О функціяхъ подобныхъ функціи гамма.

В. П. Алексѣевскаго.

1. Первая задача, рѣшенію которой посвящено настоящее изслѣдованіе, состоитъ въ изученіи свойствъ функціи $G(x)$, удовлетворяющей уравненію:

$$G(x+1)=\Gamma(x)\,G(x)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

при условіи

$$G(1)=1\,.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$G(2)=1\,,\quad G(3)=1\,,\quad G(4)=2\,,\quad G(5)=12\,,$$

и, вообще, называя цѣлое положительное число буквою n, имѣемъ:

$$G(n+1)=\Gamma(1)\,\Gamma(2)\ldots\Gamma(n)=1^{n-1}\,.\,2^{n-2}\ldots(n-1)\,.$$

Опредѣлимъ теперь непрерывную функцію перемѣннаго x, удовлетворяющую уравненію (1). Взявъ логариѳмы обѣихъ частей этого уравненія, сведемъ вопросъ на интегрированіе разностнаго уравненія:

$$\triangle \log G(x)=\log\Gamma(x)\,.$$

Пусть $x>0$, тогда, какъ извѣстно,

$$\log\Gamma(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{(x-1)-\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (2)$$

а потому, взявъ конечный интегралъ отъ этого выраженія въ предѣлахъ отъ 1 до x, получимъ:

$$\log G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{1-e^{-u}} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}. \quad . \quad . \quad (3)$$

Этотъ интегралъ представляетъ частное, но главное, рѣшеніе задачи; для полученія общаго интеграла разностнаго уравненія остается къ найденному рѣшенію добавить логариѳмъ произвольной періодической функціи самаго общаго вида съ періодомъ равнымъ единицѣ. Во всемъ послѣдующемъ мы будемъ имѣть въ виду исключительно это частное рѣшеніе.

Возникаетъ вопросъ: при какихъ значеніяхъ перемѣннаго x правая часть равенства (3) представляетъ опредѣленную функцію? Ясно, что это возможно, только когда $x > 0$.

Далѣе, извѣстно, что интегралъ (2), выражающій $\log\Gamma(x)$, остается конечнымъ при всякихъ положительныхъ значеніяхъ перемѣннаго x. Поэтому, основываясь на равенствѣ

$$\log G(x) = \log G(x+1) - \log\Gamma(x),$$

заключаемъ, что $\log G(x)$ имѣетъ опредѣленное значеніе, когда $\log G(x+1)$ остается конечнымъ; слѣдовательно, необходимо только убѣдиться въ конечности интеграла (3) когда $x-1>0$.

Полагая $e^{-u} = 1-\xi$, имѣемъ:

$$\log G(x) = -\int_0^1 \frac{d\xi}{\log(1-\xi)}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{\xi} + \frac{1-(1-\xi)^{x-1}}{\xi^2}\right\}.$$

Отсюда же не трудно усмотрѣть, что подъинтегральная функція остается конечной не только внутри предѣловъ, но и при нихъ самихъ. Замѣтивъ, наконецъ, что

$$\frac{1-(1-\xi)^{x-1}}{\xi^2} - \frac{x-1}{\xi} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}\,\xi(1-\theta\xi)^{x-4},$$

гдѣ

$$0 < \theta < 1,$$

получаемъ:

$$\log G(x) = -\frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}{3\,!}\,\vartheta^{x-4}\int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\log(1-\xi)}.$$

Полагая здѣсь вновь

$$1-\xi=e^{-u},$$

преобразуемъ послѣдній интегралъ въ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2u}-e^{-u}}{u}\,du=-\log 2\,;$$

слѣдовательно,

$$\log G(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3\,!}\,\vartheta^{x-4}\log 2\,.$$

И такъ, въ конечности интеграла (3) не можетъ быть сомнѣнія.

2. Формулой (3) легко воспользоваться для вывода безконечнаго произведенія, выражающаго $G(x)$.

Умножая всѣ члены подъинтегральной функціи (3) на

$$1-e^{-un}+e^{-un},$$

можно написать, предполагая, что n цѣлое *положительное* число,

$$\log G(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}(1-e^{-un})+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-(x-1)\frac{1-e^{-un}}{1-e^{-u}}+\frac{1-e^{-un}}{1-e^{-u}}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty e^{-un}f(u,x)\,du\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ $f(u,x)$ означаетъ подъинтегральную функцію формулы (3) § 1.

Первый членъ, входящій въ правую часть, извѣстенъ; онъ равенъ

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2}\log(n+1).$$

Второй членъ, по прибавленіи въ скобкахъ

$$n(x-1)-n(x-1)=0\,,$$

распадается на два интеграла такимъ образомъ:

$$(x-1)\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{n-\frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-n(x-1)+\frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\};$$

изъ нихъ первый, по формулѣ (2) § 1, выражаетъ

$$(x-1)\log\Gamma(n+1),$$

второй же можетъ быть легко вычисленъ. Означивъ этотъ интегралъ чрезъ y и замѣтивъ, что

$$\frac{1-e^{-nu}}{1-e^{-u}}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-ku},$$

получимъ:

$$y=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-(x-1)+e^{-ku}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Извѣстно, что

$$\log\Gamma(1+k)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{k-\frac{1-e^{-ku}}{1-e^{-u}}\right\}$$

и

$$\log\Gamma(x+k)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{x+k-1-\frac{1-e^{-(x+k-1)u}}{1-e^{-u}}\right\};$$

слѣдовательно, сдѣлавъ вычитаніе, найдемъ:

$$\log\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)}=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-(x-1)+e^{-ku}\cdot\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\},$$

а потому

$$y=\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)}.$$

Остается опредѣлить послѣдній интегралъ формулы (4). Полагая

$$e^{-u}=v,$$

получимъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-un} f(u,x)du = \int_0^1 \frac{v^n dv}{\log\frac{1}{v}} \left\{ \frac{(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x-1}{1-v} + \frac{1-v^{x-1}}{(1-v)^2} \right\},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} e^{-un} f(u, x)\, du = M \int_0^1 v^n\, dv = \frac{M}{n+1}.$$

И такъ,

$$\log G(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \log(n+1) + (x-1) \log \Gamma(n+1) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)} + \frac{M}{n+1}.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, находимъ, что, при возрастаніи n до ∞,

$$G(x) = \lim \left\{ (n+1)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} [\Gamma(n+1)]^{x-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(x+k)} \right\}.$$

Результатъ вполнѣ аналогичный съ извѣстнымъ произведеніемъ, выражающимъ $\Gamma(x)$, т. е.

$$\Gamma(x) = \lim \left\{ (n+1)^{x-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+k}{x+k} \right\}.$$

3. Функціи $G(x)$ и $\Gamma(x)$ связаны между собой дифференціальнымъ уравненіемъ. Полагая въ формулѣ (3) § 1

$$e^{-u} = v$$

и измѣнивъ x въ $x+1$, получимъ:

$$\log G(x+1) = -\int_0^1 \frac{dv}{\log v} \left\{ \frac{x(x-1)}{2} - \frac{x}{1-v} + \frac{1-v^x}{(1-v)^2} \right\}.$$

Обозначивъ

$$\frac{d}{dx}\log G(x+1) \text{ чрезъ } \mathcal{F}(1+x),$$

посредствомъ дифференцированія найдемъ:

$$\mathcal{F}(1+x) = -\int_0^1 dv \left\{ \left(\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{1-v} \right) \frac{1}{\log v} + \frac{v^x}{(1-v)^2} \right\},$$

откуда

$$\mathcal{F}(1+x) - \mathcal{F}(1) = \int_0^1 dv \left\{ \frac{v^x - 1}{(1-v)^2} - \frac{x}{\log v} \right\}.$$

Припоминая, что

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \psi(x) = -\int_0^1 dv \left\{ \frac{1}{\log v} + \frac{v^{x-1}}{1-v} \right\},$$

легко замѣтить, что можно исключить $\log v$ изъ обоихъ интеграловъ, такъ что

$$\mathcal{F}(1+x) - \mathcal{F}(1) - x\psi(x) = \int_0^1 dv \left\{ \frac{xv^{x-1}}{1-v} + \frac{v^x - 1}{(1-v)^2} \right\};$$

но

$$\int_0^1 dv \left\{ \frac{xv^{x-1}}{1-v} + \frac{v^x - 1}{(1-v)^2} \right\} = \int_0^1 dv \cdot \frac{d}{dv} \left(\frac{v^x - 1}{1-v} \right) = -(x-1),$$

когда $x > 0$. Слѣдовательно,

$$\mathcal{F}(1+x) = x\psi(x) - (x-1) + \mathcal{F}(1).$$

Это уравненіе и есть искомое. Для дальнѣйшаго приложенія удобнѣе будетъ представить его въ другомъ видѣ. По опредѣленію:

$$G(1+x) = \Gamma(x)\, G(x),$$

откуда, послѣ логариѳмическаго дифференцированія, имѣемъ:

$$\mathcal{F}(1+x) = \mathcal{F}(x) + \psi(x).$$

Исключая изъ найденныхъ уравненій $\mathcal{F}(1+x)$, получимъ:

$$\mathcal{F}(x) = (x-1)\psi(x) - (x-1) + \mathcal{F}(1) \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Остается опредѣлить постоянное $\mathfrak{f}(1)$.

Замѣщая въ послѣднемъ уравненіи x чрезъ $x+1$, получаемъ уравненіе

$$\frac{d\log G(1+x)}{dx}=x\frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx}-x+\mathfrak{f}(1),$$

интегрированіе котораго отъ 0 до x даетъ:

$$\log G(1+x)=x\log\Gamma(1+x)-\int_0^x\log\Gamma(1+x)\,dx-\frac{x^2}{2}+x\mathfrak{f}(1).$$

Полагая здѣсь $x=1$, въ силу извѣстныхъ значеній

$$\log G(2)=0,\quad \log\Gamma(2)=0,$$

находимъ:

$$\mathfrak{f}(1)=\frac{1}{2}+\int_0^1\log\Gamma(1+x)\,dx.$$

Но по формулѣ Раабе

$$\int_0^1\log\Gamma(1+x)\,dx=-1+\frac{1}{2}\log 2\pi;$$

слѣдовательно,

$$\mathfrak{f}(1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log 2\pi$$

и

$$\log G(1+x)=x\log\Gamma(1+x)-\int_0^x\log\Gamma(1+x)dx-\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi. \quad (6)$$

4. Функція G можетъ быть разложена на простыхъ множителей. Для этого необходимо предварительно преобразовать выраженіе (3). Путемъ послѣдовательнаго дифференцированія формулы (3), имѣемъ:

$$\mathfrak{f}(a)=\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2a-3}{2}-\frac{1}{1-e^{-u}}+\frac{ue^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\},$$

$$\mathfrak{f}'(a)=\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u}\left\{1-\frac{u^2e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\},$$

$$\mathfrak{f}''(a)=\int_0^\infty\frac{u^2e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2},$$

и вообще

$$\phi^{(n)}(a)=(-1)^n\int_0^\infty \frac{u^n e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2}.$$

Помноживъ эти равенства послѣдовательно на

$$x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{3!}\ldots,$$

легко замѣтить, что

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

и вообще, когда n не менѣе двухъ,

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2!}\phi'(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\phi^{(n-1)}(a)+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^nu^n}{n!}-e^{-xu}\right\}. \ (7)\text{ bis.}$$

Такъ какъ по (5) $\phi(a)$ выражается чрезъ $\psi(a)$, а послѣдняя функція можетъ быть вычислена для всякаго значенія a, то всѣ коэффиціенты вида $\phi^{(n)}(a)$ можно считать извѣстными. Въ частномъ случаѣ, когда $a=1$, $\phi(1)$ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, а $\phi'(1)$ можно найти слѣдующимъ образомъ. По предыдущему

$$\phi'(1)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{1-\frac{u^2}{(1-e^{-u})^2}\right\};$$

сверхъ того, Эйлерово постоянное γ выражается извѣстнымъ опредѣленнымъ интеграломъ, именно:

$$\gamma=\int_0^\infty du\left\{\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}-\frac{e^{-u}}{u}\right\}.$$

Сложивъ эти два выраженія, найдемъ:

$$\mathscr{F}'(1)+\gamma=\int_0^\infty du\left\{\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}-\frac{ue^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}=\int_0^\infty\frac{d}{du}\left(\frac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}\right)du=-1,$$

слѣдовательно,

$$\mathscr{F}'(1)=-(1+\gamma),$$

а потому, полагая въ (7) $a=1$, получимъ

$$\log G(1+x)=\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x+1)}{2}-\frac{\gamma x^2}{2}+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}.\quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

5. Перейдемъ теперь къ разложенію $G(x)$ на множители.

Въ силу тождества

$$\frac{1}{(1-e^{-u})^2}=\sum_{k=1}^{n}ke^{-(k-1)u}+\frac{(n+1)e^{-nu}-ne^{-(n+1)u}}{(1-e^{-u})^2}$$

формула (7) прiйметъ видъ:

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\mathscr{F}(a)+\frac{x^2}{2}\mathscr{F}'(a)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}k\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}\frac{du}{u}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}+R,$$

гдѣ

$$R=\int_0^\infty\frac{(n+1)e^{-nu}-ne^{-(n+1)u}}{(1-e^{-u})^2}\cdot e^{-au}\frac{du}{u}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\},$$

но

$$\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}\frac{du}{u}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}=\int_0^\infty\frac{e^{-(a+k-1)u}-e^{-(a+x+k-1)u}}{u}\cdot du-$$

$$-x\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}\cdot du+\frac{x^2}{2}\int_0^\infty ue^{-(a+k-1)u}\cdot du=$$

$$=\log\left(1+\frac{x}{a+k-1}\right)-\frac{x}{a+k-1}+\frac{x^2}{2(a+k-1)^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{k\log\left(1+\frac{x}{a+k-1}\right)-\frac{kx}{a+k-1}+\frac{kx^2}{2(a+k-1)^2}\right\}+R.$$

Что касается послѣдняго члена R, то, полагая $e^{-u}=v$, легко убѣдиться, что

$$R=\frac{(2n+1)}{n(n+1)}M,$$

и такъ какъ M среднее значенiе функцiи, независящей отъ n, то очевидно, что при возрастанiи n до безконечности

$$\lim R=0.$$

Вслѣдствiе этого, по переходѣ отъ логариѳмовъ къ числамъ, выведенная формула принимаетъ слѣдующiй видъ:

$$\frac{G(a+x)}{G(a)}=e^{x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{a+k-1}\right)^k e^{-\frac{kx}{a+k-1}+\frac{kx^2}{2(a+k-1)^2}} \quad . \ . \ (9)$$

Это разложенiе имѣетъ форму, требуемую теоремой Вейерштрасса. Полагая $a=1$, въ силу сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ, имѣемъ:

$$G(1+x)=(2\pi)^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x(x+1)}{2}}e^{-\frac{\gamma x^2}{2}}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{\frac{x^2}{2k}-x} \quad . \ . \ (10)$$

что напоминаетъ извѣстное выраженiе:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{\gamma x}\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}.$$

Наконецъ, полагая въ (9) $x=1$, получаемъ новую форму безконечнаго произведенiя для $\Gamma(a)$, именно:

$$\Gamma(a)=e^{\mathcal{G}(a)+\frac{1}{2}\mathcal{G}'(a)}\prod_1^\infty\left(1+\frac{1}{a+k-1}\right)^k e^{-\frac{k}{a+k-1}+\frac{k}{2(a+k-1)^2}}.$$

Формула (10) остается справедливой при всякихъ дѣйствительныхъ или комплексныхъ значеніяхъ x, поэтому должна быть принята по опредѣленію за общее выраженіе функціи $G(1+x)$.

