Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей.

В. Г. Имшенецкаго.

Во II т. Сборника Моск. Матем. Общ. за 1867 г. *П. Л. Чебышевъ* предложилъ доказательство одной общей теоремы *о среднихъ величинахъ*, частнымъ приложеніемъ которой является *законъ большихъ чиселъ* и частный случай этого послѣдняго, *теорема Я. Бернулли*.

Доказательство этого общаго предложенія можетъ быть упрощено, если цѣль его ограничить только выводомъ теоремы Бернулли, какъ это и было показано въ лекціяхъ *В. П. Ермакова*, (изд. въ 1879 г. въ Кіевѣ).

Въ сообщаемой ниже замѣткѣ имѣется въ виду показать, что при надлежащемъ обобщеніи пріема доказательства, которымъ пользовался проф. Ермаковъ, получается прямой и весьма простой выводъ закона большихъ чиселъ.

Пусть нѣкоторый опытъ повторяется m разъ, приводя каждый разъ къ одному изъ двухъ противоположнымъ событій E или F.

Положимъ, что соотвѣтственныя вѣроятности появленія событій E и F будутъ: p_1 и q_1 въ первомъ опытѣ, p_2 и q_2 во второмъ и т. д., такъ что мы будемъ имѣть:

$$p_1+q_1=1\,,\quad p_2+q_2=1\,,\ \ldots\ p_m+q_m=1\,.$$

Составивъ цѣлую функцію отъ x,

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\ \ldots\ (p_mx+q_m)=\\ &=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0\,, \end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (1)$$

не трудно заключить, что въ ней вообще коэффиціентъ a_i степени x^i, при всѣхъ значеніяхъ $i=0, 1, \dots m$, выражаетъ вѣроятность, что въ теченіе m упомянутыхъ опытовъ событіе E произойдетъ i разъ, чередуясь въ какой-либо послѣдовательности съ $m-i$ событіями F.

Слѣдовательно, означая черезъ P вѣроятность, что въ теченіе тѣхъ же m опытовъ событіе E произойдетъ, въ какомъ-либо порядкѣ, не менѣе h разъ и не болѣе $k>h$ разъ, будемъ имѣть

$$P=a_h+a_{h+1}+\dots+a_{k-1}+a_k.$$

Теперь ясно, что

$$P<\sum_{i=0}^{m} a_i = f(1) = 1,$$

и далѣе имѣется въ виду вывести надлежащее выраженіе низшаго предѣла величины P.

Съ этой цѣлью полагая $h=\alpha-\beta$, $k=\alpha+\beta$, имѣемъ

$$P=\sum_{i=\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} a_i\,, \quad \dots \dots \quad (2)$$

гдѣ

$$\alpha-\beta \overline{\overline{<}}\, i \,\overline{\overline{<}}\, \alpha+\beta$$

и слѣдовательно

$$-\beta \overline{\overline{<}}\, i-\alpha \,\overline{\overline{<}} +\beta.$$

Можно сказать поэтому, что во всѣхъ членахъ суммы (2) указатель i необходимо долженъ удовлетворять одному изъ двухъ условій:

$$\frac{(i-\alpha)^2}{\beta^2} \overline{\overline{<}}\, 1. \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Далѣе, черезъ вычитаніе равенства (2) изъ

$$1=\sum_{i=0}^{m} a_i$$

находимъ

$$1-P=\sum_{i=0}^{\alpha-\beta-1}a_i+\sum_{i=\alpha+\beta+1}^{m}a_i \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (4)$$

Въ обѣихъ суммахъ второй части (4) указатель i, очевидно, не выполняетъ условій (3), слѣдовательно въ нихъ число i должно подчиняться противоположному условію

$$\frac{(i-\alpha)^2}{\beta^2}>1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (5)$$

Вслѣдствіе же неравенства (5), существующаго вмѣстѣ съ равенствомъ (4), это послѣднее легко превращается въ слѣдующее неравенство

$$1-P<\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=0}^{\alpha-\beta-1}(i-\alpha)^2 a_i+\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=\alpha+\beta+1}^{m}(i-\alpha)^2 a_i \, .$$

Придавъ сумму

$$\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}(i-\alpha)^2 a_i$$

ко второй большей части послѣдняго неравенства, мы увеличимъ ее еще болѣе и, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$1-P<\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=0}^{m}(i-\alpha)^2 a_i$$

