Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Настоящая статья посвящается слѣдующему вопросу:

„*Пусть функція y связана съ перемѣнною x алгебраическимъ уравненіемъ; требуется выразить интегралъ $\int ydx$ черезъ алгебраическую функцію отъ x или доказать, что значеніе предложеннаго интеграла не можетъ быть представлено алгебраическою функціею*".

Этотъ вопросъ въ первый разъ вполнѣ рѣшилъ *Ліувиль* (Journal de l'Ecole polytechnique, XXII cahier; Journal de mathématiques, t. III). Онъ основывался въ своемъ рѣшеніи на слѣдующей теоремѣ *Абеля:* если интегралъ $\int ydx$ выражается алгебраически, то величина его можетъ быть представлена функціею, составленною раціонально изъ x и y.

Вопросомъ объ алгебраическомъ интегрированіи занимались еще и другіе математики. Я укажу на *Briot et Bouquet* (Théorie des fonctions elliptiques), гг. *Zeuthen* (Comptes rendus, 1880), *Raffy* (Annales de l'Ecole Normale, 1883, 1885), *Humbert* (Acta mathematica, 1887).

Не входя въ подробное разсмотрѣніе предложенныхъ до настоящаго времени рѣшеній занимающаго насъ вопроса, я замѣчу только, что всѣ они сводятъ вопросъ на отысканіе нѣсколькихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Въ настоящей статьѣ я желаю указать на одну теорему, которая позволяетъ рѣшить вопросъ инымъ путемъ. Эта же теорема даетъ возможность рѣшить вопросъ и съ помощью способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, на основаніи новыхъ соображеній.

2. Теорема. *Пусть P есть цѣлая функція отъ x; z — функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами*

$$z^n + \varphi_1(x)\, z^{n-1} + \varphi_2(x)\, z^{n-2} + \ldots = 0\,;$$

z_1, z_2, … z_n *всѣ значенія, принимаемыя функціею* z *для каждаго значенія* x. *Пусть* Δ *есть дискриминантъ уравненія съ* z *и*

$$\Delta = D^2 . E,$$

гдѣ D, E *суть цѣлые полиномы относительно* x, *причемъ полиномъ* E *не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.*

Если интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

гдѣ Y, X_0, X_1, … X_{n-1} *суть цѣлыя функціи отъ* x, *опредѣленныя слѣдующимъ образомъ:*

1⁰ Полиномъ Y *равенъ произведенію изъ полинома* D *на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ*

$$P, \quad \frac{dP}{dx}.$$

2⁰ Полиномы X_0, X_1, … X_{n-1} *удовлетворяютъ равенствамъ:*

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1\,, & z_1\,, & z_1^{\,2}, \ldots z_1^{\,i-1}, & \displaystyle\int \frac{z_1}{P}\, dx\,, & z_1^{\,i+1}, \ldots z_1^{\,n-1} \\ 1\,, & z_2\,, & z_2^{\,2}, \ldots z_2^{\,i-1}, & \displaystyle\int \frac{z_2}{P}\, dx\,, & z_2^{\,i+1}, \ldots z_2^{\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\,, & z_n\,, & z_n^{\,2}, \ldots z_n^{\,i-1}, & \displaystyle\int \frac{z_n}{P}\, dx\,, & z_n^{\,i+1}, \ldots z_n^{\,n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

3. Доказательство первой части нашей теоремы основывается главнымъ образомъ на одномъ предложенiи, къ выводу котораго мы предварительно и обратимся.

Возьмемъ n выраженiй

$$X_0+X_1z_1+X_2z_1^2+\ldots+X_{n-1}z_1^{n-1},$$

$$X_0+X_1z_2+X_2z_2^2+\ldots+X_{n-1}z_2^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_0+X_1z_n+X_2z_n^2+\ldots+X_{n-1}z_n^{n-1},$$

въ которыхъ $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$ означаютъ цѣлыя функцiи отъ x; z_1 $z_2, \ldots z_n$ — значенiя функцiи z, опредѣленной въ предыдущемъ n^0.