Воспользуемся этимъ замѣчаніемъ для вывода нѣкоторыхъ слѣдствій. Пусть α_i корень двучленнаго уравненія:

$$\alpha^n=1.$$

Составимъ при помощи равенства (10) два выраженія $G(1+a-\alpha_i x)$ и $G(1+a)$ и затѣмъ раздѣлимъ полученные результаты; тогда

$$\frac{G(1+a-\alpha_i x)}{G(1+a)}=\left(\frac{2\pi}{2}\right)^{-\frac{\alpha_i x}{2}}e^{\frac{1+\gamma}{2}\alpha_i x(2a-\alpha_i x)}\prod_1^\infty\left(1-\frac{\alpha_i x}{a+k}\right)^k e^{-\frac{\alpha_i x(2a-\alpha_i x)}{2k}+\alpha_i x}.$$

Отсюда, давъ i всѣ значенія отъ 1 до n и сдѣлавъ перемноженіе, найдемъ:

$$\prod_1^n\frac{G(1+a-\alpha_i x)}{G(1+a)}=\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^n}{(a+k)^n}\right)^k,\quad n>2\ .\ .\ .\ (11)$$

и, если $n=2$,

$$\frac{G(1+a-x)\,G(1+a+x)}{G^2(1+a)}=e^{-(1+\gamma)x^2}\prod_1^\infty\left(1-\frac{x^2}{(a+k)^2}\right)^k e^{\frac{x^2}{k}}\ .\ .\ .\ (12)$$

Послѣдняя формула при $a=0$ аналогична разложенію $\frac{\sin\pi x}{\pi x}$ на множители, а изъ первой (11) легко вывести теорему Меллина.

Замѣнивъ въ (11) $a+1$ чрезъ a и k чрезъ $k+1$, получимъ:

$$\prod_1^n\frac{G(a-\alpha_i x)}{G(a)}=\prod_0^\infty\left(1-\frac{x^n}{(a+k)^n}\right)^{k+1}.$$

Раздѣливъ эту формулу на (11), получаемъ равенство, доказанное Меллиномъ:

$$\prod_{1}^{n} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-\alpha_i x)} = \prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{x^n}{(a+k)^n}\right).$$

6. Мы знаемъ, что

$$\log G(a+x) = \log G(a) + x\phi(a) + \frac{x^2}{2}\phi'(a) +$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu}\right\}.$$

Отсюда, при помощи тождества

$$\frac{1}{1-e^{-u}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ku} + \frac{e^{-nu}}{1-e^{-u}},$$

выводимъ:

$$\log G(a+x) = \log G(a) + x\phi(a) + \frac{x^2}{2}\phi'(a) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-(a+k)u}du}{u(1-e^{-u})}\left(1-xu-e^{-xu}\right) + \frac{x^2}{2}\int_0^\infty \frac{ue^{-(a+k)}du}{1-e^{-u}}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-(a+n)u}du}{u(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2}-e^{-xu}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Пользуясь прïемомъ, изложеннымъ въ § 4, не трудно доказать, что

$$\log\Gamma(a+x) = \log\Gamma(a) + x\psi(a) - \int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})}\left\{1-xu-e^{-xu}\right\}. \quad . \quad (b)$$

откуда, по замѣщенiи a чрезъ $a+k$, имѣемъ:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(a+k)u}du}{u(1-e^{-u})}\left\{1-xu-e^{-xu}\right\} = \log\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+x+k)} + x\psi(a+k).$$

Дифференцируя (b) дважды по x и полагая въ результатѣ $x=k$, найдемъ:

$$\psi'(a+k)=\int_0^\infty \frac{ue^{-(a+k)u}du}{1-e^{-u}}.$$

Наконецъ, легко замѣтить, что послѣдній интегралъ, входящій въ (a), при возрастаніи n до безконечности стремится къ нулю. Слѣдовательно, подставивъ найденныя значенія интеграловъ, изъ формулы (a) выводимъ:

$$\log G(a+x)=\log G(a)+x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\log\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+x+k)}+x\psi(a+k)+\frac{x^2}{2}\psi'(a+k)\right\}$$

и

$$G(a+x)=G(a)\,.\,e^{x\phi(a)+\frac{x^2}{2}\phi'(a)}\prod_0^\infty\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+x+k)}e^{x\psi(a+k)+\frac{x^2}{2}\psi'(a+k)}\quad ..\ (13)$$

Въ частныхъ случаяхъ, когда $a=1$,

$$G(1+x)=(2\pi)^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x(x+1)}{2}}e^{-\frac{\gamma x^2}{2}}\prod_0^\infty\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+x+k)}e^{x\psi(1+k)+\frac{x^2}{2}\psi'(1+k)}\quad ..\ (14)$$

когда же $x=1$,

$$\Gamma(a)=e^{\phi(a)+\frac{1}{2}\phi'(a)}\prod_0^\infty\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+1+k)}e^{\psi(a+k)+\frac{1}{2}\psi'(a+k)},$$

или, такъ какъ

$$\Gamma(a+k+1)=(a+k)\Gamma(a+k),$$

$$\Gamma(a)=e^{\phi(a)+\frac{1}{2}\phi'(a)}\prod_0^\infty\frac{1}{a+k}e^{\psi(a+k)+\frac{1}{2}\psi'(a+k)}$$

Формулы (13) и (14) суть частные случаи довольно общей теоремы, изъ которой слѣдуетъ, что функціи съ отрицательными корнями разлагаются не только на простые множители Вейерштрасса, но и на множители, составленные изъ функціи Γ или изъ функцій подобныхъ функціи гамма. Объ этомъ мы будемъ имѣть случай говорить.

7. Выраженіями (7) или (8) можно воспользоваться для полученія разложеній въ строку $\log G(a+x)$. Въ самомъ дѣлѣ, разложивъ e^{-ux} въ рядъ по степенямъ ux, по (7) найдемъ:

$$\log G(a+x) = \log G(a) + x\phi(a) + \frac{x^2}{2}\phi'(a) + \sum_{i=3}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i!}\int_0^{\infty}\frac{u^{i-1}e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2},$$

но

$$\int_0^{\infty}\frac{u^{i-1}e^{-au}au}{(1-e^{-u})^2} = \sum_{k=1}^{\infty}k\int_0^{\infty}u^{i-1}e^{-(a+k-1)u}du = (i-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(a+k-1)^i} = (i-1)!\,C_i;$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned}&\log G(a+x) = \log G(a) + x\phi(a) + \frac{x^2}{2}\phi'(a) + \\ &+\frac{x^3}{3}C_3 - \frac{x^4}{4}C_4 + \ldots (-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}C_i + \ldots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (15)$$

Если же $a=1$,

то
$$C_i = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{i-1}} = S_{i-1},$$

и слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}&\log G(1+x) = x\phi(1) + \frac{x^2}{2!}\phi'(1) + S_2\frac{x^3}{3} - S_3\frac{x^4}{4} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{i-1}S_{i-1}\frac{x^i}{i} + \ldots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (16)$$

аналогично съ разложеніемъ:

$$\log\Gamma(1+x) = -\gamma x + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} - \ldots + (-1)^i S_i\frac{x^i}{i} + \ldots$$

Если въ (15) $a = m$, цѣлому положительному числу, то коэффиціенты

$$C_i = \frac{1}{m^i} + \frac{2}{(m+1)^i} + \frac{3}{(m+2)^i} + \frac{4}{(m+3)^i} + \ldots$$

выражаются чрезъ суммы S_i. Дѣйствительно, по фор. (1) § 1,

$$G(m+x) = G(1+x)\Gamma(1+x)\Gamma(2+x)\ldots\Gamma(m-1+x).$$

Логариѳмируя и дифференцируя по x, найдемъ:

$$\phi(m+x) = \phi(1+x) + \psi(1+x) + \psi(2+x) + \ldots + \psi(m-1+x),$$

но извѣстно, что

$$\psi(2+x) = \psi(1+x) + \frac{1}{1+x}$$

. . . .

$$\psi(m-1+x) = \psi(1+x) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \ldots + \frac{1}{m-2+x};$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\phi(m+x) = \phi(1+x) + (m-1)\psi(1+x) + \\ &+\frac{m-2}{1+x} + \frac{m-3}{2+x} + \ldots + \frac{2}{m-3+x} + \frac{1}{m-2+x} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (17)$$

Взявъ $(i-1)$-ую производную этого выраженія по x, получимъ:

$$\phi^{(i-1)}(m+x) = \phi^{(i-1)}(1+x) + (m-1)\psi^{(i-1)}(1+x) +$$

$$+(-1)^{i-1}(i-1)!\left\{\frac{m-2}{(1+x)^i} + \frac{m-3}{(2+x)^i} + \ldots + \frac{2}{(m-3+x)^i} + \frac{1}{(m-2+x)^i}\right\},$$

откуда

$$\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(m+x) = \frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(1+x) + \frac{m-1}{(i-1)!}\psi^{(i-1)}(1+x) +$$

$$+(-1)^{i-1}\left\{\frac{m-2}{(1+x)^i} + \frac{m-3}{(2+x)^i} + \ldots + \frac{2}{(m-3+x)^i} + \frac{1}{(m-2+x)^i}\right\} \;..\; (18)$$

Затѣмъ понятно, что

$$\log G(m+x) = \log G(m) + x\phi(m) + \frac{x^2}{2!}\phi'(m) + \frac{x^3}{3!}\phi''(m) + \ldots$$

$$+\frac{x^i}{i!}\phi^{(i-1)}(m) + \ldots$$

а потому, сличая это разложеніе послѣдовательно съ (15) и (16), имѣемъ:

$$\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(m) = (-1)^{i-1}C_i,$$

$$\frac{1}{(i-1)!}\phi^{(i-1)}(1) = (-1)^{i-1}S_{i-1}.$$

Также изъ разложенія $\log\Gamma(1+x)$ не трудно вывести, что

$$\frac{1}{(i-1)!}\psi^{(i-1)}(1) = (-1)^i S_i.$$

Замѣтивъ это и полагая въ (17) и (18) $x=0$, находимъ:

$$\phi(m) = \phi(1) + (m-1)\psi(1) + \frac{m-2}{1} + \frac{m-3}{2} + \ldots + \frac{2}{m-3} + \frac{1}{m-2},$$

$$\phi'(m) = \phi'(1) + (m-1)S_2 - \left[\frac{m-2}{1^2} + \frac{m-3}{2^2} + \ldots + \frac{2}{(m-3)^2} + \frac{1}{(m-2)^2}\right],$$

$$C_i = S_{i-1} - (m-1)S_i + \frac{m-2}{1^i} + \frac{m-3}{2^i} + \ldots + \frac{2}{(m-3)^i} + \frac{1}{(m-2)^i}.$$

Очевидно, что строка (15) остается сходящейся, пока

$$\text{mod.}\, x < a\,.$$

Функція $\mathscr{f}$ можетъ быть разложена въ строку особаго вида. Дифференцированіе формулы (7 bis) даетъ:

$$\mathscr{f}(a+x)=\mathscr{f}(a)+x\mathscr{f}'(a)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{f}^{(n-1)}(a)-$$

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{(1-e^{-u})^2}\left\{1-xu+\frac{x^2u^2}{2!}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}u^{n-1}}{(n-1)!}-e^{-xu}\right\}.$$

Обозначивъ послѣдній интегралъ буквою R, не трудно понять, что

$$R=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_0^\infty e^{-(a+k-1)u}du\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^iu^i}{i!}-e^{-xu}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^i}{(a+k-1)^{i+1}}-\frac{1}{a+k-1+x}\right\}.$$

Вторая сумма представляетъ геометрическую прогрессію, сумма которой

$$\frac{(a+k-1)^n-(-1)^nx^n}{(a+k-1)^n(a+k-1+x)}.$$

Подставивъ это значеніе въ скобки и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$R=-(-1)^nx^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(a+k-1)^n(a+k-1+x)}.$$

Слѣдовательно,

$$\mathscr{f}(a+x)=\mathscr{f}(a)+x\mathscr{f}'(a)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{f}^{(n-1)}(a)+$$

$$+(-1)^nx^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(a+k-1)^n(a+k-1+x)}.$$

Самый интересный случай получается при $a=1$, $n=2$, именно:

$$\mathscr{f}(1+x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log 2\pi-x(1+\gamma)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{k(x+k)}.$$

8. Переходимъ къ выводу факторіальныхъ строкъ.

