О постоянныхъ винтовыхъ движенiяхъ твердаго тѣла въ жидкости.

А. М. Ляпунова.

1. Выводя при извѣстныхъ предположенiяхъ [1]) дифференцiальныя уравненiя движенiя твердаго тѣла въ неограниченной жидкости, Кирхгофъ обращаетъ между прочимъ вниманiе на одинъ частный случай движенiя, который имѣетъ мѣсто въ предположенiи, что на тѣло и жидкость не дѣйствуютъ силы. А именно, онъ показываетъ, что для всякаго тѣла существуютъ вообще три взаимно перпендикулярныя направленiя, по которымъ оно можетъ двигаться поступательно и равномѣрно. Направленiя эти опредѣляются, какъ направленiя осей нѣкотораго эллипсоида.

Впослѣдствiи замѣчено, что эти постоянныя поступательныя движенiя твердаго тѣла въ жидкости суть частные случаи безконечнаго ряда постоянныхъ движенiй общаго характера, т. е. винтовыхъ съ неподвижною винтовою осью и съ постоянными угловою скоростью и шагомъ винтоваго движенiя. На существованiе этихъ постоянныхъ винтовыхъ движенiй было указано между прочимъ Ламбомъ въ его „A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids", гдѣ онъ подробнѣе разбираетъ тотъ частный случай, когда все движенiе происходитъ вслѣдствiе приложенiя къ тѣлу нѣкоторой пары импульсовъ.

Предпринимая настоящее изслѣдованiе, мы имѣли въ виду главнымъ образомъ рѣшенiе вопроса объ устойчивости этихъ постоянныхъ движенiй, ибо вопросъ этотъ, сколько намъ извѣстно, еще не былъ рѣшенъ

[1]) Жидкость предполагается идеальною и при томъ—однородною несжимаемою, а движенiе ея—непрерывнымъ съ однозначнымъ потенцiаломъ скоростей. Кромѣ того, предполагается, что, съ безпредѣльнымъ удаленiемъ отъ тѣла по всякому направленiю, скорости точекъ жидкости приближаются къ нулю. При этихъ предположенiяхъ движенiе жидкости вполнѣ опредѣляется движенiемъ находящагося въ ней тѣла.

въ достаточно общей формѣ, [1]) а между тѣмъ, представляя хорошій примѣръ для общей теоріи устойчивости движенія, онъ заслуживаетъ, по нашему мнѣнію, нѣкотораго вниманія.

Начнемъ съ вывода формулъ, служащихъ для опредѣленія разсматриваемыхъ движеній.

2. Принимая за координатныя оси какія-либо три взаимно перпендикулярныя направленія, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, назовемъ черезъ u, v, w проэкціи на эти оси скорости начала координатъ, а черезъ p, q, r проэкціи на тѣ-же оси угловой скорости тѣла. Тогда въ предположеніи, что на тѣло и жидкость не дѣйствуютъ силы, дифференціальныя уравненія движенія тѣла будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q},
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ T живая сила въ совмѣстномъ движеніи твердаго тѣла и жидкости. Это есть однородная цѣлая функція второй степени величинъ u, v, w, p, q, r, въ которой коэффиціенты зависятъ отъ плотности жидкости, отъ вида поверхности тѣла и отъ распредѣленія въ немъ матеріи. Для послѣдующаго полезно поставить на видъ, что функція эта сохраняетъ положительныя значенія для всякихъ вещественныхъ значеній ея аргументовъ, обращаясь въ нуль, только когда послѣдніе одновременно обращаются въ нуль; и при общемъ изслѣдованіи мы должны ее предполагать функціей этого рода самаго общаго вида.

Легко убѣдиться, что уравненіямъ (1) всегда можно удовлетворить постоянными вещественными величинами u, v, w, p, q, r. Въ самомъ

[1]) Сколько намъ извѣстно, вопросъ этотъ рѣшенъ только для постоянныхъ поступательныхъ движеній, и при томъ—только для тѣлъ, имѣющихъ три взаимно перпендикулярныя плоскости симметріи.

дѣлѣ, вводя двѣ новыя неизвѣстныя l и m, представимъ условія, которымъ должны удовлетворять эти постоянныя, подъ видомъ слѣдующихъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial T}{\partial u}=lp\,, & \dfrac{\partial T}{\partial v}=lq\,, & \dfrac{\partial T}{\partial w}=lr\,, \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial p}=lu+mp\,, & \dfrac{\partial T}{\partial q}=lv+mq\,, & \dfrac{\partial T}{\partial r}=lw+mr\,. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Уравненія-же эти суть тѣ самыя, которыя получаются при разысканіи условій minimum'a или maximum'a функціи T при данныхъ величинахъ

$$p^2+q^2+r^2 \quad \text{и} \quad up+vq+wr\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Но вслѣдствіе упомянутаго выше свойства функціи T существованіе minimum'a ея при этихъ условіяхъ несомнѣнно, а потому не подлежитъ сомнѣнію и возможность удовлетворить уравненіямъ (2) вещественными величинами u, v, w, p, q, r, l и m, при чемъ еще могутъ быть заданы произвольно величины (3).

Этимъ доказывается возможность постоянныхъ винтовыхъ движеній произвольнаго шага и съ произвольною угловою скоростью.

Геометрическимъ мѣстомъ винтовыхъ осей всѣхъ этихъ движеній вообще будетъ нѣкоторая поверхность, ибо между пятью отношеніями величинъ u, v, w, p, q, r къ одной изъ нихъ уравненія (2) даютъ 4 соотношенія.

Всѣ эти движенія, какъ мы только-что видѣли, получаются при рѣшеніи нѣкоторой задачи о minimum'ѣ T. Теперь мы обратимъ вниманіе на другую подобную-же задачу, которая также приводитъ къ разсматриваемымъ движеніямъ.

Прежде всего преобразуемъ дифференціальныя уравненія (1) къ нѣсколько иному виду, который будетъ удобнѣе для изслѣдованія устойчивости. Для этого положимъ

$$\frac{\partial T}{\partial u}=x\,,\quad \frac{\partial T}{\partial v}=y\,,\quad \frac{\partial T}{\partial w}=z\,,\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\xi\,,\quad \frac{\partial T}{\partial q}=\eta\,,\quad \frac{\partial T}{\partial r}=\zeta$$

и примемъ за неизвѣстныя функціи вмѣсто u, v, w, p, q, r эти величины x, y, z, ξ, η, ζ. Такое преобразованіе всегда возможно по свойству T, какъ всегда положительной квадратичной функціи. При томъ, выражая T въ функціи x, y, z. ξ, η, ζ, найдемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=u\,,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=v\,,\quad \frac{\partial T}{\partial z}=w\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \xi}=p\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \eta}=q\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \zeta}=r\,.$$

Вслѣдствіе этого преобразованія уравненій (1) будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y\frac{\partial T}{\partial \zeta} - z\frac{\partial T}{\partial \eta}, \\
\frac{dy}{dt} &= z\frac{\partial T}{\partial \xi} - x\frac{\partial T}{\partial \zeta}, \\
\frac{dz}{dt} &= x\frac{\partial T}{\partial \eta} - y\frac{\partial T}{\partial \xi}, \\
\frac{d\xi}{dt} &= y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y} + \eta\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \zeta\frac{\partial T}{\partial \eta}, \\
\frac{d\eta}{dt} &= z\frac{\partial T}{\partial x} - x\frac{\partial T}{\partial z} + \zeta\frac{\partial T}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial T}{\partial \zeta}, \\
\frac{d\zeta}{dt} &= x\frac{\partial T}{\partial y} - y\frac{\partial T}{\partial x} + \xi\frac{\partial T}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial T}{\partial \xi}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Къ такому виду преобразовываетъ разсматриваемыя уравненія Клебшъ въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ о движеніи твердаго тѣла въ жидкости [1]).

Замѣтимъ, что величины $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ имѣютъ слѣдующее механическое значеніе. Движеніе, которымъ обладаютъ твердое тѣло и жидкость въ какой-либо моментъ времени, можетъ быть произведено мгновенно приложеніемъ къ покоившемуся тѣлу нѣкоторой системы импульсовъ. Величины x, y, z представляютъ проэкціи на координатныя оси вектора этихъ импульсовъ, а ξ, η, ζ — проэкціи главнаго момента ихъ, взятаго относительно начала координатъ.

Разыскивая постоянныя величины $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, удовлетворяющія уравненіямъ (4), получаемъ для опредѣленія ихъ вмѣстѣ съ двумя новыми неизвѣстными λ и μ слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \xi} = \lambda x, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \lambda y, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \lambda z, \\
&\frac{\partial T}{\partial x} = \lambda\xi + \mu x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda\eta + \mu y, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda\zeta + \mu z,
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (5)$$

которую легко получить также и преобразованіемъ уравненій (2). Система-же эта та самая, которая получается при рѣшеніи задачи о minimum'ѣ или maximum'ѣ функціи T при данныхъ величинахъ

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{и} \quad x\xi + y\eta + z\zeta.$$

---

[1]) Mathematische Annalen, B. III, 1871.

Эта вторая задача приводитъ къ заключенію о возможности постоянныхъ винтовыхъ движеній, производимыхъ приложеніемъ къ тѣлу нѣкоторой системы импульсовъ, векторъ которыхъ и проэкція главнаго момента на направленіе вектора имѣютъ данныя величины.

Замѣтимъ, что уравненія (2) или (5) суть выраженія того обстоятельства, что винтовая ось искомаго движенія должна совпадать съ центральною осью производящихъ его импульсовъ.

3. Для разысканія всѣхъ постоянныхъ винтовыхъ движеній твердаго тѣла въ жидкости мы остановимся на уравненіяхъ (5).

T, какъ однородная цѣлая функція второй степени шести аргументовъ x, y, z, ξ, η, ζ самаго общаго вида, заключаетъ въ себѣ 21 коэффиціентъ. Но надлежащимъ выборомъ координатной системы число этихъ коэффиціентовъ можетъ быть уменьшено до 15, что мы и сдѣлаемъ прежде всего для упрощенія дальнѣйшихъ вычисленій.

Во первыхъ очевидно, что надлежащимъ выборомъ направленій координатныхъ осей при прежнемъ началѣ можно обратить въ нуль коэффиціенты при $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ и $\xi\eta$ въ выраженіи T. Положимъ поэтому:

$$2T = \mathbf{S} a'_{11}\, x^2 + 2\mathbf{S} a'_{23}\, yz + 2\mathbf{S}(b_{11}\, x\xi + b'_{23}\, y\zeta + b'_{32}\, z\eta) + \mathbf{S} c_1\, \xi^2,$$

гдѣ $\mathbf{S}$ означаетъ суммированіе трехъ членовъ, получаемыхъ изъ находящагося подъ знакомъ $\mathbf{S}$ круговою перестановкой буквъ $x\ y\ z$, $\xi\ \eta\ \zeta$ и значковъ 1, 2, 3. При томъ $a'_{23} = a'_{32}$, $a'_{31} = a'_{13}$ и $a'_{12} = a'_{21}$.

Если мы перенесемъ теперь начало координатъ въ точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, оставляя направленія осей прежними, то отъ этого x, y, z не измѣнятся, а ξ, η, ζ обратятся въ

$$\xi' = \xi + \alpha_3 y - \alpha_2 z, \quad \eta' = \eta + \alpha_1 z - \alpha_3 x, \quad \zeta' = \zeta + \alpha_2 x - \alpha_1 y.$$

Поэтому выраженіе $2T$ для новаго начала приметъ видъ:

$$2T = \mathbf{S} a_{11}\, x^2 + 2\mathbf{S} a_{23}\, yz + 2\mathbf{S} b_{11}\, x\xi' + \mathbf{S} c_1\, \xi'^2 +$$

$$+ 2\mathbf{S}\left[(b'_{23} + \alpha_1 c_3)\, y\zeta' + (b'_{32} - \alpha_1 c_2)\, z\eta'\right],$$

гдѣ a_{ij} суть функціи второй степени величинъ α_1, α_2, α_3 съ коэффиціентами, зависящими отъ всѣхъ коэффиціентовъ прежняго выраженія $2T$.

Мы можемъ теперь распорядиться выборомъ новаго начала такъ, что въ преобразованномъ выраженіи $2T$ коэффиценты при $y\zeta'$ и $z\eta'$, $z\xi'$ и $x\zeta'$, $x\eta'$ и $y\xi'$ будутъ равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, для этого должно положить

$$\alpha_1 = \frac{b'_{32} - b'_{23}}{c_2 + c_3}, \qquad \alpha_2 = \frac{b'_{13} - b'_{31}}{c_3 + c_1}, \qquad \alpha_3 = \frac{b'_{21} - b'_{12}}{c_1 + c_2},$$

а такое опредѣленіе новаго начала всегда будетъ возможно, ибо c_1, c_2, c_3 нулями быть не могутъ и при томъ необходимо положительны.

Такимъ образомъ мы можемъ принять для $2T$ слѣдующее выраженіе

$$2T = \mathbf{S}a_{11}\,x^2 + 2\mathbf{S}a_{23}\,yz + 2\mathbf{S}b_{11}\,x\xi + 2\mathbf{S}b_{23}\,(y\zeta + z\eta) + \mathbf{S}c_1\,\xi^2,$$

гдѣ вообще $a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$.

Вслѣдствіе этого уравненія (5) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
(b_{11} - \lambda)\,x + b_{12}\,y + b_{13}\,z + c_1\,\xi = 0\,, \\
b_{21}\,x + (b_{22} - \lambda)\,y + b_{23}\,z + c_2\,\eta = 0\,, \\
b_{31}\,x + b_{32}\,y + (b_{33} - \lambda)\,z + c_3\,\zeta = 0\,, \\
(a_{11} - \mu)\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + (b_{11} - \lambda)\,\xi + b_{12}\,\eta + b_{13}\,\zeta = 0\,, \\
a_{21}\,x + (a_{22} - \mu)\,y + a_{23}\,z + b_{21}\,\xi + (b_{22} - \lambda)\,\eta + b_{23}\,\zeta = 0\,, \\
a_{31}\,x + a_{32}\,y + (a_{33} - \mu)\,z + b_{31}\,\xi + b_{32}\,\eta + (b_{33} - \lambda)\,\zeta = 0\,.
\end{aligned}\right\} \;. \quad (6)$$

Внося въ послѣднія три уравненія величины ξ, η, ζ, слѣдующія изъ первыхъ трехъ, и полагая для сокращенія

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11} - \frac{(b_{11} - \lambda)^2}{c_1} - \frac{b_{12}{}^2}{c_2} - \frac{b_{13}{}^2}{c_3}, \\
A_{22} &= a_{22} - \frac{b_{21}{}^2}{c_1} - \frac{(b_{22} - \lambda)^2}{c_2} - \frac{b_{23}{}^2}{c_3}, \\
A_{33} &= a_{33} - \frac{b_{31}{}^2}{c_1} - \frac{b_{32}{}^2}{c_2} - \frac{(b_{33} - \lambda)^2}{c_3}, \\
A_{23} &= a_{23} - \frac{b_{12}\,b_{13}}{c_1} - \frac{(b_{22} - \lambda)\,b_{23}}{c_2} - \frac{b_{32}\,(b_{33} - \lambda)}{c_3}, \\
A_{31} &= a_{31} - \frac{b_{13}\,(b_{11} - \lambda)}{c_1} - \frac{b_{23}\,b_{21}}{c_2} - \frac{(b_{33} - \lambda)\,b_{31}}{c_3}, \\
A_{12} &= a_{12} - \frac{(b_{11} - \lambda)\,b_{12}}{c_1} - \frac{b_{21}\,(b_{22} - \lambda)}{c_2} - \frac{b_{31}\,b_{32}}{c_3},
\end{aligned}\right\} \;. \;. \quad (7)$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned} (A_{11}-\mu)\,x+A_{12}\,y+A_{13}\,z=0\,, \\ A_{21}\,x+(A_{22}-\mu)\,y+A_{23}\,z=0\,, \\ A_{31}\,x+A_{32}\,y+(A_{33}-\mu)\,z=0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Отсюда находимъ слѣдующее уравненіе третьей степени относительно μ:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu\,, & A_{12}\,, & A_{13} \\ A_{21}\,, & A_{22}-\mu\,, & A_{23} \\ A_{31}\,, & A_{32}\,, & A_{33}-\mu \end{vmatrix} = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

всѣ три корня котораго, при всякомъ вещественномъ λ, вещественны и вообще различны. Для каждаго-же изъ этихъ корней уравненія (8) опредѣлятъ отношенія между величинами x, y, z, послѣ чего изъ уравненій (6) найдутся отношенія ξ, η, ζ къ одной изъ нихъ.

Такимъ образомъ опредѣлятся всѣ движенія разсматриваемаго рода. При томъ, найдя какое-либо изъ нихъ, въ которомъ u, v, w, p, q, r или ξ, η, ζ, x, y, z имѣютъ какія-либо опредѣленныя величины, получимъ непрерывный рядъ такихъ-же движеній, измѣняя эти величины въ одномъ и томъ-же отношеніи. Всѣ эти винтовыя движенія будутъ имѣть общую ось и общую величину шага, и каждый такой непрерывный рядъ мы условимся разсматривать, какъ одно винтовое движеніе.

