложенный вопросъ. Повторимъ здѣсь вкратцѣ порядокъ вычисленій. Данными величинами при этихъ вычисленіяхъ должно считать: координаты x_0, y_0, z_0 свѣтящейся точки S, косинусы направленія падающаго луча a_0, b_0, c_0, уравненія всѣхъ n поверхностей, т. е. всѣ ω, затѣмъ показатели преломленія на всѣхъ поверхностяхъ, т. е. всѣ μ.

Прежде всего по уравненію первой преломляющей поверхности Σ_1 находимъ длину $SM_1 = r_0$ изъ уравненія (§ 5)

$$\Phi_1(r_0) = 0;$$

затѣмъ координаты точки M_1 и по этимъ послѣднимъ величины A_1, B_1, C_1. Зная A_1, B_1, C_1, вычислимъ уголъ i_1 по формулѣ (1) § 1 и уголъ i_2 по формулѣ (5) третьяго параграфа, и наконецъ величины a_1, b_1, c_1 по формуламъ (7) § 4.

Зная a_1, b_1, c_1, опредѣляемъ длину $M_1 M_2 = r_1$ изъ уравненія (§ 6)

$$\Phi_2(r_1) = 0,$$

затѣмъ координаты точки M_2 и по этимъ послѣднимъ величины A_2, B_2, C_2; зная A_2, B_2, C_2, вычисляемъ уголъ i_3 по формулѣ (3) § 1 и уголъ i_4 по формулѣ

$$\frac{\operatorname{sn} i_3}{\operatorname{sn} i_4} = \mu_2,$$

и наконецъ величины a_2, b_2, c_2 по формуламъ (8) § 6 или по формуламъ (11) § 7, и т. д. Однимъ словомъ, сначала опредѣляемъ длину $M_{k-1}M_k = r_{k-1}$ изъ уравненія

$$\Phi_k(r_{k-1}) = 0,$$

затѣмъ координаты точки M_k и косинусы направленія нормала M_kN_k, углы i_{2k-1}, i_{2k} и послѣ всего количества a_k, b_k, c_k (§§ 8, 9 и 11).

Въ частныхъ случаяхъ вычисленія могутъ значительно упроститься.

§ 13. Пусть изъ свѣтящейся точки S выходятъ два луча; по прохожденіи ими всѣхъ n срединъ, вообще говоря, получатся, два вышедшіе луча, направленія которыхъ опредѣляются величинами a_n, b_n, c_n для одного и a'_n, b'_n, c'_n для другого. Эти лучи пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ; ея положеніе можетъ быть найдено, какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ извѣстнаго направленія. Уравненія этихъ прямыхъ можно написать въ видѣ:

$$\frac{x - x_n}{a_n} = \frac{y - y_n}{b_n} = \frac{z - z_n}{c_n}$$

и

$$\frac{x - x'_n}{a'_n} = \frac{y - y'_n}{b'_n} = \frac{z - z'_n}{c'_n}.$$

Здѣсь x, y, z и суть координаты искомой точки, называемой *фокусомъ лучей* или *точкой схожденія лучей*. Ближайшее ея опредѣленіе выходитъ изъ предѣловъ, намѣченныхъ нами для настоящей статьи; поэтому ограничимся сдѣланнымъ замѣчаніемъ.

§ 14. Примѣнимъ найденныя формулы къ плоской системѣ. Подъ *плоской системой* мы будемъ подразумѣвать тотъ случай, когда всѣ послѣдовательные лучи лежатъ въ одной плоскости. Для такой системы удобно принять за одну изъ координатныхъ плоскостей, напримѣръ за плоскость xy, плоскость, въ которой лежатъ всѣ лучи; въ этомъ случаѣ надо будетъ положить равными нулю всѣ количества C и c съ разными указателями. Въ такомъ случаѣ можно легко получить для угловъ A, B, a и b нѣкоторыя общія соотношенія. Установимъ эти соотношенія. Для k-ой поверхности имѣемъ (§ 8):

$$A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1} = \mathrm{cs} i_{2k-1} \quad \ldots\ldots\ldots (k)$$