Пусть $x-a$ представляетъ двучленъ, не дѣлящiй всѣхъ полиномовъ $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$, и содержащiйся во всѣхъ n нашихъ выраженiяхъ съ показателями больше нуля [1]). Пусть α есть наименьшiй изъ этихъ показателей.

Займемся разсмотрѣнiемъ двучлена $x-a$ и показателя α.

Мы сказали, что не всѣ полиномы $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$ дѣлятся на $x-a$; положимъ X_k есть полиномъ взаимно простой съ $x-a$. Называя разсматриваемыя нами выраженiя соотвѣтственно черезъ

$$\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_n,$$

мы имѣемъ равенство

$$X_k=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \ldots z_1^{k-1}, \mathfrak{Z}_1, z_1^{k+1}, \ldots z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \ldots z_2^{k-1}, \mathfrak{Z}_2, z_2^{k+1}, \ldots z_2^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, z_n, z_n^2, \ldots z_n^{k-1}, \mathfrak{Z}_n, z_n^{k+1}, \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

въ которомъ Δ есть цѣлая функцiя отъ x, равная дискриминанту уравненiя съ z. Легко видѣть, что опредѣлитель, входящiй въ полученное равенство, содержитъ $x-a$ съ показателемъ не меньше α.

Отсюда, въ силу вышепредположеннаго относительно X_k, сейчасъ получаемъ предложенiе, которое имѣли въ виду вывести: двучленъ

[1]) Мы будемъ говорить, что функцiя содержитъ множитель $(x-a)$ съ показателемъ μ, если въ разложенiи функцiи, по восходящимъ степенямъ двучлена $x-a$, первый членъ содержитъ $(x-a)^{\mu}$. Число μ можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ.

$x-a$ дѣлитъ дискриминантъ $\triangle$ и притомъ показатель α не превосходитъ показателя, съ которымъ $x-a$ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\triangle}$.

4. Основываясь на выведенномъ нами предложенiи, не трудно теперь убѣдиться въ справедливости первой части нашей теоремы ($n^0 2$).

Пусть

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

есть интегралъ, выражающiйся алгебраически.

На основанiи теоремы Абеля, цитированной въ $n^0 1$, будемъ имѣть равенство

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

въ которомъ Y, X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ означаютъ цѣлыя функцiи отъ x, которыя, очевидно, можемъ предполагать взаимно простыми. Замѣтимъ, что это равенство, какъ показалъ Абель, остается справедливымъ, если на мѣсто z подставить какое угодно изъ n значенiй: z_1, $z_2, \ldots z_n$.

Предложимъ себѣ теперь изслѣдовать, какiе простые множители могутъ входить въ полиномъ Y, и въ какихъ степеняхъ.

Назовемъ черезъ $x-a$ одинъ изъ простыхъ множителей полинома Y и черезъ

$$\delta, \alpha, p$$

показатели, съ которыми двучленъ $x-a$ содержится соотвѣтственно въ функцiяхъ

$$Y, \quad X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}, \quad P.$$

Между этими показателями, какъ легко убѣдиться, существуетъ весьма простая зависимость.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая вышенаписанное равенство, мы видимъ, что производная первой части содержитъ $x-a$ съ показателемъ не меньше $-p$, производная второй части содержитъ этотъ множитель, если только δ не равно α, съ показателемъ равнымъ $\alpha-\delta-1$; такъ что, если δ не равно α, то навѣрное

$$-p \leqq \alpha - \delta - 1.$$

Слѣдовательно, δ — показатель множителя $(x-a)$ у полинома Y опредѣляется одною изъ формулъ

$$\delta=\alpha\,,\qquad \delta\leqq\alpha+p-1\,.$$

Предположимъ теперь, и это по вышезамѣченному всегда возможно, что въ нашемъ равенствѣ z означаетъ то изъ n значенiй $z_1, z_2, \ldots z_n$, при которомъ показатель α имѣетъ наименьшую величину. Если, при этомъ предположенiи, число α не равно нулю, то (n^03) навѣрно $x-a$ будетъ дѣлителемъ дискриминанта $\triangle$ и само α не будетъ превосходить показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\triangle}$.