Такимъ образомъ видимъ, что для полученія всевозможныхъ постоянныхъ винтовыхъ движеній можно давать параметру λ произвольныя вещественныя значенія. Каждому изъ этихъ значеній будетъ соотвѣтствовать вообще три винтовыхъ движенія, оси которыхъ взаимно перпендикулярны. Послѣднее слѣдуетъ изъ того, что направленія этихъ осей опредѣляются тѣми-же уравненіями (8), какъ и направленія осей поверхности втораго порядка

$$\mathbf{S} A_{11}\,x^2+2\,\mathbf{S} A_{23}\,yz=\text{Const.} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

При томъ движенія эти будутъ обращать функцію

$$\frac{\mathbf{S} A_{11}\,x^2+2\,\mathbf{S} A_{23}\,yz}{x^2+y^2+z^2}$$

въ minimum, minimum-maximum или maximum, а три корня уравненія (9) будутъ такими значеніями этой функціи.

Только въ частныхъ случаяхъ, когда коэффиціенты въ выраженіи T удовлетворяютъ нѣкоторымъ соотношеніямъ, будутъ существовать значенія λ, которымъ соотвѣтствуетъ болѣе трехъ, и въ такомъ случаѣ — непремѣнно безчисленное множество винтовыхъ движеній. Значенія эти должны удовлетворять уравненіямъ:

$$A_{11}-\frac{A_{12}A_{13}}{A_{23}}=A_{22}-\frac{A_{23}A_{21}}{A_{31}}=A_{33}-\frac{A_{31}A_{32}}{A_{12}},$$

при которыхъ поверхность (10) дѣлается поверхностью вращенія, и каждому изъ этихъ значеній λ кромѣ винтовой оси, параллельной оси вращенія этой поверхности, будетъ соотвѣтствовать безчисленное множество винтовыхъ осей, направленія которыхъ могутъ быть какими угодно перпендикулярными къ ней.

Замѣтимъ, что вообще три винтовыя оси, соотвѣтствующія данному λ, не пересѣкаются.

Изъ уравненій (5) слѣдуетъ, что λ есть отношеніе угловой скорости винтоваго движенія къ вектору производящихъ его импульсовъ, взятое со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, одинаковы или прямопротивоположны направленія этой угловой скорости и этого вектора. Поэтому указанныя Кирхгофомъ поступательныя движенія получаются изъ нашихъ формулъ при $\lambda=0$, а винтовыя движенія, производимыя приложеніемъ къ тѣлу пары импульсовъ, получаются изъ нихъ, какъ предѣльные случаи при $\lambda=\pm\infty$.

Чтобы опредѣлить эти послѣднія движенія, положимъ

$$\lim_{\lambda=\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda^2}\right)=-k.$$

Тогда, замѣчая, что первыя три изъ уравненій (6) даютъ

$$\lim\lambda x=c_1\xi,\quad \lim\lambda y=c_2\eta,\quad \lim\lambda z=c_3\zeta,$$

и что

$$\lim\frac{A_{11}}{\lambda^2}=-\frac{1}{c_1},\qquad \lim\frac{A_{22}}{\lambda^2}=-\frac{1}{c_2},\qquad \lim\frac{A_{33}}{\lambda^2}=-\frac{1}{c_3},$$

$$\lim\frac{A_{23}}{\lambda^2}=\lim\frac{A_{31}}{\lambda^2}=\lim\frac{A_{12}}{\lambda^2}=0,$$

получимъ изъ уравненій (8) слѣдующія предѣльныя уравненія:

$$\left(k-\frac{1}{c_1}\right)\xi=0,\quad \left(k-\frac{1}{c_2}\right)\eta=0,\quad \left(k-\frac{1}{c_3}\right)\zeta=0.$$

Такимъ образомъ, полагая k поочередно равнымъ $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{c_2}$, $\frac{1}{c_3}$, получаемъ три винтовыхъ движенія:

$$1)\quad \eta=\zeta=0\,,\qquad 2)\ \zeta=\xi=0\,,\qquad 3)\ \xi=\eta=0\,.$$

Отсюда видно, что выбранныя нами направленія координатныхъ осей параллельны осямъ трехъ постоянныхъ винтовыхъ движеній, происходящихъ вслѣдствіе приложенія къ тѣлу нѣкоторыхъ паръ импульсовъ.

Опредѣлимъ элементы этихъ винтовыхъ движеній. Принимая въ расчетъ, что для нихъ $x=y=z=0$, находимъ:

$$p=\frac{\partial T}{\partial \xi}=c_1\xi\,,\quad q=\frac{\partial T}{\partial \eta}=c_2\eta\,,\quad r=\frac{\partial T}{\partial \zeta}=c_3\zeta\,,$$

$$u=\frac{\partial T}{\partial x}=b_{11}\xi+b_{12}\eta+b_{13}\zeta\,,$$

$$v=\frac{\partial T}{\partial y}=b_{21}\xi+b_{22}\eta+b_{23}\zeta\,,$$

$$w=\frac{\partial T}{\partial z}=b_{31}\xi+b_{32}\eta+b_{33}\zeta\,.$$

Поэтому для трехъ разсматриваемыхъ движеній будетъ:

$$1)\quad q=r=0\,,\quad u=\frac{b_{11}}{c_1}p\,,\quad v=\frac{b_{21}}{c_1}p\,,\quad w=\frac{b_{31}}{c_1}p\,,$$

$$2)\quad r=p=0\,,\quad u=\frac{b_{12}}{c_2}q\,,\quad v=\frac{b_{22}}{c_2}q\,,\quad w=\frac{b_{23}}{c_2}q\,,$$

$$3)\quad p=q=0\,,\quad u=\frac{b_{13}}{c_3}r\,,\quad v=\frac{b_{23}}{c_3}r\,,\quad w=\frac{b_{33}}{c_3}r\,.$$

Винтовыя оси этихъ движеній опредѣляются уравненіями:

$$1)\quad Y=-\frac{b_{13}}{c_1}\,,\quad Z=\frac{b_{12}}{c_1}\,,$$

$$2)\quad Z=-\frac{b_{21}}{c_2}\,,\quad X=\frac{b_{23}}{c_2}\,,$$

$$3)\quad X=-\frac{b_{32}}{c_3}\,,\quad Y=\frac{b_{31}}{c_3}\,.$$

Отсюда видно, что пересѣкаться въ одной точкѣ эти оси будутъ только при условіяхъ $b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0$.

Замѣтимъ, что въ числѣ разсматриваемыхъ движеній будутъ вращательныя, только когда между величинами b_{11}, b_{22}, b_{33} есть равныя нулю.

Въ случаѣ равенства двухъ изъ величинъ c_1, c_2, c_3 получается безчисленное множество винтовыхъ движеній разсматриваемаго рода. Но въ особенности обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда $c_1 = c_2 = c_3 = c$. При этомъ *всякая* пара импульсовъ сообщаетъ тѣлу постоянное винтовое движеніе, ось котораго параллельна оси пары. Угловыя скорости всѣхъ этихъ движеній находятся въ постоянномъ отношеніи c къ моментамъ производящихъ ихъ паръ импульсовъ, а характеризующіе ихъ элементы связаны уравненіями

$$cu = b_{11}\,p + b_{12}\,q + b_{13}\,r\,,$$

$$cv = b_{21}\,p + b_{22}\,q + b_{23}\,r\,,$$

$$cw = b_{31}\,p + b_{32}\,q + b_{33}\,r\,.$$

Въ заключеніе резюмируемъ найденные результаты:

Всѣ постоянныя винтовыя движенія твердаго тѣла въ жидкости получаются при рѣшеніи задачи о minimum'ѣ или maximum'ѣ живой силы движенія тѣла и жидкости или при данныхъ величинахъ угловой скорости и шага винтоваго движенія, или при данныхъ величинахъ вектора и наименьшаго главнаго момента импульсовъ, производящихъ движеніе. При этомъ всякой данной величинѣ отношенія угловой скорости къ вектору импульсовъ соотвѣтствуютъ двѣ группы винтовыхъ движеній, изъ которыхъ въ одной угловая скорость и этотъ векторъ одинаковаго направленія, а въ другой—противоположнаго. Движенія каждой группы вполнѣ опредѣляются направленіями соотвѣтствующихъ имъ угловыхъ скоростей, а послѣднія находятся, какъ направленія осей нѣкоторой поверхности втораго порядка, зависящей какъ отъ величины отношенія угловой скорости къ вектору импульсовъ, такъ и отъ того, къ которой группѣ принадлежатъ эти движенія. Поэтому вообще каждая группа заключаетъ въ себѣ по три движенія, винтовыя оси которыхъ взаимно перпендикулярны.

4. Когда для дифференціальныхъ уравненій движенія какой-либо системы найдено нѣкоторое число интеграловъ, независящихъ отъ времени, и когда въ числѣ этихъ интеграловъ существуетъ такой, который можетъ имѣть minimum или maximum при данныхъ величинахъ остальныхъ интеграловъ, обращаясь въ этотъ minimum или maximum для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеній входящихъ въ него перемѣнныхъ, то эти значенія будутъ соотвѣтствовать вообще одному изъ дѣйствительныхъ движеній системы, и при томъ движеніе это будетъ устойчиво по отношенію къ этимъ перемѣннымъ [1]) по крайней мѣрѣ для возмущеній, не измѣняющихъ величинъ остальныхъ интеграловъ. Если-же разсматриваемый интегралъ имѣетъ minimum или maximum также и при всякихъ достаточно близкихъ къ даннымъ величинахъ послѣднихъ, и если значенія перемѣнныхъ, обращающія его въ minimum или maximum, суть непрерывныя функціи величинъ этихъ интеграловъ, то разсматриваемое движеніе будетъ устойчиво въ сказанномъ смыслѣ для всякихъ возмущеній [2]).

Эту теорему мы можемъ приложить къ разсматриваемому случаю, ибо для дифференціальныхъ уравненій (4) извѣстны три интеграла, обладающіе требуемыми свойствами.

Въ самомъ дѣлѣ, функціи T, $x^2+y^2+z^2$ и $x\xi+y\eta+z\zeta$ представляютъ, очевидно, интегралы этихъ уравненій, и при томъ мы знаемъ, что существуютъ движенія, обращающія первый изъ нихъ въ minimum при всякихъ данныхъ величинахъ двухъ послѣднихъ. Поэтому, пока эти минимальныя значенія T соотвѣтствуютъ опредѣленнымъ значеніямъ перемѣнныхъ x, y, z, ξ, η, ζ, послѣднія будутъ давать винтовыя движенія, устойчивыя по отношенію къ этимъ перемѣннымъ.

Если-бы существовали движенія, обращающія T при тѣхъ-же условіяхъ въ maximum, то они также были-бы устойчивыми въ сказанномъ смыслѣ. Но такихъ движеній, какъ увидимъ, существовать не можетъ.

Вездѣ далѣе мы будемъ разсуждать объ устойчивости постоянныхъ винтовыхъ движеній только по отношенію къ перемѣннымъ x, y, z ξ, η, ζ или, что все равно — по отношенію къ u, v, w, p, q, r.

Начнемъ съ опредѣленія тѣхъ устойчивыхъ движеній, которыя даетъ возможность найти разсматриваемая теорема въ приложеніи къ упомянутымъ тремъ интеграламъ.

5. Положимъ

$$x^2+y^2+z^2=h^2, \qquad x\xi+y\eta+z\zeta=g.$$

Пусть δx, δy, δz, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ какія-либо приращенія величинъ x, y и т. д., не измѣняющія h и g. Тогда будемъ имѣть:

---

[1]) Пусть q_1, q_2, ... q_n какія-либо величины, зависящія отъ координатъ и скоростей точекъ системы, и пусть q_1^0, q_2^0, ... q_n^0 тѣ функціи времени, въ которыя онѣ обращаются для нѣкотораго движенія. Послѣднее мы называемъ *устойчивымъ по отношенію къ перемѣннымъ* q_1, q_2, ... q_n, если послѣ безконечно-малыхъ возмущеній система приходитъ въ такое движеніе, во время котораго $q_1-q_1^0$, $q_2-q_2^0$, ... $q_n-q_n^0$ всегда остаются безконечно-малыми.

[2]) См. *Routh*. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 4 edition, 1884; p. 52, 53.

$$\left.\begin{aligned}&2(x\delta x+y\delta y+z\delta z)+(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2=0\,,\\&\xi\delta x+\eta\delta y+\zeta\delta z+x\delta\xi+y\delta\eta+z\delta\zeta+\delta x\delta\xi+\delta y\delta\eta+\delta z\delta\zeta=0\,.\end{aligned}\right\}\,.\;(11)$$

Соотвѣтствующее приращеніе T назовемъ черезъ δT. Это будетъ функція второй степени величинъ δx, δy и т. д., изъ которой члены первой степени относительно нихъ могутъ быть исключены при помощи уравненій (11), принимая въ разсчетъ уравненія (5). Для этого стоитъ только уравненія (11), умноженныя соотвѣтственно на μ и 2λ, вычесть изъ выраженія $2\delta T$. Тогда найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}2\delta T=&\mathbf{S}\,(a_{11}-\mu)\,(\delta x)^2+2\mathbf{S}\,a_{23}\,\delta y\delta z+2\mathbf{S}\,(b_{11}-\lambda)\,\delta x\delta\xi+\\&+2\mathbf{S}\,b_{23}\,(\delta y\delta\zeta+\delta z\delta\eta)+\mathbf{S}\,c_1\,(\delta\xi)^2\end{aligned}\right\}\;(12)$$

Отсюда уже видно, что T не можетъ быть maximum, ибо полагая $\delta x=\delta y=\delta z=0$, находимъ $\delta T>0$.

Для того, чтобы T было minimum, выраженіе (12) не должно получать отрицательныхъ значеній при безконечно-малыхъ величинахъ δx, δy и т. д., удовлетворяющихъ уравненіямъ (11). При томъ minimum этотъ будетъ соотвѣтствовать опредѣленной системѣ величинъ x, y, z, ξ, η, ζ, если равенство $\delta T=0$ имѣетъ необходимымъ слѣдствіемъ равенства

$$\delta x=\delta y=\delta z=\delta\xi=\delta\eta=\delta\zeta=0\,.$$

Разыскивая условія этого minimum'а, мы сначала исключимъ случай $\lambda=\pm\infty$, для котораго самая постановка вопроса должна быть нѣсколько измѣнена.

Положимъ

$$\delta\xi=\delta\xi_0-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}\,\delta x-\frac{b_{12}}{c_1}\,\delta y-\frac{b_{13}}{c_1}\,\delta z\,,$$

$$\delta\eta=\delta\eta_0-\frac{b_{21}}{c_2}\,\delta x-\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}\,\delta y-\frac{b_{23}}{c_2}\,\delta z\,,$$

$$\delta\zeta=\delta\zeta_0-\frac{b_{31}}{c_3}\,\delta x-\frac{b_{32}}{c_3}\,\delta y-\frac{b_{33}-\lambda}{c_3}\,\delta z\,.$$

Тогда выраженіе (12) приметъ видъ:

$$2\delta T=\mathbf{S}(A_{11}-\mu)\,(\delta x)^2+2\mathbf{S}\,A_{23}\,\delta y\delta z+\mathbf{S}\,c_1\,(\delta\xi_0)^2\,,\quad .\;.\;(13)$$

а условія (11) обратятся въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}&2\mathbf{S}x\delta x+\mathbf{S}(\delta x)^2=0\,,\\&\mathbf{S}X\delta x-\mathbf{S}x\delta\xi_0-\mathbf{S}\delta x\delta\xi_0+\mathbf{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}(\delta x)^2+\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\delta y\delta z=0,\end{aligned}\right\}.\quad(14)$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x+\left(\frac{b_{12}}{c_1}+\frac{b_{12}}{c_2}\right)y+\left(\frac{b_{13}}{c_1}+\frac{b_{13}}{c_3}\right)z=X,\\&\left(\frac{b_{21}}{c_2}+\frac{b_{21}}{c_1}\right)x+2\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}y+\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)z=Y,\\&\left(\frac{b_{31}}{c_3}+\frac{b_{31}}{c_1}\right)x+\left(\frac{b_{32}}{c_3}+\frac{b_{32}}{c_2}\right)y+2\frac{b_{33}-\lambda}{c_3}z=Z.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (15)$$

Разсмотримъ различные случаи, которые могутъ представиться соотвѣтственно тремъ корнямъ уравненія (9).