Мы имѣли въ § 1 слѣдующее выраженіе:

$$\log G(x)=-\int_0^1\frac{d\xi}{\log(1-\xi)}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x-1}{\xi}+\frac{1-(1-\xi)^{x-1}}{\xi^2}\right\}.$$

Разложивъ $(1-\xi)^{x-1}$ въ строку, имѣемъ:

$$\log G(x)=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k-2)}{(k+2)!}\int_0^1\frac{\xi^k d\xi}{\log(1-\xi)}+R.$$

Замѣняя въ интегралѣ $1-\xi$ чрезъ e^{-u}, получимъ:

$$-\int_0^1\frac{\xi^k d\xi}{\log(1-\xi)}=\int_0^{\infty}\frac{(1-e^{-u})^k e^{-u}du}{u}=K_k$$

или, возвысивъ $(1-e^{-u})$ только въ $(k-1)$-ую степень, найдемъ:

$$K_k=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}\int_0^{\infty}\frac{e^{-(k+1)u}-e^{-(k+2)u}}{u}du$$

или

$$K_k=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}\log\frac{k+2}{k+1},$$

т. е.

$$K_1=\log 2,\quad K_2=\log\frac{4}{3},\quad K_3=\log\frac{32}{27},\ldots$$

Замѣтивъ, что

$$K_{k+1}=-\int_0^1\frac{\xi^{k+1}d\xi}{\log(1-\xi)}=-\theta\int_0^1\frac{\xi^k d\xi}{\log(1-\xi)}=\theta K_k,$$

убѣждаемся не только въ томъ, что коэффиціенты убываютъ, но и въ сходимости строки при всякомъ значеніи x, ибо остаточному члену R можно дать такую форму:

$$R=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n-3)}{(n+2)!}\cdot-\int_0^1\frac{\xi^{n+1}(1-\theta)^{n+3}(1-\theta\xi)^{x-m-5}}{\log(1-\xi)}d\xi,$$

откуда

$$R=(-1)^n K_{n+1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n-3)}{(n+2)!}\vartheta^{n-3}\vartheta_1^{x-2}.$$

И такъ,

$$\log G(x)=K_1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}-K_2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4!}+\ldots$$

Взявъ дифференцію этой строки, имѣемъ:

$$\log\Gamma(x)=K_1\frac{(x-1)(x-2)}{2!}-K_2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}+\ldots$$

Для функціи $\psi(a+x)$ извѣстно разложеніе по факторіаламъ, выведенное впервые Абелемъ методомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Предыдущія свойства функціи G наводятъ на мысль, что то-же должно быть и для функціи $\phi(a+x)$.

Обратимся къ интегралу въ § 4, выражающему $\phi(a)$. Замѣнивъ въ немъ a чрезъ $(a+x)$ и e^{-u} чрезъ u, будемъ имѣть:

$$\phi(a+x)=\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a+x-1}}{(1-u)^2}-\left[\frac{2a+2x-3}{2}-\frac{1}{1-u}\right]\frac{1}{\log u}\right\};$$

отсюда-же

$$\phi(a+x)-\phi(a)=\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a-1}(u^x-1)}{(1-u)^2}-\frac{x}{\log u}\right\}\quad .\ .\ .\ (a)$$

Извѣстно, что

$$\psi(a)=-\int_0^1 du\left\{\frac{u^{a-1}}{1-u}+\frac{1}{\log u}\right\}.$$

Умноживъ эту формулу на x и вычтя изъ предыдущей, получимъ:

$$\phi(a+x)-\phi(a)-x\psi(a)=\int_0^1 u^{a-1}\,du\left\{\frac{u^x-1}{(1-u)^2}+\frac{x}{1-u}\right\}$$

или, измѣняя u въ $1-u$,

$$\phi(a+x)=\phi(a)+x\psi(a)+\int_0^1 (1-u)^{a-1} du \left\{\frac{(1-u)^x-1}{u^2}+\frac{x}{u}\right\}.$$

Теперь уже можно примѣнить теорему Ньютона, такъ что

$$\phi(a+x)=\phi(a)+x\psi(a)+$$

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i \frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i!}\int_0^1 u^{i-2}(1-u)^{a-1}\,du+R,$$

при чемъ

$$\int_0^1 u^{i-2}(1-u)^{a-1}du=\frac{\Gamma(i-1)\Gamma(a)}{\Gamma(a+i-1)}=\frac{(i-2)!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+i-2)}.$$

Остаточный членъ имѣетъ форму:

$$R=(-1)^{n+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{a-1}(1-\theta)^n(1-\theta u)^{x-1-n}du,$$

но

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{a-1}(1-\theta)^n(1-\theta u)^{x-1-n}du=(1-\theta_1)^{x-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta_1}\right)^n\frac{\Gamma(n)\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)},$$

вслѣдствіе чего

$$R=(-1)\frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\cdot\frac{\vartheta^n}{n}(1-\theta_1)^{x-1},$$

гдѣ

$$\vartheta=\frac{1-\theta}{1-\theta_1}<1.$$

Предѣлъ остаточнаго члена при возрастаніи n равенъ нулю; слѣдовательно:

$$\phi(a+x)=\phi(a)+x\psi(a)+\frac{1}{1.2}\,\frac{x(x-1)}{a}-\frac{1}{2.3}\,\frac{x(x-1)(x-2)}{a(a+1)}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1}{(n-1)n}\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n-2)}+\ldots$$

Это и есть искомая формула.

Взявъ дифференцію этого равенства по x, или по a, и замѣтивъ, что

$$\triangle\phi(a+x)=\psi(a+x),$$

получимъ формулу Абеля:

$$\psi(a+x)=\psi(a)+\frac{x}{a}-\frac{x(x-1)}{2a(a-1)}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{(n-1)\,.\,a(a+1)\ldots(a+n-2)}+\ldots$$

Нѣкоторыя слѣдствія этихъ формулъ довольно интересны. Раздѣливъ обѣ части предпослѣдняго равенства на x и затѣмъ полагая $x=0$, получимъ:

$$\phi'(a)=\psi(a)-\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a(a+1)}-\frac{1.2}{4a(a+1)(a+2)}-$$

$$-\frac{1\,.\,2\,.\,3}{5a(a+1)(a+2)(a+3)}-\ldots$$

Изъ этой строки получается разложеніе $\psi'(a)$. Мы знаемъ изъ § 3, формула (5), что

$$\phi(a)=(a-1)\,\psi(a)-(a-1)+\phi(1).$$

Дифференцированіе дастъ:

$$\phi'(a)=\psi(a)+(a-1)\,\psi'(a)-1.$$

Сравнивая этотъ результатъ съ полученной строкой, послѣ легкихъ преобразованій, имѣемъ:

$$\psi'(a)=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{2(a-1)a}-\frac{1}{3(a-1)a(a+1)}-\frac{1.2}{4(a-1)a(a+1)(a+2)}-\ldots,$$

тогда какъ извѣстная форма $\psi'(a)$ такова:

$$\psi'(a)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2a(a+1)}+\frac{1.2}{3a(a+1)(a+2)}+\dots$$

Легко убѣдиться въ тождествѣ обѣихъ строкъ.

9. Формула удвоенія аргумента функціи G аналогична равенству:

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Слѣдующій пріемъ доказательства намъ показался проще другихъ, хотя онъ довольно искусственъ. Пусть

$$H(x)=\frac{G(2x)}{G^2(x)G^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

По замѣщеніи x чрезъ $x+1$ составимъ выраженіе:

$$\frac{H(x+1)}{H(x)}=\frac{G(2x+2)\,G^2(x)\,G^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{G(2x)G^2\,(x+1)\,G^2\left(x+\frac{3}{2}\right)}.$$

Правая часть можетъ быть упрощена при помощи формулы (a) и

$$G(x+1)=\Gamma(x)\,G(x)\,,$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,,$$

такъ что

$$\frac{H(x+1)}{H(x)}=\frac{\Gamma(2x+1)\,\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)\,\Gamma^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2x\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)\,\Gamma^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

или

$$\frac{H(x+1)}{H(x)}=\frac{x\,.\,2^{4x}}{2\pi}.$$

Взявъ логариѳмы, результатъ можно представить въ видѣ:

$$\triangle\log H(x)=\log x+4x\log 2-\log 2\pi\,.$$

Извѣстно, что

$$\triangle \log \Gamma(x) = \log x,$$

поэтому, интегрируя предыдущее разностное уравненіе отъ 1 до x, найдемъ:

$$\log \frac{H(x)}{H(1)} = \log \Gamma(x) - x(x-1)\, 2\log 2 - (x-1)\log 2\pi\,.$$

Слѣдовательно,

$$H(x) = H(1)\, \Gamma(x) 2^{(x-1)(2x-1)} \pi^{-x}\,.$$

Сравнивая это значеніе $H(x)$ съ прежнимъ, получимъ:

$$\frac{G(2x)}{G^2(x) G^2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = H(1)\, \Gamma(x) 2^{(x-1)(2x-1)} \pi^{-x}\,.$$

Для опредѣленія $H(1)$ полагаемъ $x = 1$, тогда

$$H(1) = \frac{\pi}{G^2(^3/_2)} = \frac{1}{G^2(^1/_2)}\,,$$

ибо

$$\pi = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

И такъ, окончательно:

$$G(2x) = \frac{1}{G^2\left(\frac{1}{2}\right)} 2^{(x-1)(2x-1)} \pi^{-x} \Gamma(x) G^2(x) G^2\left(x+\frac{1}{2}\right). \quad . \quad . (19)$$

10. Мы воспользуемся этой формулой для вывода интеграла

$$\int_0^1 \log G(x+a)\, dx = \int_a^{a+1} \log G(x) dx = y(a)\,.$$

Посредствомъ дифференцированія по a, составимъ уравненіе:

$$\frac{dy(a)}{da} = \log G(a+1) - \log G(a) = \log \Gamma(a)\,.$$

Обратно, интегрируя отъ 0 до a и замѣчая, что

$$y(0)=\int_0^1 \log G(x)dx,$$

находимъ:

$$y(a)=\int_0^1 \log G(a)da+\int_0^a \log\Gamma(a)da.$$

Вычисленіе второго интеграла не представляетъ затрудненій. Было доказано въ § 3, формула (6), что

$$\log G(1+x)=x\log\Gamma(1+x)-\int_0^x \log\Gamma(1+x)dx-\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi.$$

Въ силу соотношенія:

$$\log\Gamma(1+x)=\log x+\log\Gamma(x),$$

эта формула преобразуется въ такую:

$$\log G(1+x)=x\log x+x\log\Gamma(x)-$$

$$-\int_0^x \log x dx-\int_0^x \log\Gamma(x)dx-\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi.$$

Замѣтивъ, что

$$\int_0^x \log x dx=x\log x-x,$$

и написавъ a вмѣсто x, имѣемъ:

$$\int_0^a \log\Gamma(a)da=a\log\Gamma(a)-\log G(1+a)-\frac{a(a-1)}{2}+\frac{a}{2}\log 2\pi \quad \ldots . (a)$$

Обращаясь къ первому интегралу, замѣчаемъ, что его можно разбить на два; такъ что

$$\int_0^1 \log G(a)da=\int_0^{\frac{1}{2}} \log G(a)da+\int_{\frac{1}{2}}^1 \log G(a)da$$

или, по замѣнѣ a чрезъ $a+\frac{1}{2}$, во второмъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left\{G(a)G\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}da.$$

По формулѣ удвоенія аргумента (19):

$$G(a)G\left(a+\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)G^{\frac{1}{2}}(2a)\,.\,2^{-(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)}\pi^{-\frac{a}{2}}\Gamma^{-\frac{1}{2}}(a).$$

Подставивъ это въ предыдущій интегралъ и сдѣлавъ всѣ возможныя упрощенія, находимъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \frac{1}{2}\log G\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \log G(2a)da - \frac{5}{48}\log 2 +$$

$$+\frac{1}{16}\log\pi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \log\Gamma(a)da.$$

Здѣсь, очевидно, можно сдѣлать такія преобразованія: замѣнить $2a$ чрезъ a въ первомъ интегралѣ и опредѣлить второй изъ формулы (a). Такимъ образомъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \frac{1}{2}\log G\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\int_0^1 \log G(a)da - \frac{5}{48}\log 2 + \frac{1}{16}\log\pi -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \log G\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\log 2\pi\right\}.$$

Отсюда, сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$\int_0^1 \log G(a)da = \log\left\{\frac{G^{4/3}(1/2)}{2^{11/36}}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{\frac{1}{12}}\right\}.$$

Такимъ же способомъ можно опредѣлить болѣе простой интегралъ:

$$\int_0^1 \log\Gamma(a) = \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Этотъ пріемъ общій для всѣхъ функцій подобныхъ функціи $\Gamma(a)$. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ:

$$\int_0^1 \log G(x+a)dx = \log\left\{\frac{G^{4/3}(1/2)}{2^{11/36}}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{\frac{1}{12}}\right\} + \frac{a}{2}\log 2\pi - \frac{a(a-1)}{2} +$$

$$+ a\log\Gamma(a) - \log G(1+a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Это равенство соотвѣтствуетъ формулѣ Раабе въ теоріи функціи $\Gamma(a)$.

