Объ интерполированіи нѣкоторыхъ произведеній *).

В. А. Стеклова.

Обозначимъ черезъ

$$\prod_{\alpha+k\beta}$$

произведеніе вида

$$(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)\ \ldots.\ (\alpha+k\beta)\,.$$

Интерполированіе этого произведенія, а также произведеній вида

$$\prod_{\alpha-k\beta}\,, \qquad \prod_{\alpha-k^2\beta}\,, \qquad \prod_{\alpha+k^2\beta}\,,$$

можно произвести, основываясь на нѣкоторыхъ свойствахъ функціи $\Gamma(x)$.

Какъ извѣстно,

$$\log\Gamma(x)=\sum_1^{\infty}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right]$$

или

$$\left.\begin{aligned}\log\Gamma(x)=&\sum_1^{k}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right]+\\ &+\sum_{k+1}^{\infty}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].\end{aligned}\right\}\ .\ .\ \ (\mathrm{I})$$

*) См. въ этомъ же томѣ „Сообщеній Х. М. О.“ статью *И. И. Иванова* „Объ интерполированіи двухъ произведеній“ стр. 78—81.

Пусть

$$\log\psi(x) = \sum_{k+1}^{\infty}\left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\};$$

это выраженіе стремится къ нулю по мѣрѣ возрастанія m.

При этомъ

$$\log\psi(x) = \sum_{k+1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{x-1}{2m^2} + \dfrac{x-1}{3m^3} - \ldots. \\ +\dfrac{(x-1)^2}{2m^2} - \dfrac{(x-1)^3}{3m^3} + \ldots. \end{array}\right\}$$

Если $0 < x-1 < 1$ и m достаточно велико, то

$$\left.\begin{array}{l} \log\psi(x) > -\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2m^2} \\ \text{и} \\ \log\psi(x) < -\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2m^2} + \sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)-(x-1)^3}{3m^3}, \end{array}\right\}\ldots(\alpha)$$

если же $x-1 > 1$ и m достаточно велико, то

$$\left.\begin{array}{l} \log\psi(x) < \displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)^2-(x-1)}{2m^2} \\ \text{и} \\ \log\psi(x) > \displaystyle\sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)^2-(x-1)}{2m^2} - \sum_{k+1}^{\infty}\frac{(x-1)^3-(x-1)}{3m^3}. \end{array}\right\}\ldots(\beta)$$

Замѣтивъ, что

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \frac{1}{k}, \qquad \sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} > \frac{1}{k+1}$$

и

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^3} < \frac{1}{k(k+1)}\ ^{*)},$$

---

*)

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \ldots. < \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots = \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \ldots > \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \ldots = \frac{1}{k+1}$$

получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}\log\psi(x) &> -\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2k}\\ \log\psi(x) &< -\frac{(x-1)-(x-1)^2}{2(k+1)}+\frac{(x-1)-(x-1)^3}{3k(k+1)}\end{aligned}\right\}\ldots.(\alpha_1)$$

при $x-1<1$

и

$$\left.\begin{aligned}\log\psi(x) &< \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2k}\\ \log\psi(x) &> \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2(k+1)}-\frac{(x-1)^3-(x-1)}{3k(k+1)}\end{aligned}\right\}\ldots.(\beta_1)$$

при $x-1>1$.

Для перваго случая $(x-1<1)$

$$\log\Gamma(x)>\sum_1^k\left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\}-\frac{(x-1)(2-x)}{2k},$$

$$\log\Gamma(x)<\sum_1^k\left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\}-$$

$$-\frac{(x-1)(2-x)}{2(k+1)}+\frac{(x-1)(2-x)x}{3k(k+1)},$$

а переходя отъ логариѳма къ числу,

$$\Gamma(x)>\frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{x-1}}{(k+x-1)(k+x-2)\ldots x}e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2k}},$$

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^3}=\frac{1}{(k+1)^3}+\frac{1}{(k+2)^3}+\ldots.<\frac{1}{k(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)^2}+\ldots,$$

но

$$\frac{1}{k(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)^2}+\ldots=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\frac{1}{k+2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{k}-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)},$$