Если μ есть наименьшій корень этого уравненія, то изъ выраженія (13) непосредственно видно, что δT не можетъ быть отрицательнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, уже было замѣчено, что c_1, c_2, c_3 необходимо положительны. Кромѣ того, мы знаемъ, что наименьшій корень μ есть minimum значеній функціи

$$\frac{\mathbf{S}A_{11}\xi^2+2\mathbf{S}A_{23}\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Поэтому квадратичная функція величинъ δx, δy, δz, входящая въ выраженіе (13), въ случаѣ наименьшаго корня не можетъ быть отрицательной. Къ этому прибавимъ, что когда этотъ корень не кратный, она можетъ обращаться въ нуль только при условіяхъ:

$$\frac{\delta x}{x}=\frac{\delta y}{y}=\frac{\delta z}{z}.\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (16)$$

Такимъ образомъ видимъ, что движеніе, соотвѣтствующее наименьшему корню μ, обращаетъ T въ minimum, и не только по отношенію къ смежнымъ значеніямъ T, но по отношенію ко всякимъ, соотвѣтствующимъ даннымъ величинамъ h и g. При томъ, если этотъ наименьшій корень простой, разсматриваемый minimum соотвѣтствуетъ опредѣленнымъ значеніямъ x, y, z, ξ, η, ζ, ибо изъ равенства $\delta T=0$ въ этомъ случаѣ необходимо слѣдуетъ во первыхъ, что $\delta\xi_0=\delta\eta_0=\delta\zeta_0=0$, и во вторыхъ—что δx, δy, δz должны удовлетворять уравненіямъ (16).

Послѣднимъ-же вмѣстѣ съ уравненіями (14) при безконечно-малыхъ δx, δy, δz можно удовлетворить не иначе, какъ полагая $\delta x = \delta y = \delta z = 0$.

Когда наименьшій корень μ кратный, возможенъ случай minimum'а T, соотвѣтствующаго нѣкоторому непрерывному ряду системъ величинъ $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$. Этотъ случай всегда будетъ имѣть мѣсто, коль скоро всѣ три корня уравненія (9) равны между собою, ибо при этомъ

$$A_{11} - \mu = A_{22} - \mu = A_{33} - \mu = A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0,$$

и слѣдовательно δT обращается въ нуль для $\delta\xi_0 = 0$, $\delta\eta_0 = 0$, $\delta\zeta_0 = 0$, при всякихъ δx, δy, δz, удовлетворяющихъ уравненіямъ (14). Когда-же наименьшій корень μ двукратный, этотъ случай будетъ имѣть мѣсто только при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами функціи T. Соотношенія эти получимъ, выражая, что

$$\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\mathbf{S}\dfrac{b_{11} - \lambda}{c_1} x^2 + \mathbf{S}\left(\dfrac{b_{23}}{c_2} + \dfrac{b_{23}}{c_3}\right) yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

остается постояннымъ при всякихъ величинахъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненіямъ (8), которыя въ случаѣ двукратнаго корня μ приводятся къ одному.

И такъ, абсолютный minimum T при данныхъ h и g соотвѣтствуетъ всегда наименьшему корню μ. Но кромѣ этого, T можетъ имѣть еще minimum'ы по сравненію съ безконечно-близкими значеніями. Послѣдніе однако не могутъ имѣть мѣста въ случаѣ наибольшаго корня μ, когда онъ простой.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ выраженіи (13)

$$\delta\xi_0 = \delta\eta_0 = \delta\zeta_0 = 0,$$

найдемъ, что δT обратится въ квадратичную функцію величинъ δx, δy, δz, которая при наибольшемъ корнѣ μ не можетъ быть положительной. При томъ, когда этотъ корень простой, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, она можетъ обращаться въ нуль не иначе, какъ при условіяхъ (16). Послѣднія-же вмѣстѣ съ условіями (14), какъ уже было замѣчено, требуютъ, чтобы безконечно-малыя величины δx, δy, δz были равны нулю. Поэтому, если $\delta\xi_0 = \delta\eta_0 = \delta\zeta_0 = 0$, а δx, δy, δz одновременно не равны нулю, то въ разсматриваемомъ случаѣ всегда будетъ $\delta T < 0$.

Намъ остается теперь изслѣдовать случай средняго корня. Такъ какъ при этомъ мы будемъ разсматривать только безконечно-малыя значенія величинъ δx, δy и т. д., то уравненія (14) замѣняемъ слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned} x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0 \\ X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - x\delta\xi_0 - y\delta\eta_0 - z\delta\zeta_0 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \ (17)$$

Для полученія условій, которыя были-бы необходимы и вообще достаточны для minimum'а T, будемъ искать minimum квадратичной функціи (13) при условіяхъ (17) и при условіи

$$(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 = C^2,$$

гдѣ C^2 какая-либо положительная постоянная. Такъ какъ $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, то очевидно, что такой minimum всегда будетъ существовать. Выражая, что этотъ minimum не долженъ быть отрицательнымъ, получимъ необходимыя условія, а прибавляя къ нимъ условіе, что онъ можетъ быть нулемъ только при $C = 0$, получимъ условія, достаточныя для minimum'а T.

Разыскивая этотъ minimum, приходимъ къ системѣ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &(A_{11} - \mu - k)\,\delta x + A_{12}\,\delta y + A_{13}\,\delta z + xm + Xl = 0\,, \\ &A_{21}\,\delta x + (A_{22} - \mu - k)\,\delta y + A_{23}\,\delta z + ym + Yl = 0\,, \\ &A_{31}\,\delta x + A_{32}\,\delta y + (A_{33} - \mu - k)\,\delta z + zm + Zl = 0\,, \\ &c_1\delta\xi_0 - xl = 0\,, \qquad c_2\delta\eta_0 - yl = 0\,, \qquad c_3\delta\zeta_0 - zl = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \ (18)$$

гдѣ k, l и m неопредѣленные множители, соотвѣтствующіе нашимъ условнымъ уравненіямъ.

Внося слѣдующія отсюда величины $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ во второе уравненіе (17) и полагая для сокращенія

$$\frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} = H,$$

получимъ:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - Hl = 0\,.$$

Тогда система пяти уравненій, состоящая изъ трехъ первыхъ уравненій (18), изъ перваго уравненія (17) и изъ этого послѣдняго, будетъ линейною и однородною относительно пяти неизвѣстныхъ δx, δy, δz, m и l, а потому дастъ для опредѣленія k слѣдующее квадратное уравненіе:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu-k, & A_{12}, & A_{13}, & x, & X \\ A_{21}, & A_{22}-\mu-k, & A_{23}, & y, & Y \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}-\mu-k, & z, & Z \\ x, & y, & z, & 0, & 0 \\ X, & Y, & Z, & 0, & -H \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

принадлежащее къ извѣстному классу детерминантныхъ уравненій, всѣ корни которыхъ вещественны.

Такъ какъ изъ уравненій (18), если ихъ умножить соотвѣтственно на δx, δy, δz, $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ и результаты сложить, принимая въ разсчетъ всѣ условныя уравненія, находимъ

$$2\delta T = kC^2,$$

то minimum δT будетъ опредѣляться меньшимъ корнемъ k, имѣя всегда знакъ этого корня.

Отсюда слѣдуетъ, что для minimum'а T корни уравненія (19) не должны быть отрицательными, и что T будетъ несомнѣнно minimum, если при томъ эти корни не равны нулю.

Раскрывая опредѣлитель, приводимъ уравненіе (19) къ виду:

$$Hh^2k^2 - Pk + R = 0,$$

гдѣ

$$P = \mathbf{S}(yZ - zY)^2 + H\mathbf{S}(A_{22} - \mu + A_{33} - \mu)\,x^2 - 2H\mathbf{S}A_{23}\,yz,$$

$$R = \mathbf{S}(A_{11} - \mu)(yZ - zY)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}(zX - xZ)(xY - yX) +$$

$$+ H\mathbf{S}[(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu) - A_{23}{}^2]x^2 + 2H\mathbf{S}[A_{12}A_{13} - (A_{11}-\mu)A_{23}]yz.$$

Принимая въ разсчетъ уравненія (8), можно привести выраженія этихъ коэффиціентовъ къ нѣсколько болѣе простому виду. Такъ, замѣчая, что

$$\mathbf{S}(A_{11} - \mu)\,x^2 + 2\mathbf{S}A_{23}\,yz = 0,$$

приводимъ выраженіе P къ виду:

$$P = \mathbf{S}(yZ - zY)^2 + Hh^2\mathbf{S}(A_{11} - \mu),$$

а замѣчая, что коэффиціентъ при H въ выраженіи R можетъ быть представленъ такъ:

$$\mathbf{S}\left\{\begin{vmatrix} A_{22}-\mu\,, & A_{23} \\ A_{32}\,, & A_{33}-\mu \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A_{31}\,, & A_{33}-\mu \\ A_{12}\,, & A_{32} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} A_{23}\,, & A_{22}-\mu \\ A_{31}\,, & A_{21} \end{vmatrix} z\right\} x,$$

и что

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} A_{22}-\mu\,, & A_{23} \\ A_{32}\,, & A_{33}-\mu \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} A_{31}\,, & A_{33}-\mu \\ A_{12}\,, & A_{32} \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_{23}\,, & A_{22}-\mu \\ A_{31}\,, & A_{21} \end{vmatrix}},$$

приводимъ его къ виду:

$$h^2\mathbf{S}[(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu)-A_{23}{}^2].$$

При томъ, если корни уравненія (9) обозначимъ черезъ μ_1, μ_2, μ_3, то будемъ имѣть:

$$\mathbf{S}\mu_1 = \mathbf{S}A_{11}\,, \quad \mathbf{S}\mu_2\mu_3 = \mathbf{S}(A_{22}A_{33}-A_{23}{}^2),$$

и слѣдовательно

$$\mathbf{S}[(A_{22}-\mu)(A_{33}-\mu)-A_{23}{}^2] = \mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu).$$

Такимъ образомъ находимъ:

$$P = \mathbf{S}(yZ-zY)^2 + Hh^2\mathbf{S}(\mu_1-\mu),$$

$$R = \mathbf{S}(A_{11}-\mu)(yZ-zY)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}(zX-xZ)(xY-yX) +$$

$$+ Hh^2\mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

гдѣ μ есть одна изъ величинъ μ_1, μ_2, μ_3.

Такъ какъ намъ извѣстно, что корни уравненія (19) не могутъ быть мнимыми, то условія, что они должны быть положительными, выразятся двумя слѣдующими неравенствами

$$P>0\,, \quad R>0\,,$$

которыя и будутъ условіями minimum'а T.

Должно замѣтить, что для средняго корня μ первое изъ этихъ условій есть слѣдствіе второго. Въ самомъ дѣлѣ, если $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, то каковы-бы ни были ξ, η, ζ, будемъ имѣть:

$$\mu_1(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \leqq \mathbf{S} A_{11}\xi^2 + 2\mathbf{S} A_{23}\eta\zeta \leqq \mu_3(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Поэтому для $\mu = \mu_2$

$$(\mu_3 - \mu_2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \geqq \mathbf{S}(A_{11} - \mu)\xi^2 + 2\mathbf{S} A_{23}\eta\zeta,$$

и слѣдовательно

$$(\mu_3 - \mu_2)P - R \geqq Hh^2(\mu_3 - \mu_2)^2 > 0,$$

откуда при $R > 0$ необходимо слѣдуетъ и $P > 0$.

Такимъ образомъ для того, чтобы движеніе, соотвѣтствующее среднему корню μ, обращало T въ minimum, вообще должно быть удовлетворено одно только условіе

$$R > 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (21)$$

При $R = 0$ также возможенъ minimum T, но дополнительныхъ условій, относящихся къ этому случаю, выводить не будемъ.

Покажемъ, что условіе (21) дѣйствительно можетъ быть удовлетворено для средняго корня μ.

Для этого разсмотримъ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты въ выраженіи T.

Замѣняя въ функціи T перемѣнныя ξ, η, ζ перемѣнными p, q, r при помощи уравненій

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = p, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = q, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = r,$$

находимъ:

$$2T = \mathbf{S} A_{11}{}^0 x^2 + 2\mathbf{S} A_{23}{}^0 yz + \mathbf{S}\frac{p^2}{c_1},$$

гдѣ A_{ij}^0 суть значенія функцій (7) при $\lambda = 0$.

Единственныя условія, которымъ мы должны подчинить коэффиціенты въ этомъ выраженіи при общемъ изслѣдованіи, суть условія для коэффиціентовъ всегда положительной квадратичной функціи, которая можетъ обращаться въ нуль только при одновременномъ равенствѣ нулю всѣхъ ея аргументовъ. Поэтому условія эти будутъ:

$$\begin{vmatrix} A_{11}{}^0, & A_{12}{}^0, & A_{13}{}^0 \\ A_{21}{}^0, & A_{22}{}^0, & A_{23}{}^0 \\ A_{31}{}^0, & A_{32}{}^0, & A_{33}{}^0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{22}{}^0, & A_{23}{}^0 \\ A_{32}{}^0, & A_{33}{}^0 \end{vmatrix} > 0, \; A_{33}{}^0 > 0, \; c_1 > 0, \; c_2 > 0, \; c_3 > 0,$$

и всякія величины коэффиціентовъ a_{ij}, b_{ij}, c_i, удовлетворяющія этимъ условіямъ, должны быть разсматриваемы, какъ возможныя.

Отсюда видно, что для полученія какой-либо возможной системы значеній этихъ коэффиціентовъ, мы можемъ выбрать произвольныя положительныя значенія для величинъ c_1, c_2, c_3 и задать совершенно произвольно шесть величинъ b_{ij}, ибо имѣемъ еще въ распоряженіи шесть величинъ a_{ij}, надлежащимъ выборомъ которыхъ можно сдѣлать величины A_{ij}^0 какими угодно.

Основываясь на этомъ, можно показать, что по крайней мѣрѣ для поступательнаго движенія возможенъ minimum T въ случаѣ средняго корня. Для этого замѣчаемъ, что x, y, z зависятъ только отъ величинъ A_{ij}, и слѣдовательно при $\lambda = 0$ — только отъ величинъ A_{ij}^0, а съ другой стороны, разсматривая выраженія (15), приходимъ къ заключенію, что при всякихъ данныхъ x, y, z, одновременно не равныхъ нулю (что всегда будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ конечнаго λ), выборомъ коэффиціентовъ b_{ij} можно сдѣлать величины X, Y, Z какими угодно. Отсюда слѣдуетъ, что при $\lambda = 0$ въ выраженіи (20) можно разсматривать величины X, Y, Z, какъ совершенно произвольныя, для всякихъ данныхъ значеній остальныхъ входящихъ въ него величинъ, а потому это будетъ выраженіе слѣдующаго типа

$$R = \mathbf{S}(A_{11} - \mu)\, x_1{}^2 + 2\mathbf{S} A_{23}\, x_2 x_3 + Hh^2 \mathbf{S}(\mu_2 - \mu)(\mu_3 - \mu),$$

гдѣ x_1, x_2, x_3, какія-либо величины, удовлетворяющія условію

$$xx_1 + yx_2 + zx_3 = 0 .$$

Но въ случаѣ средняго корня для этихъ величинъ будутъ возможны значенія, дѣлающія квадратичную функцію

$$\mathbf{S}(A_{11} - \mu)\, x_1{}^2 + 2\mathbf{S} A_{23} x_2 x_3$$

положительной, а коль скоро такая система значеній будетъ найдена, то пропорціональнымъ увеличеніемъ x_1, x_2, x_3 можно достигнуть и того, что удовлетворится условіе $R > 0$.

Такимъ образомъ оказывается, что для достаточно малыхъ значеній λ вообще возможенъ minimum T и въ случаѣ средняго корня μ.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на одинъ частный случай, когда для средняго корня minimum T невозможенъ ни при какихъ значеніяхъ λ. Это тотъ случай, когда при $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$ всѣ коэффиціенты b_{i_j} равны нулю, что будетъ имѣть мѣсто напримѣръ для тѣла, обладающаго тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметріи. Въ этомъ случаѣ двѣ изъ величинъ x, y, z, а также соотвѣтствующія имъ величины X, Y, Z вообще будутъ равны нулю, а потому выраженіе (20) приводится къ виду:

$$R=Hh^2\mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu),$$

и слѣдовательно для средняго корня всегда $R<0$.

Разберемъ теперь предѣльный случай $\lambda=\pm\infty$.