Отсюда можно получить формулу для $\mathrm{sn} i_{2k-1}$; а именно, сначала напишемъ:

$$1 - (A_k a_{k-1} + B_k b_{k-1})^2 = \mathrm{sn}^2 i_{2k-1}\,,$$

а затѣмъ замѣнимъ единицу произведеніемъ

$$(A^2_k + B^2_k)(a^2_{k-1} + b^2_{k-1})\,,$$

тождественно равнымъ единицѣ. По раскрытіи скобокъ и приведеніи, получимъ:

$$(A_k b_{k-1} - B_k a_{k-1})^2 = \mathrm{sn}^2 i_{2k-1}$$

отсюда

$$A_k b_{k-1} - B_k a_{k-1} = \pm\, \mathrm{sn} i_{2k-1} \quad \ldots\ldots\ldots (l)$$

Здѣсь надо брать знакъ $+$, если $A_k b_{k-1} > B_k a_{k-1}$ и знакъ $-$, если $A_k b_{k-1} < B_k a_{k-1}$, такъ какъ $\mathrm{sn} i_{2k-1}$ по самой своей сущности количество положительное.

Изъ формулъ (k) и (l) находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \mathrm{cs}(u_{k-1} \mp i_{2k-1}) \\ B_k &= \mathrm{sn}(u_{k-1} \mp i_{2k-1}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (m)$$

гдѣ u_{k-1} есть уголъ между r_{k-1} и осью x-овъ.

Подставляя эти значенія A_k и B_k въ формулы:

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\mathrm{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} A_k\,,$$

$$b_k = \frac{b_{k-1}}{\mu_k} + \frac{\mathrm{sn}(i_{2k-1} - i_{2k})}{\mathrm{sn} i_{2k-1}} B_k\,,$$

получимъ по преобразованіи:

$$a_k = \mathrm{cs}(u_{k-1} \mp i_{2k-1} \pm i_{2k}),$$

$$b_k = \mathrm{sn}(u_{k-1} \mp i_{2k-1} \pm i_{2k}),$$

т. е.

$$u_k = u_{k-1} \mp i_{2k-1} \pm i_{2k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

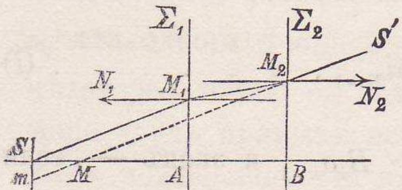
Знаки, вообще, опредѣляются предыдущими условіями, въ нѣкоторыхъ же частныхъ случаяхъ значеніемъ количества r_k.

Полагая въ этой формулѣ k равнымъ $1, 2, 3, \ldots n$, опредѣлимъ послѣдовательно всѣ углы u_k преломленныхъ лучей съ осью x-овъ.

II.

Приложимъ теперь развитую нами теорію къ частнымъ примѣрамъ.

§ 15. *Плоско-параллельная пластинка.*



Черт. 3-й.

Пусть мы имѣемъ средину, ограниченную двумя параллельными плоскостями Σ_1 и Σ_2 (черт. 3); съ обѣихъ сторонъ этой средины находится какая-нибудь другая.

Имѣемъ уравненія поверхностей:

$$\omega_1 = A_1x + B_1y + C_1z - p_1 = 0,$$

$$\omega_2 = A_2x + B_2y + C_2z - p_2 = 0,$$

причемъ, значитъ, $A_1, A_2, \ldots$ будутъ данными количествами.

Такъ какъ плоскости Σ_1 и Σ_2 параллельны, то

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Если точку S примемъ за начало координатъ и обозначимъ толщину пластинки черезъ t, то

$$p_2 = p_1 + t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Вслѣдствіе условій (a) уравненія (2) и (3) § 1 даютъ

$$i_3 = i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Такъ какъ по условію

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu_1},$$

то найдемъ, что

$$i_2 = i_1 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Далѣе по уравненіямъ (7) § 4 имѣемъ

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1} A_1 ,$$

$$b_1 = \frac{b_0}{\mu_1} + \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1} B_1 ,$$

$$c_1 = \frac{c_0}{\mu_1} + \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1} C_1 .$$

Въ этихъ уравненіяхъ $\mathrm{sn} i_2$ и $\mathrm{cs} i_2$ уже исключены при помощи равенства

$$\mathrm{sn} i_2 = \frac{\mathrm{sn} i_1}{\mu_1} .$$

Затѣмъ по формуламъ (8) § 6 получимъ:

$$a_2 = a_0 ,$$

$$b_2 = b_0 ,$$

$$c_2 = c_0 .$$

Эти равенства показываютъ, что *вышедшій изъ пластинки лучъ параллеленъ падающему* и идетъ въ томъ-же направленіи.