11. Коши доказалъ, что

$$\log\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \bar{\omega}(x) \quad . \; . \quad (a)$$

гдѣ

$$\bar{\omega}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}du\left\{\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Мы обнаружимъ, что подобнымъ-же свойствомъ обладаетъ $\log G(1+x)$. Интегрируя по частямъ, имѣемъ:

$$\int_0^1 \log G(x+a)da = \log G(1+x) - \int_0^1 \varphi(a+x)ada \quad . \; . \; . \quad (c)$$

Изъ предыдущаго извѣстно (§ 4):

$$\varphi(a+x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2x+2a-3}{2} - \frac{1}{1-e^{-u}} + \frac{ue^{-(a+x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\},$$

слѣдовательно,

$$\int_0^1 \varphi(a+x)ada = \int_0^1 ada\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2x+2a-3}{2} - \frac{1}{1-e^{-u}} + \frac{ue^{-(a+x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Измѣнивъ порядокъ интеграціи и выполнивъ интегрированіе по a, будемъ имѣть:

$$\int_0^1 \varphi(a+x)ada =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{x}{2} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2(1-e^{-u})} - \frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^2} + \frac{e^{-(x-1)u}}{u(1-e^{-u})}\right\}.$$

Нѣкоторые члены подъинтегральной функціи наводятъ на мысль выдѣлить изъ этого интеграла $\log\Gamma(x)$. Мы знаемъ, что

$$\log\Gamma(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{x-1-\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $1/2$ и вычтя изъ прежняго, находимъ:

$$\int_0^1 \phi(a+x)ada-\frac{1}{2}\log\Gamma(x)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{1}{12}-\frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{e^{-(x-1)u}}{u(1-e^{-u})}-\frac{e^{-(x-1)u}}{2(1-e^{-u})}\right\}.$$

Это еще преобразуется посредствомъ прибавленія въ скобкахъ:

$$-\frac{1}{12}e^{-(x-1)u}+\frac{1}{12}e^{-(x-1)u}=0\,,$$

такъ что правая часть можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\frac{1}{12}\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}du+\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{1}{12}e^{-(x-1)u}-\frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-(x-1)u}}{u(1-e^{-u})}-\frac{e^{-(x-1)u}}{2(1-e^{-u})}\right\}$$

или, имѣя въ виду, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}du=\log x\,,$$

и вынеся $e^{-(x-1)u}$ за скобку, въ видѣ:

$$\frac{1}{12}\log x+\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{1}{u(1-e^{-u})}-\frac{1}{2(1-e^{-u})}\right\}.$$

Разложивъ $\dfrac{1}{1-e^{-u}}$ по степенямъ u, можно написать

*

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\frac{1}{u}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right).$$

Внося это выраженіе вмѣсто послѣдняго члена въ скобкахъ, нашей формулѣ можно дать такой видъ:

$$\frac{1}{12}\log x-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}+\frac{1}{u(1-e^{-u})}-\frac{1}{2u}-\frac{1}{6}\right\}.$$

Первый интегралъ представляетъ не что иное, какъ $\overline{\omega}(x)$; слѣдовательно:

$$\int_0^1 \phi(a+x)a\,da=\frac{1}{2}\log\Gamma(x)+\frac{1}{12}\log x-\frac{1}{2}\overline{\omega}(x)+\varrho(x),$$

гдѣ $\varrho(x)$ послѣдній интегралъ предыдущаго выраженія. И такъ (c):

$$\int_0^1 \log G(x+a)da=\log G(x+1)-\frac{1}{12}\log x+\frac{1}{2}\left\{\log\Gamma(x)-\overline{\omega}(x)\right\}+\varrho(x).$$

Но мы имѣли (20):

$$\int_0^1 \log G(x+a)da=\int_0^1 \log G(a)da+\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x-1)}{2}+$$

$$+x\log\Gamma(x)-\log G(x+1).$$

Исключая первый интегралъ изъ этихъ выраженій, не трудно получить:

$$2\log G(x+1)=\int_0^1 \log G(a)da+\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x-1)}{2}+$$

$$+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\Gamma(x)+\frac{1}{12}\log x+\varrho(x)-\frac{1}{2}\overline{\omega}(x)\quad . \;\; . \;\; . \quad (d)$$

Написавъ въ формулѣ (a)

$$\log\Gamma(1+x)=\log x+\log\Gamma(x)$$

имѣемъ:

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + \overline{\omega}(x).$$

Подставивъ это выраженіе $\log\Gamma(x)$ въ формулу (d), найдемъ:

$$\log G(x+1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \log G(a)da + \frac{1}{8}\log 2\pi + \frac{x}{2}\log 2\pi - \frac{3}{4}x^2 +$$

$$+\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}\right)\log x + \frac{1}{2}\left(x\overline{\omega}(x) + \varrho(x)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Сумма опредѣленныхъ интеграловъ

$$x\overline{\omega}(x) + \varrho(x)$$

можетъ быть представлена однимъ интеграломъ.

Умноживъ (b) на x, имѣемъ:

$$x\overline{\omega}(x) = \int_0^\infty \frac{xe^{-ux}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right\}.$$

Интеграція по частямъ приводитъ къ такому равенству:

$$x\overline{\omega}(x) = -\left|_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right\}\right. +$$

$$+\int_0^\infty e^{-xu}d\left\{\frac{1}{u}\left[\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right]\right\}$$

или

$$x\overline{\omega}(x) = \frac{1}{12} + \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}du\left\{\frac{2}{u^2} + \frac{1}{2u} - \frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2} - \frac{1}{u(1-e^{-u})}\right\}.$$

Складывая это равенство почленно съ

$$\varrho(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2} + \frac{1}{u(1-e^{-u})} - \frac{1}{2u} + \frac{1}{6}\right\},$$

получимъ:

$$x\bar{\omega}(x)+\varrho(x)=\frac{1}{12}+2\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Полагая

$$\omega(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}\quad . \; . \; . \; (21)$$

и замѣтивъ, что

$$\frac{1}{2}\int_0^1\log G(a)da+\frac{1}{8}\log 2\pi+\frac{1}{24}=\log\frac{G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{1/6}}{2^{1/36}},$$

изъ формулы (e) находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\log G(x+1)=\log\frac{G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{1/6}}{2^{1/36}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\\+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+\omega(x)\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; (22)$$

что и требовалось доказать.

Равенство (22) можетъ быть доказано иначе. Мы знаемъ (3), что

$$\log G(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x-1}{1-e^{-u}}+\frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Разлагая $(1-e^{-u})^{-2}$ въ строку, получимъ:

$$\frac{1}{(1-e^{-u})^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}+R$$

гдѣ R строка, расположенная по положительнымъ степенямъ u.

Замѣтивъ это, можно написать

$$\log G(x)=F(x)+\Omega(x),$$

полагая

$$F(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x-1}{1-e^{-u}}+\frac{1}{(1-e^{-u})^2}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}\right)e^{-(x-1)u}\right\}$$

$$\Omega(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}-\frac{1}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Для вычисленія $F(x)$ возьмемъ производную по x:

$$F'(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{2x-3}{2}-\frac{1}{1-e^{-u}}+\left(\frac{1}{u}+1+\frac{5}{12}u\right)e^{-(x-1)u}\right\}, \quad (f)$$

откуда

$$F'(1)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{1-e^{-u}}+\left(\frac{1}{u}+1+\frac{5}{12}u\right)\right\} \ldots (g)$$

или

$$F'(1)=\int_0^\infty \frac{5}{12}e^{-u}du-\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\}$$

или, припоминая формулу (b) и выполнивъ интеграцію въ первомъ членѣ,

$$F'(1)=\frac{5}{12}-\overline{\omega}(1).$$

Полагая въ формулѣ (a) $x=1$, найдемъ:

$$\overline{\omega}(1)=1-\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Слѣдовательно,

$$F'(1)=-\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\log 2\pi \quad \ldots \ldots \quad (h)$$

Вычитая (g) изъ (f), получимъ:

$$F'(x)-F'(1)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{(x-1)+\left(\frac{1}{u}+1+\frac{5}{12}u\right)\left(e^{-(x-1)u}-1\right)\right\},$$

что можно представить иначе:

$$F'(x)-F'(1)=\int_0^\infty du\left\{(x-1)\frac{e^{-u}}{u}+\frac{e^{-xu}-e^{-u}}{u^2}\right\}-\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}du+$$

$$+\frac{5}{12}\int_0^\infty\left(e^{-xu}-e^{-u}\right)du.$$

Полагая

$$y(x)=\int_0^\infty du\left\{(x-1)\frac{e^{-u}}{u}+\frac{e^{-xu}-e^{-u}}{u^2}\right\}\quad .\ .\ .\ .\quad (i)$$

и вспомнивъ значенія двухъ остальныхъ интеграловъ, найдемъ:

$$F'(x)-F'(1)=y(x)-\log x+\frac{5}{12x}-\frac{5}{12}.$$

Дифференцируя равенство (i), имѣемъ:

$$y'(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}\,du=\log x\,.$$

Слѣдовательно, интегрируя отъ 1 до x и замѣчая, что

$$y(1)=0\,,$$

найдемъ:

$$y(x)=x\log x-x+1\,.$$

Изъ всего найденнаго будемъ имѣть, принимая въ разсчетъ равенство (h):

$$F'(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+(x-1)\log x-x+\frac{5}{12x}\,.$$

Интегрируя это равенство отъ 1 до x, находимъ:

$$F(x)=F(1)+\frac{x-1}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}$$

или

$$F(x)=C+\varphi(x)\,,$$

полагая

$$C=F(1)-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{4}$$

и

$$\varphi(x)=\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x\,.$$

Для опредѣленія постояннаго C обратимся къ формулѣ удвоенія (19), которая въ логариѳмическомъ видѣ можетъ быть написана такъ:

$$\log G(2x) - 2\log G(x) - 2\log G\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)\log 2 +$$

$$+\log\Gamma(x) - x\log\pi - 2\log G\left(\frac{1}{2}\right).$$

или, замѣтивъ, что

$$\log G(x) = C + \varphi(x) + \Omega(x),$$

$$\left.\begin{aligned} &-3C+\varphi(2x)-2\varphi(x)-2\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-1)\log 2 - \\ &-x\log\pi - 2\log G\left(\frac{1}{2}\right)+\log\Gamma(x)-\Omega(2x)+2\Omega(x)+2\Omega\left(x+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\} \; . \; . (k)$$

Пользуясь значеніемъ $\varphi(x)$, не трудно вывести, что

$$\varphi(2x) = x\log 2\pi + \left(2x^2-2x+\frac{5}{12}\right)\log x - 3x^2 + 2x + \left(2x^2-2x+\frac{5}{12}\right)\log 2$$

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{4}\log 2\pi + \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)\log x - \frac{1}{2}x +$$

$$+\left\{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\right)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{x}{4}+\frac{5}{16}\right\}.$$

Наконецъ, по теоремѣ Коши:

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \overline{\omega}(x).$$

Подставивъ всѣ эти значенія въ выраженіе (k), послѣ сокращеній получимъ:

$$2\log G\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{19}{12}\log 2 - \log\pi - 3C = \overline{\omega}(x) + 2\Omega(x) + 2\Omega\left(x+\frac{1}{2}\right) - \Omega(2x) +$$

$$+\left\{\left(x^2-x+\frac{1}{12}\right)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{x}{2}+\frac{5}{8}\right\}.$$

Равенство это справедливо при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ x, но при $x=\infty$ правая часть обращается въ нуль, ибо каждое изъ слагаемыхъ при этомъ равно нулю, а потому

$$2\log G\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{19}{12}\log 2-\log\pi-3C=0.$$

Отсюда

$$C=\log\frac{G^{2/3}(1/2)}{2^{19/36}\pi^{1/3}}.$$

Слѣдовательно,

$$F(x)=\log\frac{G^{2/3}(\frac{1}{2})}{2^{19/36}\pi^{1/3}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x.$$

и

$$\log G(x)=\log\frac{G^{2/3}(\frac{1}{2})}{2^{19/36}\pi^{1/3}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+x+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{12}-\frac{1}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Складывая это равенство съ равенствомъ

$$\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\right\},$$

получаемъ окончательно:

$$\log G(x+1)=\log\frac{\pi^{1/6}G^{2/3}(\frac{1}{2})}{2^{1/36}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2+$$

$$+\int_0^\infty\frac{e^{-xu}du}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}.$$

Разложеніе послѣдняго интеграла въ рядъ по отрицательнымъ степенямъ x даетъ строку, подобную строкѣ Стирлинга.

Извѣстно, что

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{u}+\frac{B_1}{2\,!}u-\frac{B_2}{4\,!}u^3+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n!}u^{2n-1}+(-1)^n\frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)!}u^{2n+1}$$

гдѣ B_1, B_2, ... Бернулліевы числа, θ— правильная дробь.

Дифференцируя, имѣемъ:

$$-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}=-\frac{1}{u^2}+\frac{B_1}{2\,!}-\frac{3B_2}{4\,!}u^2+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)B_n}{(2n)\,!}u^{2n-2}+(-1)^n\frac{\theta(2n+1)B_{n+1}}{(2n+2)\,!}u^{2n}.$$

Отсюда, замѣтивъ, что $B_1=\frac{1}{6}$, получимъ:

$$\frac{1}{u}\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}=-\frac{3B_2}{4\,!}u+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)B_n}{2n\,!}u^{2n-3}+(-1)^n\frac{\theta(2n+1)B_{n+1}}{(2n+2)\,!}u^{2n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ux}}{u}du\left\{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{12}-\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2}\right\}=-\frac{B_2}{2.4}\frac{1}{x^2}+\frac{B_3}{4.6}\frac{1}{x^4}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-2)2n}\frac{1}{x^{2n-2}}+(-1)^n\frac{\theta B_{n+1}}{2n(2n+2)}\frac{1}{x^{2n}}.$$

И такъ,

$$\log G(x+1)=\log\frac{\pi^{1/6}G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{1/36}}+\frac{x}{2}\log 2\pi+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\right)\log x-\frac{3}{4}x^2-$$

$$-\frac{B_2}{2.4}\frac{1}{x^2}+\frac{B_3}{4.6}\frac{1}{x^4}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-2)2n}\frac{1}{x^{2n-2}}+$$

$$+(-1)^n\frac{\theta B_{n+1}}{2n(2n+2)}\frac{1}{x^{2n}}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (23)$$

Такимъ образомъ, при весьма большомъ x приближенное значеніе $G(x+1)$ будетъ:

$$G(x+1)=\frac{G^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)\pi^{1/6}}{2^{1/36}}(2\pi)^{\frac{x}{2}}x^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}}e^{-\frac{3}{4}x^2}.$$

12. Пользуясь вышедоказанными формулами, можно вычислить нѣкоторые опредѣленные интегралы.