Разсматриваемая задача о minimum'ѣ T, очевидно, тожественна съ задачей о minimum'ѣ T при условіяхъ:

$$x=\alpha h,\quad y=\beta h,\quad z=\gamma h,\quad \xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=f,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

гдѣ h и f данныя величины. Постановка-же этой послѣдней задачи возможна и для предѣльнаго случая $\lambda=\pm\infty$ или $h=0$. Въ этомъ случаѣ вопросъ приводится къ разысканію minimum'а выраженія

$$2T=c_1\xi^2+c_2\eta^2+c_3\zeta^2$$

при условіяхъ

$$\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=f,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Рѣшая эту задачу, находимъ:

$$2\delta T=\frac{f^2}{k^2}\mathbf{S}\left(k-\frac{1}{c_1}\right)(\delta\alpha)^2+\mathbf{S}\frac{1}{c_1}\left(c_1\delta\xi-\frac{f}{k}\,\delta\alpha\right)^2,$$

гдѣ ξ, η, ζ и k должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left(k-\frac{1}{c_1}\right)\xi=0,\ \left(k-\frac{1}{c_2}\right)\eta=0,\ \left(k-\frac{1}{c_3}\right)\zeta=0,\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=f^2,$$

а $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ — уравненіямъ:

$$2\mathbf{S}\xi\delta\alpha + f\mathbf{S}(\delta\alpha)^2 = 0,$$

$$\mathbf{S}\xi\delta\xi + f\mathbf{S}\xi\delta\alpha + f\mathbf{S}\delta\alpha\,\delta\xi = 0.$$

Отсюда видно, что когда c_1, c_2, c_3 различны, изъ трехъ возможныхъ движенiй

$$1)\qquad k = \frac{1}{c_1},\quad \eta = \zeta = 0,$$

$$2)\qquad k = \frac{1}{c_2},\quad \zeta = \xi = 0,$$

$$3)\qquad k = \frac{1}{c_3},\quad \xi = \eta = 0,$$

только одно будетъ обращать T въ minimum — для котораго k имѣетъ наибольшую величину. Такъ-какъ $k = -\lim \frac{\mu}{\lambda^2}$, то это будетъ то движенiе, въ которое въ предѣлѣ обращается соотвѣтствующее наименьшему корню μ.

На основанiи результатовъ предыдущаго изслѣдованiя можно дѣлать какiя-либо заключенiя объ устойчивости только по отношенiю къ возмущенiямъ, не измѣняющимъ h и g. Для распространенiя-же этихъ заключенiй на случаи какихъ угодно возмущенiй необходимо еще предварительно изслѣдовать непрерывность измѣненiй въ зависимости отъ h и g тѣхъ движенiй, которыя обращаютъ T въ minimum при условiяхъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,\quad x\xi + y\eta + z\zeta = g.$$

Къ этому изслѣдованiю теперь и обращаемся.

6. Два движенiя [1]), для которыхъ соотвѣтственныя величины $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ безконечно-мало разнятся между собою, мы будемъ называть безконечно-близкими. При этомъ, если въ числѣ движенiй, соотвѣтствующихъ величинамъ h и g, безконечно-близкимъ къ тѣмъ, которыя опредѣляются разсматриваемымъ движенiемъ, существуетъ безконечно-близкое къ послѣднему, то мы будемъ говорить, что это движенiе измѣняется непрерывно съ измѣненiемъ h и g [2]).

[1]) Подъ словомъ движенiе мы будемъ разумѣть вездѣ въ этомъ и въ слѣдующемъ параграфѣ одно изъ разсматриваемыхъ постоянныхъ винтовыхъ движенiй.

[2]) Во избѣжанiе недоразумѣнiй, считаемъ нужнымъ замѣтить, что по самому смыслу дѣла здѣсь говорится только о вещественныхъ величинахъ x, y и т. д., а потому разсматриваемая непрерывность вообще не будетъ слѣдствiемъ той, которою могутъ обладать x, y и т. д., какъ алгебраическiя функцiи h и g.

Будемъ искать условія такой непрерывности.

Случай $\lambda = \pm\infty$ или $h=0$ сначала исключимъ. При этомъ будетъ достаточно изслѣдовать непрерывность по отношенію къ измѣненію одного g, ибо изъ того обстоятельства, что въ разсматриваемыхъ движеніяхъ величины x, y, z, ξ, η, ζ можно измѣнять въ одномъ и томъ-же произвольномъ отношеніи, не трудно усмотрѣть, что всякое движеніе, измѣняющееся непрерывно съ измѣненіемъ g при постоянномъ отличномъ отъ нуля h, будетъ способно и къ непрерывному измѣненію вмѣстѣ съ h и g или съ однимъ только h.

Изъ уравненій (8) находимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія между x, y, z, μ и λ:

$$\left.\begin{aligned}(A_{11}-\mu)\,dx+A_{12}dy+A_{13}dz-xd\mu+Xd\lambda=0\,,\\ A_{21}dx+(A_{22}-\mu)\,dy+A_{23}dz-yd\mu+Yd\lambda=0\,,\\ A_{31}dx+A_{32}dy+(A_{33}-\mu)\,dz-zd\mu+Zd\lambda=0\,.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (22)$$

При томъ, предполагая перемѣннымъ одно только g, имѣемъ:

$$xdx+ydy+zdz=0\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ (23)$$

$$\xi dx+\eta dy+\zeta dz+xd\xi+yd\eta+zd\zeta=dg\,.$$

Если-же въ послѣднее уравненіе подставимъ вмѣсто $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ихъ величины, получаемыя дифференцированіемъ первыхъ трехъ уравненій (6), то приведемъ его къ виду:

$$Xdx+Ydy+Zdz-Hd\lambda=-dg\,.\quad .\ .\ .\ .\ (24)$$

Уравненія (22), (23) и (24) дадутъ возможность найти опредѣленныя вещественныя величины производныхъ

$$\frac{dx}{dg},\ \frac{dy}{dg},\ \frac{dz}{dg},\ \frac{d\mu}{dg},\ \frac{d\lambda}{dg},$$

и слѣдовательно, непрерывность разсматриваемаго движенія по отношенію къ g будетъ несомнѣнна, пока опредѣлитель этихъ уравненій не обращается въ нуль. Опредѣлитель-же этотъ, очевидно, есть уже разсмотрѣнная нами величина R, опредѣляемая формулой (20).

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что непрерывность измѣненій въ зависимости отъ g всякаго изъ разсматриваемыхъ движеній не можетъ подлежать сомнѣнію, пока соотвѣтствующая этому движенію величина R не обращается въ нуль.

Что касается движеній, обращающихъ R въ нуль, то въ особенности обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда для λ возможны значенія, при которыхъ по крайней мѣрѣ два корня μ дѣлаются равными. Съ приближеніемъ λ къ одному изъ такихъ значеній, движенія, соотвѣтствующія этимъ корнямъ, будутъ приближаться къ нѣкоторымъ *предѣльнымъ* движеніямъ, и послѣднія непремѣнно обратятъ R въ нуль.

Это очевидно для случая равенства всѣхъ трехъ корней, ибо при этомъ

$$A_{11}-\mu=A_{22}-\mu=A_{33}-\mu=A_{23}=A_{31}=A_{12}=0\,.$$

Въ этомъ случаѣ R будетъ нулемъ не только для предѣльныхъ, но и для всякихъ другихъ движеній, соотвѣтствующихъ равнымъ корнямъ.

Если-же только два корня дѣлаются равными, то, разумѣя подъ μ кратный корень, будемъ имѣть:

$$\mu=A_{11}-\frac{A_{12}\,A_{13}}{A_{23}}=A_{22}-\frac{A_{23}\,A_{21}}{A_{31}}=A_{33}-\frac{A_{31}\,A_{32}}{A_{12}}\,,\quad .\,(25)$$

при чемъ одна изъ величинъ $A_{11}-\mu$, $A_{22}-\mu$, $A_{33}-\mu$ навѣрно нулемъ не будетъ. Вслѣдствіе этого, предполагая $A_{11}-\mu$ отличнымъ отъ нуля, найдемъ, что квадратичная функція величинъ $yZ-zY$, $zX-xZ$, $xY-yX$, входящая въ выраженіе R, обратится въ

$$\frac{1}{A_{11}-\mu}\Big[(A_{11}-\mu)\,(yZ-zY)+A_{12}\,(zX-xZ)+A_{13}\,(xY-yX)\Big]^2.$$

Съ другой стороны, если предѣльныя значенія производныхъ $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$, когда μ дѣлается кратнымъ корнемъ, конечны, что и будетъ доказано въ слѣдующемъ параграфѣ, то умножая уравненія (22) соотвѣтственно на $yZ-zY$, $zX-xZ$, $xY-yX$, складывая результаты и переходя къ предѣлу, вслѣдствіе тѣхъ-же равенствъ (25) находимъ:

$$\Theta[(A_{11}-\mu)(yZ-zY)+A_{12}(zX-xZ)+A_{13}(xY-yX)]=0\,,$$

гдѣ

$$\Theta=\frac{dx}{d\lambda}+\frac{A_{12}}{A_{11}-\mu}\,\frac{dy}{d\lambda}+\frac{A_{13}}{A_{11}-\mu}\,\frac{dz}{d\lambda}\,.\quad .\quad .\quad .\quad .\,(26)$$

Отсюда если Θ не равенъ нулю, слѣдуетъ:

$$(A_{11}-\mu)(yZ-zY)+A_{12}(zX-xZ)+A_{13}(xY-yX)=0\,.$$

То-же будетъ и въ случаѣ $\Theta=0$, ибо при этомъ уравненія (22) обращаются въ предѣлѣ въ слѣдующія:

$$X-x\frac{d\mu}{d\lambda}=0\,,\quad Y-y\frac{d\mu}{d\lambda}=0\,,\quad Z-z\frac{d\mu}{d\lambda}=0\,,$$

которыя даютъ:

$$yZ-zY=zX-xZ=xY-yX=0\,.$$

И такъ, разсматриваемая квадратичная функція, а слѣдовательно и R въ предѣлѣ обращаются въ нуль.

Замѣтимъ, что для движеній, соотвѣтствующихъ наибольшему и среднему корню μ, R можетъ обращаться въ нуль и въ другихъ случаяхъ. Для движенія-же, соотвѣтствующаго наименьшему корню, равенство нулю R возможно только при условіи, что этотъ корень кратный.

Условіе, что R должно быть отличнымъ отъ нуля, будучи достаточнымъ, конечно не необходимо для разсматриваемой непрерывности. Послѣдняя можетъ сохраняться и при $R=0$, если удовлетворены нѣкоторыя добавочныя условія. Далѣе подробнѣе будетъ разсмотрѣнъ въ этомъ отношеніи случай кратнаго корня μ. Теперь-же замѣтимъ, что когда R обращается въ нуль для какого-либо значенія λ при простомъ корнѣ μ, то соотвѣтствующее движеніе будетъ терять свою непрерывность по отношенію къ g только въ томъ случаѣ, когда R при переходѣ λ черезъ это значеніе мѣняетъ свой знакъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только замѣтить, что изъ уравненій (22), (23) и (24) слѣдуетъ:

$$Rd\lambda=Hh^2\mathbf{S}(\mu_2-\mu)(\mu_3-\mu)\,dg\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Разсмотримъ теперь ближе движенія, соотвѣтствующія кратному корню μ. При этомъ будемъ предполагать, что равенство между корнями не имѣетъ мѣста для всякаго λ.

7. Покажемъ, какъ опредѣляются предѣльныя движенія для движеній, соотвѣтствующихъ корнямъ μ, стремящимся къ равенству.

Для этой цѣли вообще могутъ служить уравненія (22). Но чтобы можно было выводить изъ нихъ какія-либо заключенія, необходимо предварительно доказать конечность предѣльныхъ значеній производныхъ x', y', z' отъ x, y, z по λ [1]). Съ этого и начнемъ.

[1]) Вообще производныя различныхъ порядковъ отъ какой-либо функціи F по λ будемъ означать черезъ F', F'' и т. д.

До сихъ поръ мы разсматривали только вещественныя значенія λ. Будемъ теперь разсматривать также и комплексныя значенія его, изображая ихъ точками на нѣкоторой плоскости.

Уравненіе (9) опредѣляетъ μ, какъ трехзначную алгебраическую функцію λ, которая можетъ обращаться въ безконечность только для безконечнаго λ. Пусть μ_1, μ_2, μ_3 три значенія этой функціи для какого-либо λ. Послѣднее будемъ измѣнять такъ, чтобы μ_1, μ_2, μ_3 не дѣлались равными, разсматривая случай равенства между ними только какъ предѣльный.

Тогда величины x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ (8) въ связи съ уравненіемъ

$$x^2+y^2+z^2=h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

(гдѣ h по прежнему будемъ предполагать отличною отъ нуля вещественною постоянною), опредѣлятся, какъ шестизначныя алгебраическія функціи λ, совокупныя значенія которыхъ образуютъ шесть системъ, по двѣ для каждаго изъ трехъ значеній функціи μ. Системы-же эти будутъ таковы, что если x_i, y_i, z_i есть одна изъ двухъ, соотвѣтствующихъ $\mu=\mu_i$ $(i=1, 2, 3)$, то $-x_i$, $-y_i$, $-z_i$ будетъ другою, при чемъ девять величинъ x_i, y_i, z_i $(i=1, 2, 3)$ будутъ связаны уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3&=0, \\ x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1&=0, \\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2&=0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Послѣднія весьма легко получаются изъ уравненій (8) и въ случаѣ вещественнаго λ выражаютъ перпендикулярность винтовыхъ осей въ трехъ движеніяхъ, соотвѣтствующихъ данному λ.

На основаніи сказаннаго нетрудно показать, что только тѣ точки плоскости комплексной перемѣнной λ будутъ особенными для функцій x, y, z, въ которыхъ по крайней мѣрѣ двѣ изъ нихъ дѣлаются безконечными (случай, когда *только одна* дѣлается безконечною вслѣдствіе уравненія (28), невозможенъ).

Для этой цѣли замѣчаемъ, что всякая точка развѣтвленія [1]) одной изъ функцій x, y, z необходимо будетъ таковою-же и для двухъ остальныхъ. Поэтому если-бы существовала точка развѣтвленія, въ которой всѣ значенія x, y, z оставались-бы конечными, то въ такой точкѣ двѣ

[1]) Такая точка, при обходѣ которой по замкнутому контуру функція непрерывно измѣняется изъ одного значенія въ другое.

изъ шести системъ совокупныхъ значенiй этихъ функцiй дѣлались-бы тожественными. Но это невозможно для системъ, соотвѣтствующихъ одному и тому-же значенiю функцiи μ, потому, что при этомъ было-бы $x=0$, $y=0$, $z=0$, что противорѣчило-бы уравненiю (28), а для системъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значенiямъ этой функцiи, потому, что при этомъ изъ уравненiй (29) слѣдовало-бы.

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

что также противорѣчило-бы уравненiю (28).

И такъ, всякая точка, въ которой всѣ значенiя x, y, z остаются конечными, будетъ обыкновенною для этихъ функцiй.

Мы знаемъ, что для всякаго вещественнаго λ всѣ значенiя x, y, z вещественны, а слѣдовательно въ силу уравненiя (28) конечны. Поэтому всякая точка вещественной оси будетъ обыкновенною для функцiй x, y, z.

Отсюда слѣдуетъ, что производныя отъ x, y, z по λ какого угодно порядка будутъ имѣть конечныя опредѣленныя величины для всякаго вещественнаго λ.

Предыдущее доказательство позволяетъ заключить также, что и функцiя μ не имѣетъ особенныхъ точекъ на вещественной оси (конечно—кромѣ безконечно-удаленныхъ), хотя-бы на ней и были точки, въ которыхъ значенiя этой функцiи дѣлаются равными. Поэтому и производныя отъ μ по λ будутъ конечными для вещественныхъ конечныхъ λ.

Чтобы включить въ разсмотрѣнiе случай $\lambda=\infty$, полагаемъ

$$\frac{x}{h}=\alpha,\quad \frac{y}{h}=\beta,\quad \frac{z}{h}=\gamma,\quad \frac{\mu}{\lambda^2}=-k,\quad \frac{1}{\lambda}=\varepsilon. \quad . \quad . \quad (30)$$

Тогда разсматривая α, β, γ, k, какъ функцiи комплексной перемѣнной ε, такимъ же путемъ придемъ къ заключенiю, что точка $\varepsilon=0$ есть обыкновенная для этихъ функцiй.

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

Предположимъ сначала, что для разсматриваемаго значенiя λ равными дѣлаются только два корня μ.

Вслѣдствiе (25) уравненiя (22) обратятся въ предѣлѣ въ слѣдующiя:

$$\left.\begin{aligned} X-\mu' x+(A_{11}-\mu)\Theta&=0,\\ Y-\mu' y+\qquad A_{12}\Theta\quad&=0,\\ Z-\mu' z+\qquad A_{13}\Theta\quad&=0,\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

гдѣ Θ имѣетъ прежнее значенiе (26).

Внося въ эти уравненія вмѣсто X, Y, Z ихъ выраженія (15), и присоединяя къ нимъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} (A_{11}-\mu)\,x+A_{12}y+A_{13}z=0\,,\\ x^2+y^2+z^2=h^2, \end{aligned}\right\}\quad.\;.\;.\;.\;(32)$$

получимъ систему пяти уравненій, вообще достаточную для опредѣленія пяти входящихъ въ нихъ неизвѣстныхъ x, y, z, μ' и Θ.

Если изъ уравненій (31) и перваго уравненія (32) исключимъ x, y, z и Θ, то придемъ къ уравненію второй степени относительно μ', оба корня котораго будутъ вещественны. Каждому изъ этихъ корней, когда они различны, что и будетъ имѣть мѣсто вообще, будетъ соотвѣтствовать по одному движенію [1]), которыя и будутъ искомыми предѣльными. При томъ очевидно, что движеніе съ большей величиною μ' будетъ предѣльнымъ для движенія, соотвѣтствующаго меньшему изъ двухъ корней μ, стремящихся къ равенству, когда мы подходимъ къ предѣлу, увеличивая λ, и для движенія, соотвѣтствующаго большему изъ нихъ, когда предѣлъ достигается уменьшеніемъ λ.