Для опредѣленія r_0 и координатъ x_1, y_1, z_1 имѣемъ уравненія:

$$x_1 = r_0 a_0 , \quad y_1 = r_0 b_0 , \quad z_1 = r_0 c_0$$

и

$$\omega_1 = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 - p_1 = 0 .$$

Уравненіе

$$\Phi_1(r_0) = 0$$

дастъ

$$r_0 = \frac{p_1}{\mathrm{cs}i_1} \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

И такъ,

$$SM_1 = \frac{p_1}{\mathrm{cs}i_1} \, .$$

Теперь, слѣдовательно,

$$x_1 = \frac{a_0 p_1}{\mathrm{cs}i_1} \, , \qquad y_1 = \frac{b_0 p_1}{\mathrm{cs}i_1} \, , \qquad z_1 = \frac{c_0 p_1}{\mathrm{cs}i_1} \, .$$

Далѣе имѣемъ:

$$x_2 = x_1 + a_1 r_1 \, , \quad y_2 = y_1 + b_1 r_1 \, , \quad z_2 = z_1 + c_1 r_1$$

и уравненіе

$$\omega_2 = A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1 z_2 - p_1 - t_1 = 0 \, .$$

Уравненіе

$$\Phi_2(r_1) = 0$$

дастъ

$$r_1 = \frac{t}{A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1} \, ,$$

но

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = \mathrm{cs}i_2 \, ,$$

а

$$\mathrm{cs}i_2 = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}{\mu_1} \, ,$$

слѣдовательно

$$r_1 = \frac{\mu_1 t}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}} \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g)$$

а затѣмъ получимъ:

$$x_2 = Ra_0 + R_1 A_1\,,$$
$$y_2 = Rb_0 + R_1 B_1\,,$$
$$z_2 = Rc_0 + R_1 C_1\,,$$

гдѣ

$$R = \frac{p_1\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} + t\,\mathrm{cs}\, i_1}{\mathrm{cs}\, i_1\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}\,, \qquad R_1 = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs}\, i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}\, t\,.$$

Значенія a_2, b_2, c_2 уже даны выше.

Найдемъ теперь положеніе точки M пересѣченія вышедшаго изъ пластинки луча съ прямой SA, перпендикулярной къ пластинкѣ.

Уравненія SM будутъ:

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{B_1} = \frac{z}{C_1}\,,$$

уравненія M_2M:

$$\frac{x - x_2}{a_0} = \frac{y - y_2}{b_0} = \frac{z - z_2}{c_0}\,.$$

Изъ первыхъ уравненій находимъ:

$$x = \frac{A_1}{C_1}\,z\,, \qquad y = \frac{B_1}{C_1}\,z\,;$$

подставляя эти значенія во вторыя уравненія, найдемъ:

$$z = \frac{C_1(c_0 x_2 - a_0 z_2)}{A_1 c_0 - C_1 a_0}\,, \qquad z = \frac{C_1(c_0 y_2 - b_0 z_2)}{c_0 B_1 - b_0 C_1}\,.$$

Сравнивая эти значенія z, получимъ уравненіе, которое можно представить въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ a_0\,, & b_0\,, & c_0 \\ x_2\,, & y_2\,, & z_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Это уравненіе показываетъ, что точка M_2 (x_2, y_2, z_2) лежитъ въ плоскости прямыхъ (a_0, b_0, c_0) и (A_1, B_1, C_1).

Подставимъ теперь второе значеніе z-а въ x, а первое въ y; найдемъ:

$$x = \frac{A_1(c_0 y_2 - b_0 z_2)}{B_1 c_0 - C_1 b_0},$$

$$y = \frac{B_1(c_0 x_2 - a_0 z_2)}{A_1 c_0 - C_1 a_0}.$$

Для вычисленія x, y и z въ окончательной формѣ сначала найдемъ по подстановкѣ значеній x_2, y_2 и z_2:

$$c_0 y_2 - b_0 z_2 = (B_1 c_0 - C_1 b_0) R_1,$$
$$c_0 x_2 - a_0 z_2 = (A_1 c_0 - C_1 a_0) R_1,$$