Въ силу этого изъ полученныхъ нами формулъ для δ сейчасъ можемъ заключить, что всѣ простые множители полинома Y найдутся между простыми множителями полиномовъ

$$P, \triangle\,.$$

Затѣмъ, изъ тѣхъ же формулъ для δ легко опредѣлить показатели, съ которыми простые множители полиномовъ P, $\triangle$ войдутъ въ полиномъ Y.

Разсмотримъ сначала двучленъ $x-a$, недѣлящiй полинома P. Изъ нашихъ формулъ, полагая $p=0$, заключаемъ, что показатель δ, съ которымъ $x-a$ входитъ въ полиномъ Y, не превзойдетъ числа α, а потому не превзойдетъ и показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\triangle}$. Но у насъ $\sqrt{\triangle}=D\sqrt{E}$, гдѣ радикалъ $\sqrt{E}$ не имѣетъ рацiональныхъ множителей; число же δ, очевидно, должно быть цѣлымъ. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ $(x-a)^\delta$ будетъ дѣлить полиномъ D.

Возьмемъ, во вторыхъ, двучленъ $x-a$, дѣлящiй полиномъ P. Изъ формулъ для δ заключаемъ, что показатель δ у множителя $(x-a)$ въ полиномѣ Y не больше числа $\alpha+p-1$. Здѣсь p означаетъ кратность множителя $(x-a)$ въ полиномѣ P, а потому $p-1$ есть кратность того же множителя у общаго наибольшаго дѣлителя полинома P и производной $\frac{dP}{dx}$; число α не больше показателя, съ которымъ $x-a$ входитъ въ радикалъ $\sqrt{\triangle}=D\sqrt{E}$. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ $(x-a)^\delta$ будетъ дѣлить произведенiе изъ полинома D на общiй наибольшiй дѣлитель полиномовъ $P, \frac{dP}{dx}$.

И такъ, первая часть теоремы доказана.

5. Изъ равенства предыдущаго n^0 получаемъ n уравненiй:

$$\int \frac{z_1}{P}\,dx = \frac{X_0 + X_1 z_1 + X_2 z_1{}^2 + \ldots + X_{n-1} z_1{}^{n-1}}{Y},$$

$$\int \frac{z_2}{P}\,dx = \frac{X_0 + X_1 z_2 + X_2 z_2{}^2 + \ldots + X_{n-1} z_1{}^{n-1}}{Y},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int \frac{z_n}{P}\,dx = \frac{X_0 + X_1 z_n + X_2 z_n{}^2 + \ldots + X_{n-1} z_n{}^{n-1}}{Y}.$$

Рѣшая эти уравненія относительно $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$, получаемъ формулы, составляющія вторую часть доказываемой теоремы.

6. Изъ теоремы $n^0 2$ непосредственно вытекаетъ слѣдующій способъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала ydx.

Приводимъ функцію y къ виду

$$\frac{z}{P}$$

и дискриминантъ уравненія съ z къ виду

$$\triangle = D^2 . E.$$

Составляемъ произведеніе изъ полинома D на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P, $\dfrac{dP}{dx}$; это произведеніе даетъ намъ полиномъ Y.