Слѣдуетъ замѣтить, что уравненія (31) тѣ самыя, которыя получаются при разысканіи величинъ x, y, z, обращающихъ функцію

$$g=-\mathbf{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x^2-\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)yz\quad.\;.\;.\;.\;(33)$$

въ minimum или maximum при условіяхъ (32), ибо нетрудно убѣдиться, что

$$X=-\frac{\partial g}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial g}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial g}{\partial z}.\;.\;.\;.\;.\;(34)$$

При томъ величины μ', удовлетворяющія упомянутому квадратному уравненію, представляютъ наименьшее и наибольшее значенія $-\frac{2g}{h^2}$ при этихъ условіяхъ [2]). Поэтому при равенствѣ двухъ корней μ ихъ производныя μ' тогда только могутъ сдѣлаться равными, когда g сохраняетъ постоянную величину при всякихъ x, y, z, удовлетворяющихъ условіямъ (32).

---

[1]) Мы уже условились движенія

$$(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\xi\,,\,\eta\,,\,\zeta)\qquad\text{и}\qquad(-x\,,\,-y\,,\,-z\,,\,-\xi\,,\,-\eta\,,\,-\zeta)$$

разсматривать, какъ одно (пар. 3).

[2]) По поводу этого замѣтимъ, что вообще $\frac{d\mu}{d\lambda}=-\frac{2g}{h^2}$, какъ то нетрудно найти изъ уравненій (22).

Такимъ образомъ видимъ, что вообще, т. е. за исключеніемъ только-что упомянутаго частнаго случая, уравненія (31) и (32) будутъ достаточны для нахожденія предѣльныхъ движеній, и послѣднія будутъ таковы, что для одного изъ нихъ $\frac{g}{h^2}$ будетъ имѣть наименьшее, а для другаго наибольшее изъ непрерывнаго ряда значеній, возможныхъ для этого отношенія при величинѣ λ, дѣлающей два корня μ равными. При томъ, переходя къ предѣлу отъ меньшихъ значеній λ, найдемъ, что движеніе съ наименьшей величиною $\frac{g}{h^2}$ будетъ предѣльнымъ для соотвѣтствующаго меньшему изъ корней μ, а движеніе съ наибольшей величиной $\frac{g}{h^2}$ — для соотвѣтствующаго большему изъ нихъ. Обратное получится при переходѣ къ предѣлу отъ бóльшихъ значеній λ.

Оси предѣльныхъ движеній будутъ параллельны осямъ коническаго сѣченія, по которому поверхность втораго порядка

$$\mathbf{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x^2+\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)yz=\text{Const} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

пересѣкается съ экваторіальною плоскостью поверхности вращенія (10).

Что касается всѣхъ остальныхъ движеній, соотвѣтствующихъ равнымъ корнямъ μ, то каждому значенію $\frac{g}{h^2}$, промежуточному между его maximum'омъ и minimum'омъ, будутъ соотвѣтствовать два движенія, опредѣляемыхъ уравненіями

$$\frac{g}{h^2}(x^2+y^2+z^2)+\mathbf{S}\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}x^2+\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)yz=0\,,$$

$$(A_{11}-\mu)\,x+A_{12}y+A_{13}z=0\,.$$

Оба эти движенія сливаются въ одно, когда $\frac{g}{h^2}$ достигаетъ своего maximum'a или minimum'a.

Очевидно, что каждое изъ этихъ непредѣльныхъ движеній способно къ непрерывному измѣненію вмѣстѣ съ $\frac{g}{h^2}$. Чтобы то-же было справедливо и для предѣльныхъ движеній, отношеніе $\frac{g}{h^2}$, какъ функція λ, не должно обращаться въ maximum для предѣльнаго движенія съ большей величиною $\frac{g}{h^2}$ и въ minimum—для предѣльнаго движенія съ меньшей величиною $\frac{g}{h^2}$.

Условіе это удовлетворено, если равными дѣлаются наименьшій и средній корни μ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (27) видно, что для наименьшаго корня g при постоянномъ h, а слѣдовательно и $\frac{g}{h^2}$ есть возрастающая функція λ, ибо для наименьшаго корня R не можетъ быть отрицательнымъ. Поэтому для этого корня предѣльное движеніе съ меньшей величиною $\frac{g}{h^2}$ достигается при возрастаніи $\frac{g}{h^2}$, а съ большей—при убываніи.

Такимъ образомъ видимъ, что то изъ движеній, обращающихъ T въ minimum, которое соотвѣтствуетъ наименьшему корню μ, вообще измѣняется непрерывно съ измѣненіемъ g и h, не теряя своей непрерывности даже при равенствѣ этого корня среднему, если только при этомъ не является безчисленнаго множества движеній, соотвѣтствующихъ одной и той-же парѣ значеній g и h.

Мы видѣли, что можетъ быть возможно еще другое движеніе, обращающее T въ minimum, которое соотвѣтствуетъ среднему корню. Для этого движенія напротивъ всегда существуютъ значенія λ, при которыхъ непрерывность его нарушается.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только замѣтить, что въ случаѣ средняго корня minimum T невозможенъ ни для достаточно большихъ положительныхъ или отрицательныхъ значеній λ, ни для значеній послѣдняго, достаточно близкихъ къ одному изъ тѣхъ, при которыхъ наименьшій корень дѣлается равнымъ среднему. Справедливость-же послѣдняго будетъ непосредственно слѣдовать изъ формулы (27) если докажемъ, что для такихъ значеній λ величина g, соотвѣтствующая среднему корню, при постоянномъ h есть возрастающая функція λ.

Что это имѣетъ мѣсто для достаточно большихъ значеній λ^2, видно изъ того, что при всякомъ данномъ h для $\lambda = -\infty$ и $g = -\infty$, а для $\lambda = +\infty$ и $g = +\infty$, и изъ того, что g, какъ алгебраическая функція λ, не можетъ имѣть безконечно-большаго числа maximum'овъ и minimum'овъ.

Что же касается значеній λ, достаточно близкихъ къ тому, при которомъ средній корень дѣлается равнымъ наименьшему, то это будетъ слѣдовать изъ выраженія, которое мы сейчасъ выведемъ, для предѣльнаго значенія производной g', когда корень, которому соотвѣтствуетъ разсматриваемая величина g, дѣлается кратнымъ.

Изъ формулы (33), принимая въ разсчетъ (34), находимъ:

$$g' = \frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} - Xx' - Yy' - Zz',$$

откуда вслѣдствіе уравненій (31) и условія

$$xx' + yy' + zz' = 0\,,$$

выражающаго неизмѣняемость h, и получается упомянутое выраженіе:

$$g' = \frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3} + (A_{11} - \mu)\Theta^2.$$

Такъ-какъ при равенствѣ наименьшаго корня среднему, $A_{11} - \mu$ не можетъ быть отрицательнымъ, то отсюда и слѣдуетъ $g' > 0$.

Когда при равенствѣ двухъ корней, отношеніе $\frac{g}{h^2}$ сохраняетъ постоянную величину для всѣхъ движеній, соотвѣтствующихъ равнымъ корнямъ, уравненія, которыми мы пользовались будутъ недостаточны для нахожденія предѣльныхъ движеній. Но присоединяя къ нимъ уравненія, получаемыя дифференцированіемъ по λ уравненій (22), будемъ имѣть систему, вообще достаточную для этой цѣли.

Въ этомъ случаѣ всегда будутъ существовать движенія, для которыхъ непрерывное измѣненіе вмѣстѣ съ g и h невозможно.

Когда всѣ три корня μ дѣлаются равными, уравненія (22) обращаются въ слѣдующія:

$$X - \mu' x = 0\,, \quad Y - \mu' y = 0\,, \quad Z - \mu' z = 0\,,$$

которыя того-же вида, какъ и получаемыя при разысканіи minimum'а или maximum'а $\frac{g}{h^2}$ или при разысканіи осей поверхности втораго порядка (35).

Поэтому направленія осей предѣльныхъ движеній найдутся въ этомъ случаѣ, какъ направленія осей этой поверхности, а предѣльныя величины производныхъ μ' — какъ minimum, maximum и minimum-maximum функціи $-\frac{2g}{h^2}$. При томъ движеніе, для котораго $\frac{g}{h^2}$ есть minimum-maximum, всегда будетъ предѣльнымъ для соотвѣтствующаго среднему корню. Движенія-же съ наименьшею и наибольшею величиною $\frac{g}{h^2}$ будутъ соотвѣтственно предѣльными для движеній съ наименьшимъ и наибольшимъ изъ корней μ, когда предѣлъ достигается увеличеніемъ λ, и — для движеній съ наибольшимъ и наименьшимъ изъ нихъ, когда предѣлъ достигается уменьшеніемъ λ.

Въ заключеніе разсмотримъ движенія, для которыхъ $h = 0$ и слѣдовательно $\lambda = \pm\infty$.

Введемъ обозначенія (30) и кромѣ того положимъ:

$$\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=\frac{g}{h}=f.$$

Уравненія (8) обратятся тогда въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}&(B_{11}+k)\,\alpha+B_{12}\beta+B_{13}\gamma=0\,,\\&B_{21}\alpha+(B_{22}+k)\,\beta+B_{23}\gamma=0\,,\\&B_{31}\alpha+B_{32}\beta+(B_{33}+k)\,\gamma=0\,,\end{aligned}\right\}\quad.\;\;.\;\;.\;\;.\;(36)$$

гдѣ

$$B_{11}=A_{11}{}^0\varepsilon^2+2\frac{b_{11}}{c_1}\varepsilon-\frac{1}{c_1},$$

$$B_{23}=A_{23}{}^0\varepsilon^2+\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\varepsilon,$$

и т. д.,

а A_{ij}^0 суть значенія функцій A_{ij} для $\lambda=0$.

Изъ этихъ уравненій, присоединяя къ нимъ слѣдующее

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,,\quad.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(37)$$

найдемъ шесть системъ совокупныхъ значеній α,β,γ, которыя будутъ непрерывными функціями ε, послѣ чего изъ первыхъ трехъ уравненій (6) найдутся ξ, η, ζ въ функціяхъ h и ε. Выражая затѣмъ h въ функціи f и ε, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}&Gc_1\xi=f[\alpha-\varepsilon\,(b_{11}\alpha+b_{12}\beta+b_{13}\gamma)]\,,\\&Gc_2\eta=f[\beta-\varepsilon\,(b_{21}\alpha+b_{22}\beta+b_{23}\gamma)]\,,\\&Gc_3\zeta=f[\gamma-\varepsilon\,(b_{31}\alpha+b_{32}\beta+b_{33}\gamma)]\,,\\&Gh\;\;=f\varepsilon\,,\end{aligned}\right\}\quad.\;\;.\;\;.\;(38)$$

гдѣ

$$G=\mathbf{S}\frac{\alpha^2}{c_1}-\varepsilon\left[\mathbf{S}\frac{b_{11}}{c_1}\alpha^2+\mathbf{S}\left(\frac{b_{23}}{c_2}+\frac{b_{23}}{c_3}\right)\beta\gamma\right].$$

Отсюда видно, что для достаточно малыхъ значеній ε величины ξ, η, ζ и h будутъ непрерывными функціями ε и f, при чемъ для всякаго даннаго f при $\varepsilon=0$ и только при $\varepsilon=0$ будетъ $h=0$.

Поэтому для достаточно малыхъ значеній h разсматриваемыя движенія будутъ измѣняться непрерывно вмѣстѣ съ h и f. Для $h=0$ онѣ сольются съ нѣкоторыми предѣльными движеніями. Если всѣ величины c_1, c_2, c_3 различны, то послѣднія будутъ таковы, что для нихъ двѣ изъ величинъ ξ, η, ζ будутъ равны нулю. Въ противномъ случаѣ для нахожденія этихъ предѣльныхъ движеній можемъ поступить слѣдующимъ образомъ.

Мы знаемъ, что для достаточно малыхъ значеній ε функціи α, β, γ и k разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε. Пусть эти ряды суть:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$k = k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

гдѣ α_i, β_i, γ_i, k_i не зависятъ отъ ε. Внося ихъ въ уравненія (36) и (37) и затѣмъ приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ ε, получимъ уравненія, достаточныя для опредѣленія α_0, β_0, γ_0. Эти послѣднія величины и будутъ предѣльными значеніями α, β, γ. Послѣ этого найдутся и предѣльныя значенія ξ, η, ζ по формуламъ (38).

Кромѣ этихъ предѣльныхъ движеній, въ случаѣ равенства двухъ или всѣхъ трехъ величинъ c_1, c_2, c_3 будетъ существовать безчисленное множество другихъ, соотвѣтствующихъ тому-же f при $h=0$. Всѣ эти движенія будутъ способны къ непрерывному измѣненію вмѣстѣ съ f. Но изъ нихъ только предѣльныя будутъ способны измѣняться непрерывно вмѣстѣ съ h.

Замѣтимъ, что разсматриваемая здѣсь величина f представляетъ взятый съ тѣмъ или другимъ знакомъ наименьшій моментъ импульсовъ, производящихъ движеніе.

8. Предыдущій анализъ приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ относительно устойчивости разсматриваемыхъ движеній:

Изъ трехъ постоянныхъ винтовыхъ движеній, которыми можетъ обладать движущееся въ жидкости твердое тѣло при данной величинѣ λ, когда корни μ уравненія (9) различны, соотвѣтствующее наименьшему корню этого уравненія обращаетъ T въ абсолютный minimum при данныхъ величинахъ h и g или, что все равно, при данныхъ величинахъ h и f, и несомнѣнно устойчиво для всякихъ возмущеній. Движеніе, соотвѣтствующее среднему корню, при нѣкоторомъ условіи также можетъ обращать T въ minimum при данныхъ h и f, хотя только въ относительный, и при этомъ несомнѣнно устойчиво для всякихъ возмущеній, пока не служитъ предѣльнымъ для движеній, обращающихъ T въ этотъ minimum. Наконецъ, когда при равенствѣ наименьшаго корня среднему *каждой величинѣ $\frac{g}{h^2}$, заключающейся между извѣстными предѣлами, соотвѣтствуетъ только два движенія, то каждое изъ нихъ обращаетъ T при тѣхъ-же условіяхъ въ абсолютный minimum и несомнѣнно устойчиво для всякихъ возмущеній.*

Случай, когда при равенствѣ наименьшаго корня среднему одной и той-же величинѣ $\frac{g}{h^2}$ соотвѣтствуетъ безчисленное множество движеній, а также случай равенства всѣхъ трехъ корней остаются сомнительными. Впрочемъ въ послѣднемъ случаѣ движенія, служащія предѣльными для соотвѣтствующихъ наименьшему и наибольшему корню, несомнѣнно устойчивы, если поверхность (35) не есть поверхность вращенія.

Что касается движенія, соотвѣтствующаго наибольшему корню, то для него, какъ мы видѣли, minimum T при данныхъ h и g невозможенъ. Тѣмъ не менѣе увидимъ далѣе, что и это движеніе при извѣстныхъ условіяхъ можетъ быть устойчивымъ.

Для болѣе полнаго рѣшенія вопроса объ устойчивости разсматриваемыхъ движеній обращаемся теперь къ составленію и интегрированію дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

9. Прежде чѣмъ перейти къ занимающему насъ вопросу, считаемъ необходимымъ остановиться на нѣкоторыхъ пунктахъ общей теоріи устойчивости, которые обыкновенно оставляются въ сторонѣ.

Ограничимся случаемъ, когда въ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія время t не входитъ явнымъ образомъ. Кромѣ того, называя черезъ x, y, z и т. д. величины, опредѣляющія движеніе системы и обращающіяся въ нуль для невозмущеннаго движенія, предположимъ, что эти уравненія имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A_1x + A_2y + A_3z + \ldots + f(x, y, z, \ldots), \\
\frac{dy}{dt} &= B_1x + B_2y + B_3z + \ldots + \varphi(x, y, z, \ldots), \\
\frac{dz}{dt} &= C_1x + C_2y + C_3z + \ldots + \psi(x, y, z, \ldots), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (39)$$

гдѣ A_i, B_i, C_i и т. д. суть постоянныя, а f, φ, ψ и т. д. раціональныя *цѣлыя* функціи отъ x, y, z и т. д., не содержащія членовъ нулеваго и перваго измѣреній относительно послѣднихъ.

Такого именно типа будутъ дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія въ разсматриваемомъ вопросѣ.

Когда функціи x, y и т. д., удовлетворяющія уравненіямъ (39), таковы, что при всякихъ достаточно малыхъ начальныхъ значеніяхъ онѣ остаются на сколько угодно малыми для всякаго t, то невозмущенное движенiе устойчиво. Если-же существуетъ хотя одно частное рѣшенiе уравненiй (39), при которомъ начальныя значенiя функцiй x, y и т. д. могутъ быть выбраны на сколько угодно малыми, но которое такого свойства, что для достаточно большихъ значенiй t функцiи x, y и т. д. принимаютъ значенiя, бо́льшiя нѣкотораго даннаго предѣла, какъ-бы малы ни были ихъ начальныя значенiя, то это движенiе неустойчиво.