Интегралъ

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du\,,$$

по замѣнѣ $u+a$ чрезъ u, распадается на два, именно:

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du=\int_a^{a+x}\log\Gamma(u)du=\int_0^{a+x}\log\Gamma(u)du-\int_0^a \log\Gamma(u)du.$$

По доказанному въ § 10 формула (a), или пользуясь (6), имѣемъ:

$$\int_0^{a+x}\log\Gamma(u)du=(a+x-1)\log\Gamma(x+a)-\log G(x+a)-\frac{(x+a)(x+a-1)}{2}+$$

$$+\frac{x+a}{2}\log 2\pi$$

$$\int_0^a \log\Gamma(u)du=(a-1)\log\Gamma(a)-\log G(a)-\frac{a(a-1)}{2}+\frac{a}{2}\log 2\pi.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du = \log\frac{\Gamma^{x+a-1}(x+a)G(a)}{\Gamma^{a-1}(a)G(x+a)} - \frac{x(x+2a-1)}{2} + \frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Если x цѣлое число, правая часть не зависитъ отъ G, и въ частномъ случаѣ, при $x=1$, получаемъ формулу Раабе:

$$\int_0^1 \log\Gamma(u+a)du = \log\frac{\Gamma^a(1+a)\,.\,G(a)}{\Gamma^{a-1}(a)G(1+a)} - a + \frac{1}{2}\log 2\pi =$$

$$= a\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi\,.$$

13. Мы имѣли уравненіе (a) въ § 8:

$$\varphi(a+x) - \varphi(a) = \int_0^1 du\left\{\frac{u^{a-1}(u^x-1)}{(1-u)^2} - \frac{x}{\log u}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;. (1)$$

Подставивъ сюда $a+1$ вмѣсто a и b вмѣсто x, можно написать:

$$\frac{d}{da}\log\frac{G(a+b+1)}{G(a+1)} = \int_0^1 du\left\{\frac{u^a(u^b-1)}{(1-u)^2} + \frac{b}{\log\frac{1}{u}}\right\}.$$

Отсюда, интегрируя по a отъ нуля,

$$\log\frac{G(a+b+1)}{G(a+1)G(b+1)} = \int_0^1 \frac{du}{\log\frac{1}{u}}\left\{ab - \frac{(1-u^a)(1-u^b)}{(1-u)^2}\right\} \;.\;.\;. (2)$$

Интегралъ (2) имѣетъ конечное значеніе при $a > -1$, $b > -1$. Измѣняя знакъ у b и складывая результатъ съ (2), найдемъ:

$$\log\frac{G(a+b+1)G(a-b+1)}{G^2(1+a)G(1+b)G(1-b)} = \int_0^1 \frac{(1-u^a)(1-u^b)^2}{u^b(1-u)^2\log\frac{1}{u}}du \;.\;.\;. (3)$$

Формула имѣетъ мѣсто, когда

$$a > -1, \qquad 1 > b > -1.$$

Отсюда, полагая

$$a = 1, \qquad u = e^{-x},$$

получаемъ извѣстную формулу:

$$\frac{1}{2} \log \frac{\pi b}{\sin \pi b} = \int_0^\infty \frac{\cosh bx - 1}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Полагая въ (3),

$$b = \frac{1}{2}, \qquad u^{\frac{1}{2}} = x,$$

имѣемъ:

$$\log \frac{\sqrt{\pi}\, G^2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot G^2(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) G^2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \int_0^1 \frac{(1-x^{2a})dx}{(1+x)^2 \log x} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Написавъ въ (1) $a+c$ вмѣсто a и вычтя (1) изъ результата, найдемъ:

$$\log \frac{G(a+1)G(a+b+c+1)}{G(a+b+1)G(a+c+1)} = \int_0^1 \left\{ bc - \frac{u^a(1-u^b)(1-u^c)}{(1-u^2)} \right\} \frac{du}{\log \frac{1}{u}} \quad \ldots \quad (5)$$

но согласно съ (2)

$$\log \frac{G(b+c+1)}{G(b+1)G(c+1)} = \int_0^1 \left\{ bc - \frac{(1-u^b)(1-u^c)}{(1-u)^2} \right\} \frac{du}{\log \frac{1}{u}},$$

а потому, вычитая первый интегралъ изъ второго:

$$\log \frac{G(a+b+1)G(a+c+1)G(b+c+1)}{G(a+1)G(b+1)G(c+1)G(a+b+c+1)} = \int_0^1 \frac{(u^a-1)(u^b-1)(u^c-1)}{(1-u)^2 \log \frac{1}{u}} du \; (6)$$

Измѣнивъ здѣсь a въ $a+d$ и вычтя изъ полученнаго интеграла предыдущій, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\log\frac{G(a+b+1)G(a+c+1)G(a+d+1)G(a+b+c+d+1)}{G(a+b+c+1)G(a+b+d+1)G(a+c+d+1)G(a+1)}=\\ =\int_0^1\frac{u^a(1-u^b)(1-u^c)(1-u^d)}{(1-u)^2\log\frac{1}{u}}du\end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

Продолжая тѣ-же преобразованія, очевидно, будемъ получать аналогичные результаты. Пріемъ, употребленный здѣсь, заимствованъ у Штерна *). Найденные интегралы подобны интеграламъ этого ученаго, но послѣдніе суть частные случаи предыдущихъ, такъ напр., полагая въ (6) $c=1$ и въ (7) $d=1$ въ силу соотношенія

$$G(a+2)=\Gamma(a+1)G(a+1),$$

получимъ послѣдовательно:

$$\log\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}=\int_0^1\frac{(1-u^a)(1-u^b)}{(1-u)\log\frac{1}{u}}du$$

и

$$\log\frac{\Gamma(a+b+c+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+c+1)}=\int_0^1\frac{u^a(1-u^b)(1-u^c)}{(1-u)\log\frac{1}{u}}du.$$

14. Возьмемъ интегралъ

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx.$$

Извѣстно, что

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

Слѣдовательно,

---

*) Ср. *Meyer*, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, стр. 161.

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx = x\log\pi - \int_0^x \log\Gamma(x)dx - \int_0^x \log\Gamma(1-x)dx\,. \quad . \quad (b)$$

Мы имѣли въ § 10 формулу (a):

$$\int_0^x \log\Gamma(x)dx = (x-1)\log\Gamma(x) - \log G(x) - \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Очевидно, что

$$\int_0^x \log\Gamma(1-x) = \int_0^1 \log\Gamma(x)dx - \int_0^{1-x} \log\Gamma(x)dx$$

откуда по предыдущей формулѣ, предполагая $1-x>0$, получимъ

$$\int_0^{1-x} \log\Gamma(x)dx = -x\log\Gamma(1-x) - \log G(1-x) - \frac{x(x-1)}{2} + \frac{1-x}{2}\log 2\pi$$

и

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\log 2\pi\,;$$

поэтому

$$\int_0^x \log\Gamma(1-x)dx = x\log\Gamma(1-x) + \log G(1-x) + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x}{2}\log 2\pi\,.$$

Подставляя найденные результаты въ формулу (b) и принимая въ соображенiе равенство (a), найдемъ:

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx = x\log\frac{\sin\pi x}{2\pi} + \log\frac{G(1+x)}{G(1-x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Полагая $x=\frac{1}{2}$, получимъ извѣстный результатъ:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\sin\pi x dx = -\frac{1}{2}\log 2\,.$$

Извѣстно еще другое значенiе разсматриваемаго интеграла, именно при $x=1$.

Не трудно вывести это изъ формулы (c). Дѣйствительно, правая часть (c) можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$-x\log\Gamma(x)-(x-1)\log\Gamma(2-x)+(x-1)\log(1-x)+\log G(2-x)+$$
$$+\log G(1+x)-x\log 2\,.$$

Полагая теперь $x=1$, получимъ $-\log 2$, т. е.

$$\int_0^1 \log\sin\pi x dx=-\log 2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(d)$$

какъ и должно быть.

Равенство (c) выведено въ предположенiи $x<1$ и мы только что обнаружили, что оно имѣетъ мѣсто при $x=1$. Докажемъ, что уравненiе (c) справедливо при всѣхъ дѣйствительныхъ значенiяхъ x.

Пусть $x>0$ и положимъ, что наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x, есть n, такъ что

$$x=n+z\,,\qquad 1>z>0\,.$$

Замѣтивъ, что при всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ числахъ $\log\sin\pi x$ обращается въ ∞, опредѣлимъ разсматриваемый интегралъ такимъ образомъ:

$$\int_0^{n+z}\log\sin\pi x dx=\lim\left\{\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\eta}^{2-\varepsilon}+\int_{2+\eta}^{3-\varepsilon}+\ldots+\int_{n-1+\eta}^{n-\varepsilon}+\int_{n+\eta}^{n+z}\right\}_{\varepsilon=0,\ \eta=0,}$$

но, полагая $x=n-1+u$, имѣемъ:

$$\int_{n-1+\eta}^{n-\varepsilon}\log\sin\pi x dx=(n-1)\log(-1)\int_\eta^{1-\varepsilon}du+\int_\eta^{1-\varepsilon}\log\sin\pi u du\,.$$

Слѣдовательно,

$$\lim\int_{n-1+\eta}^{n-\varepsilon}\log\sin\pi x dx=(n-1)\log(-1)+\int_0^1\log\sin\pi u du\,.$$

Подобнымъ же путемъ убѣдимся, что

$$\int_{n+\eta}^{n+z}\log\sin\pi x dx=n\log(-1)\int_\eta^z du+\int_\eta^z\log\sin\pi x dx\,,$$

такъ что

$$\lim \int_{n+\eta}^{n+z} \log\sin\pi x dx = nz\log(-1) + \int_0^z \log\sin\pi u du .$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^{n+z} \log\sin\pi x dx = n\int_0^1 \log\sin\pi u du + [nz + 1 + 2 + \ldots + (n-1)]\log(-1) +$$

$$+ \int_0^z \log\sin\pi u du$$

или, принимая въ разсчетъ (d),

$$\int_0^{n+z} \log\sin\pi x dx = -n\log 2 + \left[nz + \frac{n(n-1)}{2}\right]\log(-1) + \int_0^z \log\sin\pi u du \quad . \, . \, (e)$$

Положимъ

$$P(z) = \frac{G(1+z)}{G(1-z)} .$$

Измѣняя z въ $z+1$, имѣемъ:

$$P(z+1) = \frac{G(2+z)}{G(-z)} = \frac{\Gamma(1+z)G(1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(-z)G(-z)} ,$$

т. е.

$$P(z+1) = \Gamma(1+z)\Gamma(-z)P(z) ,$$

что, на основанiи (a), можетъ быть написано еще такъ:

$$P(z+1) = \frac{\pi}{(-1)\sin\pi z} P(z) .$$

Не трудно доказать, что вообще

$$P(z+n) = (-1)^{\frac{-n(n+1)}{2}} \frac{\pi^n}{\sin^n \pi z} P(z) \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (f)$$

По формулѣ (c) можно написать:

$$\int_0^z \log\sin\pi u du = z\log\sin\pi z - z\log 2\pi + \log P(z) \,,$$

или, исключая $\log P(z)$ изъ этого ур. и (f),

$$\int_0^z \log\sin\pi u du = (n+z)\log\sin\pi z - (n+z)\log\pi - z\log 2 + \frac{n(n+1)}{2}\log(-1) +$$
$$+ \log P(z+n) \,.$$

Подставляя этотъ результатъ въ формулу (e), получимъ:

$$\int_0^{n+z} \log\sin\pi x dx = (n+z)\log\sin\pi z - (n+z)\log 2\pi + n(n+z)\log(-1) +$$
$$+ \log P(z+n) \,.$$

Положивъ

$$n + z = x$$

и, чтобы не вводить число $2\log(-1)$, написавъ

$$\sin\pi z = \sin\pi(x-n) = (-1)^{-n}\sin\pi x \,,$$

найдемъ:

$$\int_0^x \log\sin\pi x\, dx = x\log\sin\pi x - x\log 2\pi + \log P(x)$$

или

$$\int_0^x \log\sin\pi x dx = x\log\frac{\sin\pi x}{2\pi} + \log\frac{G(1+x)}{G(1-x)} \,.$$

Распространеніе на отрицательныя значенія x не представляетъ затрудненій. Пусть $x = -a$, тогда

$$\int_0^{-a}\log\sin\pi x dx = -\int_0^{a}[\log(-1)+\log\sin\pi x]dx = -a\log(-1) - \int_0^{a}\log\sin\pi x dx$$

или, по доказанному,

$$\int_0^{-a}\log\sin\pi x dx = -a\log(-1) - a\log\frac{\sin\pi a}{2\pi} - \log\frac{G(1+a)}{G(1-a)},$$

или, имѣя въ виду, что

$$\log(-1)+\log\sin\pi a = \log\sin\pi(-a),$$

$$\int_0^{-a}\log\sin\pi x dx = -a\log\frac{\sin\pi(-a)}{2\pi} + \log\frac{G(1-a)}{G(1+a)},$$

что и требовалось доказать.

Съ помощью указаннаго интеграла можно найти весьма много другихъ, напр.

$$\int_0^{x}\pi x\cot\pi x dx = x\log\sin\pi x - \int_0^{x}\log\sin\pi x dx.$$

Слѣдовательно, пользуясь равенствомъ (c),

$$\int_0^{x}\pi x\cot\pi x dx = x\log 2\pi + \log\frac{G(1-x)}{G(1+x)}.$$

Такъ же просто находятся интегралы, въ предѣлахъ отъ 0 до x, слѣдующихъ функцій:

$$\log\cos x, \qquad \log\operatorname{tg} x,$$

$$x\operatorname{tg} x, \qquad x\operatorname{cosec} x \text{ и др.}$$

15. Функція G можетъ имѣть примѣненіе и въ другихъ случаяхъ. Пусть, напр., требуется опредѣлить функцію $F(x)$, удовлетворяющую равенству

$$F(x+a) = \cos\frac{\pi x}{a}F(x).$$

Взявъ логариѳмы и обозначая разность съ приращеніемъ α знакомъ $\triangle_\alpha$, получимъ:

$$\triangle_\alpha \log F(x) = \log\cos\frac{\pi x}{\alpha}.$$

Извѣстно, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi x}{\alpha}};$$

отсюда

$$\log\cos\frac{\pi x}{\alpha} = \log\pi - \log\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right) - \log\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right),$$

но, очевидно, что

$$\triangle_\alpha \log G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right) = \log\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right),$$

$$\triangle_\alpha G\log\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\alpha}\right) = -\log\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Слѣдовательно,

$$\triangle_\alpha F(x) = \log\pi - \triangle_\alpha \log G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right) + \triangle_\alpha \log G\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\alpha}\right).$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ:

$$F(x) = C.\pi^{\frac{x}{\alpha}}\frac{G\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\alpha}\right)}.$$

16. Извѣстно, что

$$\log\Gamma(x) = \triangle^{-1}\log x, \qquad \log G(x) = \triangle^{-2}\log x$$

гдѣ $\triangle^{-1}$ знакъ конечнаго интеграла въ предѣлахъ отъ 1 до x, $\triangle^{-2} = \triangle^{-1}\triangle^{-1}$. По аналогіи съ предыдущимъ, не трудно догадаться, что функція $G_n(x)$, опредѣляемая изъ уравненія

$$\log G_n(x) = \triangle^{-n} \log x,$$

при условіи

$$\log G_n(1) = 0,$$

должна обладать свойствами, сходными со свойствами функціи $\Gamma(x)$.