Затѣмъ, разлагаемъ въ ряды, по нисходящимъ степенямъ x, n выраженій

$$\frac{Y}{\sqrt{\triangle}} \begin{vmatrix} 1,\ z_1,\ z_1{}^2, \ldots z_1{}^{i-1}, & \displaystyle\int \frac{z_1}{P}\,dx, & z_1{}^{i+1}, \ldots z_1{}^{n-1} \\ 1,\ z_2,\ z_2{}^2, \ldots z_2{}^{i-1}, & \displaystyle\int \frac{z_2}{P}\,dx, & z_2{}^{i+1}, \ldots z_2{}^{n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 1,\ z_n,\ z_n{}^2, \ldots z_n{}^{i-1}, & \displaystyle\int \frac{z_n}{P}\,dx, & z_n{}^{i+1}, \ldots z_n{}^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1),$$

въ которыхъ $z_1, z_2, \ldots z_n$ означаютъ всѣ корни уравненія съ z и

$$\sqrt{\Delta}=\begin{vmatrix} 1\,, & z_1\,, & z_1^{\,2}, & \dots z_1^{\,n-1} \\ 1\,, & z_2\,, & z_2^{\,2}, & \dots z_2^{\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1\,, & z_n\,, & z_n^{\,2}, & \dots z_n^{\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Цѣлыя части разложенiй дадутъ соотвѣтственно полиномы

$$X_0\,,\ X_1\,,\dots X_{n-1}\,.$$

Коэффицiенты этихъ полиномовъ будутъ содержать, вообще, линейнымъ образомъ n неизвѣстныхъ постоянныхъ $c_1\,,\ c_2\,,\dots c_n$; c_i есть постоянная произвольная интеграла $\int\frac{z_i}{P}\,dx$.

Одну изъ постоянныхъ можно назначить произвольно; остальныя опредѣляемъ изъ условiя, что равенство

$$\frac{d}{dx}\left[\int\frac{z}{P}\,dx-\frac{X_0+X_1z+X_2z^2+\ldots+X_{n-1}z^{n-1}}{Y}\right]=0$$

должно обращаться въ тожество.

Когда постоянныя $c_1\,,\ c_2\,,\dots c_n$ будутъ опредѣлены, тогда функцiя

$$\frac{X_0+X_1z+X_2z^2+\ldots+X_{n-1}z^{n-1}}{Y}$$

представитъ величину предложеннаго интеграла

$$\int\frac{z}{P}\,dx\,.$$

Если же постоянныя $c_1\,,\dots c_n$, не могутъ быть опредѣлены согласно нашему условiю, тогда заключимъ, что предложенный интегралъ не выражается алгебраически.

Замѣчанiе. Иногда невозможность алгебраическаго интегрированiя можемъ обнаружить, не доводя до конца нашихъ дѣйствiй. Мы заключимъ, что интегралъ $\int\frac{z}{P}\,dx$ не выражается алгебраически: 1^0 если разложенiе одной изъ функцiй $\frac{z_i}{P}$ будетъ содержать членъ съ x^{-1} (такъ какъ тогда разложенie интеграла $\int \frac{z_i}{P} dx$ будетъ содержать членъ съ $\log x$ и, слѣдовательно, этотъ интегралъ не равняется алгебраической функцiи); 2^0 если въ разложенiи выраженiя, которое должно дать одинъ изъ полиномовъ X_i, члены съ дробными положительными степенями x не могутъ быть уничтожены ни при какомъ выборѣ постоянныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ [1]).

7. Вторая часть теоремы $n^0 2$ позволяетъ опредѣлить полиномы X^0 $X_1, \ldots X_{n-1}$ еще слѣдующимъ образомъ.

Пользуясь формулами второй части теоремы, вычисляемъ высшiе предѣлы степеней полиномовъ $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$; затѣмъ опредѣляемъ коэффицiенты этихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффицiентовъ изъ условiя, чтобы равенство предыдущаго n^0 обратилось въ тожество.

Замѣчанiе. Легко убѣдиться, что, слѣдуя этому второму пути при отысканiи полиномовъ X_i, для рѣшенiя вопроса объ алгебраическомъ интегрированiи дифференцiала ydx придется выполнять только ариѳметическiя дѣйствiя.