Интегрируя уравненiя (39) по общему способу послѣдовательныхъ приближенiй, основанному на предположенiи, что начальныя возмущенiя весьма малы, получимъ для x, y, z и т. д. выраженiя подъ видомъ безконечныхъ рядовъ. Покажемъ, что вычисленiя всегда можно вести такимъ образомъ, что ряды эти по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ предѣлахъ будутъ сходящимися.

Пусть $t=0$ есть начальный моментъ времени, и a, b, c и т. д. начальныя значенiя x, y, z и т. д.

Такъ-какъ вторыя части уравненiй (39) суть синектичныя функцiи отъ x, y и т. д. для всякихъ значенiй этихъ перемѣнныхъ, то на основанiи извѣстной теоремы заключаемъ, что функцiи x, y и т. д., удовлетворяющiя этимъ уравненiямъ и обращающiяся въ a, b и т. д. для $t=0$, разложимы въ ряды по цѣлымъ положительнымъ степенямъ t, a, b, c и т. д., которые будутъ абсолютно сходящимися для всякихъ комплексныхъ значенiй t, модули которыхъ не превосходятъ извѣстнаго предѣла. Предѣлъ-же этотъ будетъ зависѣть отъ a, b, c и т. д. такимъ образомъ, что выборомъ достаточно малыхъ значенiй для модулей этихъ величинъ можетъ быть сдѣланъ на сколько угодно большимъ.

Тѣ-же самые ряды мы можемъ получить и по упомянутому способу послѣдовательныхъ приближенiй, при чемъ коэффицiенты при произведенiяхъ различныхъ степеней a, b, c и т. д. получатся непосредственно въ конечномъ видѣ. Для этого полагаемъ

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots, \\ y &= y_1 + y_2 + y_3 + \ldots, \\ z &= z_1 + z_2 + z_3 + \ldots, \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

и разсматриваемъ величины x_n, y_n и т. д. какъ безконечно-малыя n-аго порядка. Тогда для опредѣленiя x_n, y_n и т. д. получимъ систему линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй съ постоянными коэффицiентами, не зависящими отъ значка n, и съ послѣдними членами, которые будутъ функцiями времени, извѣстнымъ образомъ зависящими отъ всѣхъ величинъ x_s, y_s и т. д., для которыхъ $s<n$. При томъ для x_1, y_1 и

т. д. получатся уравненія безъ послѣднихъ членовъ. Изъ этихъ уравненій найдемъ послѣдовательно $x_1, y_1, \ldots, x_2, y_2, \ldots$ и т. д., опредѣляя постоянныя, вводимыя каждымъ интегрированіемъ, по какому-либо закону такъ, чтобы x, y и т. д. обращались въ a, b и т. д. для $t=0$. Проще всего достигнуть этой цѣли такимъ опредѣленіемъ постоянныхъ, при которомъ для $t=0$ x_1, y_1 и т. д. обращаются въ a, b и т. д., а x_s, y_s и т. д. при $s>1$ — въ нуль. При такомъ опредѣленіи постоянныхъ ряды (40) будутъ тожественны съ упомянутыми выше, а слѣдовательно все сказанное относительно послѣднихъ будетъ справедливо и по отношенію къ рядамъ (40).

Хотя послѣдовательное вычисленіе членовъ въ рядахъ (40) и не представляетъ никакихъ серьезныхъ затрудненій, но съ каждымъ новымъ приближеніемъ вычисленія на столько осложняются, что мы не въ состояніи подмѣтить закона, которому слѣдуютъ члены этихъ рядовъ. Мы можемъ опредѣлить только общій характеръ функцій, при помощи которыхъ выражаются эти члены, и въ этомъ отношеніи можемъ сказать слѣдующее:

Каждая изъ величинъ x_n, y_n и т. д. будетъ однородною цѣлою функціей n-ой степени отъ a, b и т. д. Въ то-же время это будетъ цѣлая функція n-ой степени величинъ

$$e^{k_1 t}, \quad e^{k_2 t}, \quad e^{k_3 t} \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

гдѣ k_1, k_2 и т. д. суть корни алгебраическаго уравненія

$$\begin{vmatrix} A_1-k, & A_2, & A_3, \ldots \\ B_1, & B_2-k, & B_3, \ldots \\ C_1, & C_2, & C_3-k, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

степень котораго одинакова съ числомъ уравненій въ системѣ (39). Если корни этого уравненія таковы, что уравненіямъ вида

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots = k_i \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

нельзя удовлетворить цѣлыми положительными или равными нулю числами m_1, m_2 и т. д. иначе, какъ полагая $m_i=1$ и $m_j=0$ для $j \gtrless i$, то коэффиціенты въ упомянутыхъ цѣлыхъ функціяхъ величинъ (41) будутъ постоянными. Въ противномъ случаѣ они будутъ вообще цѣлыми функціями t съ постоянными коэффиціентами. При томъ, если n есть наименьшая не равная нулю величина суммы $m_1+m_2+\ldots$, при которой условію (43) можно удовлетворить сказаннымъ способомъ, то

x_n, y_n и т. д. будутъ первыми членами въ рядахъ (40), въ которые могутъ войти степени t. Такъ, когда уравненіе (42) имѣетъ кратные корни, то уже x_1, y_1 и т. д, могутъ содержать степени t. Когда всѣ корни уравненія (42) простые, но одинъ изъ нихъ равенъ нулю, то x_2, y_2 и т. д. будутъ первыми членами въ рядахъ (40) такого вида. Когда уравненіе (42) содержитъ только четныя степени k, то первыми членами такого вида будутъ вообще x_3, y_3 и т. д. Таково именно будетъ уравненіе (42) въ занимающемъ насъ вопросѣ.

Замѣтимъ, что всегда могутъ быть найдены частныя рѣшенія уравненій (39), содержащія только нѣкоторыя изъ показательныхъ функцій (41). По отношенію къ этимъ частнымъ рѣшеніямъ будетъ справедливо все сказанное относительно общаго интеграла, если только въ условіи (43) положимъ равными нулю тѣ изъ чиселъ m_s, которые служатъ коэффиціентами при корняхъ k_s, не входящихъ въ эти частныя рѣшенія. Между прочимъ можно найти частное рѣшеніе съ одною постоянною произвольною, зависящее только отъ одной изъ этихъ показательныхъ функцій. При томъ, если соотвѣтствующій послѣдней корень k таковъ, что mk при цѣломъ m, большемъ единицы, не можетъ быть корнемъ уравненія (42), то величины x_n, y_n и т. д. для этого частнаго рѣшенія будутъ цѣлыми функціями n-ой степени отъ e^{kt} съ постоянными коэффиціентами.

Если въ рядахъ (40) отбросимъ всѣ члены, слѣдующіе за n-ымъ, то получимъ такъ-называемое n-ое приближеніе, хотя въ дѣйствительности оно можетъ служить для приближеннаго вычисленія функцій x, y и т. д. только при достаточно малыхъ значеніяхъ t. Обыкновенно въ вопросахъ разсматриваемаго рода ограничиваются изслѣдованіемъ перваго приближенія, и по нему судятъ объ устойчивости невозмущеннаго движенія. Поэтому когда между корнями уравненія (42) нѣтъ такихъ, вещественныя части которыхъ положительны, и когда при томъ въ выраженія x_1, y_1 и т. д. показательныя функціи, соотвѣтствующія тѣмъ изъ этихъ корней, вещественныя части которыхъ равны нулю, входятъ съ постоянными коэффиціентами, то невозмущенное движеніе считается устойчивымъ; въ противномъ-же случаѣ—неустойчивымъ.

Конечно движенія устойчивыя или неустойчивыя въ первомъ приближеніи могутъ не быть такими въ дѣйствительности. Такъ напр. въ разсматриваемомъ вопросѣ о постоянныхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости легко убѣдиться, что для предѣльныхъ движеній, соотвѣтствующихъ равенству двухъ корней μ, величины x_1, y_1, и т. д. содержатъ линейныя функціи t, и слѣдовательно эти движенія въ первомъ приближеніи неустойчивы, а между тѣмъ мы знаемъ, что въ дѣйствительности всякія движенія, соотвѣтствующія равенству наименьшаго корня μ среднему, вообще устойчивы.

Тѣмъ не менѣе изслѣдованіе уравненія (42) въ нѣкоторыхъ случаяхъ дѣйствительно рѣшаетъ вопросъ объ устойчивости. Чтобы показать это, разсмотримъ ближе тѣ частныя рѣшенія уравненій (39), въ которыя t входитъ не иначе, какъ при посредствѣ показательныхъ функцій (41).

Пусть между корнями уравненія (42) существуетъ нѣкоторая група корней $k_1, k_2, \ldots$ такихъ, для которыхъ выраженія вида

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots$$

при цѣлыхъ положительныхъ или равныхъ нулю m_i, удовлетворяющихъ условію

$$m_1 + m_2 + \ldots > 1,$$

не могутъ быть корнями уравненія (42), не имѣя этихъ корней также и предѣлами, когда числа m_i безпредѣльно возрастаютъ по какому-либо закону.

Покажемъ, что для уравненій (39) можетъ быть найдено частное рѣшеніе, въ которомъ x, y и т. д. будутъ опредѣлятся безконечными рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ

$$u_1 = \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad u_2 = \alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots,$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ произвольныя постоянныя, и абсолютно сходящимися для всѣхъ значеній $u_1, u_2, \ldots$, модули которыхъ не превосходятъ извѣстнаго предѣла.

Положимъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum L_{m_1, m_2, \ldots}\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots, \\ y &= \sum M_{m_1, m_2, \ldots}\, u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots, \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (44)$$

гдѣ суммы распространены на всѣ цѣлыя положительныя или равныя нулю значенія чиселъ m_1, $m_2, \ldots$, удовлетворяющія условію $m_1 + m_2 + \ldots \geqq 1$.

Внося эти ряды въ уравненія (39) и приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ степеней $u_1, u_2, \ldots$, получимъ уравненія такого свойства, что изъ нихъ опредѣлятся однозначнымъ образомъ всѣ коэффиціенты L, M и т. д., для которыхъ сумма $m_1 + m_2 \ldots$ имѣетъ какую-либо данную величину, по тѣмъ изъ этихъ коэффиціентовъ, для которыхъ эта сумма имѣетъ меньшія величины. А именно, для опредѣленія коэффиціентовъ L, M и т. д., соотвѣтствующихъ какой-либо комбинаціи чиселъ $m_1, m_2, \ldots$, для которой $m_1 + m_2 + \ldots > 1$, получится система линейныхъ уравненій, опредѣлитель которой будетъ равенъ значенію первой части уравненія (42) при $k = m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots$, и слѣд. по сдѣланному допущенію, не будетъ равенъ нулю. Такимъ образомъ опредѣлятся однозначно всѣ коэффиціенты L, M и т. д., если будутъ извѣстны тѣ изъ нихъ, для которыхъ $m_1 + m_2 + \ldots = 1$. Для опредѣленія-же послѣднихъ получатся системы однородныхъ линейныхъ уравненій, опредѣлители которыхъ будутъ равны нулю, а потому изъ нихъ найдутся отношенія между коэффиціентами L, M и т. д. Вообще для этихъ отношеній получатся вполнѣ опредѣленныя величины. Въ частныхъ-же случаяхъ нѣкоторыя изъ нихъ могутъ оставаться произвольными. Во всякомъ случаѣ мы можемъ остановиться на какой-либо опредѣленной системѣ этихъ коэффиціентовъ, удовлетворяющей упомянутымъ уравненіямъ, что и будемъ предполагать далѣе.

Предполагая всѣ коэффиціенты L, M и т. д. для которыхъ $m_1 + m_2 + \ldots = 1$, извѣстными, мы можемъ для опредѣленія всѣхъ остальныхъ поступить слѣдующимъ образомъ.

Пусть $f(k)$ представляетъ первую часть уравненія (42). Тогда изъ уравненій (39) путемъ дифференцированія и исключенія могутъ быть выведены слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{d}{dt}\right) x &= F(x, y, z, \ldots), \\ f\left(\frac{d}{dt}\right) y &= \Phi(x, y, z, \ldots), \\ f\left(\frac{d}{dt}\right) z &= \Psi(x, y, z, \ldots), \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

гдѣ символическія обозначенія первыхъ частей равенствъ не требуютъ дальнѣйшихъ разъясненій, и гдѣ F, Φ и т. д. суть означенія цѣлыхъ функцій отъ x, y и т. д., не заключающихъ членовъ ниже втораго измѣренія относительно послѣднихъ.

Внося ряды (44) въ уравненія (45) и приравнивая между собою коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ степеней $u_1, u_2, \ldots$ въ обѣихъ частяхъ равенствъ, получимъ уравненія слѣдующаго типа:

$$\left.\begin{aligned} f(m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots)\, L_{m_1, m_2, \ldots} &= P, \\ f(m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots)\, M_{m_1, m_2, \ldots} &= Q, \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

гдѣ P, Q и т. д. полиномы, составленные изъ коэффиціентовъ функцій F, Φ и т. д. и изъ коэффиціентовъ L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ менѣе $m_1 + m_2 + \ldots$, *съ положительными коэффиціентами*. Поэтому, путемъ послѣдовательнаго исключенія, изъ уравненій вида (46) найдемъ $L_{m_1, m_2, \ldots}$, $M_{m_1, m_2, \ldots}$ и т. д. подъ видомъ полиномовъ, составленныхъ изъ коэффиціентовъ функцій F, Φ и т. д., изъ коэффиціентовъ L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ равна 1, и изъ величинъ

$$\frac{1}{f(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots)},$$

для которыхъ цѣлыя положительныя или равныя нулю числа $\mu_1, \mu_2, \ldots$ удовлетворяютъ условію:

$$1 < \mu_1 + \mu_2 + \ldots \leqq m_1 + m_2 + \ldots$$

При томъ полиномы эти будутъ съ положительными коэффиціентами.

Изъ этого послѣдняго обстоятельства слѣдуетъ, что мы получимъ высшіе предѣлы для модулей $L_{m_1, m_2, \ldots}$, $M_{m_1, m_2 \ldots}$ и т. д., замѣняя въ этихъ полиномахъ: коэффиціенты, входящіе въ функціи F, Φ и т. д. при одинаковыхъ произведеніяхъ степеней x, y и т. д., наибольшими изъ ихъ числовыхъ значеній, коэффиціенты L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ равна 1, наибольшимъ изъ ихъ модулей, и величины $f(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots)$ низшимъ предѣломъ, менѣе котораго не могутъ дѣлаться модули этихъ величинъ, когда $\mu_1, \mu_2, \ldots$ принимаютъ какія-либо цѣлыя положительныя или равныя нулю значенія, удовлетворяющія условію

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots > 1.$$

Вслѣдствіе сдѣланныхъ предположеній такой низшій предѣлъ, отличный отъ нуля, всегда будетъ существовать.

Послѣ такой замѣны ряды (44) обратятся въ одинъ и тотъ-же нѣкоторый новый рядъ, модули членовъ котораго будутъ болѣе или равны модулямъ соотвѣтственныхъ членовъ рядовъ (44). Поэтому послѣдніе будутъ абсолютно сходящимися для всякихъ значеній $u_1, u_2, \ldots$, для которыхъ этотъ новый рядъ есть абсолютно сходящійся. Условія-же сходимости этого новаго ряда можно вывести изъ слѣдующихъ соображеній.

Пусть $\Theta(x)$ есть функція, въ которую обращается каждая изъ функцій F, Φ и т. д. при указанной замѣнѣ коэффиціентовъ, сопровождаемой замѣною y, z и т. д. черезъ x; l — наибольшій изъ модулей коэффиціентовъ L, M и т. д., для которыхъ сумма значковъ равна 1, и λ — упомянутый низшій предѣлъ для модулей $f(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \ldots)$.

Очевидно, что разсматриваемый новый рядъ представляетъ разложеніе по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $v = l(u_1 + u_2 + \ldots)$ корня алгебраическаго уравненія

$$\lambda(x - v) = \Theta(x),$$

обращающагося въ нуль для $v = 0$, а потому будетъ абсолютно сходящимся, пока этотъ корень есть синектичная функція v. Послѣднее-же очевидно имѣетъ мѣсто для всякихъ достаточно малыхъ значеній модуля v.

И такъ, разсматриваемый рядъ, а слѣдовательно и ряды (44) суть абсолютно сходящіеся для всякихъ значеній $u_1, u_2, \ldots$, модули которыхъ достаточно малы.