и затѣмъ

$$x = A_1 R_1, \quad y = B_1 R_1, \quad z = C_1 R_1$$

или

$$x = K r_1 A_1, \quad y = K r_1 B_1, \quad z = K r_1 C_1,$$

гдѣ

$$K = \frac{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1} - \mathrm{cs} i_1}{\mu_1}.$$

Не трудно видѣть геометрическое значеніе K; это есть $SM : r_1$, т. е.

$$K = \frac{SM}{r_1}$$

или, что все равно,

$$SM = K r_1.$$

Далѣе можемъ найти:

$$MA = p_1 - K r_1$$

или, по подстановкѣ значеній K и r_1,

$$SM = t - \frac{t \,\mathrm{cs} i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}},$$

$$AM = p_1 - t + \frac{t \,\mathrm{cs} i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2 - \mathrm{sn}^2 i_1}}.$$

Подобнымъ образомъ мы нашли-бы:

$$MB = \frac{t \operatorname{cs} i_1}{\sqrt{\mu_1^2 - \operatorname{sn}^2 i_1}} + p_1 .$$

И такъ, получаемъ слѣдующее предложеніе:

Если станемъ разсматривать точку S черезъ плоско-параллельную пластинку, то эта точка намъ покажется находящейся въ M, перемѣщенной на длину

$$t - \frac{t \operatorname{cs} i_1}{\sqrt{\mu_1^2 - \operatorname{sn}^2 i_1}} .$$

§ 16. Если уголъ i_1 незначителенъ, то можно получить приближенныя формулы, которыя иногда употребляются въ физикѣ.

Имѣемъ тогда:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 - \operatorname{sn}^2 i_1}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\operatorname{sn}^2 i_1}{2\mu_1} ,$$

$$\operatorname{cs} i_1 = 1 - \frac{\operatorname{sn}^2 i_1}{2} ,$$

поэтому

$$MB = p_1 + \frac{t}{\mu_1} - \frac{t(\mu_1^2 - 1)\operatorname{sn}^2 i_1}{2\mu_1^3} .$$

Подобную формулу можно найти, напримѣръ, у Поттера въ его книгѣ: An elementary treatise on optics, part II, p. 60.

Членъ

$$\frac{t(\mu_1^2 - 1)\operatorname{sn}^2 i_1}{2\mu_1^3}$$

есть величина такъ называемой *продольной аберраціи* пластинки.

Если пренебречь аберраціей, то точка S покажется приближенной къ пластинкѣ на величину

$$SM = t - \frac{t}{\mu_1} .$$

Если мы опредѣлимъ (напримѣръ микроскопомъ) величину SM, которую назовемъ d, то тогда

$$t-\frac{t}{\mu_1}=d,$$

откуда

$$\mu_1=\frac{t}{t-d}.$$

На этой формулѣ основанъ старинный способъ опредѣленія показателя преломленія пластинки, предложенный де-Шонемъ (de Chaulnes).

Если наблюдать точку S сбоку, то она покажется перемѣщенной на величину $Sm=h$, и для h имѣемъ формулу

$$h=SM\,\mathrm{tg}i_1=t\,\mathrm{tg}i-\frac{t\,\mathrm{sn}i_1}{\sqrt{\mu_1{}^2-\mathrm{sn}^2i_1}}.$$

При маломъ i_1 можно взять

$$h=\frac{\mu_1-1}{\mu_1}t\,\mathrm{sn}i_1.$$

§ 17. *Цилиндрическія стекла.* Возьмемъ еще, какъ примѣръ, преломленіе въ цилиндрическомъ стеклѣ. Разсмотримъ ходъ лучей въ плоскости, проходящей черезъ свѣтящуюся точку и перпендикулярную къ оси цилиндра.

Здѣсь поверхность Σ_1 есть передняя поверхность цилиндра, а Σ_2 задняя (по отношенію къ свѣтящейся точкѣ).