8. Примѣнимъ наши правила къ тремъ примѣрамъ; два первые заимствованы у Брiо и Буке.

Примѣръ I. Разсмотримъ интегралъ

$$\int z dx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненiю

$$z^3 - 3z + 2x = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненiя есть

$$\Delta = 108 - 108x^2,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Находимъ

$$Y = 1.$$

[1]) Способъ, данный въ этомъ n^0, былъ уже мною предложенъ для одного частнаго случая въ Прибавленiи къ разсужденiю *„Объ интегрированiи въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференцiаловъ“* (Спб., 1881).

Переходимъ къ опредѣленію полиномовъ X_0, X_1, X_2. Для этого отыщемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ, по нисходящимъ степенямъ x, трехъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \int z_1dx, & z_1, & z_1^2 \\ \int z_2dx, & z_2, & z_2^2 \\ \int z_3dx, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & \int z_1dx, & z_1^2 \\ 1, & \int z_2dx, & z_2^2 \\ 1, & \int z_3dx, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & \int z_1dx \\ 1, & z_2, & \int z_2dx \\ 1, & z_3, & \int z_3dx \end{vmatrix}.$$

Съ помощью уравненія съ z находимъ

$$z_1 = \alpha_1 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_1} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_1 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$z_2 = \alpha_2 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_2} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_2 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$z_3 = \alpha_3 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_3} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_3 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots;$$

гдѣ α_1, α_2, α_3 суть значенія корня $\sqrt[3]{-2}$; величина коэффиціентовъ β_1, β_2, β_3 намъ не нужна; отсюда сейчасъ получимъ

$$z_1^2 = \alpha_1^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_1^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_1\beta_1 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots,$$

$$z_2^2 = \alpha_2^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_2^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_2\beta_2 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots,$$

$$z_3^2 = \alpha_3^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_3^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_3\beta_3 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots;$$

и

$$\int z_1 dx = \frac{3\alpha_1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_1} x^{\frac{2}{3}} + c_1 - \frac{3\beta_1}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

$$\int z_2 dx = \frac{3\alpha_2}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_2} x^{\frac{2}{3}} + c_2 - \frac{3\beta_2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

$$\int z_3 dx = \frac{3\alpha_3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_3} x^{\frac{2}{3}} + c_3 - \frac{3\beta_3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 постоянныя интегрированія. Еще находимъ

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}=\frac{1}{\sqrt{-108}}\left(x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-3}+\ldots\right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0=\text{пост.},\quad X_1=\frac{3}{4}x,\quad X_2=-\frac{3}{8}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int zdx=\frac{3}{4}xz-\frac{3}{8}z^2.$$

Взявъ производную обѣихъ частей этого равенства, убѣждаемся, что оно дѣйствительно представляетъ величину предложеннаго интеграла.

Примѣръ II. Разсмотримъ интегралъ

$$\int zdx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3-3xz+x^3=0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\Delta=-27x^6+108x^3,$$

такъ что

$$D=x.$$

Находимъ

$$Y=x.$$

Переходимъ теперь къ отысканію полиномовъ X_0, X_1, X_2, пользуясь правиломъ $n^0 7$. Для этого ищемъ сначала высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ, или, что одно и тоже, выраженій

$$\frac{x}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix}\int z_1dx, & z_1, & z_1^2\\ \int z_2dx, & z_2, & z_2^2\\ \int z_3dx, & z_3, & z_3^2\end{vmatrix}, \quad \frac{x}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix}1, & \int z_1dx, & z_1^2\\ 1, & \int z_2dx, & z_2^2\\ 1, & \int z_3dx, & z_3^2\end{vmatrix}, \quad \frac{x}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix}1, & z_1, & \int z_1dx\\ 1, & z_2, & \int z_2dx\\ 1, & z_3, & \int z_3dx\end{vmatrix}.$$

Изъ уравненія съ z видимъ, что z_1, z_2, z_3 суть первой степени; отсюда заключаемъ, что z_1^2, z_2^2, z_3^2 и $\int z_1dx$, $\int z_2dx$, $\int z_3dx$ суть степени второй; замѣтимъ еще что $\frac{x}{\sqrt{\triangle}}$ есть (-2)-ой степени.