такъ что

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^3}<\frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\Gamma(x) < \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{x-1}}{(k+x-1)(k+x-2)\ldots x} e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}}.$$

Положивъ

$$x = 1 + \frac{\alpha}{\beta}, \text{ причемъ } \frac{\alpha}{\beta} < 1,$$

будемъ имѣть

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2k}},$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}}.$$

Принявъ же во вниманіе неравенства Стирлинга

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(k+1) &> \sqrt{2\pi}\, e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}} \\ \Gamma(k+1) &< \sqrt{2\pi}\, e^{-k+\frac{1}{12k}} k^{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots (a)$$

получимъ:

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\sqrt{2\pi} e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}} (k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2k}}, \quad \ldots\ldots (b)$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\sqrt{2\pi} e^{-k+\frac{1}{12k}} k^{k+\frac{1}{2}} (k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}} \quad \ldots (c)$$

Вычисленіе $\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ производится по формулѣ

$$\log \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{\pi \frac{\alpha}{\beta}}{\sin \frac{\pi\alpha}{\beta}} - \frac{1}{2} \log \frac{\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)} + (1-C)\frac{\alpha}{\beta} -$$

$$-(S_3-1)\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3}{3} - (S_5-1)\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^5}{5} \ldots\ldots - (S_{2n+1}-1)\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+1}}{2n+1},$$

гдѣ вообще

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots .$$

Если черезъ Γ обозначимъ истинное значенiе Γ, то вычисленное будетъ $\Gamma + k$, гдѣ k достаточно малая величина. Всегда можно вычислить $\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ съ такой точностью, что неравенства (b) и (c) не нарушатся, для чего необходимо, чтобы

$$\frac{\psi}{\Gamma} < \frac{\psi + k_1}{\Gamma + k},$$

гдѣ

$$\psi + k_1 = e^{-\frac{\alpha(\beta-\alpha)}{\beta^2 2(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}},$$

или

$$\frac{k}{\Gamma} < \frac{k_1}{\psi},$$

неравенство, которое всегда можетъ быть удовлетворено.

Отношенiе предѣловъ неравенствъ (b) и (c) равно

$$e^{\frac{1}{12k} + \frac{\alpha(\beta-\alpha)}{2\beta^2 k(k+1)} + \frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{\beta^3 3k(k+1)}}$$

и стремится къ единицѣ по мѣрѣ возрастанiя k.

Напр. при $\alpha = 1$, $\beta = 6$ и $k = 10$ оно равно $1,0094$,

при $\alpha = 1$, $\beta = 6$ и $k = 50$ „ $1,0017$.

Въ случаѣ $x - 1 > 1$ на основанiи неравенствъ (β_1) и формулы (I) получимъ:

$$\log\Gamma(x) < \sum_1^k \left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\} + \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2k},$$

$$\log\Gamma(x) > \sum_1^k \left\{(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{(x-1)^2-(x-1)}{2(k+1)} - \frac{(x-1)^3-(x-1)}{3k(k+1)},$$

откуда, разсуждая подобно предыдущему, находимъ:

*

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2k}}, \quad \ldots\ldots (e)$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}}\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2(k+1)} - \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^2 k(k+1)}}, \quad \ldots (f)$$

и, наконецъ, въ силу неравенствъ (a):

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{\sqrt{2\pi} e^{-k+\frac{1}{12k}} k^{k+\frac{1}{2}} (k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta^k e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2\beta^2 k}}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}, \quad \ldots (e_1)$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{\sqrt{2\pi} e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}} (k+1)^{\frac{\alpha}{\beta}} \beta^k e^{\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta^2 2(k+1)} - \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^2 k(k+1)}}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)} \quad \ldots (f_1)$$

Отношеніе предѣловъ равно

$$e^{\frac{1}{12k} + \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2\beta^2 k(k+1)} + \frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3\beta^3 k(k+1)}}$$

и стремится къ единицѣ по мѣрѣ возрастанія k. При этомъ оно тѣмъ ближе къ 1, чѣмъ ближе къ единицѣ отношеніе $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Вычисленіе $\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)$ можетъ быть сведено на вычисленіе $\Gamma(1+\delta)$, гдѣ $\delta < 1$, при помощи извѣстной зависимости $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, и произведено съ такою точностью, что неравенства (e_1) и (f_1) не нарушатся.