Такимъ образомъ для достаточно малыхъ значеній модулей $\alpha_1 e^{k_1 t}$ $\alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots$ находимъ слѣдующее частное рѣшеніе уравненій (39):

$$\left.\begin{array}{c} x = X(\alpha_1 e^{k_1 t},\ \alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots), \\ y = Y(\alpha_1 e^{k_1 t},\ \alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots), \\ \text{и т. д.,} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (47)$$

гдѣ вторыя части суть синектичныя функціи отъ $\alpha_1 e^{k_1 t}$, $\alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots$ для всякихъ достаточно малыхъ значеній ихъ модулей, обращающіяся въ нуль, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$.

При достаточно малыхъ значеніяхъ модулей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ уравненія (47) будутъ имѣть мѣсто и для $t = 0$. Тогда найдемъ изъ нихъ слѣдующія выраженія для начальныхъ значеній функцій x, y и т. д.:

$$a = X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

$$b = Y(\alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

$$\text{и т. д.}$$

При безконечно-малыхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ эти начальныя значенія также будутъ безконечно-малыми.

Мы выходили изъ предположенія, что разсматриваемые корни $k_1, k_2, \ldots$ удовлетворяютъ нѣкоторому условію. Если *всѣ* корни уравненія (42) удовлетворяютъ этому условію, и если всѣ эти корни приняты въ разсчетъ при составленіи уравненій (47), то послѣднія представятъ общій интегралъ уравненій (39). Положимъ, что при этомъ между корнями уравненія (42) нѣтъ такихъ, вещественныя части которыхъ положительны. Тогда модули величинъ $\alpha_1 e^{k_1 t}$, $\alpha_2 e^{k_2 t}, \ldots$ для всякаго положительнаго t будутъ на сколько угодно малыми, если только модули $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ достаточно малы. Поэтому при достаточно малыхъ значеніяхъ модулей α_1, $\alpha_2, \ldots$ или, что все равно, при достаточно малыхъ начальныхъ значеніяхъ функцій x, y и т. д., уравненія (47) опредѣлятъ общій интегралъ уравненій (39) для всякаго положительнаго t, и изъ этого общаго интеграла будетъ слѣдовать, что невозмущенное движеніе устойчиво.

Замѣтимъ однако, что въ разсматриваемомъ случаѣ вещественныя части корней k_1, $k_2, \ldots$ не должны быть равны нулю, и слѣдовательно должны быть всѣ отрицательными. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе того, что коэффиціенты въ уравненіи (42) предполагаются вещественными, это уравненіе можетъ имѣть только четное число мнимыхъ корней, по парно сопряженныхъ. Поэтому если-бы существовалъ корень $k_1 = q\sqrt{-1}$ (гдѣ q вещественная величина), то существовалъ-бы также и корень $k_2 = -q\sqrt{-1}$, а эти два корня, очевидно, не удовлетворяютъ условію, послужившему намъ исходною точкой.

Поэтому когда уравненіе (42) содержитъ только четныя степени k, что и будетъ имѣть мѣсто въ занимающемъ насъ вопросѣ, то предыдущими разсужденіями не можетъ быть доказана устойчивость невозмущеннаго движенія.

Изъ уравненій (47) можно вывести еще другія заключенія, справедливыя для всякаго типа уравненія (42). А именно, можно доказать, что *невозмущенное движеніе несомнѣнно неустойчиво, если въ числѣ корней уравненія (42) есть такіе, вещественныя части которыхъ положительны.*

Допустимъ сначала, что уравненіе (42) имѣетъ вещественные положительные корни. Пусть k наибольшій изъ этихъ корней. Такъ-какъ корень этотъ, будетъ-ли онъ простой или кратный, очевидно, удовлетворяетъ условію, изъ котораго мы исходили, то можетъ быть найдено частное рѣшеніе уравненій (39) съ одною постоянною произвольною α слѣдующаго типа:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(\alpha e^{kt}), \\ y &= Y(\alpha e^{kt}), \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

(гдѣ α и функціи X, Y и т. д. для вещественнаго t можно предполагать вещественными).

Пусть уравненія (48) справедливы, пока

$$\text{Mod}\ \alpha\, e^{kt} \leqq K,$$

и пусть ε означаетъ числовое значеніе α.

При этомъ оказывается, что какъ-бы мало ни было ε, а слѣдовательно и начальныя значенія функцій x, y и т. д., удовлетворяющія условіямъ:

$$a = X(\alpha), \quad b = Y(\alpha) \ \text{ и т. д.,}$$

въ нѣкоторый моментъ времени

$$t = \frac{1}{k} \log \frac{K}{\varepsilon}$$

функціи эти примутъ значенія

$$X(\pm K), \quad Y(\pm K) \quad \text{и т. д.,}$$

не зависящія отъ α и которыя, очевидно, можно предполагать не равными нулю; а это обстоятельство служитъ признакомъ неустойчивости невозмущеннаго движенія.

Совершенно такъ-же докажется неустойчивость и въ случаѣ, когда уравненіе (42) имѣетъ комплексные корни съ положительными вещественными частями. Выбираемъ изъ этихъ корней два сопряженныхъ съ наибольшими вещественными частями. Пусть эти корни суть

$$k_1 = p + q\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad k_2 = p - q\sqrt{-1}.$$

Такъ-какъ они, очевидно, удовлетворяютъ извѣстному условію, то можно найти частное рѣшеніе уравненій (39) съ двумя постоянными α_1 и α_2 слѣдующаго типа:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(\alpha_1 e^{k_1 t}, \alpha_2 e^{k_2 t}), \\ y &= Y(\alpha_1 e^{k_1 t}, \alpha_2 e^{k_2 t}) \\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (49)$$

гдѣ функціи X, Y и т. д. можемъ предполагать вещественными для вещественныхъ t, выбирая для α_1 и α_2 мнимыя сопряженныя значенія.

Пусть ε есть общій модуль постоянныхъ α_1 и α_2, такъ-что можно положить

$$\alpha_1 = \varepsilon e^{\beta\sqrt{-1}}, \quad \alpha_2 = \varepsilon e^{-\beta\sqrt{-1}}.$$

Предполагая, что уравненія (49) справедливы, пока

$$\operatorname{Mod} \alpha_1 e^{k_1 t} \leqq K \quad \text{и} \quad \operatorname{Mod} \alpha_2 e^{k_2 t} \leqq K,$$

назовемъ черезъ τ вещественное значеніе t, удовлетворяющее уравненію

$$\varepsilon e^{pt} = K,$$

и затѣмъ опредѣлимъ β такимъ образомъ, чтобы $q\tau+\beta$ имѣло какую-либо данную величину γ.

Тогда окажется, что какъ-бы ε ни было мало, а слѣдовательно и начальныя значенія функцій x, y и т. д., удовлетворяющія условіямъ

$$a=X(\alpha_1,\ \alpha_2),$$
$$b=Y(\alpha_1,\ \alpha_2)$$

и т. д.,

всегда наступитъ моментъ

$$t=\tau=\frac{1}{p}\log\frac{K}{\varepsilon},$$

когда эти функціи примутъ значенія

$$X\left(Ke^{\gamma\sqrt{-1}},\, Ke^{-\gamma\sqrt{-1}}\right),\quad Y\left(Ke^{\gamma\sqrt{-1}},\, Ke^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)\ \text{ и т. д.},$$

не зависящія отъ ε, и которыя можно предполагать не равными нулю; а этимъ и обнаруживается неустойчивость невозмущеннаго движенія.

Такимъ образомъ для устойчивости необходимо, чтобы корни уравненія (42) не имѣли положительныхъ вещественныхъ частей.

Возвращаемся къ нашей задачѣ.

10. Пусть величины x, y, z, ξ, η, ζ, сохранявшія постоянныя значенія въ невозмущенномъ движеніи, обращаются въ какой-либо моментъ t возмущеннаго движенія въ $x+\delta x$, $y+\delta y$ и т. д. Тогда для опредѣленія функцій δx, δy и т. д. получимъ изъ (4) слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{d\delta x}{dt}=\frac{\partial T}{\partial \zeta}\delta y-\frac{\partial T}{\partial \eta}\delta z+(y+\delta y)\,\delta\frac{\partial T}{\partial \zeta}-(z+\delta z)\,\delta\frac{\partial T}{\partial \eta},$$

. . . .

$$\frac{d\delta \xi}{dt}=\frac{\partial T}{\partial z}\delta y-\frac{\partial T}{\partial y}\delta z+(y+\delta y)\,\delta\frac{\partial T}{\partial z}-(z+\delta z)\,\delta\frac{\partial T}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial T}{\partial \zeta}\delta \eta-\frac{\partial T}{\partial \eta}\delta \zeta+(\eta+\delta\eta)\,\delta\frac{\partial T}{\partial \zeta}-(\zeta+\delta\zeta)\,\delta\frac{\partial T}{\partial \eta},$$

. . . . , гдѣ $\delta\frac{\partial T}{\partial x}$, $\delta\frac{\partial T}{\partial y}$ и т. д. означаютъ результаты подстановки въ $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ и т. д. величинъ δx, δy и т. д. вмѣсто x, y и т. д.

Если внесемъ въ эти уравненія вмѣсто $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ и т. д. ихъ выраженія изъ уравненій (5) и замѣтимъ, что

$$\delta\frac{\partial T}{\partial \xi}-\lambda\delta x=\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\xi},$$

$$\delta\frac{\partial T}{\partial x}-\mu\delta x-\lambda\delta\xi=\frac{\partial\delta T}{\partial\delta x}$$

и т. д.,

гдѣ δT опредѣляется формулой (12), а затѣмъ, ограничиваясь первымъ приближеніемъ, отбросимъ члены второго измѣренія относительно безконечно-малыхъ величинъ δx, δy и т. д., то приведемъ наши уравненія къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\delta x}{dt}=y\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\zeta}-z\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\eta},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{d\delta\xi}{dt}=y\frac{\partial\delta T}{\partial\delta z}-z\frac{\partial\delta T}{\partial\delta y}+\eta\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\zeta}-\zeta\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\eta},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\quad\dots\quad(50)$$

Эти уравненія можно еще нѣсколько упростить преобразованіемъ перемѣнныхъ.

Положимъ

$$\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\xi}=\omega_1,\qquad\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\eta}=\omega_2,\qquad\frac{\partial\delta T}{\partial\delta\zeta}=\omega_3$$

и вмѣсто функцій $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ введемъ функціи ω_1, ω_2, ω_3.

Вслѣдствіе этого выраженіе для $2\delta T$ приведется къ виду:

$$2\delta T=2A+\frac{\omega_1{}^2}{c_1}+\frac{\omega_2{}^2}{c_2}+\frac{\omega_3{}^2}{c_3},$$

гдѣ

$$2A = \mathbf{S}(A_{11}-\mu)(\delta x)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}\delta y \delta z\,.$$

При томъ имѣемъ:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \delta x} = b_{11} - \lambda\,, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \delta x} = b_{21}\,, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \delta x} = b_{31}$$

и т. д.,

вслѣдствіе чего

$$\frac{\partial \delta T}{\partial \delta x} = \frac{\partial A}{\partial \delta x} + (b_{11} - \lambda)\frac{\omega_1}{c_1} + b_{21}\frac{\omega_2}{c_2} + b_{31}\frac{\omega_3}{c_3}$$

и т. д.,

а уравненія (50) принимаютъ видъ:

$$\frac{d\delta x}{dt} = y\omega_3 - z\omega_2$$

и т. д.,

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = y\frac{\partial A}{\partial \delta z} - z\frac{\partial A}{\partial \delta y} + \left(\frac{b_{13}}{c_1}y - \frac{b_{12}}{c_1}z\right)\omega_1 +$$

$$+ \left(\frac{b_{23}}{c_2}y - \frac{b_{22}-\lambda}{c_2}z - \zeta\right)\omega_2 - \left(\frac{b_{32}}{c_3}z - \frac{b_{33}-\lambda}{c_3}y - \eta\right)\omega_3$$

и т. д.

Но съ другой стороны

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{b_{11}-\lambda}{c_1}\frac{d\delta x}{dt} - \frac{b_{12}}{c_1}\frac{d\delta y}{dt} - \frac{b_{13}}{c_1}\frac{d\delta z}{dt} =$$

$$= \frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt} + \left(\frac{b_{13}}{c_1}y - \frac{b_{12}}{c_1}z\right)\omega_1 - \left(\frac{b_{13}}{c_1}x - \frac{b_{11}-\lambda}{c_1}z\right)\omega_2 +$$

$$+ \left(\frac{b_{12}}{c_1}x - \frac{b_{11}-\lambda}{c_1}y\right)\omega_3\,,$$

такъ-что будемъ имѣть:

$$\frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt}=y\frac{\partial A}{\partial \delta z}-z\frac{\partial A}{\partial \delta y}+\left(\frac{b_{13}}{c_1}x+\frac{b_{23}}{c_2}y-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}z-\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}z-\zeta\right)\omega_2-$$

$$-\left(\frac{b_{12}}{c_1}x+\frac{b_{32}}{c_3}z-\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}y-\frac{b_{33}-\lambda}{c_3}y-\eta\right)\omega_3$$

и т. д.

Внося сюда вмѣсто ξ, η, ζ ихъ выраженія, слѣдующія изъ первыхъ трехъ уравненій (6), вводя затѣмъ прежнія обозначенія (15) и полагая кромѣ того

$$\sigma=\frac{b_{11}-\lambda}{c_1}+\frac{b_{22}-\lambda}{c_2}+\frac{b_{33}-\lambda}{c_3},$$

получимъ окончательно слѣдующія преобразованія уравненій (50):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\delta x}{dt}&=y\omega_3-z\omega_2,\\ \frac{d\delta y}{dt}&=z\omega_1-x\omega_3,\\ \frac{d\delta z}{dt}&=x\omega_2-y\omega_1,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(51)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{c_1}\frac{d\omega_1}{dt}&=y\frac{\partial A}{\partial \delta z}-z\frac{\partial A}{\partial \delta y}+(Z-\sigma z)\omega_2-(Y-\sigma y)\omega_3,\\ \frac{1}{c_2}\frac{d\omega_2}{dt}&=z\frac{\partial A}{\partial \delta x}-x\frac{\partial A}{\partial \delta z}+(X-\sigma x)\omega_3-(Z-\sigma z)\omega_1,\\ \frac{1}{c_3}\frac{d\omega_3}{dt}&=x\frac{\partial A}{\partial \delta y}-y\frac{\partial A}{\partial \delta x}+(Y-\sigma y)\omega_1-(X-\sigma x)\omega_2.\end{aligned}\right\}\quad.\ (52)$$

Эти уравненія, очевидно, всегда будутъ допускать частное рѣшеніе, въ которомъ δx, δy, δz, ω_1, ω_2, ω_3 имѣютъ постоянныя значенія, зависящія отъ *двухъ* постоянныхъ произвольныхъ, ибо таковы значенія этихъ величинъ, опредѣляющія переходъ отъ одного постояннаго винтоваго движенія къ другому такому-же. Вслѣдствіе этого детерминантное уравненіе (42), которое въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ 6-ой степени, должно имѣть два равныхъ нулю корня, и если остальные корни этого уравненія не равны нулю, то въ общемъ интегралѣ уравненій (51) и (52) не будетъ членовъ вида at^m, гдѣ a постоянная и m отличное отъ нуля цѣлое число.

Для составленія уравненія (42), ищемъ частное рѣшеніе уравненій (51) и (52) слѣдующаго типа:

$$\delta x = \alpha_1 e^{kt}, \qquad \delta y = \alpha_2 e^{kt}, \qquad \delta z = \alpha_3 e^{kt},$$
$$\omega_1 = \beta_1 e^{kt}, \qquad \omega_2 = \beta_2 e^{kt}, \qquad \omega_3 = \beta_3 e^{kt},$$

гдѣ α и β постоянныя.