Мы не намѣрены здѣсь останавливаться на изслѣдованіи такихъ функцій, но укажемъ только опредѣленный интегралъ, выражающій $\log G_n(x)$. Не трудно видѣть, что

$$\log G_n(x+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u} P_n(x+1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ

$$P_n(x+1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{(n-i)}}{(n-1)!} \frac{1}{(1-e^{-u})^i} + (-1)^{n+1} \frac{x^{-xu}}{(1-e^{-u})^n};$$

при этомъ $x^{(n-i)}$ выражаетъ факторіалъ $(n-i)$-ой степени.

Очевидно, что при $n=1, 2$ интервалъ (a) выражаетъ послѣдовательно:

$$\log G_1(x+1) = \log \Gamma(x+1),$$

$$\log G_2(x+1) = \log G(x+1).$$

Поэтому для доказательства нашего утвержденія достаточно показать, что, при справедливости равенства (a) для n, оно будетъ имѣть мѣсто и для $(n+1)$. Интегрируя (a) въ предѣлахъ отъ нуля до x, получимъ:

$$\log G_{n+1}(x+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u} \triangle^{-1} P_n(x+1),$$

но

$$\triangle^{-1} P_n(x+1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{(n-i+1)}}{(n+1-i)!} \frac{1}{(1-e^{-u})^i} + (-1)^{n+1} \frac{1-e^{-xu}}{(1-e^{-u})^n},$$

или, подводя подъ знакъ суммы предпослѣднее слагаемое,

$$\triangle^{-1} P_n(x+1) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \frac{x^{(n+1-i)}}{(n+1-i)!} \frac{1}{(1-e^{-u})^i} + (-1)^{n+2} \frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^n},$$

или, согласно съ нашимъ обозначеніемъ,

$$\triangle^{-1}P_n(x+1)=P_{n+1}(x+1)\,,$$

и слѣдовательно:

$$\log G_{n+1}(x+1)=\int_0^\infty\frac{e^{-u}du}{u}\,P_{n+1}(x+1)\,,$$

что и требовалось показать.

Доказанной фомулой можно воспользоваться для обнаруженія одного свойства разностныхъ интеграловъ, что мы сдѣлаемъ дальше.

17. По теоремѣ Вейерштрасса функціи можно раздѣлить на три разряда, смотря по виду ихъ разложенія на простые множители. Можно показать, что логариѳмъ всякой функціи двухъ первыхъ разрядовъ, съ *отрицательными* корнями, можетъ быть представленъ опредѣленнымъ интеграломъ.

Положимъ, что $F(x)$ есть функція, всѣ корни которой отрицательны, или же, если они комплексныя количества, то ихъ дѣйствительныя части *отрицательны*. Обоззначимъ корень съ *обратнымъ* знакомъ чрезъ a_k и соотвѣтственный показатель кратности чрезъ p_k.

Если существуетъ такое цѣлое положительное число j (не исключая нуля), при которомъ строка

$$\frac{p_1}{(\mathrm{mod}.\,a_1)^{j+1}}+\frac{p_2}{(\mathrm{mod}.\,a_2)^{j+1}}+\ldots+\frac{p_k}{(\mathrm{mod}.\,a_k)^{j+1}}+\ldots$$

остается сходящеюся, то логариѳмъ данной функціи $F(x)$ можно представить слѣдующей формулой:

$$\log F(x)=\log F(0)+\int_0^x\mathfrak{G}(x)dx+$$

$$+\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{du}{u}\left\{1-\frac{xu}{1}+\frac{x^2u^2}{2\,!}-\ldots+(-1)^j\frac{x^ju^j}{j!}-e^{-xu}\right\},$$

гдѣ $\mathfrak{G}(x)$—конечная функція на всей плоскости, а

$$S(e^{-u})=\sum_{k=1}^\infty p_k e^{-a_k u}\,.$$

По теоремѣ Вейерштрасса, (см. Laurent, Traité d'Analyse, t. III, p. 368 et suiv.),

$$\left.\begin{aligned}\log F(x) = \log F(0) + \int_0^x \mathfrak{G}(x)dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{p_k \log\left(1+\frac{x}{a_k}\right) + p_k\int_0^x \varphi_k(x)dx\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (a)$$

гдѣ

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{a_k} + \frac{x}{a_k^2} - \ldots + (-1)^j \frac{x^{j-1}}{a_k^j},$$

когда $j > 0$; если же $j = 0$, то добавочнаго интеграла отъ φ_k вовсе не существуетъ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы будемъ называть данную функцію *простою*.

Слѣдовательно,

$$\int_0^x \varphi_k(x)dx = -\frac{x}{a_k} + \frac{x^2}{2a_k^2} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j}{ja_k^j}.$$

Не трудно замѣтить, что

$$\frac{x^j}{ja_k^j} = \frac{x^j \Gamma(j)}{j!\, a_k^j} = \frac{x^j}{j!}\int_0^{\infty} e^{-a_k u} u^{j-1} du,$$

а потому

$$\int_0^x \varphi_k(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-a_k u} \frac{du}{u}\left\{-\frac{xu}{1} + \frac{x^2u^2}{2!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j!}\right\}.$$

Далѣе извѣстно, что при высказанныхъ условіяхъ,

$$\log\left(1+\frac{x}{a_k}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a_k u} - e^{-(a_k+x)u}}{u} du,$$

лишь бы только

$$|a_k| + x > 0.$$

Подставляя эти величины подъ знакъ суммы въ (a), получимъ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \int_0^{\infty} e^{-a_k u} \frac{du}{u} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2\,!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j\,!} \right\}$$

или

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{-a_k u} \left\{ 1 - \frac{xu}{1} + \frac{x^2u^2}{2\,!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j\,!} - e^{-xu} \right\} \frac{du}{u}.$$

Полагая теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{-a_k u} = S(e^{-u}),$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \log F(x) = \log F(0) + \int_0^x \mathfrak{G}(x)dx + \\ \int_0^{\infty} S(e^{-u}) \frac{du}{u} \left\{ 1 - xu + \frac{x^2u^2}{2\,!} - \ldots + (-1)^j \frac{x^j u^j}{j\,!} - e^{-xu} \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Такъ какъ въ (a) строка всегда сходящаяся, то и $S(e^{-u})$ должна быть сходящейся строкой; но обратный переходъ, отъ интеграла вида (b) къ (a), возможенъ только тогда, когда остаточный членъ въ формулѣ (b) стремится къ нулю.

Полагая въ (b) $j = 0$, получаемъ интегралъ, соотвѣтствующій простой функціи. Наконецъ, разсуждая по прежнему, убѣдимся, что если $-a_k$ будетъ *полюсъ* функціи $F(x)$, то формула (b) не измѣнится, только послѣдній интегралъ придется взять съ минусомъ.

18. Не трудно замѣтить, что формула Вейерштрасса не измѣняется, если показатели кратности будутъ *дробные*, слѣдовательно, то же справедливо и для (b). Даже можно убѣдиться, что всякой не простой функціи соотвѣтствуетъ *простая* съ тѣми же корнями или полюсами, но показатели кратности которыхъ вообще *дробные*. Дѣйствительно, дифференцируя (a), найдемъ:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \mathfrak{G}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left\{ \frac{1}{a_k + x} + \varphi_k(x) \right\}$$

или, имѣя въ виду, что

$$\frac{1}{a_k+x}+\varphi_k(x)=(-1)^j\frac{x^j}{a_k^j(a_k+x)},$$

найдемъ:

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\mathfrak{G}(x)+(-1)^jx^j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_k^j(a_k+x)}.$$

Полагая

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_k^j(a_k+x)}=\frac{L'(x)}{L(x)},$$

получимъ

$$\log F(x)=\log F(0)+\int_0^x\mathfrak{G}(x)dx+(-1)^j\int_0^x x^j\frac{L'(x)}{L(x)}dx \quad . \quad . \quad (c)$$

и въ то же время

$$\log\frac{L(x)}{L(0)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_k^j}\log\left(1+\frac{x}{a_k}\right).$$

Очевидно, при высказанныхъ раньше условіяхъ, правая часть послѣдней формулы будетъ сходящейся строкой, слѣдовательно $L(x)$ функція конечная и, согласно съ формулой (b), можетъ быть представлена такимъ образомъ:

$$\log\frac{L(x)}{L(0)}=\int_0^{\infty}S_1(e^{-u})\,\frac{1-e^{-xu}}{u}\,du, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

гдѣ

$$S_1(e^{-u})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{a_{kj}}e^{-a_k u}.$$

Дифференцируя (d) и подставляя въ (c), находимъ:

$$\log F(x)=\log F(0)+\int_0^x\mathfrak{G}(x)dx+(-1)^j\int_0^x x^j dx\int_0^{\infty}S_1(e^{-u})e^{-xu}du \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Эта формула представляетъ въ новой формѣ выраженіе $\log F(x)$ посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Примѣняя сказанное къ функціямъ $\Gamma(x)$ и $G(x)$, получимъ:

$$\log G(1+x)=\frac{x}{2}\log 2\pi-\frac{x(x+1)}{2}-\gamma\frac{x^2}{2}-\int_0^x x^2dx\int_0^\infty \log(1-e^{-u})e^{-xu}du,$$

$$\log\frac{1}{\Gamma(x+1)}=\gamma x+\int_0^x xdx\int_0^\infty \log(1-e^{-u})e^{-xu}du,$$

$$\log\frac{L(x)}{L(0)}=-\int_0^\infty \log(1-e^{-u})\frac{1-e^{-xu}}{u}du=-\int_0^x du\int_0^\infty \log(1-e^{-u})e^{-xu}du,$$

$$\frac{L(x)}{L(0)}=\prod_1^\infty\left(1+\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Разумѣется, здѣсь L не то же, что раньше.

19. Положимъ, что $f(x+1)$ есть простая функція съ отрицательными корнями. Не обращая вниманія на часть, не зависящую отъ корней, можно написать:

$$\log f(x+1)=\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{1-e^{-xu}}{u}du. \tag{1}$$

Обозначимъ разностный интегралъ n-го порядка между предѣлами 0 и x чрезъ $\log f_n(x+1)$; тогда, согласно съ выведеннымъ раньше, будемъ имѣть:

$$\log f_n(x+1)=\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{du}{u}\,.\,P_n(x+1), \tag{2}$$

полагая

$$P_n(x+1)=\sum_{i=0}^n(-1)^i\frac{x^{(n-i)}}{(n-i)!}\frac{1}{(1-e^{-u})^i}+(-1)^{n+1}\frac{e^{-xu}}{(1-e^{-u})^n}. \tag{3}$$

Выраженіе (2) можетъ быть преобразовано. По теоремѣ Тейлора:

$$\log f_n(x+a)=\log f_n(a)+\frac{x}{1}\frac{d}{da}\log f_n(a)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\log f_n(a)+\varrho.$$

Опредѣляя ϱ, получимъ:

$$\varrho = \log f_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} \log f_n(a)\,,$$

или, при помощи (1) и (2),

$$\varrho = \int_0^\infty S(e^{-u}) \frac{du}{u} \left\{ P_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} P_n(a) \right\}. \tag{4}$$

Напишемъ уравненіе (3) въ такомъ видѣ:

$$P_n(x+a) = R(x+a) + \frac{(-1)^{(n+1)} e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} e^{-xu}\,;$$

отсюда

$$\frac{d^k P_n(a)}{da^k} = \frac{d^k R(a)}{dx^k} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} (-1)^k u^k\,.$$

Умножая послѣднее равенство на $\frac{x^k}{k!}$, проводя k отъ 0 до n и вычтя результатъ изъ предшествующаго равенства, найдемъ:

$$P_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k P_n(a)}{da^k} = R(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} R(a)$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} \left\{ e^{-xu} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} \right\},$$

но

$$R(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{da^k} R(a) = 0\,,$$

ибо $R(x+a)$ есть цѣлая раціональная функція x n-ой степени, а потому

$$P_n(x+a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k P_n(a)}{da^k} = \frac{(-1)^n e^{-(a-1)u}}{(1-e^{-u})^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\}$$

и слѣдовательно, уравненіе (4) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\varrho=(-1)^n\int_0^\infty S(e^{-u})\,\frac{e^{-(a-1)u}du}{u(1-e^{-u})^n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k u^k}{k!}-e^{-xu}\right\}. \quad . \quad . \quad (5)$$

Легко видѣть, что это преобразованіе имѣетъ мѣсто, когда

$$\left|a_1+a-1\right|>0\,.$$

Итакъ,

$$\left.\begin{aligned}\log f_n(x+a)&=\log f_n(a)+\ldots+\frac{x^n}{k!}\frac{d^n}{da^n}\log f_n(a)+\\&+(-1)^n\int_0^\infty S(e^{-u})\frac{e^{-(a-1)u}du}{u(1-e^{-u})^n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k u^k}{k!}-e^{-xu}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Полагая

$$S(e^{-u})=e^{-u},$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned}\log G_n(x+a)&=\log G_n(a)+\ \ldots\ +\frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\log G_n\,(a)+\\&+(-1)^n\int_0^\infty\frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})^n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k u^k}{k!}-e^{-xu}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Послѣ этихъ предварительныхъ преобразованій можемъ перейти къ разложенію $f_n(x+a)$ на множители.