Слѣдовательно, высшіе предѣлы степеней выписанныхъ выраженій представятся соотвѣтственно числами

$$3, 2, 1.$$

Приступаемъ къ опредѣленію коэффиціентовъ полиномовъ X_0, X_1, X_2. Равенство

$$\frac{d}{dx}\left[\int zdx - \frac{X_0 + X_1z + X_2z^2}{x}\right] = 0,$$

послѣ подстановки въ немъ на мѣсто производной $\frac{dz}{dx}$ ея значенія, выраженнаго чрезъ x и z, послѣ уничтоженія дробей и исключенія степеней z выше второй, представитъ соотношеніе между x и z, второй степени относительно z. Изъ него сейчасъ заключаемъ уравненія

$$x\frac{dX_0}{dx} - X_0 + x^3\frac{dX_1}{dx} - x^4 = 0,$$

$$2x\frac{dX_1}{dx} - X_1 - x^3\frac{dX_2}{dx} - x^2X_2 - 2x^2 = 0,$$

$$x\frac{dX_0}{dx} - X_0 + 2x^2\frac{dX_2}{dx} = 0,$$

которымъ должны удовлетворять искомые полиномы. Зная высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ можемъ, по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, опредѣлить и коэффиценты этихъ полиномовъ. Не безполезно еще замѣтить, что, если полиномъ X_1 не выше второй степени, то, какъ непосредственно видно изъ полученныхъ дифференціальныхъ уравненій, полиномъ X_2 будетъ не выше нулевой степени, полиномъ X_0 не выше первой степени.

Такимъ образомъ, отысканіе полиномовъ X_0, X_1, X_2 не представитъ никакой трудности; мы находимъ

$$X_0 = bx\,,\quad X_1 = \frac{1}{2}x^2\,,\quad X_2 = -\frac{1}{2}\,,$$

гдѣ b произвольная постоянная.

И такъ, значеніе предложеннаго интеграла опредѣляется формулою

$$\int z dx = \frac{\frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{2}z^2}{x}\,.$$

Примѣръ III. Разсмотримъ интегралъ

$$\int \frac{z}{x}\,dx\,,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^2 - 2x^3 z + x^6 - x^4 - 1 = 0\,.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\triangle = 4x^4 + 4\,,$$

такъ что

$$D = 1\,.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ примѣрѣ

$$P = x\,,$$

то находимъ

$$Y = 1\,.$$

Переходимъ къ отысканію полиномовъ X_0, X_1. Ищемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix} \int \frac{z_1}{x}\,dx\,, & z_1 \\ \int \frac{z_2}{x}\,dx\,, & z_2 \end{vmatrix}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix} 1\,, & \int \frac{z_1}{x}\,dx \\ 1\,, & \int \frac{z_2}{x}\,dx \end{vmatrix}\,.$$

Изъ уравненія съ z получимъ

$$z_1 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-6} + \dots,$$

$$z_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{8}x^{-6} + \dots;$$

отсюда находимъ

$$\int \frac{z_1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 - \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1}{48}x^{-6} + \dots,$$

$$\int \frac{z_2}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_2 + \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1}{48}x^{-6} + \dots,$$

гдѣ c_1, c_2, постоянныя интегрированія; еще замѣтимъ, что

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{-1}{2}\left(x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-6} + \dots\right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad X_1 = \frac{1}{2}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{x}\,dx - \left(\frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{1}{2}z\right) = 0$$

Но постоянныя c_1, c_2, не могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы производная первой части послѣдняго равенства тождественно обращалась въ нуль. Слѣдовательно, нашъ интегралъ не выражается алгебраически.