При этомъ уравненія (51) даютъ:

$$k\alpha_1 = y\beta_3 - z\beta_2, \quad k\alpha_2 = z\beta_1 - x\beta_3, \quad k\alpha_3 = x\beta_2 - y\beta_1. \quad . \tag{53}$$

Если-же замѣтимъ, что въ результатѣ подстановки въ функціи

$$y\frac{\partial A}{\partial \delta z} - z\frac{\partial A}{\partial \delta y}, \quad z\frac{\partial A}{\partial \delta x} - x\frac{\partial A}{\partial \delta z}, \quad x\frac{\partial A}{\partial \delta y} - y\frac{\partial A}{\partial \delta x}$$

вмѣсто δx, δy, δz величинъ $y\beta_3 - z\beta_2$, $z\beta_1 - x\beta_3$, $x\beta_2 - y\beta_1$ получаются выраженія:

$$-\frac{\partial B}{\partial \beta_1}, \qquad -\frac{\partial B}{\partial \beta_2}, \qquad -\frac{\partial B}{\partial \beta_3},$$

гдѣ

$$B = \mathbf{S}(A_{11} - \mu)(y\beta_3 - z\beta_2)^2 + 2\mathbf{S}A_{23}(z\beta_1 - x\beta_3)(x\beta_2 - y\beta_1),$$

или полагая

$$B_{11} = (A_{22} - \mu)z^2 + (A_{33} - \mu)y^2 - 2A_{23}yz,$$
$$B_{23} = A_{12}xz + A_{13}xy - A_{23}x^2 - (A_{11} - \mu)yz,$$
и т. д.,

$$B = \mathbf{S}B_{11}\beta_1{}^2 + 2\mathbf{S}B_{23}\beta_2\beta_3,$$

то изъ уравненій (52) послѣ исключенія α_1, α_2, α_3 при помощи (53) найдемъ:

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_1} + \frac{k^2}{c_1}\beta_1 + (Y - \sigma y)k\beta_3 - (Z - \sigma z)k\beta_2 = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial \beta_2} + \frac{k^2}{c_2}\beta_2 + (Z - \sigma z)k\beta_1 - (X - \sigma x)k\beta_3 = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial \beta_3} + \frac{k^2}{c_3}\beta_3 + (X - \sigma x)k\beta_2 - (Y - \sigma y)k\beta_1 = 0.$$

Исключая отсюда β_1, β_2, β_3, и получаемъ искомое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} B_{11}+\frac{k^2}{c_1}, & B_{12}-(Z-\sigma z)k, & B_{13}+(Y-\sigma y)k \\ B_{21}+(Z-\sigma z)k, & B_{22}+\frac{k^2}{c_2}, & B_{23}-(X-\sigma x)k \\ B_{31}-(Y-\sigma y)k, & B_{32}+(X-\sigma x)k, & B_{33}+\frac{k^2}{c_3} \end{vmatrix}=0\ . \quad (54)$$

Что это уравненіе дѣйствительно имѣетъ два равныхъ нулю корня, видно изъ того, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} B_{11}, & B_{12}, & B_{13} \\ B_{21}, & B_{22}, & B_{23} \\ B_{31}, & B_{32}, & B_{33} \end{vmatrix}$$

необходимо равенъ нулю. Въ послѣднемъ-же убѣждаемся, замѣчая, что по самому опредѣленію функціи B уравненіямъ

$$\frac{\partial B}{\partial \beta_1}=0\,, \quad \frac{\partial B}{\partial \beta_2}=0\,, \quad \frac{\partial B}{\partial \beta_3}=0$$

можно удовлетворить вообще не равными нулю одновременно величинами:

$$\beta_1=\beta x\,, \quad \beta_2=\beta y\,, \quad \beta_3=\beta z\,.$$

По сокращеніи на k^2 уравненіе (54) приводится къ виду:

$$\frac{k^4}{c_1c_2c_3}+Qk^2+R=0\,, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (55)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} Q&=\mathbf{S}\frac{1}{c_2c_3}B_{11}+\mathbf{S}\frac{1}{c_1}(X-\sigma x)^2\,, \\ R&=\mathbf{S}\frac{1}{c_1}(B_{22}B_{33}-B_{23}{}^2)+\mathbf{S}B_{11}(X-\sigma x)^2+2\mathbf{S}B_{23}(Y-\sigma y)(Z-\sigma z)\,. \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Внося вмѣсто величинъ B_{ij} ихъ выраженія, найдемъ, что коэффиціентъ R есть та самая величина, которую мы уже разсматривали въ предыдущихъ параграфахъ, и которая опредѣляется формулой (20), а для коэффиціента Q получимъ слѣдующее выраженіе:

$$Q = \mathbf{S}\frac{1}{c_1}(X-\sigma x)^2 + H\mathbf{S}\frac{A_{11}-\mu}{c_1} - \mathbf{S}(A_{11}-\mu)\frac{x^2}{c_1{}^2} - 2\mathbf{S}A_{23}\frac{y}{c_2}\frac{z}{c_3},$$

гдѣ H по прежнему означаетъ

$$\frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} + \frac{z^2}{c_3}.$$

Это выраженіе можемъ еще нѣсколько преобразовать, замѣчая, что изъ уравненій (8) слѣдуетъ:

$$\mathbf{S}(A_{11}-\mu)\frac{x^2}{c_1{}^2} + \mathbf{S}A_{23}\left(\frac{1}{c_2{}^2}+\frac{1}{c_3{}^2}\right)yz = 0.$$

Вслѣдствіе этого находимъ:

$$Q = \mathbf{S}\frac{1}{c_1}(X-\sigma x)^2 + H\mathbf{S}\frac{A_{11}-\mu}{c_1} + \mathbf{S}A_{23}\left(\frac{1}{c_2}-\frac{1}{c_3}\right)^2 yz. \quad . \ (57)$$

11. Изъ предыдущаго мы знаемъ, что необходимое условіе устойчивости состоитъ въ томъ, чтобы уравненіе (55) не имѣло корней съ положительными вещественными частями; а для этого обѣ величины k^2, удовлетворяющія ему, должны быть вещественными, и при томъ ни одна изъ нихъ не должна быть положительною. Это обстоятельство выразится тремя слѣдующими условіями:

$$Q^2 - \frac{4}{c_1c_2c_3}R \geqq 0, \quad Q \geqq 0, \quad R \geqq 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ (58)$$

которыя, если угодно, можно замѣнить двумя

$$R \geqq 0, \quad Q \geqq 2\sqrt{\frac{R}{c_1c_2c_3}},$$

предполагая радикалъ положительнымъ.

Эти необходимыя условія дѣлаются достаточными по крайней мѣрѣ для устойчивости въ первомъ приближеніи, если въ нихъ отбросить знаки равенства.

Мы знаемъ, что движенія, соотвѣтствующія наименьшему корню μ, всегда устойчивы, и что движенія, соотвѣтствующія среднему корню, устойчивы, когда $R > 0$. Поэтому для наименьшаго корня условія (58) всегда должны удовлетворяться, а для средняго они должны приводиться къ одному: $R \geqq 0$.

Къ тому-же заключенію легко придти и изъ разсмотрѣнія выраженій (56) для Q и R. Для этого достаточно замѣтить, что величины

$$B_{22}B_{33} - B_{23}{}^2 \quad \text{и т. д.},$$

положительны въ случаѣ наименьшаго и наибольшаго корня μ и отрицательны въ случаѣ средняго, а величины B_{11}, B_{22}, B_{33} положительны въ случаѣ наименьшаго и отрицательны въ случаѣ наибольшаго корня, и что квадратичная функція

$$\mathbf{S} B_{11} x_1{}^2 + 2\mathbf{S} B_{23} x_2 x_3$$

всегда заключается между предѣлами

$$\tau_1\left(\frac{x_1{}^2}{c_1} + \frac{x_2{}^2}{c_2} + \frac{x_3{}^2}{c_3}\right) \quad \text{и} \quad \tau_2\left(\frac{x_1{}^2}{c_1} + \frac{x_2{}^2}{c_2} + \frac{x_3{}^2}{c_3}\right)$$

гдѣ τ_1 наименьшій, а τ_2 наибольшій изъ корней уравненія

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \dfrac{\tau}{c_1}, & B_{12}\ , & B_{13} \\ B_{21}\ , & B_{22} - \dfrac{\tau}{c_2}, & B_{23} \\ B_{31}\ , & B_{32}\ , & B_{33} - \dfrac{\tau}{c_3} \end{vmatrix} = 0.$$

При этомъ окажется, что въ случаѣ средняго корня μ первое изъ условій (58) всегда удовлетворено, а второе есть слѣдствіе третьяго.

Что касается возможности удовлетворить условіямъ (58), то въ этомъ отношеніи уже былъ разсмотрѣнъ случай средняго корня (пар. 5). Теперь остается разсмотрѣть случай наибольшаго корня, и мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ условіямъ (58) всегда можно удовлетворить выборомъ достаточно большихъ значеній λ^2. Для этого разсмотримъ предѣльный случай $\lambda^2 = \infty$.

Положимъ по прежнему $\lim \dfrac{\mu}{\lambda^2} = -k$, такъ-что k есть одна изъ трехъ величинъ $\dfrac{1}{c_1}, \dfrac{1}{c_2}, \dfrac{1}{c_3}$.

При этомъ изъ формулы (20) найдемъ:

$$\lim R = 4\mathbf{S}\left(k-\frac{1}{c_1}\right)(c_3-c_2)^2\eta^2\zeta^2+\mathbf{S}c_1\xi^2\mathbf{S}c_1{}^2\xi^2\mathbf{S}\left(k-\frac{1}{c_2}\right)\left(k-\frac{1}{c_3}\right),$$

а изъ формулы (57)

$$\lim Q = \mathbf{S}c_1\xi^2\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}-\frac{1}{c_1}\right)^2+\mathbf{S}c_1\xi^2\mathbf{S}\frac{1}{c_1}\left(k-\frac{1}{c_1}\right).$$

Пусть $k=\dfrac{1}{c_1}$.

Если c_1 не равно ни c_2, ни c_3, то непремѣнно $\eta=\zeta=0$, и слѣдовательно

$$\lim R = c_1{}^3\xi^4\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right),$$

$$\lim Q = c_1\xi^2\left[\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)+\frac{1}{c_2c_3}\right].$$

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ изъ условій (58) первое всегда будетъ удовлетворено, второе удовлетворится въ силу третьяго, а третье — только при условіи, что c_1 есть наибольшая или наименьшая изъ трехъ величинъ c_1, c_2, c_3. При томъ два послѣднихъ условія удовлетворятся со знакомъ неравенства. Что-же касается перваго, то оно можетъ обратиться въ равенство только при $\dfrac{1}{c_1}=\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_3}$. Поэтому если c_1 есть наибольшая изъ величинъ c, т. е. если разсматриваемое движеніе есть предѣльное для соотвѣтствующаго наибольшему корню μ, то всѣ условія (58) въ предѣлѣ удовлетворятся со знакомъ неравенства, а потому удовлетворятся также и для конечныхъ достаточно большихъ значеній λ^2.

Если c_1 равно одной или обѣимъ изъ величинъ c_2 и c_3, то $\lim R=0$ Тѣмъ не менѣе и въ этомъ случаѣ для наибольшаго корня μ послѣднее изъ условій (58) будетъ удовлетворено при конечныхъ достаточно большихъ значеніяхъ λ^2, какъ это слѣдуетъ изъ соображеній, приведенныхъ въ параграфѣ 7. Точно также удовлетворятся при этомъ и первыя два изъ условій (58), ибо въ случаѣ $c_1=c_2>c_3$ непремѣнно $\zeta=0$, и слѣдовательно

$$\lim Q = \frac{\xi^2+\eta^2}{c_3},$$

а въ случаѣ $c_1 = c_2 = c_3$

$$\lim Q = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c_3}.$$

Такимъ образомъ для достаточно большихъ значеній λ^2 движенія, соотвѣтствующія наибольшему корню, устойчивы по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи. Напротивъ, движенія, соотвѣтствующія среднему корню, для достаточно большихъ λ^2 неустойчивы, ибо для нихъ, какъ мы знаемъ, $R < 0$ (пар. 7).

Когда для λ возможны значенія, при которыхъ два корня μ дѣлаются равными, то такимъ значеніямъ λ, какъ мы знаемъ, соотвѣтствуютъ непрерывные ряды безчисленнаго множества постоянныхъ движеній. При томъ мы знаемъ, что всѣ движенія такого ряда, когда онъ получается при равенствѣ наименьшаго корня среднему, вообще устойчивы. Теперь можемъ показать, что когда такой рядъ обусловливается равенствомъ наибольшаго корня среднему, то принадлежащія ему движенія вообще неустойчивы.

Въ самомъ дѣлѣ, въ параграфѣ 6-мъ было замѣчено, что для движеній, соотвѣтствующихъ двукратному корню μ, если $A_{11} - \mu$ есть та изъ трехъ величинъ $A_{11} - \mu$, $A_{22} - \mu$, $A_{33} - \mu$, которая не равна нулю, R обращается въ слѣдующее выраженіе

$$\frac{1}{A_{11} - \mu}\Big[(A_{11} - \mu)(yZ - zY) + A_{12}(zX - xZ) + A_{13}(xY - yX)\Big]^2,$$

а послѣднее, когда μ наибольшій корень, отрицательно, ибо при этомъ $A_{11} - \mu < 0$. При томъ обращаться въ нуль оно можетъ вообще только для предѣльныхъ движеній.

Въ заключеніе обратимъ вниманіе на частный случай, когда всѣ коэффиціенты b_{ij} равны нулю. Въ этомъ случаѣ движенія, соотвѣтствующія наибольшему и среднему корню, для достаточно малыхъ значеній λ^2 неустойчивы.

Въ самомъ дѣлѣ, когда всѣ b_{ij} равны нулю, то

$$X - \sigma x = \lambda\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)x,$$

$$Y - \sigma y = \lambda\left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)y,$$

$$Z - \sigma z = \lambda\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3}\right)z,$$

а потому для $\lambda = 0$ формулы (56) даютъ:

$$Q = \mathbf{S}\frac{1}{c_2 c_3} B_{11}, \qquad R = \mathbf{S}\frac{1}{c_1}(B_{22}B_{33} - B_{23}{}^2).$$

Отсюда видно, что въ разсматриваемомъ случаѣ для средняго корня $R < 0$, а для наибольшаго $Q < 0$.

Такимъ образомъ въ случаѣ равенства нулю всѣхъ коэффиціентовъ b' изъ трехъ поступательныхъ движеній, вообще возможныхъ для тѣла, устойчиво только одно, соотвѣтствующее наименьшему корню μ, и слѣдовательно то, которое совершается по направленію наибольшей оси эллипсоида

$$\mathbf{S}a_{11}x^2 + 2\mathbf{S}a_{23}yz = \text{Const.},$$

представляющаго поверхность (10) для разсматриваемаго случая.

Случай тѣла, имѣющаго три взаимно перпендикулярныя плоскости симметріи, есть частный случай разсматриваемаго и получается изъ него при $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$.

Составимъ условія (58) для этого послѣдняго случая.

Такъ-какъ въ этомъ случаѣ $A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$, то мы можемъ положить $\mu_1 = A_{11}$, $\mu_2 = A_{22}$, $\mu_3 = A_{33}$. Поэтому разсматривая движеніе $\mu = \mu_1$, найдемъ

$$R = \frac{x^4}{c_1}(A_{22} - A_{11})(A_{33} - A_{11}),$$

$$Q = \frac{x^2}{c_1}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)^2 \lambda^2 + \frac{x^2}{c_1}\left(\frac{A_{22} - A_{11}}{c_2} + \frac{A_{33} - A_{11}}{c_3}\right),$$

гдѣ

$$A_{11} = a_{11} - \frac{\lambda^2}{c_1}, \quad A_{22} = a_{22} - \frac{\lambda^2}{c_2}, \quad A_{33} = a_{33} - \frac{\lambda^2}{c_3}.$$

Вслѣдствіе этого первыя два изъ условій (58) приводятся къ виду:

$$\frac{1}{c_1{}^2}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)^2 \lambda^4 + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{c_2} - \frac{a_{33} - a_{11}}{c_1}\right)^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)\left[\left(\frac{2}{c_3} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{a_{22} - a_{11}}{c_2} + \left(\frac{2}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)\frac{a_{33} - a_{11}}{c_3}\right]\lambda^2 \geqq 0, \quad (59)$$

$$\left[\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)+\frac{1}{c_2c_3}\right]\lambda^2+\frac{a_{22}-a_{11}}{c_2}+\frac{a_{33}-a_{11}}{c_3}\geqq 0. \quad . \quad (60)$$

Въ случаѣ наибольшаго корня третье изъ условій (58) всегда удовлетворено. Но для того, чтобы разсматриваемое движеніе, для котораго $\mu=A_{11}$, соотвѣтствовало наибольшему корню, λ должно удовлетворять еще слѣдующимъ условіямъ:

$$\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}\right)\lambda^2+a_{22}-a_{11}<0,$$

$$\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)\lambda^2+a_{33}-a_{11}<0.$$

Если $a_{11}>a_{22}>a_{33}$ и $c_1>c_2>c_3$, то послѣднія условія удовлетворяются при всякомъ λ. При этомъ корни квадратнаго относительно λ^2 уравненія, которое получается изъ условія (59), если въ немъ отбросить знакъ неравенства, вещественны и положительны, а величина λ^2, обращающая въ нуль первую часть условія (60), заключается между корнями этого уравненія. Поэтому условіямъ (59) и (60) удовлетворимъ, выбирая для λ^2 величины, превосходящія бóльшій корень упомянутаго квадратнаго уравненія. Этотъ корень въ разсматриваемомъ случаѣ и будетъ низшимъ предѣломъ для величинъ λ^2, при которыхъ возможна устойчивость движенія съ наибольшимъ корнемъ μ.

Въ другихъ возможныхъ случаяхъ μ_1 не будетъ оставаться наибольшимъ корнемъ для всякаго λ, а потому при разысканіи предѣловъ для тѣхъ величинъ λ^2, которымъ могутъ соотвѣтствовать устойчивыя движенія съ наибольшимъ корнемъ, кромѣ условій (59) и (60), придется разсматривать также подобныя имъ условія, относящіяся къ корнямъ μ_2 и μ_3.

Что касается движеній, соотвѣтствующихъ среднему корню, то для тѣлъ съ тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметріи эти движенія всегда неустойчивы.