Какъ упомянуто выше, исходя изъ формулы (I), можно получить интерполяціонныя формулы для произведеній

$$\prod_{\alpha-k\beta}, \qquad \prod_{\alpha-k^2\beta} \quad \text{и} \quad \prod_{\alpha+k^2\beta}.$$

Разсмотримъ послѣдній случай.

Выраженіе (I) справедливо и для комплексныхъ значеній аргумента $\Gamma(x)$. Такъ какъ

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{x-1}}{(k+x-1)(k+x-2)\ldots x}\,\psi,$$

то, полагая сначала $x=1+\frac{\alpha}{i\beta}$, потомъ $x=1-\frac{\alpha}{i\beta}$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$ и $\frac{\alpha}{\beta}<1$, будемъ имѣть:

$$\Gamma\left[1+\frac{\alpha}{i\beta}\right]=\frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{\frac{\alpha}{i\beta}}(i\beta)^k}{\prod_{\alpha+i\beta k}}\psi$$

и

$$\Gamma\left[1-\frac{\alpha}{i\beta}\right]=\frac{\Gamma(k+1)(k+1)^{-\frac{\alpha}{i\beta}}(i\beta)^k}{\prod_{i\beta k-\alpha}}\psi_1,$$

откуда

$$\prod_{\alpha+i\beta k}\prod_{i\beta k-\alpha}=\frac{[\Gamma(k+1)]^2(-\beta^2)^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)}\psi\psi_1\;.\;.\;.\;.\;.\;(g)$$

Но

$$\psi=\prod_{k+1}^{\infty}\frac{(m+1)^{\frac{\alpha}{i\beta}}m}{m^{\frac{\alpha}{i\beta}}\left(m+\frac{\alpha}{i\beta}\right)}\quad\text{и}\quad\psi_1=\prod_{k+1}^{\infty}\frac{(m+1)^{-\frac{\alpha}{i\beta}}m}{m^{-\frac{\alpha}{i\beta}}\left(m-\frac{\alpha}{i\beta}\right)},$$

такъ что

$$\psi\psi_1=\prod_{k+1}^{\infty}\frac{m^2}{m^2+\frac{\alpha^2}{\beta^2}}=\prod_{k+1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{\beta^2m^2}},$$

откуда

$$\log\psi\psi_1=-\sum_{k+1}^{\infty}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2m^2}\right)=\sum_{k+1}^{\infty}\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2m^2}+\frac{\alpha^4}{\beta^4m^4}\frac{1}{2}-\ldots\right).$$

Слѣдовательно,

$$\psi\psi_1>e^{-\sum\limits_{k+1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\beta^2m^2}}$$

и

$$\psi\psi_1<e^{-\sum\limits_{k+1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\beta^2m^2}+\frac{1}{2}\sum\limits_{k+1}^{\infty}\frac{\alpha^4}{\beta^4m^4}},$$

но

$$\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^4}<\frac{1}{k^2}\ {}^{*)},$$

а потому

$$\left.\begin{aligned}\psi\psi_1 &> e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^{2k}}}\\ \psi\psi_1 &< e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2(k+1)}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{\beta^4k^2}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Такъ какъ

$$\prod_{i\beta k+\alpha}\prod_{i\beta k-\alpha}=\pm\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2},$$

смотря по тому четное или нечетное k, то на основанiи формулы (g) и неравенствъ (h) получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\prod_{\alpha^2+k^2\beta_2} &> \frac{[\Gamma(k+1)]^2\beta^{2k}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)}e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^{2k}}}\\ \prod_{\alpha^2+k^2\beta^2} &< \frac{[\Gamma(k+1)]^2\beta^{2k}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)}e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2(k+1)}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{\beta^4k^2}}\end{aligned}\right\}\ldots (k)$$

но

$$\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{i\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{i\beta}\right)=\frac{\frac{\pi\alpha}{i\beta}}{\sin\frac{\pi\alpha}{i\beta}}=\frac{\pi\alpha}{\beta\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta}}=\frac{2\pi\alpha}{\beta\left(e^{\frac{\pi\alpha}{\beta}}-e^{-\frac{\pi\alpha}{\beta}}\right)},$$