Обозначимъ разстояніе свѣтящейся точки отъ центра сѣченія цилиндра буквой ∂, а радіусъ сѣченія буквой ϱ; тогда уравненія поверхностей Σ_1 и Σ_2 будутъ

$$\omega_1=(x_1-\partial)^2+y_1{}^2-\varrho^2=0$$

$$\omega_2=(x_2-\partial)^2+y_2{}^2-\varrho^2=0.$$

Уравненіе $\Phi_1(r_0)=0$ здѣсь будетъ

$$r_0{}^2-2a_0\partial r_0+\partial^2-\varrho^2=0,$$

откуда

$$r_0=a_0\partial-\sqrt{\varrho^2-b_0{}^2\partial^2}$$

или

$$r_0=a_0\partial-\varrho\,\mathrm{cs}i_1,$$

такъ какъ

$$\mathrm{cs}i_1 = A_1 a_0 + B_1 b_0\,,$$

а величины A_1 и B_1 опредѣляются по формуламъ,

$$A_1 = -\frac{x_1 - \partial}{\varrho}, \qquad B_1 = -\frac{y_1}{\varrho}\,;$$

поэтому

$$\mathrm{cs}i_1 = -\frac{r_0 - a_0\partial}{\varrho}.$$

Отсюда

$$\mathrm{sn}i_1 = \frac{b_0\partial}{\varrho}.$$

Для опредѣленія r_1 получимъ уравненіе

$$r_1{}^2 + 2r_1[a_1(x_1 - \partial) + b_1 y_1] = 0\,;$$

слѣдовательно

$$r_1 = 2\varrho\,\mathrm{cs}i_2\,,$$

ибо

$$\mathrm{cs}i_2 = a_1 A_1 + b_1 B_1\,.$$

Вычислимъ теперь i_3. Такъ какъ

$$A_1 = \frac{x_2 - \partial}{\varrho}, \qquad B_2 = \frac{y_2}{\varrho}\,,$$

и кромѣ того

$$x_2 = a_0 r_0 + a_1 r_1\,,\quad y_2 = b_0 r_0 + b_1 r_1\,,$$

то

$$\mathrm{cs}i_3 = A_2 a_1 + B_2 b_1 = \frac{(x_2 - \partial)\,a_1 + y_2 b_1}{\varrho}\,,$$

будетъ равно

$$\mathrm{cs}i_3 = \frac{(x_1 - \partial)\,a_1 + y_1 b_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\varrho}$$

*

или окончательно

$$\mathrm{cs}i_3 = \frac{r_1}{2\varrho},$$

а сравнивая съ значеніемъ r_1, найдемъ:

$$i_3 = i_2 .$$

Затѣмъ изъ формулъ:

$$\frac{\mathrm{sn}i_3}{\mathrm{sn}i_4} = \frac{1}{\mu}$$

и

$$\frac{\mathrm{sn}i_1}{\mathrm{sn}i_2} = \mu ,$$

найдемъ

$$i_4 = i_1 .$$

Замѣтимъ здѣсь одно соотношеніе. Вычисляя $\mathrm{cs}i_3$ при помощи a_1 и b_1, находимъ по сравненіи съ полученнымъ выше:

$$\varrho\, \mathrm{sn}i_1 = \partial\, \mathrm{sn}u_0 .$$

Найдемъ теперь координаты x_2 и y_2. Получимъ

$$x_2 = \frac{a_0 \partial}{\mathrm{sn}i_1} \mathrm{sn}(i_1 - u_0) + 2a_1 \varrho \mathrm{cs}i_2 ,$$

$$y_2 = \frac{b_0 \partial}{\mathrm{sn}i_1} \mathrm{sn}(i_1 - u_0) + 2b_1 \varrho \mathrm{cs}i_2 .$$

Что касается A_2 и B_2, то онѣ найдутся изъ формулъ:

$$A_2 = \mathrm{cs}(i_2 + u_1),$$

$$B_2 = \mathrm{sn}(i_2 + u_1).$$

Найдемъ точку пересѣченія вышедшаго луча съ прямой SO (O есть центръ цилиндра). Принимая для простоты эту прямую за ось x-овъ, получимъ для M_2S' уравненіе:

$$\frac{x - x_2}{a_2} = -\frac{y_2}{b_2},$$

откуда

$$x = x_2 - \frac{a_2}{b_2} y_2 .$$

Зная же, что

$$a_2 = \mu \left(a_1 - \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} \mathrm{cs}(u_1 + i_2) \right),$$

$$b_2 = \mu \left(b_1 - \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} \mathrm{sn}(u_1 + i_2) \right),$$

найдемъ:

$$x = \partial + \frac{2\varrho \mathrm{sn}^2 i_1}{\mathrm{cs}(u_0 - 2i_1 + i_2) - \mathrm{cs}(u_1 - i_1 + 2i_2)} .$$

§ 18. Разсмотримъ преломленіе въ стеклѣ, образованномъ двумя концентрическими круговыми цилиндрами.