Разложимъ въ выраженіи (5) $(1-e^{-u})^{-n}$ на множители такимъ образомъ:

$$(1-e^{-u})^{-n}=(1-e^{-u})^{-m}(1-e^{-u})^{-n+m},$$

допуская, что

$$m<n+1\,.$$

Затѣмъ второй изъ нихъ разлагаемъ въ строку по положительнымъ степенямъ e^{-u}, полагая

$$\frac{1}{(1-e^{-u})^{n-m}} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i e^{-iu}.$$

Вслѣдствіе этого выраженіе для ϱ преобразуется въ слѣдующее:

$$\varrho = (-1)^n \sum_{i=0}^{\infty} b_i \int_0^{\infty} \frac{S(-e^{-u}) e^{-(a+i-1)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\}$$

и потому, замѣтивъ, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} +$$

$$+ (-1)^{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \frac{x^{m+1+j} u^{m+1+j}}{(m+1+j)!},$$

найдемъ:

$$\left. \begin{aligned} \varrho = (-1)^n \sum_{i=0}^{\infty} b_i \Bigg[\int_0^{\infty} \frac{S(e^{-u}) e^{-(a+i-1)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\} + \\ + (-1^{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j \frac{x^{m+1+j}}{(m+1+j)!} \int_0^{\infty} \frac{u^{m+j} e^{-(a+i-1)u} S(e^{-u}) du}{(1-e^{-u})^m} \Bigg] \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Ради краткости введемъ слѣдующее обозначеніе:

$$\frac{d}{da} \log f_n(a) = \varphi_n(a).$$

По перемѣнѣ n на m, формула (6) приметъ такой видъ:

$$\log f_m(x+a) = \log f_m(a) + x\varphi_m(a) + \ldots + \frac{x^m}{m!} \varphi_m^{m-1}(a) +$$

$$+ (-1)^m \int_0^{\infty} \frac{S(e^{-u}) e^{-(a-1)u} du}{u(1-e^{-u})^m} \left\{ \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{x^k u^k}{k!} - e^{-xu} \right\}.$$

Дифференцируя это равенство $(m+1+j)$ разъ по x и полагая въ результатѣ $x=0$, найдемъ:

$$\varphi_m^{(m+1+j)}(a)=(-1)^j\int_0^\infty \frac{S(e^{-u})e^{-(a-1)u}u^{m+j}}{(1-e^{-u})^m}\,du.$$

Вслѣдствіе этого, по замѣщеніи въ этихъ равенствахъ a чрезъ $a+i$, получимъ:

$$\varrho=(-1)^{n-m}\sum_{i=0}^{\infty} b_i\left[\log\frac{f_m(x+a+i)}{f_m(a+i)}-x\varphi_m(a+i)-\ldots-\frac{x^n}{n!}\varphi_m^{(n-1)}(a+i)\right].$$

Такимъ образомъ, изъ этой формулы и (6) находимъ, что, когда $n-m$ четное число, то

$$f_n(x+a)=$$

$$=f_n(a)e^{\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)}\prod_{i=0}^{\infty}\left[\frac{f_m(x+a+i)}{f_m(a+i)}\right]^{b_i}e^{-b_i\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_m(a+i)}.$$

Если же $n-m$ нечетное число, то

$$\left.\begin{aligned}&f_n(x+a)=\\&=f_n(a)e^{\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)}\prod_{i=0}^{\infty}\left[\frac{f_m(a+i)}{f_m(x+a+i)}\right]^{b_i}e^{b_i\sum\limits_0^{n=1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_m^j(a+i)}\end{aligned}\right\}(a)$$

т. е. всякая функція $f_n(x+a)$ разлагается на множители, составленные изъ функцій того-же рода, но низшаго порядка.

Можно показать, что всякая функція $f_n(x+a)$ разлагается на множители, составленные изъ функцій подобныхъ функціи $\Gamma(x)$.

Пусть

$$S(e^{-u})=\sum_{l=1}^{\infty} p_l e^{-a_l u}$$

и

$$\frac{S(e^{-u})}{(1-e^{-u})^{n-m}}=\sum p_l b_i e^{-(a_l+i)u};$$

тогда, пользуясь равенствомъ (5), или лучше (8), получимъ:

$$\varrho=(-1)^n \sum p_l b_i \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+a_l+i)u}du}{u(1-e^{-u})^m}\left\{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^k u^k}{k!}-e^{-xu}\right\}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{m+1}\sum_{j=0}^{n-m-1}(-1)^j \frac{x^{m+1-j}}{(m+1-j)!}\int_0^{\infty}\frac{u^{m+j}e^{-(a+a_l+i)u}du}{(1-e^{-u})^m}\right].$$

Отсюда, разсуждая по прежнему, при посредствѣ формулы (7) найдемъ:

$$\log f_n(x+a)=\log f_n(a)+\sum_0^{n-1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)+$$

$$+(-1)^{n-m}\sum p_l b_i\left[\log\frac{G_m(x+a_l+i+a)}{G_m(a+a_l+i)}=\sum_0^{n-1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\Phi_m^j(a+a_l+i)\right]$$

или, если $n-m$ четное,

$$\left.\begin{aligned} f_n(x+a)&=f_n(a)e^{\sum_0^{n-1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)}\,. \\ \prod\left[\frac{G_m(x+a+a_l+i)}{G_m(a+a_l+i)}\right]^{p_l b_i}&e^{-\sum_0^{n-1}p_l b_i\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\Phi_m^j(a+a_l+i)}\end{aligned}\right\}\;..\;(b)$$

гдѣ

$$\Phi_m^j(a)=\frac{d}{da}\log G_m(a)\,.$$

При допущенiи $m=0$ получимъ теорему Вейерштрасса. Дѣйствительно,

$$G_0(x)=x\,,$$

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{x}\,,$$

$$\Phi_0^j(x)=(-1)^j\frac{j!}{x^{j+1}}\,.$$

Слѣдовательно, полагая еще $a=1$ и замѣняя $i+1$ чрезъ i, найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x+1)=f_n(a)e^{\sum\limits_0^{n-1}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\varphi_n^j(a)} \\ \prod\left(1+\frac{x}{a_l+i}\right)^{p_l b_{i-1}}e^{+p_l b_{i-1}\sum\limits_0^{n-1}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\frac{x^{j+1}}{(a_l+i)^{j+1}}} \end{array}\right\}\ldots(c)$$

какъ и должно быть. (Ср. съ формулой (a) и слѣдующей § 17).

20. Разсмотрѣнныя нами функціи, подобныя функціи $\Gamma(x)$, суть частные виды болѣе общихъ. Въ виду связи этихъ функцій съ функціями θ, мы остановимся на выводѣ нѣкоторыхъ свойствъ одной изъ нихъ. Опредѣлимъ функцію, удовлетворяющую равенству

$$H(x+1)=\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)H(x)\,,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

предполагая

$$H(1)=1\,.$$

Очевидно, что при $\alpha=1$ искомая функція совпадаетъ съ $G(x)$.
Если $x>0$ и $\alpha>0$, то

$$\log\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha u}\,du}{u}\left\{\frac{x-\alpha}{\alpha}-\frac{1-e^{-(x-\alpha)u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\}.$$

Взявъ конечный интегралъ этого выраженія отъ 1 до x, найдемъ:

$$\log H(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha u}\,du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha}-\frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}}+\frac{e^{-(1-\alpha)u}-e^{-(x-\alpha)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})}\right\}.\ (2)$$

Докажемъ, что

$$H(x+\alpha)=(2\pi)^{\frac{\alpha-1}{2}}\alpha^{-\frac{2x-1}{2}}\Gamma(x)H(x)\,\ldots\ldots\ldots(3)$$

Не трудно вывести, что

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)}=\int_0^\infty e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\left\{\frac{2x-1-\alpha}{2}-\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha u}}+\frac{e^{-(x-\alpha)}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Вычитая отсюда

$$\log\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{x-1-\frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right\},$$

найдемъ:

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-u}-e^{-\alpha u}}{u}\,du+$$

$$+\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{-\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha u}-\frac{\alpha e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha u}}+\frac{1}{2}e^{-u}+\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Замѣняя первый интегралъ его значеніемъ и прибавляя во второмъ

$$\frac{\alpha}{\alpha u}-\frac{1}{u}=0,$$

дадимъ предыдущей формулѣ видъ:

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\log\alpha+\alpha\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{\alpha u}-\frac{1}{2}e^{-\alpha u}-\frac{e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\}-$$

$$-\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{2}e^{-u}-\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right\},$$

или, замѣняя въ первомъ αu чрезъ u,

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\log\alpha+(\alpha-1)\int_0^\infty\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{2}e^{-u}-\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right\}.$$

Назовемъ оставшійся интегралъ чрезъ y и припомнимъ теорему Коши:

$$\log\Gamma(x)=\frac{1}{2}\log 2\pi-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+\bar{\omega}(x),$$

$$\bar{\omega}(x)=\int_0^\infty e^{-xu}\frac{du}{u}\left\{\frac{2}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right\}.$$

Полагая въ этихъ равенствахъ $x=1$, найдемъ:

$$\bar{\omega}(1)=1-\frac{1}{2}\log 2\pi\,,$$

$$\bar{\omega}(1)=\int_0^\infty e^{-u}\,\frac{du}{u}\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right\}.$$

Складывая интегралы y и $\bar{\omega}$ (1), имѣемъ:

$$y+\bar{\omega}(1)=\int_0^\infty \frac{du}{u}\left\{\frac{1-e^{-u}}{u}-e^{-u}\right\}=\int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{e^{u}-1-u\right\}.$$

Развертывая e^u въ строку, не трудно получить:

$$y+\bar{\omega}(1)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-u}u^{k-2}du=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=1\,.$$

И такъ,

$$y+\bar{\omega}(1)=1\,.$$

Подставляя сюда значеніе $\bar{\omega}$ (1), приведенное выше, найдемъ:

$$y=\frac{1}{2}\log 2\pi\,.$$

Слѣдовательно,

$$\log\frac{H(x+\alpha)}{H(x)\Gamma(x)}=-\frac{2x-1}{2}\log\alpha+\frac{\alpha-1}{2}\log 2\pi\,,$$

что и требовалось доказать.

Полагая въ (1) и (3) $x=\alpha$ и $x=1$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}H(\alpha+1)&=H(\alpha)\\ H(\alpha)&=\alpha^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{\alpha-1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Вслѣдствіе этого соотношенія равенство (3) можно написать въ другомъ видѣ, именно:

$$H(x+\alpha)=H(\alpha)\alpha^{-(x-1)}\Gamma(x)H(x)\,.\quad\ldots\ldots\ (5)$$

Изъ этихъ равенствъ легко получается одинъ извѣстный результатъ.

Полагая, что $\alpha=n$, цѣлому положительному числу, изъ формулы (1) находимъ:

*

$$H(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

но изъ формулы (4):

$$H(n) = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

слѣдовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

21. Между функціями H, при различныхъ значеніяхъ постояннаго α, существуетъ нѣсколько зависимостей.

Во избѣжаніе недоразумѣній мы будемъ означать $H(x)$ при постоянномъ α чрезъ $H(x, \alpha)$.

Если замѣнимъ въ равенствѣ (1) α чрезъ $\frac{1}{\alpha}$, то оно принимаетъ видъ:

$$H\left(x+1, \frac{1}{\alpha}\right) = \Gamma(\alpha x) H\left(x, \frac{1}{\alpha}\right).$$

Въ то же время, подставивъ въ (5) αx вмѣсто x, получимъ:

$$H(\alpha x + \alpha, \alpha) = H(\alpha, \alpha)\alpha^{-(\alpha x-1)}\Gamma(\alpha x) H(\alpha x, \alpha).$$

Логариѳмируя эти два равенства и исключая изъ нихъ $\log\Gamma(\alpha x)$ находимъ разностное уравненіе:

$$\triangle \log H\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) = \triangle \log H(\alpha x, \alpha) + (\alpha x - 1)\log\alpha - \log H(\alpha, \alpha),$$

откуда

$$H\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{H(\alpha x, \alpha)}{H^x(\alpha, \alpha)}\alpha^{\frac{(x-1)(\alpha x-2)}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

или въ другой формѣ:

$$H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{H(x, \alpha)}{H^{\frac{x}{\alpha}}(\alpha, \alpha)}\alpha^{\frac{(x-2)(x-\alpha)}{2\alpha}}.$$

Переходимъ къ выводу другихъ соотношеній.

Измѣнимъ въ (5) x въ $x+1$; тогда

$$H(x+1+\alpha,\alpha)=H(\alpha,\alpha)\alpha^{-x}\Gamma(x+1)H(x+1,\alpha),$$

но, принимая во вниманіе равенство (1), можно предыдущее соотношеніе представить такимъ образомъ:

$$H(x+1+\alpha,\alpha)=H(\alpha,\alpha)\alpha^{-x}x\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)H(x,\alpha)\;.\;\;.\;\;.\quad(7)$$

Если положимъ

$$x=(\alpha+1)z,$$

то послѣднее равенство приметъ видъ разностнаго уравненія, именно:

$$H[(\alpha+1)(z+1),\alpha]=H(\alpha,\alpha)\alpha^{-(\alpha+1)z}(\alpha+1)z\Gamma[(\alpha+1)z]\Gamma\left[\frac{\alpha+1}{\alpha}z\right]H[(\alpha+1)z,\alpha],$$

интегралъ котораго, полагая нижній предѣлъ, равнымъ единицѣ, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$H[(1+\alpha)z,\alpha]=H^{z}(\alpha,\alpha)\alpha^{\frac{-(\alpha+1)z(z-1)}{2}}(\alpha+1)^{z-1}\Gamma(z)H\left(z,\frac{1}{\alpha+1}\right)H\left(z,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\quad(8)$$

или въ иной формѣ:

$$\frac{H(x,\alpha)}{H\left(\frac{x}{\alpha+1},\frac{1}{\alpha+1}\right)H\left(\frac{x}{\alpha+1},\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)}=H^{\frac{x}{\alpha+1}}(\alpha,\alpha)\alpha^{\frac{-x(x-\alpha-1)}{2(\alpha+1)}}(\alpha+1)^{\frac{x-\alpha-1}{\alpha+1}}\Gamma\left(\frac{x}{\alpha+1}\right).$$

Если въ двухъ функціяхъ $H(x,\alpha)$ и $H(x,\beta)$ отношеніе постоянныхъ параметровъ $\frac{\beta}{\alpha}$ есть число соизмѣримое, то каждая изъ нихъ можетъ быть выражена чрезъ другую. Положимъ

$$\beta=\frac{m}{n}\alpha,$$

гдѣ m и n числа цѣлыя и положительныя. По теоремѣ Лежандра:

$$\Gamma\left(\frac{nx}{m\alpha}\right)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}n^{\frac{nx}{m\alpha}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}+\frac{n-1}{n}\right) \qquad (a)$$

Мы знаемъ, что

$$\log H\left(x,\frac{m}{n}\alpha\right)=\Big|_1^x \triangle^{-1}\log\Gamma\left(\frac{nx}{m\alpha}\right),$$

$$\log\frac{H(x+p,m\alpha)}{H(1+p,m\alpha)}=\Big|_1^x \triangle^{-1}\log\Gamma\left(\frac{x+p}{m\alpha}\right),$$

и, полагая въ послѣднемъ равенствѣ

$$p=\frac{mk\alpha}{n},$$

получимъ

$$\log\frac{H\left(x+\frac{km\alpha}{n},m\alpha\right)}{H\left(1+\frac{km\alpha}{n},m\alpha\right)}=\Big|_1^x \triangle^{-1}\log\Gamma\left(\frac{x}{m\alpha}+\frac{k}{n}\right);$$

поэтому разностное интегрированіе равенства (a) даетъ:

$$H\left(x,\frac{m}{n}\alpha\right)=\frac{n^{\frac{(x-1)(nx-m\alpha)}{2m\alpha}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{H\left(x+\frac{km\alpha}{n},m\alpha\right)}{H\left(1+\frac{km\alpha}{n},m\alpha\right)}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \qquad (9)$$

Остается выразить $H(x,m\alpha)$ чрезъ $H(x,\alpha)$.