а потому, принявъ въ соображенiе неравенства (α), получаемъ:

$$\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2}>\frac{2e^{-2k}k^{2k+1}\beta^{2k+1}e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\frac{1}{k}}}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta}$$

$$\prod_{\alpha^2+k^2\beta^2}<\frac{2e^{-2k+\frac{1}{6k}}k^{2k+1}\beta^{2k+1}e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4\frac{1}{k^2}}}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{\beta}.$$

---

*) $\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{1}{(k+1)^4}+\frac{1}{(k+2)^4}+\ldots<\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^2+\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)^2+\ldots=$

$=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)^2+\ldots<\frac{1}{k^2}.$

Положивъ $\alpha^2=\alpha_1$ и $\beta^2=\beta_1$ и затѣмъ опуская значки, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{\alpha+k^2\beta} > \frac{2e^{-2k}k^{2k+1}\beta^{k+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{k}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sh}\pi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\prod_{\alpha+k^2\beta} < \frac{2e^{-2k+\frac{1}{6k}}k^{2k+1}\beta^{k+\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\frac{1}{k^2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sh}\pi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\}\ldots (l)$$

Отношеніе предѣловъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, тѣмъ ближе къ единицѣ, чѣмъ менѣе $\frac{\alpha}{\beta}$ и болѣе k.

Интерполированіе нѣкоторыхъ изъ разсмотрѣнныхъ выше произведеній можетъ быть произведено значительно проще и точнѣе на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Такъ какъ при всякомъ x

$$(1+x)\Gamma(1+x)=\Gamma(2+x),$$

$$(2+x)\Gamma(2+x)=\Gamma(3+x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k+x)\Gamma(k+x)=\Gamma(k+1+x),$$

то

$$\prod_{(k+x)}=\frac{\Gamma(k+1+x)}{\Gamma(1+x)}.$$

Отсюда, полагая

$$x=+\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{и} \quad x=-\frac{\alpha}{\beta},$$

получимъ въ лѣвой части равенства соотвѣтственно

$$\frac{1}{\beta^k}\prod_{\alpha+\beta k} \quad \text{и} \quad (-1)^k\frac{1}{\beta^k}\prod_{\alpha-\beta k}.$$

Останавливаясь на первомъ случаѣ, имѣемъ:

$$\prod_{\alpha+k\beta}=\frac{\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta^k}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ (m)$$

Такъ какъ

$$\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{\beta}\right)>\sqrt{2\pi}\; e^{-\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{\beta}\right)<\sqrt{2\pi}\; e^{-\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{1}{12\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)}}\left(k+\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}},$$

то, положивъ $\frac{\alpha}{\beta}=p$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\prod_{\alpha+k\beta} &> \frac{\sqrt{2\pi}\; e^{-(k+p)}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{\Gamma(1+p)}\\ \prod_{\alpha+k\beta} &< \frac{\sqrt{2\pi}\; e^{-(k+p)+\frac{1}{12(k+p)}}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{\Gamma(1+p)}\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;(n)$$

Отношеніе предѣловъ равняется $e^{\frac{1}{12(k+p)}}$ и стремится къ 1 по мѣрѣ возрастанія k. Вычисленіе $\Gamma(1+p)$ приводится къ вычисленію $\Gamma(1+p_1)$ гдѣ $p_1<1$, которое можетъ быть произведено съ такою точностью, что неравенства (n) не нарушатся. Если p достаточно велико, то и для $\Gamma(1+p)$ можно воспользоваться неравенствами Стирлинга, такъ что

$$\prod_{\alpha+k\beta} > \frac{e^{-(k+p)}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{e^{-p+\frac{1}{12p}}p^{p+\frac{1}{2}}},$$

$$\prod_{\alpha+k\beta} < \frac{e^{-(k+p)+\frac{1}{12(k+p)}}(k+p)^{k+p+\frac{1}{2}}\beta^k}{e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Подобнымъ же образомъ нетрудно получить интерполяціонныя формулы и для произведеній

$$\prod_{\alpha-k\beta},\quad \prod_{\alpha-k^2\beta}.$$