И здѣсь разсмотримъ только случай, когда лучи лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ общей оси цилиндровъ.

Примемъ начало координатъ въ свѣтящейся точкѣ и назовемъ разстояніе ея отъ центра сѣченія буквой ∂, а радіусы цилиндровъ ϱ_1 и ϱ_2. Тогда уравненія поверхностей Σ будутъ:

$$\omega_1 = (\partial - x_1)^2 + y_1{}^2 - \varrho_1{}^2 = 0 ,$$

$$\omega_2 = (\partial - x_2)^2 + y_2{}^2 - \varrho_2{}^2 = 0 ,$$

$$\omega_3 = (x_3 - \partial)^2 + y_3{}^2 - \varrho_2{}^2 = 0 ,$$

$$\omega_4 = (x_4 - \partial)^2 + y_4{}^2 - \varrho_1{}^2 = 0 .$$

Косинусы направленія нормаловъ будутъ имѣть сначала видъ:

$$A_1 = -\frac{x_1 - \partial}{\varrho_1}, \quad A_2 = -\frac{x_2 - \partial}{\varrho_2}, \quad A_3 = \frac{x_3 - \partial}{\varrho_2}, \quad A_4 = \frac{x_4 - \partial}{\varrho_1},$$

$$B_1 = -\frac{y_1}{\varrho_1}, \quad B_2 = -\frac{y_2}{\varrho_2}, \quad B_3 = \frac{y_3}{\varrho_2}; \quad B_4 = \frac{y_4}{\varrho_1} .$$

Для опредѣленія r_0 имѣемъ уравненіе

$$r_0{}^2 - 2a_0 \partial r_0 + \partial^2 - \varrho_1{}^2 = 0 .$$

Отсюда

$$r_0 = a_0 \partial - \sqrt{\varrho_1{}^2 - b_0{}^2 \partial^2}\,.$$

Далѣе найдемъ по $\mathrm{cs} i_1$:

$$\mathrm{sn} i_1 = \frac{b_0 \partial}{\varrho_1}\ ^{*)}.$$

Подставляя значенie $b_0 \partial$ изъ этой формулы въ формулу для r_0, получимъ:

$$r_0 = \partial \mathrm{cs} u_0 - \varrho_1 \mathrm{cs} i_1\,.$$

Теперь, зная r_0, можно найти A_1 и B_1. Впрочемъ ихъ можно опредѣлить по формуламъ § 14, а именно получимъ:

$$A_1 = \mathrm{cs}(i_1 - u_0) \qquad \text{и} \qquad B_1 = -\,\mathrm{sn}(i_1 - u_0)\,.$$

Поэтому

$$a_1 = \frac{a_0}{\mu_1} + \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} \mathrm{cs}(i_1 - u_0) = \mathrm{cs}(u_0 - i_1 + i_2)\,,$$

$$b_1 = \frac{b_0}{\mu_1} - \frac{\mathrm{sn}(i_1 - i_2)}{\mathrm{sn} i_1} \mathrm{sn}(i_1 - u_0) = \mathrm{sn}(u_0 - i_1 + i_2)\,.$$

Слѣдовательно

$$u_1 = u_0 - i_1 + i_2\,.$$

Тоже получимъ и по формулѣ (n) § 14.
Для координатъ точки M_1 найдемъ формулы:

$$x_1 = \partial - \varrho_1 \mathrm{cs}(i_1 - u_0)\,,$$

$$y_1 = \varrho_1 \mathrm{sn}(i_1 - u_0)\,.$$

Опредѣлимъ теперь количества, относящiяся до второй поверхности. Уравненie для r_1 будетъ:

$$r_1{}^2 - 2\,[a_1(\partial - x_1) - b_1 y_1]\, r_1 + \varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2 = 0\,.$$

Отсюда, по преобразованiи, получимъ:

$$r_1 = \varrho_1 \mathrm{cs} i_2 - \sqrt{\varrho_2{}^2 - \varrho_1{}^2 \mathrm{sn}^2 i_2}\,.$$

---

*) Лучъ долженъ быть пущенъ подъ такимъ угломъ къ оси x-овъ, чтобы $b_0 \partial < \varrho_1$.