или

$$1-P<\frac{1}{\beta^2}\left\{\alpha^2\sum_{i=0}^{m}a_i-2\alpha\sum_{i=0}^{m}ia_i+\sum_{i=0}^{m}i^2a_i\right\} \; . \; . \; . \qquad (6)$$

Во второй части неравенства (6) одна изъ трехъ входящихъ въ нее суммъ извѣстна, именно

$$\sum_{i=0}^{m}a_i=1\, ;$$

*

остается поэтому найти значенія остальныхъ двухъ суммъ:

$$\sum_{i=0}^{m} i a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{m} i^2 a_i.$$

Изъ опредѣленія (1) функціи $f(x)$ выводимъ двоякія выраженія ея двухъ послѣдовательныхъ производныхъ:

$$f'(x) = f(x) \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i x + q_i} = \sum_{i=0}^{m} i a_i x^{i-1}$$

и

$$f''(x) = f(x) \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i x + q_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^2}{(p_i x + q_i)^2} \right\} = \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\, a_i x^{i-2}$$

Если сдѣлаемъ въ этихъ двухъ равенствахъ перемѣнную $x = 1$, то изъ нихъ легко выведемъ

$$\sum_{i=0}^{m} i a_i = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

и

$$\sum_{i=0}^{m} i^2 a_i = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{m} p_i^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i.$$

Послѣ введенія найденныхъ значеній суммъ Σa_i, $\Sigma i a_i$, $\Sigma i^2 a_i$, неравенство (6) получитъ слѣдующій видъ

$$1 - P < \frac{1}{\beta^2} \left\{ \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} p_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i (1 - p_i) \right\}$$

Отсюда и принимая во вниманіе, что $1 - p_i = q_i$ и $P < 1$, заключаемъ

$$1 > P > 1 - \frac{\left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} p_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} p_i q_i}{\beta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Такимъ образомъ получены границы, между которыми заключена величина P вѣроятности, что при m опытахъ событіе E произойдетъ вообще такое число разъ i, которое удовлетворитъ условіямъ

$$\alpha-\beta\leqq i\leqq\alpha+\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Но, располагая произвольно числами α и β, можно положить

$$\alpha=mp \quad \text{и} \quad \beta=mr,$$

означая черезъ p и $r<p$ правильныя дроби.

Поэтому можно допустить, что p есть средняя ариѳметическая простыхъ вѣроятностей $p_1, p_2, \ldots, p_m$ событія E въ различныхъ опытахъ, т. е. положить

$$p=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_i.$$

Кромѣ того, если положимъ

$$\sum_{i=1}^{m}p_iq_i=q\sum_{i=1}^{m}p_i=mpq,$$

то q будетъ заключаться между наибольшей и наименьшей изъ величинъ $q_1, q_2, \ldots, q_m$, т. е. будетъ нѣкоторой средней изъ простыхъ вѣроятностей событія F въ различныхъ опытахъ.

При упомянутыхъ предположеніяхъ изъ (7) и (8) получимъ:

$$1>P>1-\frac{pq}{mr^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

и

$$-r\leqq\frac{i}{m}-p\leqq r. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Принявъ въ соображеніе, что p и q меньше единицы (какъ соотвѣтственныя среднія величины между $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n$), что r сколько угодно малая, но постоянная, величина и, наконецъ, что число опытовъ m можно предполагать сколько угодно большимъ, мы окончательно заключаемъ:

Неравенства (9) показываютъ, что при достаточно большомъ числѣ опытовъ (m) становится сколько угодно близкой къ единицѣ (достовѣрности) вѣроятность (P) существованіе неравенствъ (10), показывающихъ, что отношеніе числа (i) появленія событія (E) къ числу (m) всѣхъ опытовъ будетъ разниться отъ средней ариѳметической (p) простыхъ вѣроятностей этого событія (E) въ отдѣльныхъ опытахъ, меньше чѣмъ на какую-либо данную малую величину (r).

Это предложеніе и выражаетъ, какъ извѣстно, такъ называемый законъ большихъ чиселъ, который въ частномъ случаѣ, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_m$ и $q_1 = q_2 = \ldots = q_m$, даетъ теорему Я. Бернулли.