По опредѣленію (1)

$$H(mz+m,m\alpha)=$$

$$=\Gamma\left(\frac{mz+m-1}{m\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{mz+m-2}{m\alpha}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{mz+1}{m\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{z}{\alpha}\right)H(mz,m\alpha)$$

или иначе

$$\triangle\log H(mz,m\alpha)=\sum_{j=0}^{m-1}\log\Gamma\left(\frac{mz+j}{m\alpha}\right).$$

Отсюда посредствомъ интеграціи отъ $\frac{1}{m}$ до z, находимъ:

$$H(mz, m\alpha) = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{H\left(z + \frac{j}{m}, \alpha\right)}{H\left(\frac{1+j}{m}, \alpha\right)} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Полагая теперь

$$mz = x,$$

имѣемъ:

$$H(x, m\alpha) = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{H\left(\frac{x+j}{m}, \alpha\right)}{H\left(\frac{1+j}{m}, \alpha\right)} \quad \ldots \ldots \quad (10)'$$

Изъ равенствъ (9) и (10)′ уже легко вывести, что

$$H\left(x, \frac{m}{n}\alpha\right) = \frac{n^{\frac{(x-1)(nx-m\alpha)}{2m\alpha}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{H\left(\frac{nx+nj+km\alpha}{mn}, \alpha\right)}{H\left(\frac{n+nj+km\alpha}{mn}, \alpha\right)} \quad \ldots \quad (11)$$

что и оправдываетъ наше предложеніе.

Если параметръ α въ функціи $H(x, \alpha)$ есть число соизмѣримое, то эта функція выражается чрезъ функціи G и Γ различныхъ аргументовъ. Чтобы доказать это, стоитъ только положить въ формулѣ (11) $\alpha = 1$; тогда, имѣя въ виду, что

$$H(x, 1) = G(x),$$

получимъ:

$$H\left(x, \frac{m}{n}\right) = \frac{n^{\frac{(x-1)nx-m)}{2m}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{G\left(\frac{nx+nl+km}{mn}\right)}{G\left(\frac{n+nj+km}{mn}\right)}.$$

Два случая, когда

$$\alpha = n \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{n},$$

заслуживаютъ особаго вниманія. Положимъ въ (9)

$$m\alpha = n;$$

тогда это равенство обратится въ слѣдующее:

$$G(x) = \frac{n^{\frac{(x-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{H(x+k, n)}{H(1+k, n)}.$$

Правая часть этого выраженія легко преобразуется. По формулѣ (1), имѣемъ:

$$H(x+1, n) = \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) H(x, n),$$

$$H(x+2, n) = \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) H(x, n),$$

. . . .

$$H(x+n-1, n) = \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+n-2}{n}\right) H(x, n),$$

поэтому

$$\prod_{k=0}^{n-1} H(x+k, n) = \Gamma^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma^{n-2}\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+n-2}{n}\right) H^n(x, n).$$

Слѣдовательно

$$G(x) = \frac{n^{\frac{(x-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(x-1)}{2}}} \frac{\Gamma^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma^{n-2}\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)} H^n(x, n). \quad (12)$$

Для вывода зависимости, соотвѣтствующей второму случаю, подставимъ теперь nx вмѣсто x, тогда

$$G(nx) = \frac{n^{\frac{(nx-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(nx-1)}{2}}} \frac{\Gamma^{n-1}(x) \Gamma^{n-2}\left(x+\frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(x+\frac{n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)} H^n(nx, n) \quad (12)'$$

Припомнивъ формулу (6), не трудно заключить, что

$$H(nx\,,n)=n^{-\frac{(x-1)(nx-2)}{2}}H^x(n\,,n)H\left(x\,,\frac{1}{n}\right).$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній, найдемъ:

$$G(nx)=n^{\frac{(n-1)(nx-2)}{2}}\frac{\Gamma^{n-1}(x)\Gamma^{n-2}\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^{n-3}\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)}H^n\left(x,\frac{1}{n}\right).$$

Наконецъ, предыдущими результатами можно воспользоваться для вывода формулы умноженія аргумента функціи $G(x)$. Полагая въ (10)

$$a=1\,,\quad m=n\,,\quad z=x$$

это равенство можно написать такимъ образомъ:

$$H(nx\,,n)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{G\left(x+\frac{j}{n}\right)}{G\left(\frac{1+j}{n}\right)}.$$

Подставляя это значеніе H въ выраженіе $(12)'$, получимъ:

$$G(nx)=\frac{n^{\frac{(nx-1)^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(n-1)(nx-1)}{2}}}\frac{\Gamma^{n-1}(x)\Gamma^{n-2}\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-2}{n}\right)}{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{1}\right)}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{G^n\left(x+\frac{j}{n}\right)}{G^n\left(\frac{1+j}{n}\right)}$$

22. До сихъ поръ мы разсматривали функцію H, предполагая, что перемѣнное x и параметръ a количества дѣйствительныя; но это условіе становится излишнимъ, если принять за опредѣленіе нашей функціи то безконечное произведеніе, въ которое оно разлагается.

Примѣняя пріемъ, изложенный въ § 4, и полагая для краткости

$$\frac{d\log H(x)}{dx}=f(x)\,,$$

получимъ:

$$\log H(x+1) = xf(1) + \frac{x^2}{2} f'(1) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-u})(1-e^{-au})}\left\{1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu}\right\}.$$

Сверхъ того, извѣстно, что

$$\log \Gamma\left(\frac{x}{a}+1\right) = \frac{x}{a}\psi(1) + \frac{x^2}{2a^2}\psi'(1) -$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-au}du}{u(1-e^{-au})}\left\{1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu}\right\}.$$

Если вычтемъ эти два выраженія и замѣтимъ, что

$$\frac{H(x+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{a}+1\right)} = \frac{H(x)}{\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-au})} + \frac{e^{-au}}{1-e^{-au}} = \frac{1}{(1-e^{-u})(1-e^{-au})} - 1,$$

то, полагая

$$f(1) + \frac{1}{a}\psi(1) = a,$$

$$\frac{1}{2}\left[f'(1) + \frac{1}{a^2}\psi'(1)\right] = b,$$

будемъ имѣть:

$$\log \frac{H(x)}{\left(\frac{x}{a}\right)} = ax + bx^2 + \int_0^\infty \frac{du}{u}\left\{\frac{1}{(1-e^{-u})(1-e^{-au})} - 1\right\}\left\{1 - xu + \frac{x^2u^2}{2} - e^{-xu}\right\}.$$

Отсюда

$$H(x) = e^{ax+bx^2}\,\frac{x}{a}\prod\left(1+\frac{x}{m+na}\right)e^{-\frac{x}{m+na}+\frac{x^2}{2(m+na)^2}},$$

гдѣ буквамъ m и n приписываются всѣ цѣлыя положительныя значенія отъ 0 до ∞, исключая сочетаніе $m=0$, $n=0$.

Принимая это произведеніе за опредѣленіе функціи $H(x)$ и полагая

$$x=\frac{z}{\omega}, \qquad a=\frac{\omega'}{\omega},$$

гдѣ ω и ω' періоды эллиптическихъ функцій, получимъ:

$$H\left(\frac{z}{\omega}\right)=e^{a\frac{z}{\omega}+b\frac{z^2}{\omega^2}}\frac{z}{\omega'}\prod\left(1+\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right)e^{-\frac{z}{m\omega+n\omega'}+\frac{z^2}{2(m\omega+n\omega')}}.$$

Ясно, что эта функція составлена изъ *четверти* множителей, входящихъ въ составъ функцій σ_3 Вейерштрасса (или θ_1 Якоби), и при томъ она получается изъ σ_3 такъ-же точно, какъ $\frac{1}{\Gamma(z)}$ изъ $\sin\pi z$. Но въ двуперіодическихъ функціяхъ отношеніе $\frac{\omega'}{\omega}$ должно быть мнимымъ или комплекснымъ, тогда какъ для функціи H это условіе вовсе не обязательно.

Функція H аналогична функціи Гейне *), которая составлена изъ *половины* множителей σ_3. Для сличенія приводимъ изъ мемуара Аппеля **), гдѣ онъ занимается обобщеніемъ функціи Гейне, ея выраженіе:

$$\mathrm{O}(x,\ \omega,\ \omega')=e^{a'x^2+b'x+c}\,x\prod\left(1-\frac{x}{m\omega-n\omega'}\right)e^{\frac{x}{m\omega-n\omega'}+\frac{x^2}{2(m\omega-n\omega')^2}},$$

при

$$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots\pm\infty,$$

$$n=0,\ +1,\ +2,\ldots+\infty,$$

исключая комбинацію $m=0$, $n=0$.

Кромѣ указаннаго произведенія за опредѣленіе функціи H можетъ быть принято любое изъ остальныхъ. Такъ, пользуясь способомъ, изложеннымъ въ § 2, не трудно доказать, что

---

*) Handbuch der Kugelfunctionen. стр. 109 или Crelle J. t. 34. стр. 290.

**) Mathematische Annalen. B. 19. стр. 84.

$$H(x) = \left(1+\frac{n}{\alpha}\right)^{\frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha}} \Gamma^{x-1}\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+k}{\alpha}\right)}$$

при $\quad n=\infty$.

Этой формулой можно воспользоваться для доказательства основныхъ свойствъ функціи $H(x)$, но на этомъ мы не станемъ останавливаться.

Любопытно, что функція H можетъ быть представлена еще другимъ произведеніемъ такого-же вида, какъ и приведенное выше.

Обратимся опять къ интегралу (2):

$$\log H(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}} + \frac{e^{-(1-\alpha)u} - e^{-(x-\alpha)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})}\right\}.$$

Вычтя изъ обѣихъ частей этого равенства слѣдующее:

$$(x-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (x-1)\int_0^\infty e^{-\alpha u}\frac{du}{u}\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{1-e^{-(1-\alpha)u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\},$$

найдемъ

$$\log H(x) - (x-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^\infty \frac{du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2\alpha)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}}\, e^{-u} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-u} - e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})}\right\};$$

отсюда же, добавивъ предварительно въ скобкахъ

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}e^{-u} - \frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}e^{-u} = 0,$$

получимъ:

$$\log H(x) - (x-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}\log\alpha = \log J(x),$$

полагая

$$\log J(x) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{-\alpha u}} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{-\alpha u})}\right\} (a)$$

Разлагая этотъ интегралъ въ безконечную сумму опять такъ-же, какъ въ § 2, съ той только разницей, что всѣ члены умножаются на

$$1-e^{-n\alpha u}+e^{-n\alpha u},$$

и замѣтивъ, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{u}\left\{\frac{x-1}{\alpha} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{1-e^{-\alpha u}}\right\} = \log\left\{\alpha^{x-1}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}, \ . \ . \ . \ (b)$$

найдемъ:

$$J(x) = \alpha^{n(x-1)}(1+n\alpha)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}}\frac{\Gamma^{x-1}\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)}{\Gamma^{x-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(x+k\alpha)}.$$

Слѣдовательно,

$$H(x) = \alpha^{n(x-1)}\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)^{\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha}}\Gamma^{x-1}\left(\frac{1}{\alpha}+n\right)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(x+k\alpha)},$$

при $n=\infty$.

При выводѣ этихъ формулъ предполагалось, что $\alpha > 0$. Однако, интегралъ (a) остается конечнымъ, когда $\alpha < 0$; поэтому казалось бы, что выведенное произведеніе имѣетъ мѣсто и при этомъ условіи, но легко убѣдиться въ неправильности такого вывода. Дѣло въ томъ, что интегралы, при помощи которыхъ совершается переходъ отъ равенства (a), къ безконечному произведенію, въ этомъ случаѣ обращаются въ ∞, и, слѣдовательно, выводъ произведенія долженъ быть сдѣланъ иначе.

Чтобы составить себѣ понятіе о томъ, что выражаетъ формула (a) въ данномъ случаѣ, удобнѣе поступать слѣдующимъ образомъ.

Если перемѣнимъ знакъ у α въ интегралѣ (a), то онъ приметъ видъ:

$$\log J_1(x) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{u}\left\{-\frac{(x-1)(x-2)}{2\alpha} - \frac{x-1}{1-e^{+\alpha u}} + \frac{1-e^{-(x-1)u}}{(1-e^{-u})(1-e^{+\alpha u})}\right\}.$$

Складывая это выраженіе съ прежнимъ (a), находимъ:

$$\log J(x) J_1(x) = -\int_0^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} \left\{ x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)u}}{1 - e^{-u}} \right\} = -\log \Gamma(x)\,.$$

Отсюда

$$J_1(x) = \frac{1}{J(x)\Gamma(x)}\,.$$

Аналогичнымъ этому свойствомъ обладаютъ многіе интегралы, въ томъ числѣ интегралъ (b).