Затѣмъ опредѣлимъ

$$\mathrm{cs}i_3 = \sqrt{1 - \frac{\varrho_1{}^2 \mathrm{sn}^2 i_2}{\varrho_2{}^2}}.$$

Отсюда найдемъ

$$\mathrm{sn}i_3 = \frac{\varrho_1 \mathrm{sn}i_2}{\varrho_2};$$

поэтому для r_1 можно дать формулу

$$r_1 = \varrho_1 \mathrm{cs}i_2 - \varrho_2 \mathrm{cs}i_3.$$

Для A_2 и B_2 найдемъ формулы:

$$A_2 = \mathrm{cs}(i_3 - u_1) = \mathrm{cs}(i_3 - i_2 + i_1 - u_0),$$

$$B_2 = -\mathrm{sn}(i_3 - u_1) = -\mathrm{sn}(i_3 - i_2 + i_1 - u_0).$$

Затѣмъ по формуламъ для a_2 и b_2 получимъ

$$u_2 = u_0 - i_1 + i_2 - i_3 + i_4.$$

Для опредѣленія r_2 получимъ уравненіе

$$r_2{}^2 + 2r_2\,[(x_2 - \partial)\,a_2 + b_2 y_2] = 0,$$

откуда

$$r_2 = -2\,[a_2\,(x_2 - \partial) + b_2 y_2]$$

или окончательно

$$r_2 = 2\varrho_2\,\mathrm{cs}i_4.$$

Опредѣляя затѣмъ $\mathrm{cs}i_5$, найдемъ

$$\mathrm{cs}i_5 = \frac{r_2}{2\varrho_2};$$

слѣдовательно,

$$i_4 = i_5.$$

По закону преломленія имѣемъ:

$$\frac{\mathrm{sn}i_5}{\mathrm{sn}i_6} = \frac{\mathrm{sn}i_4}{\mathrm{sn}i_6} = \frac{\mathrm{sn}i_4}{\mathrm{sn}i_3};$$

поэтому

$$i_3 = i_6 .$$

Для направленія луча M_3M_4 найдемъ:

$$u_3 = u_0 - i_1 + i_2 - 3i_3 + 3i_4 .$$

Для преломленія на послѣдней поверхности получимъ

$$r_3^2 + 2\,[(x_3 - д)\,a_3 + b_3y_3]\,r_3 + \varrho_2^2 - \varrho_1^2 = 0\,,$$

откуда

$$r_3 = \varrho_1 \mathrm{cs} i_2 - \varrho_2 \mathrm{cs} i_3\,,$$

т. е.

$$r_3 = r_1 .$$

Наконецъ найдемъ:

$$i_7 = i_2$$

и

$$i_8 = i_1 .$$

Всѣ эти формулы даютъ возможность прослѣдить ходъ луча внутри срединъ, ограниченныхъ двумя цилиндрическими поверхностями.

Этотъ случай можно осуществить, пропуская свѣтовой лучъ черезъ стеклянный цилиндрическій сосудъ, наполненный какой-нибудь прозрачной жидкостью; тогда наружная поверхность сосуда будетъ первымъ цилиндромъ нашего примѣра, а внутренняя поверхность—вторымъ. Если толщина стѣнокъ сосуда, т. е. $\varrho_1 - \varrho_2$, мала, то можно получить приближенныя формулы, удобныя для практическихъ приложеній.

Въ заключеніе замѣтимъ, что имѣя уже путь, можно получить всѣ предыдущіе выводы геометрически, пользуясь формулами тригонометріи.

§ 19. Въ предыдущихъ параграфахъ (§§ 15—18) мы желали только показать приложимость общихъ формулъ и пріемовъ, развитыхъ нами въ первомъ отдѣлѣ настоящей статьи, и дѣйствительно убѣдились самымъ дѣломъ въ возможности строгаго вычисленія направленія луча, прошедшаго рядъ прозрачныхъ срединъ.

Эти точныя формулы, разумѣется, въ каждомъ частномъ случаѣ могутъ быть превращены въ приближенныя подъ тѣми или другими требованіями практики.

16 Октября 1887 г.